КВАНТ
ЖУРНАЛ

1992

1 - 12

НОМЕР
1

Квант
1 1992

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал*

*Учредители —
Президиум
Российской академии наук,
Президиум
Академии педагогических наук
и коллектив редакции
журнала «Квант»*

*Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы*

В номере:

2 К нашим читателям
3 *И. Коренблит, Е. Шендер.* Беспорядок в магнитном мире
10 *И. Яглом.* Две игры со спичками
16 *Т. Барабаш.* Почему дрожит осиновый лист?

Задачник «Кванта»

19 Задачи М1321 — М1325, Ф1328 — Ф1332
21 Решения задач М1291 — М1295, Ф1308 — Ф1312

«Квант» для младших школьников

27 Задачи
28 *С. Тихомирова.* «Если в поле далеко раздается голос...»
31 Конкурс «Математика 6—8»

Новости науки

32 Чудеса миниатюризации

Школа в «Кванте»
Физика 9—11:

33 Конус трения
35 Первый источник электрического тока
37 Дифракция волн
39 Избранные школьные задачи по физике
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Математический кружок

42 *В. Прасолов.* Точки Брокара
45 **Нам пишут**

Р — значит ракета

46 *В. Бурдаков.* Золотой дирижабль

Олимпиады

49 Первая математическая олимпиада Мексики

Из дальних странствий

50 Гуд бай, Америка?..

Информация

53 Всесоюзная заочная многопредметная школа
56 Малый мехмат

Игры и головоломки

57 Пирамида

Фантастика

58 ***Г. Килер.*** Доллар Джона Джонса
64 **Варианты вступительных экзаменов 1991 г.**
72 **Ответы, указания, решения**
«Квант» улыбается *(71)*
Реклама *(9, 44, 55, 63)*

Наша обложка

1 *«Каникулы на Луне» — картина американского художника М. Меркури. Может, когда-нибудь так и будет. Пока же... (см. с. 50).*

2 *Эскиз русского художника А. Бенуа для оперы-балета «Соловей». Что находится в шкатулке? Прочитайте статью И. Яглома — и узнаете.*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Новая головоломка на основе старого, как мир, лабиринта.*

© «Квант», 1992

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Наступил 1992 год. Все стремительнее преобразуется окружающий нас мир. Рушатся старые представления, уходят вчерашние кумиры, сменяются ценности. Непреходящим капиталом остаются знания. Точные науки занимают здесь особое место. Помочь вам в овладении их основами — задача нашего журнала.

Что же ждет вас в «Кванте»?

Рассказы об истории и достижениях науки, о проблемах, над которыми работают физики и математики, о современных открытиях, интервью с крупными учеными, их размышления о науке и о путях ее развития. Эти материалы помещаются на первых страницах журнала.

Наш «Задачник» — это раздел, который ведется из номера в номер. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Ежегодно мы проводим конкурс на лучшее решение этих задач. Победители получают право участвовать в республиканских турах физико-математической олимпиады школьников.

Материалы, разъясняющие наиболее трудные вопросы школьного курса, помещаются в разделе «Школа в «Кванте».

Те, кто собирается поступать в вузы, смогут воспользоваться материалами в рубриках «Практикум абитуриента» и «Варианты вступительных экзаменов».

В разделе «Квант» для младших школьников» публикуются занимательные задачи, требующие не столько конкретных знаний, сколько умения мыслить логически. Статьи этого раздела, мы надеемся, доступны и интересны всем школьникам. Здесь же вы найдете задачи конкурса «Математика 6—8» — конкурса для школьников средних классов.

Любителей физических опытов мы адресуем к материалам рубрики «Лаборатория «Кванта». Они не только научат вас ставить эксперименты, но и помогут развить наблюдательность.

Название раздела «Математический кружок» говорит само за себя. Материалы в нем — для любителей заглянуть в школьный курс глубже.

Тем, кто мечтает о звездах, предназначена рубрика «Р — значит ракета». В этой рубрике — статьи по теории космических полетов, о развитии и проблемах космонавтики.

Что еще? «Калейдоскоп», «Игры и головоломки», «Шахматная страничка», «Олимпиады», «Вузы мира», «Фантастика»... Всего и не перечислишь... Каждый год мы вводим что-то новое в содержание и оформление журнала, хотя и стараемся сохранить в нем главное — его научность и доступность.

Только предупреждаем: «Квант» — журнал особый. Читать его лучше всего с ручкой или карандашом в руках.

Итак, с Новым годом! Желаем вам успехов и ждем ваших писем!

БЕСПОРЯДОК В МАГНИТНОМ МИРЕ

Доктор физико-математических наук
И. КОРЕНБЛИТ,
доктор физико-математических наук
Е. ШЕНДЕР

Если бы еще лет пятнадцать назад спросить специалистов в любой области науки и техники, есть ли какая-либо связь между магнитными свойствами нержавеющей стали, с одной стороны, и оптимальным расположением блоков в компьютере, составлением наилучшего маршрута для путешественника, работой мозга при распознавании образов...— с другой, то специалисты очень удивились бы и ответили отрицательно. Действительно, что же может быть общего между такими, казалось бы, совершенно разными вещами? Конечно, ни компьютер, ни экипаж для путешествия без стали не сделаешь, но ведь не в этом же дело!

Оказывается, несмотря на все внешнее различие, решение проблем, о которых мы упомянули, основано на одних и тех же идеях и принципах. Поэтому физические явления, происходящие в нержавеющей стали и похожих материалах, моделируют и способ распределения блоков в компьютерах, и составление маршрута для путешественника.

Когда физики начали исследовать эти явления, они и не подозревали об их связи с таким широким кругом проблем. Интересным казалось то, что в большом количестве твердых тел самого разного состава магнитные явления по непонятным причинам протекают совсем не «по правилам», т. е. не так, как следовало ожидать, исходя из всего предыдущего опыта и накопленных знаний. О каких «правилах» идет речь?

Постоянные магниты есть в любой школьной лаборатории. Вещества, из которых они сделаны, называют ферромагнетиками, потому что первым магнитом, с которым познакомилось человечество, было железо (лат. ferrum). Атомы этих веществ представляют из себя элементарные магнитики. Про такие атомы говорят, что они обладают магнитным моментом. Одновременно они обладают и механическим вращательным моментом —

спином. Спин атома можно представить схематично в виде стрелочки. Его происхождение связано со свойствами электронов и структурой электронной оболочки атомов.

Мы не будем сейчас обсуждать вопрос, почему атомы одних веществ имеют спин, а других — нет. Речь пойдет только о веществах, у атомов которых спин есть. Магнитные свойства таких веществ определяются взаимной ориентацией спинов разных атомов, которая зависит от взаимодействия между спинами. Спины стремятся ориентироваться так, чтобы потенциальная энергия, связанная с их взаимодействием, была минимальной. В некоторых веществах взаимодействие ориентирует спины параллельно (это взаимодействие мы будем называть положительным), в других веществах — антипараллельно (такое взаимодействие — отрицательным). В то же время магнитные стрелки испытывают беспорядочные тепловые колебания подобно тому, как колеблются атомы в твердых телах или беспорядочно движутся атомы в газах. Тепловые колебания мешают ориентации спинов, поэтому при высоких температурах, когда эти колебания сильные, спины не имеют определенной ориентации.

Для каждого магнитного вещества есть своя температура (ее называют температурой Кюри), ниже которой устанавливается вполне определенная взаимная ориентация спинов. Если взаимодействие положительно, то спины ориентируются параллельно. В результате сложения магнитных моментов атомов все вещество в целом приобретает магнитный момент (рис. 1, *а*). Такие вещества и называют ферромагнетиками. Если взаимодействие спинов отрицательно, то в простейших случаях возникает шахматный порядок в ориентации спинов (рис. 1, *б*). Такие вещества не обладают магнитным моментом и называются антиферромагнетиками.

До недавнего времени исследовались, в основном, магнитные кристаллы, т. е. вещества, в которых магнитные атомы образуют регулярные периодические структуры. Они, например, могут занимать места в вершинах периодически повторяющихся кубов или в вершинах и центрах граней кубов.

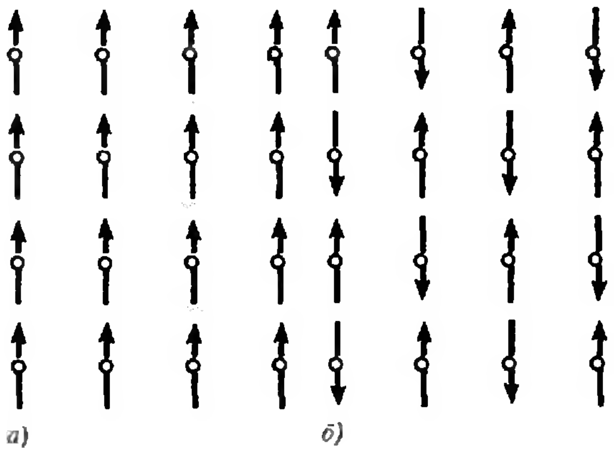


Рис. 1. Ориентация спинов: а) в кристаллическом ферромагнетике, б) в антиферромагнетике. Кружки изображают атомы, стрелки — спины.

В реально существующих магнитных кристаллах спиновые структуры бывают гораздо сложнее, чем изображенные на рисунке 1. Например, магнитные моменты разных атомов могут не быть направленными вдоль одной прямой, а меняться регулярным образом от атома к атому. Существование таких структур связано с тем, что энергии взаимодействия различных групп спинов — например, спинов, расположенных вдоль ребра куба и вдоль пространственной диагонали,— имеют разную величину и знак. Однако, за исключением некоторых очень специальных случаев, всегда существует одна спиновая конфигурация, соответствующая минимуму потенциальной энергии всей системы. Как бы ни была сложна эта спиновая конфигурация, в кристалле всегда можно выделить сравнительно небольшую группу спинов — которая называется элементарной магнитной ячейкой — и, перенося ее параллельно самой себе, получить всю магнитную структуру кристалла. Выделение элементарной ячейки аналогично тому, как для построения графика периодической функции $y = \cos x$ достаточно построить ее в интервале

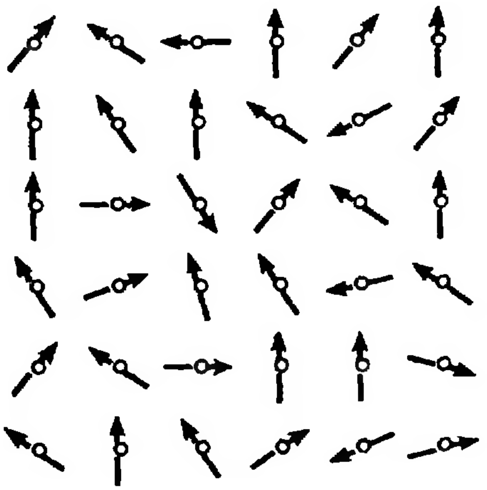


Рис. 2. Хаотичная ориентация спинов в спиновом стекле.

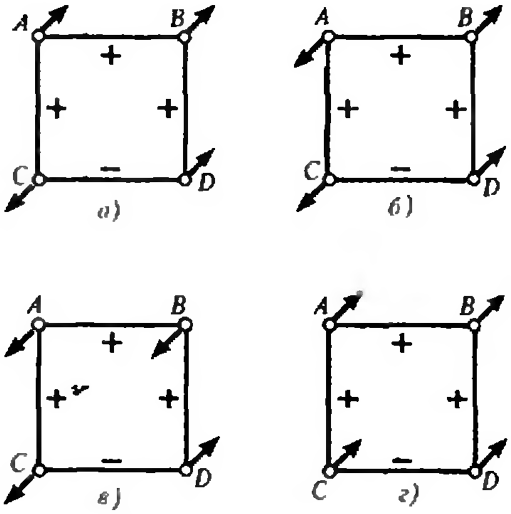


Рис. 3. Возможные направления спинов четырех атомов, расположенных по углам квадрата. Знаки энергий взаимодействия указаны на сторонах квадрата.

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, а затем параллельно переносить построенный на этом интервале график.

Ну а какая спиновая конфигурация возникнет, если магнитные атомы не образуют правильной кристаллической решетки? Такой вопрос возник в связи с развитием техники. Появились новые, широко используемые в технике материалы, так называемые металлические стекла, в которых все атомы, включая магнитные, расположены в беспорядке, как атомы в обычном стекле. (О металлических стеклах уже рассказывалось в «Кванте» № 11 за 1986 г.) Да и во многих давно известных сплавах (нержавеющая сталь, нихром и т. д.) атомы разных элементов хоть и занимают узлы кристаллической решетки, но распределены по этим узлам случайным образом, так что периодической структуры не образуют.

Случайное распределение атомов приводит к тому, что величина и знак энергии взаимодействия спинов также случайны. Хаотичными оказываются и ориентации спинов, соответствующие минимуму суммарной потенциальной энергии взаимодействия спинов (рис. 2). По этой причине такие вещества называют спиновыми стеклами. Вследствие хаотической ориентации спинов суммарный магнитный момент в спиновом стекле равен нулю. Хаотическая ориентация спинов возникает ниже некоторой температуры, характерной для каждого вещества, аналогично тому, как возникает магнитный момент в ферромагнетике.

Очень важное отличие спиновых стекол от магнитных кристаллов заключается в том, что в них имеется очень много наборов ориентаций спинов, соответствующих одной и той же минимальной полной энергии. Мы поясним это на примере четверки спинов, изображенной на рисунке 3. Будем считать, что взаимодействуют только спины, расположенные в ближайших вершинах квадрата, причем все четыре энергии взаимодействия одинаковы по абсолютной величине, но три из них положительны, а одна — между спинами в вершинах C и D — отрицательна. Кроме того, мы для наглядности будем рассматривать наиболее простые спиновые конфигурации, когда все магнитные моменты направлены вдоль какой-то оси. Тогда сразу видно, что невозможно ориентировать спины так, чтобы в каждой паре взаимная ориентация спинов соответствовала взаимодействию между ними. Например, если спины C и D, в соответствии с их энергией взаимодействия, антипараллельны, то в одной из других пар спинов взаимная ориентация тоже должна быть антипараллельной, хотя взаимодействие в этой паре положительно (см.

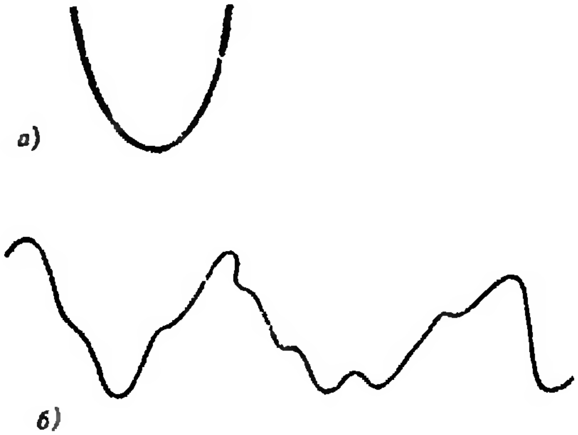


Рис. 4. Рельеф потенциальной энергии: а) в упорядоченных магнетиках, б) в спиновом стекле.

рис. 3, *а—в*). Если же во всех парах с положительной энергией спины параллельны, то параллельными оказываются отрицательно взаимодействующие спины *C* и *D* (см. рис. 3, *г*).

Таким образом, для одной из пар — или, как говорят, на одной из связей — ориентация спинов не соответствует минимуму парной энергии, хотя суммарная энергия всей четверки является минимально возможной. Такую связь называют фрустрированной (от английского слова frustration — разочарование). Все четыре рисунка, соответствующие разным положениям фрустрированной связи и поэтому разным наборам ориентаций спинов, дают одну и ту же суммарную энергию. Подчеркнем еще раз, что если все четыре энергии одного знака, то минимуму полной энергии соответствует только одна спиновая конфигурация из изображенных на рисунке 1.

Полушутя-полусерьезно задачу о нахождении равновесного состояния спиновых стекол можно уподобить задаче формирования по возможности дружного коллектива из претендентов, у которых непростые отношения друг с другом: кого ни выбирай, всегда в коллективе будут не симпатизирующие друг другу люди.

Наборы ориентаций спинов, дающие разные равновесные состояния спиновых стекол, сильно различаются между собой. Если перевести систему из одного такого состояния в другое, то надо переориентировать много спинов. Изменяя направления спинов, мы неизбежно проходим через состояния, энергия которых много больше равновесной. Процесс перехода из одного равновесного состояния в другое напоминает движение шарика из одной ямы в другую через гору (рис. 4). Для перехода между любыми равновесными состояниями в спиновых стеклах требуется преодолеть очень высокие энергетические «горы» (их обычно называют барьерами, а равновесные состояния — долинами).

Большое число равновесных состояний с одинаковой или почти одинаковой энергией — основное отличие спиновых стекол от магнитных кристаллов, и оно ярко проявляется уже в очень простых опытах. Поместим вещество со свойствами спинового стекла во внешнее магнитное поле, которое может быть создано внутри соленоида с током или между полюсами постоянного магнита. Как вы знаете из школьного курса физики, магнитное поле ориентирует магнитные моменты. Спины поворачиваются, в их хаотической ориентации возникает преимущественное направление, и, значит, вещество приобретает магнитный момент.

В антиферромагнетиках величина этого момента зависит только от величины магнитной индукции и от температуры вещества, но не зависит от предыстории образца. Мы, например, можем сначала охладить антиферромагнетик до нужной нам температуры T_0 и потом включить поле, а можем включить поле при более высокой температуре и потом охладить до T_0 — магнитный момент в обоих случаях будет один и тот же. В спиновых стеклах два эти способа «приготовления» образца дают разные результаты. При охлаждении в поле магнитный момент всегда больше, чем если охлаждать без поля. Спиновое стекло «помнит», что с ним было до момента измерения.

При включении поля магнитные моменты атомов не сразу следуют за полем, они имеют своеобразную инерцию, связанную с тем, что магнитный момент испытывает нечто похожее на трение об атомы и электроны проводимости. Время, за которое устанавливается ориентация спина вдоль поля, зависит от вещества, но в обычных магнетиках оно очень мало́ — сравнимо с миллиардной долей секунды или даже меньше. В спиновых стеклах дело обстоит совершенно иначе, хотя «трение» спина об атомы и электроны проводимости такое же, как в обычных магнетиках. Измерения проводились в течение часов или даже суток, и все равно процесс ориентации спинов вдоль магнитного поля продолжался. Более того, и без магнитного поля спиновое стекло все время меняется, причем его внутренняя жизнь не затухает даже через очень большие времена — порядка дней (может быть, лет? или еще больше? мы пока не имеем данных о «времени жизни» спинового стекла).

Свидетельством такой внутренней жизни являются эффекты старения. Охладим спиновое стекло без поля, подождем некоторое время и будем наблюдать за процессом ориентации спинов. Оказывается, что этот процесс существенно зависит от времени ожидания, т. е. от «возраста» спинового стекла. Старение спинового стекла — эффект очень тонкий. Он сказывается на так называемых динамических явлениях, в которых физические величины меняются во времени, например на только что рассмотренном процессе ориентации спинов в поле. Но на статических явлениях, в которых время роли не играет, эффект старения не сказывается. Например, если включить поле при высокой температуре, а потом медленно охладить образец, то магнитный момент не зависит от времени, прошедшего после охлаждения. Если же теперь поле выключить, то процесс уменьшения момента от этого времени зависит.

Необычные свойства спиновых стекол могут быть объяснены с помощью энергетических гор и долин — магнитная система, предоставленная самой себе, медленно переползает из долины в долину, аналогично тому, как движется шарик в рельефе, изображенном на рисунке 4, *б*, под влиянием слабых случайных толчков. Толчки слабые, и одного толчка мало, чтобы перепрыгнуть через гору. Направления толчков случайны, так что чаще всего они друг друга компенсируют и бо́льшую часть времени шарик находится в какой-то одной яме. Но если терпеливо ждать, то в конце концов может произойти такое маловероятное событие, что толчки в течение длительного времени будут направлены в одну сторону и шарик перепрыгнет в другую яму. Роль толчков для спинов играют тепловые колебания атомов или взаимодействие с электронами проводимости, если спиновое стекло является металлом. Такие междолинные переходы и объясняют эффекты старения и долговременные динамические явления в спиновых стеклах. В обычных же упорядоченных магнетиках потенциальная энергия взаимодействия имеет только одну яму.

Аналогичным образом можно понять и зависимость момента от предыстории. Равновесное состояние в поле сильно отличается от равновесного состояния без поля. Вот почему после включения поля система не остается в долине, соответствующей минимуму энергии без поля; она медленно переползает в нужную долину, и поэтому магнитный момент оказывается сначала меньше равновесного, но потом медленно возрастает, приближаясь к равновесному значению. Иначе обстоит дело, если поле включено при высоких температурах, когда состояния спинового стекла еще нет, нет долин и гор и спины очень быстро принимают равновесную ориентацию. Если теперь температуру медленно уменьшать, то ориентация спинов всегда соответствует равновесной, и потому магнитный момент максимален.

Оставим теперь на время спиновое стекло и рассмотрим классическую задачу теорем оптимизации — задачу коммивояжера. Коммивояжеру, живущему в пункте O (рис. 5), надо составить самый короткий маршрут для

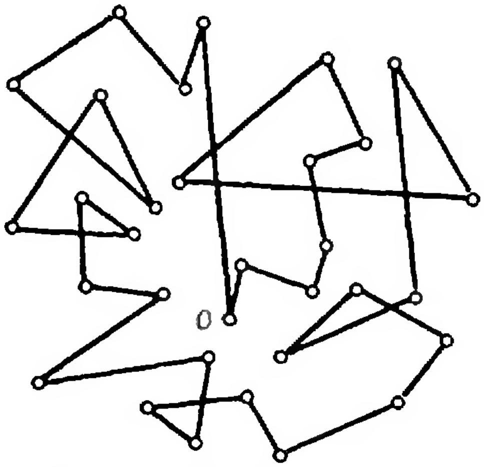


Рис. 5. Возможный маршрут коммивояжера, отправляющегося из города О.

того, чтобы посетить соседние города, изображенные на рисунке точками, и вернуться обратно. Как ни выбирай маршрут, между некоторыми городами придется двигаться не по прямой, а по ломаной, т. е. не оптимальным образом. Где же выгоднее проиграть, а где выиграть, чтобы в целом был все же кратчайший маршрут?

Сразу чувствуется, что эта задача очень похожа на нахождение равновесной ориентации спинов, дающей минимум суммарной потенциальной энергии спинового стекла. Ведь и в спиновом стекле, несмотря на то, что суммарная энергия минимальна, во взаимодействии некоторых пар мы выигрываем, а некоторых — проигрываем. Поэтому если длине маршрута коммивояжера удастся сопоставить энергию взаимодействия спинов в стекле, а конкретному маршруту — конкретный набор ориентаций спинов, то задачи будут эквивалентны.

Задача коммивояжера (как и задача о нахождении равновесного состояния спинового стекла) может быть решена на ЭВМ путем перебора всех маршрутов (всех возможных спиновых ориентаций), если число городов (спинов) мало́. Время, необходимое для такого перебора, катастрофически растет с увеличением числа объектов перебора (городов, спинов); и когда их число достигает сотен, оказываются бесполезными даже самые быстродействующие ЭВМ.

Эквивалентность задачи коммивояжера и спинового стекла открыла другой путь для нахождения оптимальных маршрутов (их много, как и равновесных конфигураций в спиновом стекле). Можно с помощью ЭВМ смоделировать спиновое стекло. Для этого в память ЭВМ записывают набор энергий взаимодействия спинов и выбирают произвольным образом начальную спиновую конфигурацию. Такая конфигурация, конечно, не соответствует минимуму энергии всей системы. В реальной ситуации спины, испытывая случайные толчки со стороны тепловых колебаний атомов, приходят постепенно в равновесное положение, т. е. в одну из долин. Записывая в памяти ЭВМ физические законы, по которым меняют свою ориентацию спины под действием толчков, можно воспроизвести этот процесс на ЭВМ и тем самым найти оптимальную конфигурацию спинов, а значит, и оптимальный маршрут коммивояжера. Оказалось, что такой способ нахождения оптимального маршрута гораздо эффективнее всех способов перебора. Физическая аналогия позволяет лучшим способом решить задачу оптимизации!

Аналогия со спиновым стеклом прослеживается и в другой задаче по оптимизации, имеющей непосредственное отношение к конструированию сложных электронных систем, например компьютеров. Начинка компьютеров состоит из электронных сетей, распределенных по отдельным блокам. Желательно, чтобы число соединительных проводов между блоками было поменьше, так как большая длина проводов увеличивает время прохождения сигнала и, значит, уменьшает быстродействие компьютера. С другой стороны, нельзя все элементы поместить в один блок, так как это приводит к паразитным шумам, искажающим сигнал. Число соединительных проводов различно для различных элементов. Задача состоит в том, чтобы разместить элементы по блокам оптимальным образом, так, чтобы число их в каждом блоке было примерно одинаково, а количество проводов, пересекающих границы блоков,— минимально. Если сопоставить положению конкретного элемента в том или ином блоке ориентацию одного из спинов, то сразу станет ясной аналогия этой задачи оптимизации с проблемой определения устойчивой конфигурации спинов в спиновом стекле.

Мы уже говорили, что спиновое стекло обладает своего рода памятью. Если его намагнитить, а потом выключить поле, то система переходит в ближайшую долину, т. е. в ту из них, в которой ориентации спинов наиболее похожи на ориентации спинов в намагниченном состоянии (также ведет себя шарик, который поднят на склон одной из гор, а затем отпущен). Это и значит, что спиновое стекло запомнило ту ориентацию спинов, которая была в магнитном поле.

Конкретный набор ориентаций спинов, соответствующий какой-либо долине, можно рассматривать как образ, который система запомнила. Тогда переход из начального состояния в долину естественно рассматривать как отождествление образа, поданного на вход системы, с образом, хранящимся в памяти. При этом образ, поданный на вход системы, будет отождествляться с тем из образов, хранящихся в памяти системы, который мало отличается от входного. Это означает, что если долины соответствуют, например, образам разных зверей, а на вход будет подан образ зайца без ноги, то система отождествит его с зайцем, а не с волком, несмотря на то, что в памяти хранится образ зайца со всеми четырьмя ногами.

Говорят, что система обладает ассоциативной памятью (по ассоциации). Эта память, в отличие от памяти ЭВМ, хранится не в отдельных ячейках, а является коллективным свойством всей системы в целом. Поэтому он обладает важным преимуществом — отсутствием чувствительности к дефектам. Выключение или порча части системы приведет лишь к менее качественному распознаванию образов, но память остается.

Полагают, что точно так же «работает» и система нейронных сетей головного мозга, обеспечивающая человеческую память.

Интенсивное изучение спиновых стекол продолжается. И кто знает, сколько неожиданного и интересного таят в себе эти прозаические на первый взгляд материалы.

КИЕВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ

*принимает учащихся 8—11 классов на заочные отделения физики и математики
по подготовке к поступлению в любой вуз
Преподавателями Лицея совместно с Московским физико-техническим институтом
разработаны специальные учебно-методические пособия для заочного обучения,
содержащие теорию, методы решения задач, контрольные задания
и примеры решений более 1500 конкурсных задач.
Исключительное право на их использование принадлежит Политехническому лицею.
Все учащиеся проходят обучение по полной программе, независимо от того,
с какого класса поступили в Лицей.
Общая стоимость обучения на одном отделении — 216 руб.
Эта плата вносится сразу только учащимися 11-х классов.
Восьмиклассники вносят ежегодно по 54 руб.,
девятиклассники — по 72 руб., десятиклассники — по 108 руб.
Для поступления на одно отделение (или на оба одновременно)
направьте заявление в Лицей по адресу:
252001, г. Киев-1, ул. Крещатик-12, Политехнический лицей.
Укажите вуз, в который вы хотите поступать.
К заявлению приложите квитанцию об оплате одного учебного года.
Оплату можно произвести из любого почтового отделения
обычным почтовым переводом на адрес:
252001, г. Киев-1, Печерское отделение УСБ, р/с 1609455, Политехнический лицей.
Начало занятий первого потока — 10 мая, второго потока — 10 октября.
Предприятия могут произвести оплату по безналичному расчету,
для них сообщаем — МФО 322090.
Мы готовы передавать методику обучения подготовительным отделениям институтов,
а также открывать филиалы Лицея. Справки по телефону (044) 228-81-85.*

ДВЕ ИГРЫ СО СПИЧКАМИ

Доктор физико-математических наук
И. ЯГЛОМ

В этой статье мы расскажем вам об играх «ним» и «цзяньшицзы». И «ним» и «цзяньшицзы» — китайские народные игры. «Цзяньшицзы» в переводе означает «выбирание камней» (разумеется, замена в условиях игр камней спичками ничего не меняет в ее существе). Впоследствии эти игры проникли в Европу; одно время игра «ним» была популярна в Западной Европе.

Приведем правила этих игр.

Игра «ним».

На столе лежат три кучки спичек. Двое играющих поочередно берут спички из этих кучек, причем за один раз играющий может взять любое число спичек из одной (обязательно только из одной!) кучки. Выигравшим считается тот, кто заберет последнюю спичку.

Игра «цзяньшицзы»

На столе лежат две кучки спичек. Двое играющих поочередно берут спички из этих кучек, причем за один раз играющий может либо взять любое число спичек из одной кучки, либо поровну (но тоже любое число!) спичек из каждой кучки. Выигравшим считается тот, кто заберет последнюю спичку.

Задача состоит в том, чтобы определить, при каких начальных положениях (т. е. количествах спичек в каждой из кучек) начинающий может выиграть, а при каких нет, и указать метод правильной (беспроигрышной) игры.

Практически играть в «ним» или «цзяньшицзы» очень удобно у классной доски — без всяких спичек, но с мелом и тряпкой в руке. На доске можно нарисовать, скажем, три ряда полей, оканчивающихся у правого края доски, и три шашки — по одной в каждом ряду полей (рис. 1). Каждый играющий в свой ход стирает одну из шашек и «передвигает» ее на любое число полей вправо (здесь речь идет об игре «ним»); выигрывшим считается тот, кто сделает последний ход. Так же можно играть и в «цзяньшицзы» — только теперь доска для игры содержит два ряда полей и каждый играющий своим ходом подвигает либо одну шашку, либо одновременно обе шашки на одно и то же число полей.

Начинаем играть в «ним»

Предположим, что в трех кучках спичек лежат соответственно a, b и c спичек, где $a \leqslant b \leqslant c$; тройка чисел $(a; b; c)$ — это *положение* или *позиция* в игре *в данный момент*. Ясно, что позиция (0; 1; 1) является *проигрышной* для начинающего; своим ходом он обязан взять одну из двух имеющихся спичек, но после этого его соперник забирает вторую спичку и выигрывает. Все остальные начальные положения $(0; 1; c)$, где $c \geqslant 2$, *выигрышны* для начинающего: своим первым ходом он забирает $c-1$ спичку из третьей кучки, оставляя тем самым своему противнику заведомо проигрышную позицию (0; 1; 1). Следующее *проигрышное* для начинающего положение задается тройкой чисел (0; 2; 2): ведь если в этой позиции он заберет одну спичку, то следующим ходом противник оставит ему позицию (0; 1; 1), а если заберет две спички, то противник следующим ходом кончит игру (т. е. выиграет). Все остальные позиции $(0; 2; c)$, где $c \geqslant 3$, *выигрышны* для начинающего, который может своим первым ходом забрать $c-2$ спички, оставив противнику (проигрышную!) позицию (0; 2; 2). Следующие положения, *проигрышные* для начинающего, будут иметь вид (1; 2; 3) и (0; 3; 3): здесь после каждого хода начинающего противник либо сразу выигрывает, либо сводит игру к одной из рассмотренных выше позиций (0; 1; 1) и (0; 2; 2) (см. рисунок 2, где красными цифрами обозначены проигрышные для начинающего позиции и стрелки обозначают ходы).

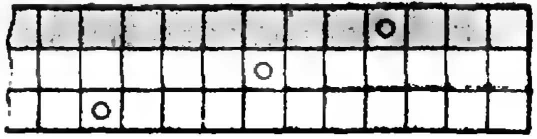


Рис. 1.

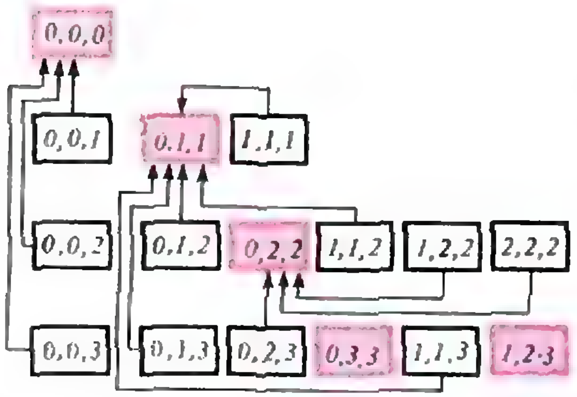


Рис. 2.

Продолжая рассуждать таким же образом, мы можем составить таблицу начальных положений, проигрышных для начинающего: игрок, вынужденный сделать ход, исходя из такой позиции, неминуемо должен перейти к позиции, выигрышной для начинающего (т. е. не входящей в составленную нами таблицу): напротив, если позиция не является проигрышной, то игрок своим ходом может либо сразу выиграть, либо перейти к проигрышной позиции, «подставив» тем самым ее своему противнику. Первые 15 из этих позиций собраны в следующей таблице:

Таблица I *(проигрышные позиции в игре «ним»)*

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	0	0	1	0	0	1	0	2	0	3	2	1	0	0	1
b	1	2	2	3	4	4	5	4	6	4	5	6	7	8	8
c	1	2	3	3	4	5	5	6	6	7	7	7	7	8	9

Попытаемся вглядеться в составленную таблицу с тем, чтобы усмотреть в ней общую закономерность, закон ее составления. Однако на первый взгляд никакого определенного закона, диктующего правила составления этой таблицы, заметить нельзя...

Игра «цзяньшицзы»

Пусть в наших двух кучках лежат соответственно a и b спичек, где $a \leqslant b$; пара чисел $(a;\ b)$ — это *положение* или *позиция в данный момент игры.* Будем и здесь искать те положения, которые *проигрышны* для начинающего. Первое такое положение — это (1; 2); возможных ходов всего четыре: можно взять 1 спичку из 1-й кучки, или 1 спичку из 2-й кучки, или 2 спички из 2-й кучки, или, наконец, по 1 спичке из каждой кучки. Очевидно, что при любом возможном ходе начинающего противник следующим ходом заканчивает игру, т. е. выигрывает. Все остальные положения, где одно из двух чисел a и b равно 1 или 2 или где разность $b-a$ равна 1, *выигрышны* для начинающего: если в этом положении нельзя окончить игру одним ходом (т. е. сразу выиграть), то можно свести игру к положению (1; 2), проигрышному для начинающего. Следующей *проигрышной* позицией является позиция (3; 5): здесь после каждого хода начинающего противник или сразу выигрывает, или сводит игру к положению (1; 2). Все остальные позиции $(a;\ b)$, где одно из чисел a и b равно 3 или 5 или где $b-a=2$, *выигрышны* для начинающего. Следующее *проигрышное* для начинающего положение — это (4; 7). Продолжая рассуждать таким же образом, мы можем составить таблицу проигрышных для начинающего позиций.

Таблица II *(проигрышные позиции в игре «цзяньшицзы»)*

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24
b	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39

К сожалению, и здесь не видно никакого определенного закона составления этой таблицы.

А нельзя ли таблицы I и II записать по-другому?

Нам не удалось понять, как составлены таблицы I и II, образованные в первом случае тремя, а во втором — двумя строчками чисел. Подумаем теперь над возможными причинами постигшей нас неудачи.

Мы уже говорили о том, что таблицы I и II — это числовые таблицы, *они образованы рядами чисел*. Фигурирующие в этих таблицах числа мы, естественно, записывали обычным образом, используя общепринятую десятичную систему счисления, так, например, составляющие последний столбец таблицы II числа 24 и 39 означают: «2 десятка и 4 единицы» и «3 десятка и 9 единиц». Однако сама по себе десятичная система счисления, происхождение которой связано с тем случайным обстоятельством, что человек имеет на руках 10 пальцев, никак не связана с рассматриваемыми нами играми, поэтому уместной представляется попытка записать наши таблицы по-другому.

Дальнейшее содержание этой статьи связано со статьей «Системы счисления» («Квант» № 12, 1991). Нам потребуются следующие сведения из этой статьи.

Систем записи целых положительных чисел с помощью небольшого числа символов (цифр) можно предложить много. *Позиционные системы счисления* (точнее было бы сказать — *позиционные системы записи чисел*) строятся следующим образом. Задается некоторый базис, или *система ключевых чисел*, представляющий собой бесконечную возрастающую последовательность целых чисел:

$$1=q_0<q_1<q_2<q_3... \qquad (*)$$

После этого каждое число N представляется в виде суммы чисел нашего базиса, взятых с теми или иными целыми коэффициентами:

$$N=a_mq_m+a_{m-1}q_{m-1}+...$$
$$...+a_2q_2+a_1q_1+a_0q_0;$$

это выражение записывается так:

$$N=a_ma_{m-1}...a_2a_1a_0,$$

где $a_m, a_{m-1}, ..., a_1, a_0$ — «цифры» записи числа N.

Например, если система базисных чисел такова:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,...

то число 27 запишется следующим образом:

$$27=1\cdot23+0\cdot19+0\cdot17+0\cdot13+$$
$$+0\cdot11+0\cdot7+0\cdot5+1\cdot3+0\cdot2+$$
$$+1\cdot1=«1000000101».$$

При этом k-я цифра a_k в записи любого числа N в системе счисления с базисом (*) всегда будет меньше отношения q_{k+1}/q_k.

Если базис системы счисления имеет вид

$$1=q_0,\ q=q^1,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ ...,$$

где q — некоторое целое число, то система счисления называется «q-ичной», *в ней все числа представляются суммами степеней числа* q и все цифры в записи числа N меньше q (меньше 10 в случае общепринятой десятичной системы счисления).

Самой простой из всех систем записи целых чисел является *двоичная* система счисления, в которой все числа представляются суммами степеней числа 2. Если использовать эту систему счисления, то наши таблицы I и II примут совсем другой вид (числа в двоичной системе счисления мы будем записывать красными цифрами):

Таблица 1*a*

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	0	0	1	0	0	1	0	[illegible]		[illegible]	[illegible]	[illegible]			
b	1	10	10	11	100	100	101	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]				
c	1	10	11	11	100	101	101	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]				

Таблица IIа

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	11	100	110	1 000	1 001	1 011	1 100	1 110	10 000	10 001	10 011	10 101	10 110	11 000
b	10	101	111	1010	1 101	1 111	10 010	10 100	10 111	11 010	11 100	11 111	100 010	100 100	100 111

Внимательное изучение таблицы I*a* позволяет усмотреть в ней вполне определенную закономерность: да, конечно, *проигрышные позиции (a; b; c) в игре «ним» — это те позиции, где сумма цифр каждого разряда в двоичной записи чисел a, b, c* четна (т. е. равна 0 или 2)! Однако таблица II*a* оказывается более коварной: она ничем не лучше таблицы II, и никакой определенной закономерности составления проигрышных пар (*a*; *b*) из нее усмотреть нельзя.

Но почему именно двоичная система счисления должна дать нам ключ к отысканию системы беспроигрышной игры в «цзяньшицзы»? Правда, мы видели, что эта система помогает как будто при разработке теории игры «ним»: но ведь «цзяньшицзы» — это совсем другая игра, а ключ, открывающий одну дверь, совсем не обязан подходить к другой. Нельзя ли переписать таблицу II по-иному: может быть, другая система записи образующих эту систему чисел прольет больше света на ее строение?

Внимательное изучение таблицы II позволяет подметить, что в ней часто фигурируют *числа Фибоначчи* (см., например, 1-й, 2-й, 5-й и 13-й столбцы таблицы)*). А это в свою очередь может навести нас на мысль о целесообразности попытки записать таблицу II в «фибоначчиевой системе счисления», в которой все числа представляются суммами чисел последовательности Фибоначчи (числа в этой системе счисления мы будем записывать синими цифрами). Например, число 100 в фибоначчиевой системе счисления записывается так:

$$100 = 1000010100$$

ибо $100 = 1 \cdot 89 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 3$.

Перепишем теперь таблицу II в фибоначчиевой системе счисления:

Таблица IIб

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a	1	100	101	1 001	10 000	10 001	10 100	10 101	100 001	100 100	100 101	101 001	1 000 000	1 000 001	1 000 100
b	10	1 000	1 010	10 010	100 000	100 010	101 000	101 010	1 000 010	1 001 000	1 001 010	1 010 010	10 000 000	10 000 010	10 001 000

---

*) Числа Фибоначчи — последовательность чисел, начинающаяся с 1 и 2 и далее строящаяся по следующему закону: *каждое число последовательности Фибоначчи равно сумме двух предыдущих.* Первые ее члены таковы: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 114, 233, 377, ... Числам Фибоначчи посвящена хорошая брошюра Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (М.: Наука, 1969).

Вот тут уж закон составления «проигрышных» пар не вызывает никакого сомнения: *записанная в фибоначчиевой системе счисления пара чисел* $(a;\ b)$, *где* $a<b$, *определяет в игре «цзяньшицзы» проигрышную позицию, если* a *оканчивается четным числом нулей**), а* b *получается из* a *приписыванием одного нуля в конце.*

Догадка? Нет, теорема!

Мы уже почти достигли цели: мы как будто знаем, какие позиции в играх «ним» и «цзяньшицзы» являются проигрышными для начинающего, а какие выигрышны для него. Однако математика не признает выражения «как будто»; в математике решить задачу — это не только (и не столько!) догадаться, каким будет ответ задачи, но и доказать, что твоя догадка правильна.

Доказательство того, что подмеченная нами закономерность составления проигрышных позиций правильна, состоит в следующем: *требуется показать, что в каждой из игр «ним» и «цзяньшицзы» существует такая система позиций* (их можно называть выделенными или проигрышными позициями), *что*

а) *для каждой позиции, не являющейся проигрышной, существует такой ход, после которого позиция становится проигрышной;*

б) *каждая проигрышная позиция после любого хода играющего перестает быть таковой.*

Эти свойства проигрышных позиций определяют и «метод беспроигрышной игры» (применимый, разумеется, только в том случае, когда начальная позиция не является проигрышной):

*играющий должен каждым своим ходом добиваться того, чтобы позиция стала проигрышной**).*

Сформулируем теперь те две теоремы, которые нам предстоит доказать.

Теорема 1. *Проигрышными* (т. е. удовлетворяющими сформулированным выше условиям а) и б)) *в игре «ним» являются те и только те позиции* $(a;\ b;\ c)$, *для которых суммы всех цифр, отвечающих одному разряду в записи чисел* a, b, c *в двоичной системе счисления, для всех разрядов четны.*

Теорема 2. *Проигрышными в игре «цзяньшицзы» являются те и только те позиции* $(a;\ b)$, *для которых числа* a, *будучи записанным в фибоначчиевой системе счисления, кончается четным числом нулей, а число* b *получается из числа* a *приписыванием еще одного нуля в конце.*

Замечание. Из теорем 1 и 2 следует, что обе игры — «ним» и «цзяньшицзы» — в определенном смысле выгоды для начинающего: проигрышных для начинающего позиций (см. таблицы I и II) в них довольно мало, т. е. они встречаются гораздо реже, чем все остальные (выигрышные для начинающего) позиции.

Доказательства этих теорем составляют содержание приводимых ниже упражнений. Ответы к ним даны в конце номера (попробуйте, однако, найти решения самостоятельно). Советуем вам сначала разобраться с упражнениями 1—4, так как упражнения 5—7 гораздо сложнее.

Упражнения

1. Докажите, что если позиция $(a;\ b;\ c)$ в игре «ним» не является проигрышной, т. е. не удовлетворяет указанным в формулировке теоремы 1 условиям, то играющий своим ходом может сделать ее проигрышной.

2. Докажите, что если позиция $(a;\ b;\ c)$ в игре «ним» является проигрышной, то после любого хода игрока она перестает быть таковой.

3. Укажите правила беспроигрышной игры в игру «ним» в том случае, если число кучек спичек есть любое наперед заданное целое число $n\geqslant 2$ (прочие правила игры мы оставляем прежними). К чему сводится стратегия беспроигрышной игры в случае $n=2$?

4. Опишите проигрышные позиции $(a;\ b;\ c)$ в игре «ним», записывая числа a, b, c не в двоичной, а в четверичной системе счисления (т. е.

(Окончание см. на с. 31)

---

*) a может оканчиваться «нулем нулей», т. е. вовсе не содержать нулей в конце, ведь нуль — четное число.

**) При этом позицию (0; 0; 0), соответственно (0; 0), мы также причисляем к числу «проигрышных»; ведь если игрок может свести игру к этой позиции, то значит, он уже выиграл.

ПОЧЕМУ ДРОЖИТ ОСИНОВЫЙ ЛИСТ?

Т. БАРАБАШ

Всем известна народная поговорка: «Дрожать как осиновый лист». Мне показалось интересным узнать, справедлива ли она. Результатом моих размышлений и стала эта статья.

Листья осины и в самом деле «дрожащие». Небольшое дуновение ветерка — и вся листва на дереве приходит в движение. Да и латинское название осины в переводе на русский язык означает «тополь дрожащий». В чем же причина этого явления?

Черешок осинового листа — длинный, тонкий, закрученный и возле листа сплюснутый с боков — не оказывает почти никакого сопротивления движению листа, а жесткость черешка на изгиб и кручение пренебрежимо мала в отличие от черешков листьев других деревьев (рис. 1.). Поэтому, чтобы понять природу движения реального осинового листа, можно проанализировать поведение простой модели, например — вырезанного из бумаги листа, подвешенного на нити.

Но сначала рассмотрим, как ведет себя твердая пластинка в потоке воздуха. В образовании аэродинамической силы, которая состоит из силы лобового сопротивления и подъемной силы, наиболее важную роль играет понижение давления над пластинкой в ее передней части и повышение давления под ней. В результате точка приложения силы смещается от геометрического центра пластинки к ее переднему краю, что подтверждается экспериментально (рис. 2). Причем при увеличении так называемого угла атаки — угла между вектором скорости потока и плоскостью пластинки — смещение становится все заметнее.

Вернемся теперь к опыту с бумажным листом. Подвесим на нити лист длиной 15—20 сантиметров и будем перемещать его в воздухе (или поместим перед вентилятором). Мы увидим, что бумажный лист начнет совершать повторяющиеся зигзагообразные или круговые колебательные движения. Попробуем понять, как могут возникнуть такие колебания.

Если плоскость листа развернута по отношению к скорости потока, то точка приложения аэродинамической силы смещена к переднему, по отношению к потоку, краю — положение *А* на рисунке 3. Эта сила, во-перых, приводит лист в движение (вдоль и поперек потока), а во-вторых, создает вращательный момент, который стремится развернуть лист

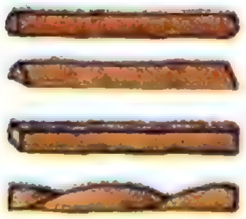


Рис. 1. Возможные формы черешков различных деревьев (внизу — черешок осины).

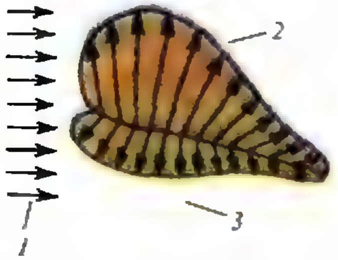


Рис. 2. Возникновение областей пониженного и повышенного давления вокруг пластинки в потоке воздуха (1 — поток воздуха, 2 — область пониженного давления, 3 — область повышенного давления).

Автор этой статьи Таня Барабаш — школьница, ученица 11 класса лицея № 145 г. Киева.

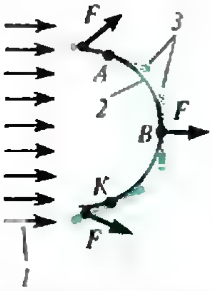


Рис. 3. Изменение точки приложения аэродинамической силы в разных точках траектории бумажного листа (1 — поток воздуха, 2 — траектория движения, 3 — проекция листа).

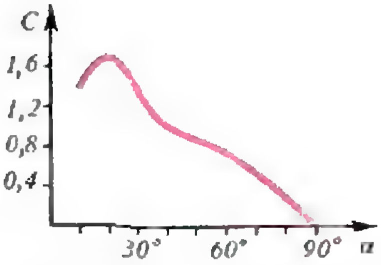


Рис. 4. Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки.

поперек потока. В некоторой точке B вращательный момент станет равным нулю, но лист, обладая определенной скоростью в этой точке, проскочит ее и окажется в точке K. Возникающая аэродинамическая сила будет стремиться опять вернуть лист в положение B. В результате бумажный лист начнет колебаться.

Все описанное целиком справедливо для листа осины. Листьям же других деревьев не дают двигаться подобным образом их черешки, которые обладают большой жесткостью на изгиб и кручение.

Рассмотрим подъемную силу (т. е. проекцию аэродинамической силы, перпендикулярную скорости потока), с которой ветер действует на плоскую площадку S. Она равна

$$F = C\frac{\varrho v_0^2}{2}S,$$

где ϱ — плотность среды, в данном случае воздуха ($\varrho = 1,29$ кг/м^3), v_0 — скорость ветра, C — так называемый коэффициент подъемной силы, зависящий, прежде всего, от угла атаки. Эта формула, с точностью до коэффициента, может быть получена из соображений размерности. Коэффициент C теоретически рассчитать очень трудно, и в большинстве случаев его находят путем «продувки» тела или его модели в аэродинамической трубе.

График зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки приведен на рисунке 4. Причина изменения коэффициента — в поведении воздушных струй на подветренной стороне. При углах атаки, меньших 15°, на подветренной стороне образуется устойчивый незавихренный поток воздуха. При угле порядка 15° разрежение становится максимальным, и коэффициент достигает максимума. С увеличением угла начинают появляться завихрения, которые усиливаются по мере роста угла (рис. 5). Это приводит к потерям энергии, и коэффициент уменьшается.

Благодаря тому, что черешок осинового листа скручен, сам лист вогнут и напоминает по форме парус. Если сравнить значения коэффициента C для плоской пластинки (обычный лист) и вогнутой поверхности (осиновый лист), то при всех углах атаки коэффициент подъемной силы будет больше для вогнутого листа. При углах, например, 15° силы отличаются в два раза. Эта разница объясняется наличием кривизны. Чем она больше, тем больше сужается поток

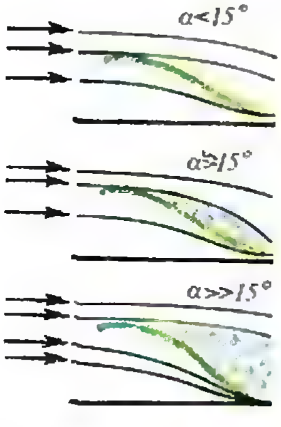


Рис. 5. Характер движения воздушного потока при разных углах атаки.

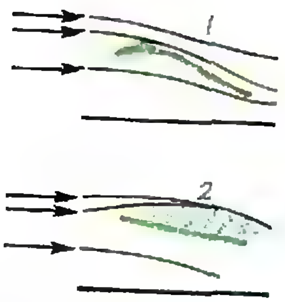


Рис. 6. Характер движения воздушного потока для вогнутого и плоского листа (1 — вогнутая модель, 2 — плоская модель).

и сильнее падает давление. На совершенно плоском листе получить незавихренный поток невозможно, так как уже с самого начала происходит отрыв струй (рис. 6). Но чем больше угол атаки, тем менее заметной становится разница в коэффициентах подъемной силы между плоскими и вогнутыми листами.

На движение листьев осины большое влияние оказывает явление резонанса. Листья осины расположены на ветке так, что каждый лист соприкасается с близлежащими. Так как черешки листьев и сами листья мало отличаются друг от друга, то, подобно двум одинаковым маятникам, подвешенным на одной нити, они приходят в движение, если хотя бы один из них начал колебаться. Колебания соседних листьев усиливают колебания друг друга, достигая значительных амплитуд.

Кроме того, листья осины не распределены по ветке равномерно, а растут пучками по нескольку листьев (рис. 7). Каждый такой пучок образует нечто подобное шатру или парашюту. Листья в пучке касаются друг друга, и как бы ни дул ветер, всегда найдется такой лист, для которого угол между плоскостью листа и направлением ветра будет оптимальным, и он начнет колебаться первым, приводя в движение соседние листья.

Известно, что природа рациональна, и каждое явление в ней обусловлено суровой необходимостью. Так зачем же осине дрожащие листья? Оказывается, причина тому есть.

Для того чтобы молодая осина прижилась, необходима достаточная влажность. Однако гибкая древесина осины склонна к гниению. Почти все взрослые деревья в середине гнилые и поэтому легко ломаются от ветра. Можно предположить, что дрожание листьев, которое увеличивает испарение и вызывает постоянную циркуляцию воды в дереве,— своеобразный метод борьбы с гниением. Подтверждает это и тот факт, что дрожат листья только на взрослом дереве. Молодое развивающееся дерево имеет совсем другие листья, не склонные к дрожанию — ведь молодому дереву гниль не страшна, а наоборот, нужна вода. Листья на молодом дереве сильно отличаются от листьев на взрослых деревьях не только по форме, но и по расположению — они одиночные и рассредоточены по ветке (рис. 8).

Кроме того, дрожание листьев ускоряет процесс фотосинтеза, так как фотосинтез — это фактически газовый обмен со средой. Дрожание листьев отгоняет от них выделившиеся газы. А большая скорость фотосинтеза необходима для быстрой замены старых клеток новыми, что также предохраняет древесину от гниения.

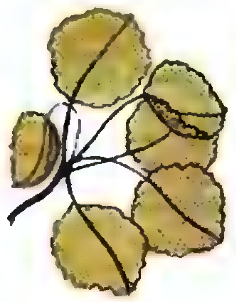


Рис. 7. Ветвь взрослого дерева осины.

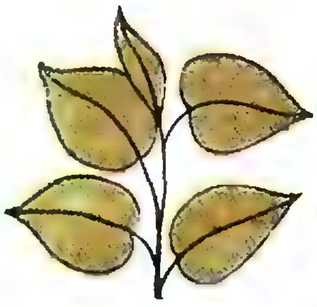


Рис. 8. Ветвь молодой осины.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1321 — М1325, Ф1328 — Ф1332

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1 — 92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1321» или «Ф1328». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1321. Ладья побывала во всех клетках шахматной доски размерами $n\times n$ клеток. Докажите, что она должна была при этом изменить направление движения не менее $2n-2$ раз. (Ладья движется параллельно сторонам квадрата.)

Ю. Ходзинский, ученик 10 класса

М1322. Три отрезка, выходящие из разных вершин треугольника ABC и пересекающиеся в одной точке M, делят его на шесть треугольников. В каждый из них вписана окружность. Оказалось, что четыре из этих шести окружностей равны. Следует ли отсюда, что треугольник ABC правильный, если M — точка пересечения а) медиан, б) высот, в) биссектрис, г) M — произвольная точка внутри треугольника?

В. Сендеров

М1323. Докажите для любых положительных чисел x и y неравенство

$$x\cdot 2^y+y\cdot 2^{-x}\geqslant x+y.$$

В. Прасолов

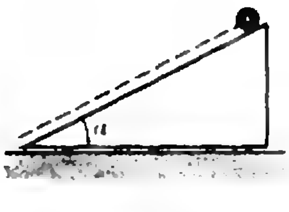
М1324. Докажите, что ни при каком целом k число k^2+k+1 не делится а) на 5, на 11 и на 17; б) на число вида $6m-1$ (m — произвольное натуральное число).

С. Масич

М1325. а) На плоскости даны три точки A, B, C. Пусть O — их центр тяжести (точка пересечения медиан треугольника ABC). При повороте вокруг точки O на угол 120° точка B переходит в точку P, а при повороте на 240° (в том же направлении) точка C переходит в точку Q. Докажите, что треугольник APQ правильный (либо точки A, P и Q совпадают).

б)* Для произвольного набора q точек $A_0, A_1, \ldots, A_q$ на плоскости ($q\geqslant 1$) определим следующую операцию: строим центр тяжести O данных точек и поворачиваем каждую точку A_k вокруг O на угол $2\pi k/q$ в новое положение A'_k ($k=0, 1, \ldots, q$). С полученным набором q точек $A'_0=A_0, A'_1, \ldots, A'_q$ проделаем такую же операцию еще раз, и т. д. Докажите, что через $q-1$ повторений получится набор из q совпадающих точек.

В. Быковский



Ф1328. Клин массой M с длиной наклонной грани L и углом при основании α покоится на гладкой горизонтальной плоскости (см. рисунок). К верхней точке клина прикреплен конец очень тонкой ленты, масса которой $m=M/3$, а длина L. Ленту заворачивают в клубок, после чего систему отпускают. Найдите максимальную скорость клина. Трением можно пренебречь.

Б. Корсунский

Задачник «Кванта»

Ф1329. В цилиндре под поршнем находится ν молей ненасыщенного водяного пара при температуре T_0. При медленном изобарическом охлаждении цилиндра половина пара сконденсировалась, а внутренняя энергия содержимого цилиндра уменьшилась на ΔU. Какое количество теплоты пришлось при этом отвести от содержимого цилиндра, если температура в нем уменьшилась на ΔT? Объемом воды по сравнению с объемом пара можно пренебречь.

А. Шеронов

Ф1330. К батарейке с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением подключены последовательно друг другу два одинаковых миллиамперметра, которые показывают ток $I_1=1$ мА. Параллельно одному из них подключают вольтметр, при этом показания этого миллиамперметра уменьшаются до $I_2=0{,}8$ мА, а вольтметр показывает напряжение $U=0{,}3$ В. Что показывает второй миллиамперметр? Чему равно напряжение батарейки? Каковы сопротивления приборов?

Р. Александров

Ф1331. К источнику с напряжением $U=10$ В подключили последовательно соединенные катушку индуктивностью $L_0=0{,}1$ Гн и резистор сопротивлением $R=10$ Ом. Через некоторое время ток в цепи установился. После этого начинают вдвигать и выдвигать сердечник катушки таким образом, чтобы индуктивность изменялась по закону $L=L_0(1+0{,}1\sin\omega t)$. При этом в цепи появляется переменная составляющая тока. Найдите амплитуду этой составляющей на частоте $\omega=1$ рад/с. Какой станет амплитуда, если вдвигать и выдвигать сердечник в 10000 раз чаще?

В. Можаев

Ф1332. Падающий на тонкую линзу луч пересекает главную оптическую ось под углом $\alpha=4^\circ$ на расстоянии $d=12$ см от линзы и выходит из нее под углом $\beta=8^\circ$ к главной оптической оси. Найдите фокусное расстояние линзы.

В. Дерябкин

Поправки

Ошибка, допущенная в формулировке задачи М1310 («Квант» № 10, 1991), сделала задачу нерешаемой. Приводим условие задачи в более общей формулировке:

М1310. В соревнованиях участвуют 2^k боксера ($k>1$). Ежедневно встречаются 2^{k-1} пары боксеров (так что каждый проводит один бой). Все боксеры имеют разную силу, и в каждом бою побеждает сильнейший. Докажите, что за $k(k+1)/2$ дня можно определить место каждого боксера. (Расписания на каждый день составляются накануне вечером.)

Конечно, было бы интересно получить оценку, меньшую $k(k+1)/2$; точная оценка в этой задаче неизвестна.

В условии задачи М1314 («Квант» № 11, 1991) допущены опечатки. Условие задачи следует читать так:

М1314. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а P и Q — центры окружностей, описанных около треугольников ABM и CDM соответственно. Докажите, что $AB+CD\leqslant 4PQ$.

Срок отправки решений продлевается до 1 мая 1992 года. Редакция приносит свои извинения.

Задачник „Кванта"

Решения задач

М1291 — М1295, Ф1308 — Ф1312

М1291. *Докажите, что а) в правильном 12-угольнике, б) правильном 54-угольнике найдутся 4 диагонали, не проходящие через центр многоугольника и пересекающиеся в одной точке.*

а) Пусть $A_1A_2...A_{12}$ — правильный 12-угольник (рис. 1). Рассмотрим треугольник $A_2A_4A_8$. Прямые A_2A_6, A_3A_8 и A_4A_{11} — биссектрисы его углов. Точно так же прямые A_3A_8, A_5A_1 и $A_{11}A_4$ — биссектрисы углов треугольника $A_3A_5A_{11}$. Отсюда следует, что диагонали A_1A_5, A_2A_6, A_3A_8 и A_4A_{11} проходят через одну точку.

б) Рассмотрим правильный 18-угольник $A_1A_2...A_{18}$ с вершинами, выбранными из вершин данного 54-угольника. Его диагонали A_1A_8, A_2A_9, A_4A_{12}, A_6A_{16} пересекаются в одной точке. Для доказательства достаточно рассмотреть треугольники $A_2A_6A_{12}$ и $A_4A_8A_{16}$ с биссектрисами A_2A_9, A_6A_{16}, $A_{12}A_4$ и A_4A_{12}, A_8A_1 и $A_{16}A_6$ соответственно (рис. 2).

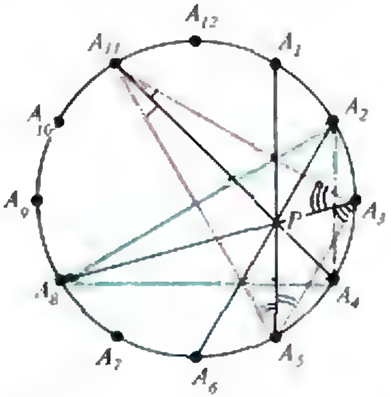


Рис. 1.

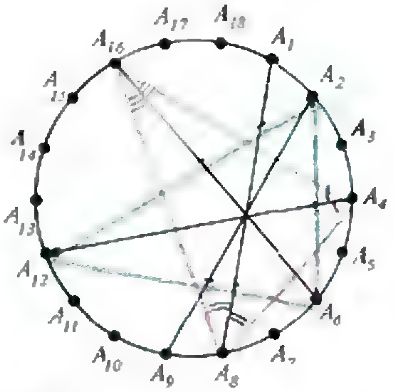


Рис. 2.

Было бы интересно выяснить, при каких n найдутся 4 диагонали правильного n-угольника, пересекающиеся в одной точке. Существует ли правильный n-угольник, имеющий 5 диагоналей, пересекающихся в одной точке, не совпадающей с его центром?

С. Токарев

М1292. Совет из 2000 депутатов решил утвердить государственный бюджет, содержащий 200 статей расходов. Каждый депутат подготовил свой проект бюджета, в котором указал по каждой статье максимально допустимую, по его мнению, величину расходов, так, чтобы общая сумма расходов не превысила заданную величину S. По каждой статье совет утверждает наибольшую величину расходов, которую согласны выделить не менее k депутатов. При каком наименьшем k можно гарантировать, что общая сумма утвержденных расходов не превысит S?

Ответ: $k=1991$.

Если $k \leqslant 1990$, может случиться, что первые 10 депутатов предложат ничего не выделять по первой статье расходов, а по остальным выделить по $S/199$. Следующие 10 депутатов ничего не выделят по второй статье и выделят по $S/199$ по остальным и так далее. В результате по каждой статье будет утверждена сумма расходов в $S/199$, а по всем двухстам статьям $\frac{200}{199}S > S$.

Если $k=1991$, то после утверждения расходов по всем статьям окажется, что лишь менее 10 депутатов могли предложить величину расходов, меньшую утвержденной. Поэтому найдется депутат, который по всем статьям предложил величину расходов, не меньшую утвержденной. Но сумма предложенных им расходов не больше S, а, значит, и утвержденная сумма тоже.

И. Сергеев

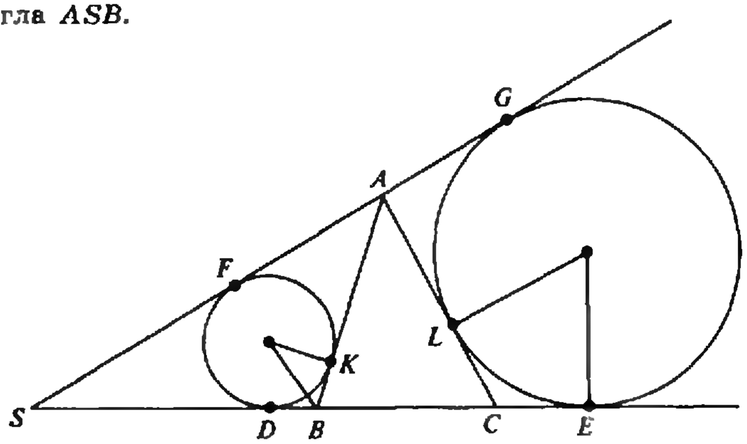
М1293. В данный угол вписаны два непересекающихся круга. Треугольник ABC расположен между кругами так, что его вершины лежат на сторонах угла, а равные стороны AB и AC касаются соответствующих кругов. Докажите, что сумма радиусов кругов равна высоте треугольника, опущенной из вершины A.

Пусть D, E, F и G — точки касания окружностей со сторонами угла, а K и L — со сторонами треугольника (см. рисунок), $a = BK + CL$, $\angle ABC = \varphi$.

Тогда сумма радиусов окружностей равна

$$BK \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - \angle ABC}{2} + CL \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - \angle ACB}{2} = a \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - \varphi}{2}.$$

Мы видим, что сумма радиусов не зависит от величины угла ASB.

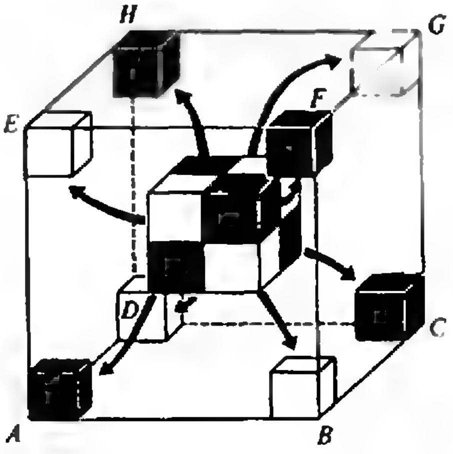


Но когда прямые FG и BC параллельны, сумма радиусов равна высоте треугольника ABC (при этом окружности равные, и диаметр каждой из них равен высоте треугольника ABC).

И. Шарыгин

М1294. Куб размером $10 \times 10 \times 10$ сложен из 500 черных и 500 белых кубиков в шахматном порядке (кубики, примыкающие друг к другу гранями, имеют различные цвета). Из этого куба вынули 100 кубиков таким образом, чтобы в каждом из 300 рядов размером $1 \times 1 \times 10$, параллельных какому-нибудь ребру куба, стало не хватать ровно одного кубика. Докажите, что число вынутых черных кубиков делится на 4.

Разрежем исходный куб $ABCDEFGH$ на кубики $2 \times 2 \times 2$. Разобьем все черные кубики на 4 группы M_A, M_C, M_F и M_H следующим образом: к группе M_A отнесем те черные кубики, которые расположены в своих кубиках $2 \times 2 \times 2$ (см. рисунок) там же, где расположен черный кубик при вершине A (т. е. если он стоит в левом нижнем углу кубика $2 \times 2 \times 2$), аналогично определяются группы M_C, M_F и M_H (см. рисунок). Таким же образом определяются множества M_B, M_D, M_E и M_G белых кубиков. Докажем, что *из каждого множества* M_A, M_C,



M_F и M_H вынуто по одинаковому количеству черных кубиков.

Рассмотрим множества M_A и M_B. Эти 2 множества заполняют 25 рядов, параллельных ребру AB. Поэтому из M_A и M_B вынуто в общей сложности 25 кубиков.

Рассмотрим еще, например, множество M_C. Из множеств M_B и M_C также вынуто в общей сложности 25 кубиков. А так как все кубики, вынутые из M_B — белые, из M_C вынуто столько же кубиков, сколько их вынуто из M_A. Очевидно, то же количество кубиков вынуто из M_F и M_H и, значит, общее количество вынутых кубиков делится на 4.

Утверждение задачи доказано.

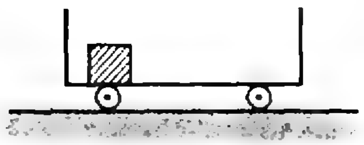
А. Спивак

М1295. *На прямоугольном экране размером $m\times n$, разбитом на единичные клетки, светятся более $(m-1)(n-1)$ клеток. Если в каком-либо квадрате $2\times\times 2$ не светятся три клетки, то через некоторое время погаснет и четвертая. Докажите, что тем не менее на экране всегда будет светиться хотя бы одна клетка.*

Рассмотрим произвольный квадратик 2×2. Если когда-нибудь в этом квадрате окажется одна светящаяся клетка, то через некоторое время она погаснет. Значит, общее число погасших клеток не больше числа квадратов 2×2 в прямоугольнике $m\times n$. Нетрудно подсчитать, что это число равно $(m-1)(n-1)$. Таким образом, общее число погасших клеток не больше $(m-1)(n-1)$, но в самом начале было больше, чем $(m-1)(n-1)$ светящихся клеток, так что найдутся клетки, которые никогда не погаснут.

А. Часовских

Ф1308. *У левого края тележки длиной $L=0{,}2$ м и массой $M=1$ кг лежит кубик массой $m=0{,}3$ кг (см. рисунок). Кубику толчком придают горизонтальную скорость $v_0=1$ м/с вправо. Считая, что тележка в начальный момент неподвижна, определите, на каком расстоянии от левого края тележки будет находиться кубик после того, как проскальзывание его относительно тележки прекратится. Коэффициент трения кубика о дно тележки $\mu=0{,}1$. Удары кубика о стенки считать абсолютно упругими. Тележка едет по столу без трения.*



Проще всего решать эту задачу, исходя из энергетических соображений. Согласно закону сохранения энергии, убыль кинетической энергии системы равна выделившемуся количеству теплоты, которое, в свою очередь, равно работе силы трения скольжения на тормозном пути l:

$$\Delta E_k=\frac{(M+m)u^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=Q=F_{\text{тр}}l=-\mu mgl.$$

Скорость системы u после прекращения проскальзывания легко найти из закона сохранения импульса

$$mv_0=(M+m)u.$$

После простых преобразований получим

$$l=\frac{v_0^2}{2\mu g(1+m/M)}\approx 0{,}38 \text{ м}.$$

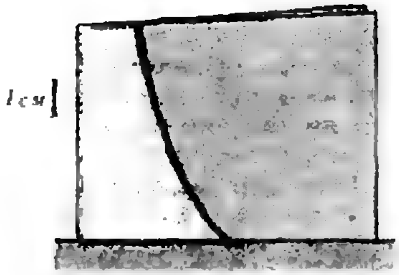
Значит, кубик остановится на расстоянии

$$x=L-(l-L)=0{,}02 \text{ м}$$

от левого края тележки.

А. Зильберман

Ф1309. *На рисунке — фотография двух плоскопараллельных пластинок, составляющих между собой некоторый угол α, частично погруженных в воду. Горизонтальный размер пластинок равен 12 см. По форме границы раздела между жидкостью и воздухом определите угол α. Смачивание считать полным.*



На фотографии мы видим не совсем обычный капилляр — его «диаметр» меняется от точки к точке, а именно увеличивается по мере удаления от ребра. Вот почему высота подъема воды в разных местах различна.

Трудность расчета связана с тем, что на фото нет положения горизонтальной поверхности воды вдали от ребра и мы не можем найти непосредственно высоту подъема в каком-нибудь месте. Так что нам придется сравнивать высоты подъема воды в разных точках.

Выберем некоторую точку. Разность давлений с двух сторон искривленной поверхности раздела воды и воздуха можно найти по формуле Лапласа

$$\Delta p = \frac{\sigma}{r_1} + \frac{\sigma}{r_2},$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, r_1 и r_2 — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности. Обозначим x — расстояние от выбранной точки до ребра, H — высоту подъема воды в этой точке относительно горизонтальной поверхности. Учитывая малость угла α (иначе не было бы заметного эффекта) и тот факт, что $r_2 \gg r_1$ (как видно из рисунка, r_2 по порядку величины сравним с размером пластинки), получим

$$\Delta p = \frac{\sigma}{r_1} + \frac{\sigma}{r_2} \approx \frac{\sigma}{r_1} \approx \frac{\sigma}{{}^1\!/_2 \alpha x}.$$

При равновесии эта разность давлений компенсируется гидростатическим давлением:

$$\frac{\sigma}{{}^1\!/_2 \alpha x} = \varrho g H,$$

где ϱ — плотность воды.

Для двух произвольных точек запишем

$$\frac{\sigma}{{}^1\!/_2 \alpha x_1} = \varrho g H_1, \quad \frac{\sigma}{{}^1\!/_2 \alpha x_2} = \varrho g H_2,$$

откуда получим

$$\alpha = \frac{2\sigma(1/x_1 - 1/x_2)}{\varrho g (H_1 - H_2)}.$$

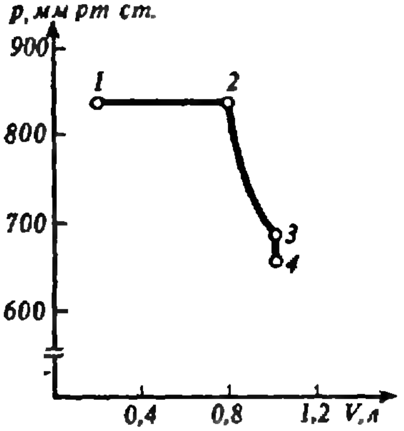
В это выражение входят табличные величины $\sigma = 7 \cdot 10^{-2}$ Н/м, $\varrho = 10^3$ кг/м^3, $g = 10$ м/с^2 и непосредственно определяемые по рисунку x_1, x_2, $H_1 - H_2$. Рисунок совсем мал, поэтому ожидать хорошей точности трудно (на олимпиаде участники работали с ксерокопией фотографии в натуральную величину). Все же после подстановки чисел получаем

$$\alpha \approx 0{,}01 \text{ рад}.$$

В. Можаев

Ф1310. *В сосуде под поршнем находится некоторое количество жидкого азота и его паров при температуре $T_1 = 78$ К (точка 1 на ри-*

Из рисунка видно, что на участке *1 — 2* пар насыщенный, а на участке *2—3* — ненасыщенный, т. е. в точке *2* как раз испарился весь жидкий азот. Однако в точке *4* пар снова становится насыщенным: если бы это было не так, то его давление составило бы *сунке). Поршень медленно отодвигают, увеличивая объем сосуда при постоянной температуре (участок 1—2—3). В точке 3 давление в сосуде становится равным 686 мм рт. ст. Поршень закрепляют и охлаждают сосуд до $T_2 = 76$ К, давление при этом уменьшается до 657 мм рт. ст. (точка 4). Каким будет давление в сосуде, если при этой температуре медленно передвинуть поршень в начальное положение? Какая масса жидкости первоначально была в сосуде? Молярная масса азота $M = 28$ г/моль. Плотность ртути $\varrho = 13{,}6$ г/см^3.*



$$p_4' = p_3\frac{T_4}{T_3} = 686\,\frac{76}{78}\ \text{мм рт. ст.} = 668\ \text{мм рт. ст.} >$$

$$> p_4 = 657\ \text{мм рт. ст.}$$

Это означает, что часть паров азота теперь сконденсировалась.

Если мы будем еще уменьшать объем, то пар станет насыщенным и его давление при постоянной температуре будет равно 657 мм рт. ст.

Найти первоначальную массу жидкости совсем просто. При увеличении объема от V_1 до V_2 жидкость вся испарилась, т. е. заняла объем $V_2 - V_1$ при давлении $p_1 = 830$ мм рт. ст. и температуре T_1. Поэтому ее масса

$$m = \frac{Mp_1(V_2 - V_1)}{RT_1} =$$

$$= \frac{28\cdot10^{-3}\cdot830\cdot10^{-3}\cdot13{,}6\cdot10^{3}\cdot10\cdot0{,}6\cdot10^{-3}}{8{,}31\cdot78}\ \text{кг} \approx 8\ \text{г}.$$

А. Зильберман

Ф1311. *Лампочку для карманного фонаря подключают к источнику напряжения длинными проводами. При длине проводов 10 м ток через лампочку оказался равным 0,17 А, при 20 м — 0,13 А. Каким будет ток через лампочку при длине проводов 40 м? Каким станет этот ток, если лампочку подключить прямо к источнику? Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало. Зависимость тока через лампочку от напряжения на ней приведена на рисунке.*

В первых двух случаях лампочка подключена к батарейке напряжением U_x последовательно с сопротивлением проводов, которое во втором случае ровно в два раза больше, чем в первом. По характеристике лампочки найдем напряжения на ней:

при $I_1 = 0{,}17$ А $U_1 = 1{,}7$ В,
при $I_2 = 0{,}13$ А $U_2 = 1{,}1$ В.

Теперь мы можем составить уравнения

$$\frac{U_x - U_1}{R_{\text{пр}}} = I_1,\quad \frac{U_x - U_2}{2R_{\text{пр}}} = I_2.$$

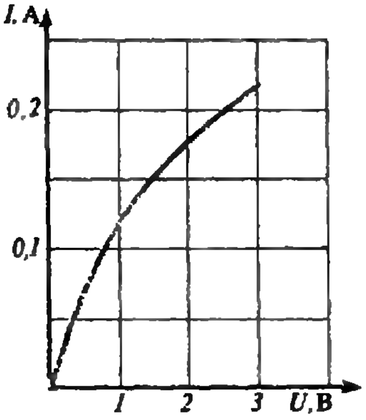
Отсюда легко найти

$$U_x = 2{,}83\ \text{В},\ R_{\text{пр}} = 6{,}7\ \text{Ом}.$$

При подключении лампочки непосредственно к батарейке потечет ток (определяем его по характеристике)

$$I_3 = 0{,}21\ \text{А}.$$

При проводах длиной 40 м их сопротивление равно $4R_{\text{пр}} \approx 27$ Ом. Ток через лампочку можно найти, например, просто подбором, проверяя сумму напряжений



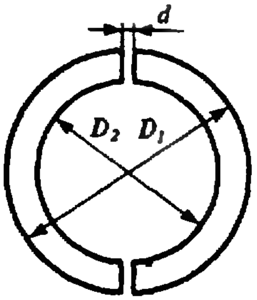
на лампочке и проводах при заданном токе — получается ли 2,83 В. Можно сделать и графическое построение: провести прямую $I=(U_x-U)/(4R_{пр})$ и найти точку пересечения с вольт-амперной характеристикой лампочки:

$$I_4\approx0{,}08\text{ А}.$$

График очень маленький, и точность, разумеется, невелика — у вас могут получиться и несколько другие числа.

А. Зильберман

Ф1312. *Катушка равномерно намотана на кольце из феррита с магнитной проницаемостью $\mu=3000$. Внешний диаметр кольца $D_1=2$ см, внутренний $D_2=1{,}6$ см. Индуктивность катушки $L=0{,}1$ Гн. Какой была бы индуктивность катушки, если бы ее сердечник состоял из двух полуколец, прижатых друг к другу неплотно — с зазором шириной $d=0{,}1$ мм (см. рисунок)? Во сколько раз изменилась бы эта индуктивность при замене материала полуколец на феррит с $\mu_1=2000$?*



Решить эту задачу строго, не выходя сильно за пределы школьной программы, невозможно. Однако, если особой строгости не требуется, ничего сложного тут нет.

Если магнитная проницаемость сердечника μ велика, то линии магнитной индукции, независимо от формы и длины сердечника, практически не рассеиваются. Это означает, что витки катушки можно наматывать равномерно по всему кольцу, а можно лишь на его половине — разницы ни в величине поля, ни в индуктивности катушки не будет. Отсюда делаем вывод, что в нашем случае поле в сердечнике можно представить в виде $B\sim N/l$, где N — число витков, а l — так называемая средняя длина сердечника, или, как ее еще называют, средняя «длина силовых линий».

Ясно, что поле в зазоре между двумя полукольцами будет в μ раз меньше, чем в феррите. Следовательно, средняя длина линий магнитной индукции в этом случае получится больше:

$$\frac{l^*}{l}=\frac{l-2d+\mu\cdot2d}{l}\approx\frac{l+2\mu d}{l}$$

(там, где сердечника нет, витков приходится наматывать больше — для «уравнивания» полей).

Итак, при том же токе через катушку после замены сердечника на два полукольца с зазором магнитное поле уменьшится во столько раз, во сколько возрастет средняя длина сердечника, и индуктивность катушки будет равна

$$L^*=L\frac{l}{l+2\mu d}=\frac{L}{1+2\mu d/(\pi(D_1+D_2)/2)}\approx\frac{L}{11{,}6}\approx8{,}6\cdot10^{-3}\text{ Гн}.$$

Если сердечник имеет магнитную проницаемость $\mu_1=2000$, то в случае целого кольца индуктивность составит

$$L_1=\frac{2}{3}L\approx6{,}7\cdot10^{-2}\text{ Гн},$$

а при кольце с зазором —

$$L_1^*=\frac{2/3\,L}{1+2\mu_1d/(\pi(D_1+D_2)/2)}\approx8{,}3\cdot10^{-3}\text{ Гн}.$$

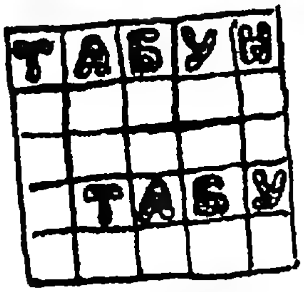
Видно, что катушка «с зазором» намного менее чувствительна к изменению магнитной проницаемости сердечника. Это широко используется на практике, поскольку у материалов с большой величиной μ она, как правило, сильно зависит от внешних условий — от температуры и индукции магнитного поля.

Р. Александров

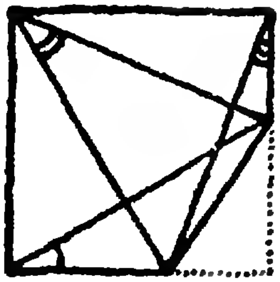
„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Продав последний персик за 2 рубля 30 копеек, торговец вычислил, что он продавал их в среднем по 2 рубля 45 копеек. Но покупатель вернул ему этот персик, указав на червоточину, и согласился купить его лишь за 1 рубль 58 копеек. Пересчитав среднюю цену, торговец выяснил, что она стала равной 2 рублям 42 копейкам. Сколько персиков продал торговец?

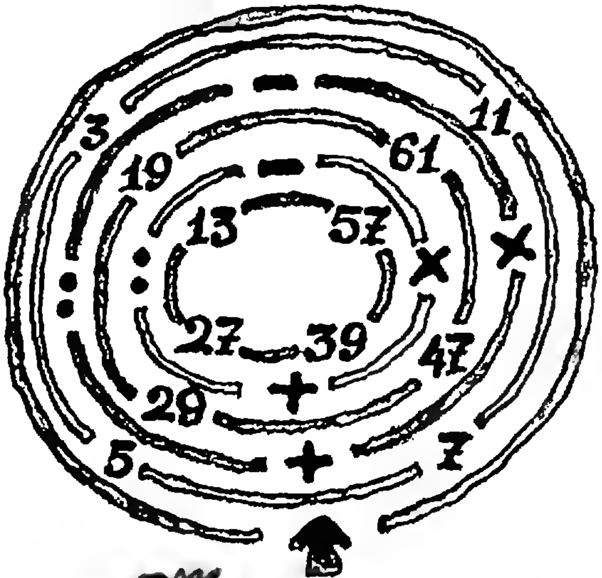


Т	А	Б	У	Н
	Т	А	Б	У



2. Завершите заполнение квадрата буквами Т, А, Б, У, Н так, чтобы в каждом горизонтальном, каждом вертикальном рядах и, на каждой диагонали присутствовали все эти буквы по одному разу.

3. От квадрата отрезан прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Докажите, что сумма углов, под которыми видна из трех оставшихся вершин его гипотенуза, равна 90°.



4. Пройдите до центра лабиринта так, чтобы в результате получилось число 100.

5. Рассказывают, что некто при встрече с греческим философом и математиком Пифагором спросил его: «Который час?» Пифагор ответил: «До конца суток осталось дважды две пятых того, что уже прошло от начала». Спрашивающий не сразу сообразил, в котором часу произошла встреча. Который был час?

Первые четыре задачи нам предложили Н. Антонович, Л. Никонов, В. Произволов и одиннадцатиклассник Алексей Ларионов из с. Первомайское Красноярского кр. Последняя задача взята нами из только что вышедшей книги Н. Н. Аменицкого и И. П. Сахарова «Забавная арифметика» (М.: Наука, 1991).

«ЕСЛИ В ПОЛЕ ДАЛЕКО РАЗДАЕТСЯ ГОЛОС...»

Кандидат педагогических наук
С. ТИХОМИРОВА

Человеку всегда важно знать, какая будет погода, поскольку она влияет на его деятельность и самочувствие. Наблюдая природу в ненастье и солнечным днем, в сумерки и ночью, люди отмечали характерные признаки, предваряющие те или иные изменения погоды. Так появились многочисленные приметы — свидетельства народной мудрости.

«Погодные» приметы разнообразны. Не углубляясь в сложные механизмы формирования погоды, попытаемся объяснить некоторые из них.

Перед наступлением дождя многие вещества, впитывающие в себя влагу из воздуха, сыреют. В народе говорят: *«Соль мокнет — к дождю», «Табак сыреет — к сырой погоде»*.

Старинную народную примету *«Лучина трещит и мечет искры — к ненастью»* можно объяснить тем, что при повышенной влажности деревянные предметы отсыревают. При горении влага из древесины лучины интенсивно испаряется. Увеличиваясь в объеме, пар с треском разрывает древесные волокна.

Влажность воздуха влияет на распространение звука. С повышением влажности изменяется плотность воздуха и его способность проводить звук, что нашло отражение в ряде народных примет. Одна из них — *«Если в поле далеко раздается голос, то будет дождь»*. В старину в некоторых местностях крестьяне с помощью эха узнавали, будет ли дождь. Они кричали: «Какой пень, какая колода, какая будет погода? Го-о-оп-гоп-гоп!». Если эхо отвечало «гоп» сильно — ждали дождя.

Падение атмосферного давления, сопровождающее ухудшение погоды, является причиной того, что при кипячении молоко скорее «убегает». Отсюда и возникла пословица: *«Горшки легко позакипают через край — к ненастью»*.

А вот несколько пословиц, связанных с состоянием неба: *«Если звезды блестят ярко зимой — к стуже»*,

«Ясный Млечный Путь летом — к вёдру», *«Мало звезд на небе — к ненастью»*. Эти приметы можно достаточно просто объяснить. Как мы уже говорили, с ухудшением погоды увеличивается количество водяных паров в атмосфере. На высоте 8—10 км образуются кристаллики льда, которые рассеивают свет подобно дыму или туману, в связи с чем цвет неба белеет, затем облачность уплотняется. При этом слабые звезды становятся невидимыми. В ясную погоду небо чистое, звезд много, и они хорошо видны.

Можно ли судить о погоде по состоянию Солнца и Луны? Посмотрим, что говорят пословицы на этот счет: *«Кольцо вокруг Солнца — к ненастью»*, *«Солнце красно заходит — к ветру»*, *«Тусклый месяц — к мокрети; ясный — к суху; в синеве — к дождю; в красне — к ветру»*, *«Луна ночью будто покраснела — жди завтра ветра, тепла и снега»*.

Что же происходит в действительности?

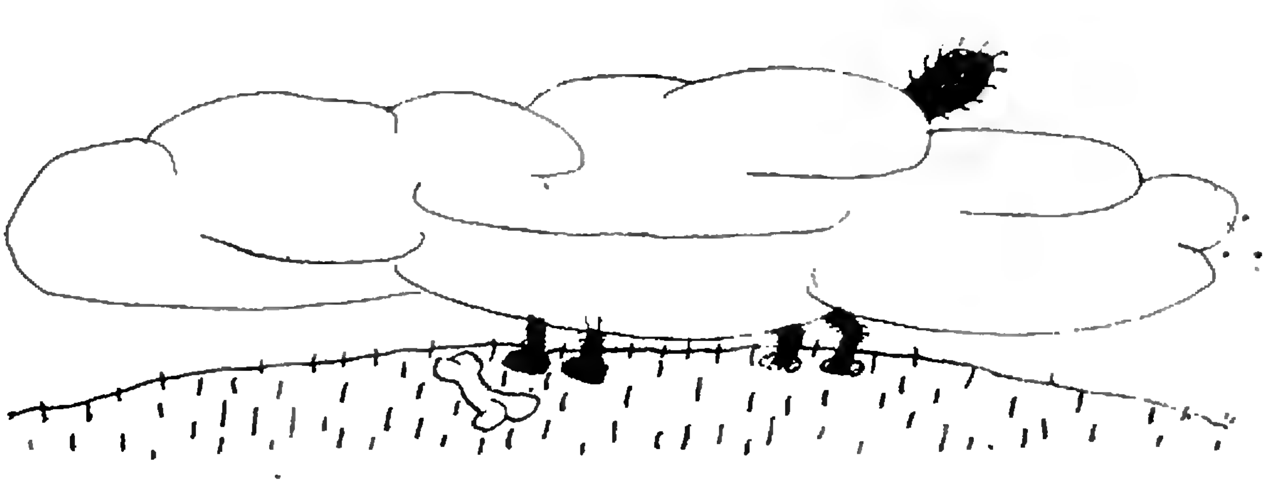
Высоко над горизонтом появляются прозрачные и быстрые облака. Небо постепенно становится молочно-белым и вот уже все оно как бы покрыто вуалью перисто-слоистых облаков. Кажется, что Солнце светит сквозь матовое стекло и его очертания становятся все более и более расплывчатыми. Именно в такую погоду можно увидеть кольца и венцы вокруг наших светил. Обычно вслед за этим погода начинает портиться. Красный цвет зари и самого светила свидетельствуют о высокой влажности воздуха, сопутствующей появлению облаков, сильного ветра, осадков.

И наконец, вспомним несколько примет, которые сулят нам добрую, ясную погоду: *«Обильная роса — к хорошей погоде»*, *«Осенний иней — к сухой и солнечной погоде»*, *«Туман утром стелется по воде — к хорошей погоде»*.

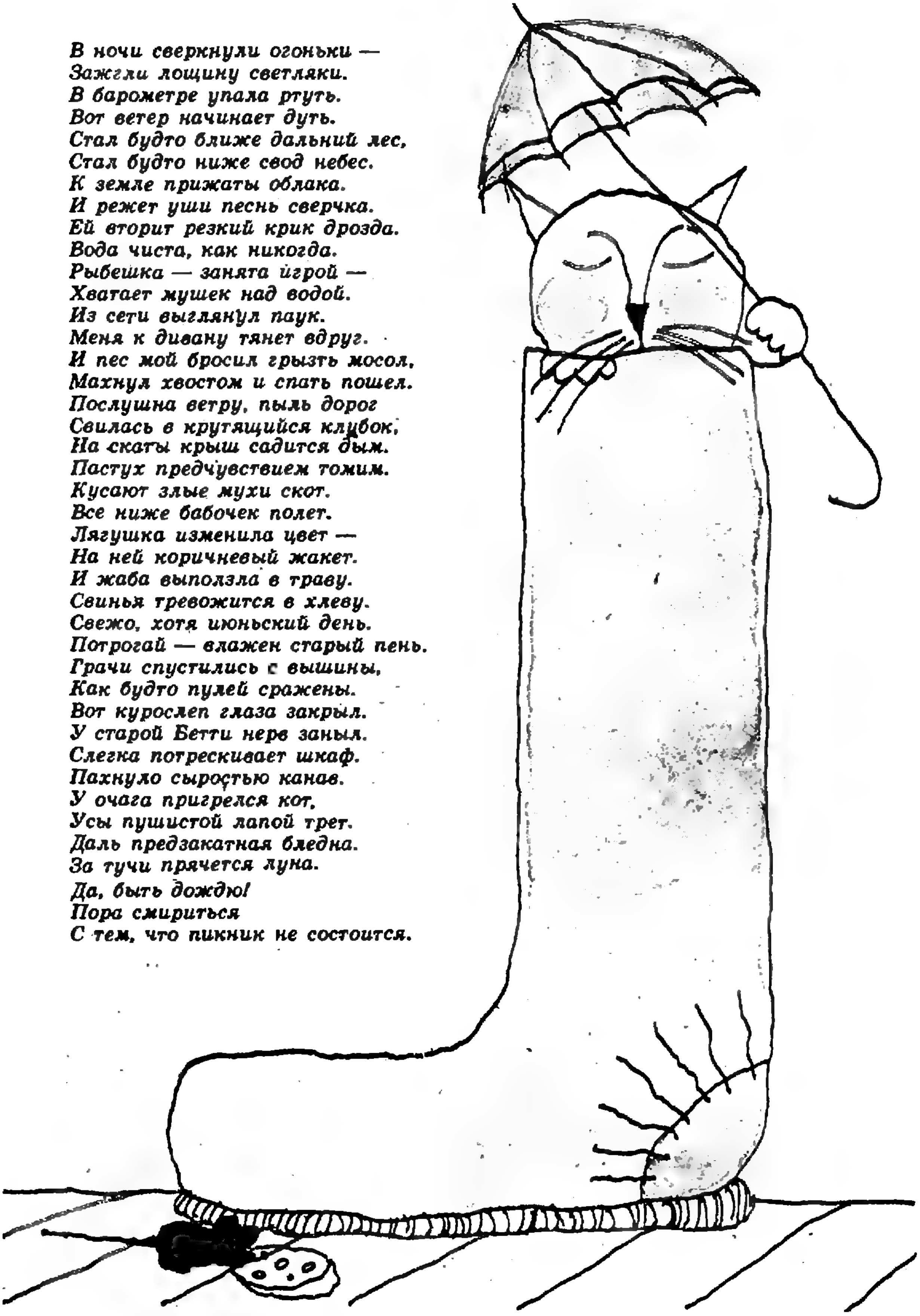
Эти приметы можно истолковать так. При отсутствии облачности ночью земля за счет теплового излучения охлаждается сильнее, чем в пасмурную погоду. Это вызывает конденсацию атмосферного водяного пара, и, как следствие, выпадение росы и инея, появление тумана.

«Предсказывая» погоду, надо помнить, что по одной примете, конечно же, нельзя сделать достоверный вывод. Все приметы носят приблизительный характер, и чем больше признаков совпадет, тем точнее будет прогноз погоды.

«Конец — всему делу венец». Поэтому в заключение — стихотворение Эдварда Дженнера «Сорок поводов для того, чтобы отказаться от предложения друга совершить совместную прогулку»:



В ночи сверкнули огоньки —
Зажгли лощину светляки.
В барометре упала ртуть.
Вот ветер начинает дуть.
Стал будто ближе дальний лес,
Стал будто ниже свод небес.
К земле прижаты облака.
И режет уши песнь сверчка.
Ей вторит резкий крик дрозда.
Вода чиста, как никогда.
Рыбешка — занята игрой —
Хватает мушек над водой.
Из сети выглянул паук.
Меня к дивану тянет вдруг.
И пес мой бросил грызть мосол,
Махнул хвостом и спать пошел.
Послушна ветру, пыль дорог
Свилась в крутящийся клубок.
На скаты крыш садится дым.
Пастух предчувствием томим.
Кусают злые мухи скот.
Все ниже бабочек полет.
Лягушка изменила цвет —
На ней коричневый жакет.
И жаба выползла в траву.
Свинья тревожится в хлеву.
Свежо, хотя июньский день.
Потрогай — влажен старый пень.
Грачи спустились с вышины,
Как будто пулей сражены.
Вот курослеп глаза закрыл.
У старой Бетти нерв заныл.
Слегка потрескивает шкаф.
Пахнуло сыростью канав.
У очага пригрелся кот,
Усы пушистой лапой трет.
Даль предзакатная бледна.
За тучи прячется луна.
Да, быть дождю!
Пора смириться
С тем, что пикник не состоится.

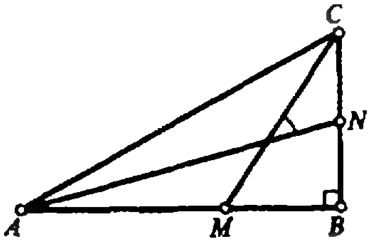


Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач (по 3 в каждом номере) и заканчивается в апреле этого года. Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 апреля 1992 г. по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

13. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и BC взяты точки M и N так, что $AM=CB$ и $MB=CN$. Докажите, что угол между отрезками AN и CM равен 45°.

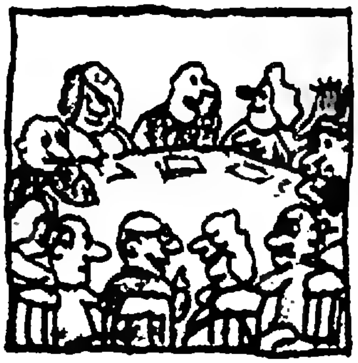


В. Произволов

14. Один чудаковатый часовщик смастерил странные часы. От полуночи до часу ночи они шли нормально, показывая верное время, но затем часовая стрелка начинала идти со скоростью минутной, а минутная — со скоростью часовой. Через час стрелки вновь менялись скоростями, и так — каждый час. Укажите все моменты, когда часы показывают верное время.

А. Савин

15. Двенадцать собеседников совещались за круглым столом. После перерыва они вновь сели за этот стол, но в другом порядке. Докажите, что найдутся такие два собеседника, что между ними (считая от первого ко второму по часовой стрелке) во второй раз окажется столько же собеседников, что и в первый раз.



В. Произволов

Две игры со спичками

(Начало см. на с. 10)

представляя, скажем, число a в виде

$$a=a_n4^n+a_{n-1}4^{n-1}+\ldots+a_24^2+a_14+a_0;$$

здесь $0\leqslant a_i\leqslant 3$ для всех $i=n, n-1, \ldots, 2, 1, 0$.

5. Докажите, что для любого целого положительного числа p существует одна и только одна проигрышная позиция $(a;\ b)$ в игре «цзяньшицзы» (т. е. позиция, удовлетворяющая условиям теоремы 2) такая, что $b-a=p$. Проверьте это для первых 15 проигрышных позиций, перечисленных в таблице II.

6. Докажите, что если позиция $(b;\ a)$ в игре «цзяньшицзы» не удовлетворяет условиям теоремы, то играющий своим ходом может либо сразу выиграть, либо свести позицию к проигрышной.

7. Докажите, что если позиция $(a;\ b)$ в игре «цзяньшицзы» является проигрышной, то после любого хода играющего она перестает быть таковой.

8. Укажите правила беспроигрышной игры в «цзяньшицзы», если число кучек нечетно (играющий каждым своим ходом имеет право взять либо любое число спичек из какой-то одной кучки, либо поровну — и тоже любое число! — из каждой кучки).

Проблема. Укажите правила беспроигрышной игры в «цзяньшицзы», если число кучек равно четырем.

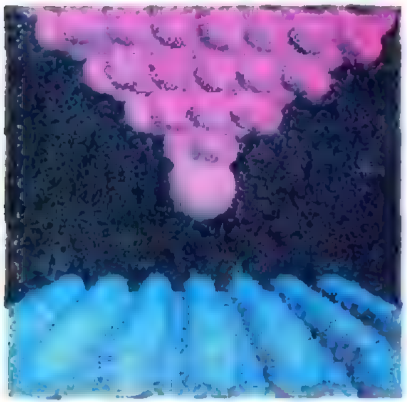
Хочу предупредить читателя, что решение поставленной проблемы автору неизвестно.

Чудеса миниатюризации

Говорят, что Цицерон как-то рассказывал, что видел эпическую поэму Гомера «Илиаду», умещавшуюся в скорлупе грецкого ореха. А вот несколько лет назад шотландцы действительно выпустили книжку размером 1×1,5 мм! Это в 10 раз превысило «рекорд» размера микрокниг прошлого века.

Ясно, что такие книги впору читать с помощью если не электронного, то уж простого микроскопа обязательно. А еще лучше — с помощью лазера, луч которого считывает информацию с поверхности компакт-диска, предназначавшегося поначалу исключительно для аудиозаписи.

И здесь миниатюризация не обошла нас стороной. Если первые аудиодиски имели диаметр 12 см и были рассчитаны на проигрывание в течение часа, то сейчас уже стали выпускать мини-диски, диаметр которых в два раза меньше, а время звучания — на четверть часа больше.



Перенос атома ксенона на поверхность кремния.

Но вот компакт-диски приспособили для записи так называемой интерактивной информации, т. е. информации не только звуковой, но и текстовой, и изобразительной. Подобные диски представляют собой «хранилище» информации, которая, как и на звуковых дисках, наносится во время записи на его поверхность в виде канавок и гладких участков. При считывании информации лазерным лучом эти канавки и гладкие участки интерпретируются как «нули» и «единицы» цифрового кода.*)

Такие компакт-диски обладают гигантской емкостью и плотностью записи информации. Достаточно сказать, что на одном диске уместилась бы вся Большая советская энциклопедия с энциклопедией Брокгауза и Ефрона впридачу. Причем в статье о Бетховене вы услышали бы фрагменты из его произведений, а в разделе об импрессионистах — увидели бы несколько сотен, а то и тысяч картин. На одном диске «укладывается» весь Лувр или Британский музей, могут «храниться» все сокровища Эрмитажа или Русского музея вместе с их запасниками.

Казалось бы, достигнут предел — причем физический — плотности размещения информации. Однако это далеко не так. Недавно предложен способ переноса на поверхность вещества отдельных атомов с помощью острия иглы сканирующего туннельного микроскопа*).

Для этого на кончик иглы подается небольшой положительный потенциал, который — в соответствии с законом Кулона — способствует «прилипанию» к острию отрицательно заряженной оболочки атома. (Это в какой-то мере похоже на «прилипание» кусочков бумаги к натертой стеклянной палочке.)

Когда атом или ион какого-то элемента перенесен в нужную точку поверхности, на кончик иглы подается отрицательный импульс. Атом (опять же по закону Кулона) отделяется от иглы и фиксируется на подложке. «Горка» из 1000 таких атомов соответствует «единице», а их отсутствие — «нулю». Плотность записи при таком способе трудно себе представить. Скажем лишь, что содержание всех книг Ленинской библиотеки уместится всего на одном мини-компакт-диске (а обычных дисков потребуется четверть миллиона!).

Только вот «записывать» такой диск придется пока около года. Так что теперь надо искать способ «ускорения» технологии записи и считывания...

И. Лалаянц

---

*) Советуем вам прочитать статьи Ю. Носова «Оптическая память» («Квант», 1989, № 11) и «Голографическая память» («Квант», 1991, № 10). (*Прим. ред.*)

*) Об этом приборе читайте в статье А. Володина «Осязающие микроскопы» («Квант», 1991, № 4). (*Прим. ред.*)

Школа в „Кванте"

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Конус трения» предназначена девятиклассникам, заметка «Первый источник электрического тока» — десятиклассникам, «Дифракция волн» — одиннадцатиклассникам.*)
Мы публикуем также «Избранные школьные задачи по физике».

Конус трения

Если рассмотреть условия равновесия тела на наклонной плоскости, угол наклона которой можно изменять, то легко получить (сделайте это самостоятельно), что тело начнет соскальзывать с плоскости при угле φ таком, что

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\mu,$$

где μ — коэффициент трения тела о плоскость. Не кажется ли вам удивительным, что этот угол не зависит от массы тела?

То же самое выражение для угла φ можно получить и другим, пожалуй, более простым способом. Но для этого надо предварительно познакомиться с понятием «конус трения».

Пусть тело, которое можно считать материальной точкой, находится на шероховатой горизонтальной плоскости. Сила тяжести прижимает тело к поверхности, и поверхность «откликается», действуя на тело силой нормального давления $\vec{N}$. Если же к телу приложена также и некоторая горизонтальная сила, то со стороны поверхности появляется еще одна сила — сила трения $\vec{F}_{тр}$. Пока величина горизонтальной силы не превышает максимального значения силы трения покоя $F_{тр\,п\,\max}=\mu N$, тело покоится. При достижении этого значения тело начинает двигаться, причем поверхность действует на него препятствующей движению силой трения скольжения

$$F_{тр\,ск}=F_{тр\,п\,\max}=\mu N.$$

Как сила нормальной реакции, так и сила трения порождаются поверхностью, поэтому можно говорить о полной силе реакции поверхности. В случае, когда тело под действием внешней силы (конечно, включающей в себя и силу тяжести) движется вдоль поверхности (рис. 1), полная сила реакции есть

---

*) Эти заметки были опубликованы в «Кванте» № 1 за 1986 год.

$$\vec{R}=\vec{N}+\vec{F}_{\text{тр ск}}.$$

Эта сила направлена под углом φ к нормали, который легко определить:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{F_{\text{тр ск}}}{N}=\mu\Rightarrow\varphi=\operatorname{arctg}\mu.$$

Угол φ называют *углом трения.*

Будем теперь мысленно вращать вектор $\vec{R}$ вокруг нормали к поверхности, не меняя угла φ между ними. При этом вектор опишет конус (с углом 2φ при вершине), называемый *конусом трения.* Он обладает следующим замечательным свойством:

Какая бы большая по величине внешняя сила ни прикладывалась к телу, если она лежит внутри конуса трения, тело остается в покое. Если же эта сила выходит за пределы конуса трения, то какой бы малой она ни была, тело начинает двигаться.

В справедливости этого утверждения убедиться нетрудно. Действительно, пусть внешняя сила $\vec{F}$ (см. рис. 1) приложена к телу так, что ее линия действия составляет угол α с нормалью к поверхности. Тогда «сдвигающая» тело вдоль поверхности сила равна $F\sin\alpha$, а сила нормальной реакции равна $F\cos\alpha$. Таким образом, предельно возможная сила трения покоя, удерживающая тело на месте, есть

$$F_{\text{тр п max}}=\mu N=\mu F\cos\alpha=F\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha.$$

Пока сила F лежит внутри конуса трения, $\alpha<\varphi$ и, следовательно, $F\sin\alpha<F\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha$. Тело при этом покоится. Однако как только угол α становится больше угла трения φ, последнее неравенство нарушается. Теперь трение уже не в состоянии удержать тело на месте, и оно начинает скользить.

Вернемся к телу, оставленному в начале статьи на наклонной плоскости, и построим для него конус трения (рис. 2). Внешней силой здесь служит сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Пока $\alpha<\varphi$, согласно сказанному выше, тело будет покоиться. Но как только угол α превысит угол φ — начнется движение. Поэтому мы сразу же получаем условие начала соскальзывания тела с наклонной плоскости:

$$\operatorname{tg}\alpha>\mu,\ \text{или}\ \alpha>\operatorname{arctg}\mu.$$

Заметим, что понятием «конус трения» пользуются инженеры при расчете той или иной конструкции. Так, например, даже при проектировании табуретки следует помнить о конусе трения.

Представьте себе табуретку, ножки которой соединены с сидением шарнирами (рис. 3). Конечно, в действительности никто не станет так делать, однако такая система крепления позволит нам легче разобраться с ролью конуса трения. Поставим такую табуретку на пол так, чтобы угол α, который ножки составляют с нормалью к полу, был меньше угла трения φ.

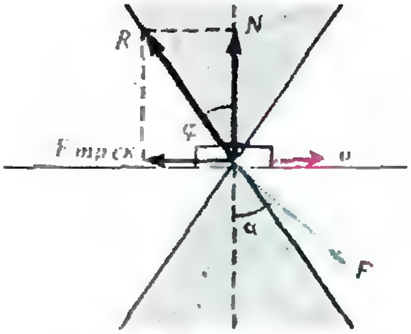


Рис. 1.

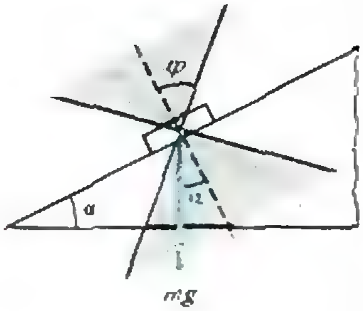


Рис. 2.

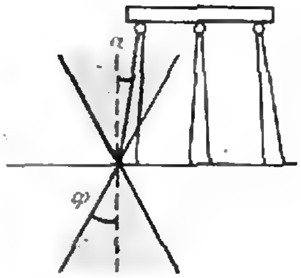


Рис. 3.

В этом случае как бы мы ни нагружали табуретку, ножки ее не разъедутся — сила, с которой каждая ножка действует на пол, лежит в пределах соответствующего конуса трения. Если же угол α сделать больше угла φ, то сила, с которой ножка действует на пол, выйдет за пределы конуса трения, ножки разъедутся и табуретка упадет.

У реальной табуретки ножки соединены с сидением не с помощью шарниров, а вклеены или вкручены в него. Однако, если сделать так, чтобы угол α превысил угол трения φ, в месте соединения ножек табуретки с сидением могут возникнуть значительные напряжения и табуретка сломается.

А. Варламов

Первый источник электрического тока

Электрический ток даже в простейшей электрической цепи может показаться несколько загадочным явлением. В самом деле, ток — это упорядоченное движение электрических зарядов, например электронов в металлическом проводнике. Упорядоченно двигаться их заставляет электрическое поле. Но, как известно, внутри проводников поля нет, кроме того работа электростатического поля по замкнутой траектории равна нулю (а электрические цепи, в которых протекает постоянный электрический ток, всегда замкнуты). Тем не менее в цепи при прохождении тока совершается работа. За счет этой работы, например, нагреваются проводники.

Почему же в цепи существует электрический ток и почему при его прохождении совершается работа?

И то, и другое возможно только потому, что где-то в цепи действуют неэлектростатические силы, которые могут создать и поддерживать в цепи электрическое поле и работа которых не равна нулю. Силы эти получили название *сторонних сил.* То место в цепи, где они действуют, носит название (не совсем удачное) *источника тока.*

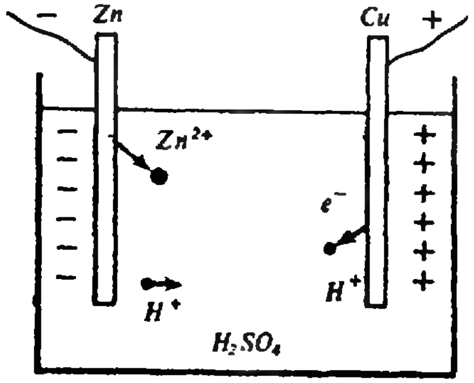
Что это за сторонние силы и как они действуют? В качестве примера рассмотрим первый в истории химический источник постоянного тока. Его придумал в самом конце XVIII века итальянский физик Алессандро Вольта (1745—1827). Теперь этот источник называют *элементом Вольта.* Он состоит из цинкового и медного электродов, погруженных в раствор серной кислоты.

Заметим, что медь и цинк состоят не из нейтральных атомов, а из положительных ионов соответствующего металла и электронов, оторвавшихся от атомов и ставших, как говорят, свободными. Следует иметь в виду, что и раствор кислоты состоит не из нейтральных молекул воды (H_2O) и серной кислоты (H_2SO_4). Значительная часть молекул H_2SO_4 в воде превращается в три иона — два положительно заряженных иона водорода и отрицательно заряженный ион кислотного остатка с двойным зарядом:

$$H_2SO_4 \rightarrow 2H^+ + SO_4^{2-}.$$

Посмотрим, что происходит, когда в такой раствор погружают электроды (см. рисунок). Начнем с цинка.

При погружении цинка в раствор кислоты начинается химическая реакция взаимодействия ионов SO_4^{2-} и Zn^{2+}, в результате чего ионы цинка отрываются от электрода и переходят в раствор. При этом на электроде оказывается избыток электронов, и он становится отрицательно заряженным. По мере накопления ионов Zn^{2+} в растворе некоторая их часть, при-



тягиваемая электродом, возвращается обратно. В конце концов устанавливается динамическое равновесие: число ионов, покидающих цинк, равно числу ионов, возвращающихся в него. Но электрод остается заряженным отрицательно, а раствор вблизи электрода (за счет ионов цинка) получает положительный заряд.

Появление дополнительных положительных ионов около цинкового электрода вызывает перераспределение уже имеющихся ионов внутри раствора. Часть отрицательных ионов из соседнего слоя перемещается ближе к электроду, а часть положительных ионов оттесняется в более удаленный слой. Подобные перемещения происходят во всех слоях раствора, вплоть до слоя, прилегающего к медному электроду. На нем происходит совсем другой процесс.

В отличие от цинка, медь почти не растворяется в кислоте, т. е. не посылает в раствор своих ионов. Наоборот, положительные ионы водорода из раствора, попадая на медный электрод, отбирают у него свободные электроны и нейтрализуются. Медь становится положительно заряженной, а раствор около нее приобретает отрицательный заряд.

Таким образом, медный электрод в элементе Вольта образует положительный полюс, а цинковый электрод — отрицательный. Разность потенциалов между ними составляет приблизительно 1,1 В.

Посмотрим теперь, что произойдет, если электроды соединить металлическим проводником. Свободные электроны во внешней части цепи (в проводнике) начнут двигаться от цинка, где они имеются в избытке, к меди, где их недостает. Это означает, что во внешней части цепи возникает электрический ток, направленный от меди к цинку.

А что же в самом элементе Вольта? Из-за ухода электронов с цинка равновесие между цинковым электродом и раствором нарушается, в результате чего дополнительное число ионов цинка будет переходить в раствор, поддерживая тем самым отрицательный заряд электрода. А из-за прихода электронов на медный электрод большее число положительных ионов водорода из раствора сможет нейтрализоваться на этом электроде. При этом положительный заряд меди тоже будет поддерживаться. Конечный результат обоих процессов таков: с медного электрода электроны уходят (они нейтрализуют ионы водорода), а на цинковом — появляются (из-за ухода ионов цинка), т. е. электроны как бы перетекают внутри раствора от меди к цинку. Понятно, что для этого какие-то неэлектростатические силы должны совершить определенную работу.

Мы видим, таким образом, что в то время как во внешней части цепи от цинкового электрода к медному движутся свободные электроны, внутри источника движутся ионы: положительные от цинка к меди и отрицательные от меди к цинку. Так в замкнутой цепи осуществляется круговой процесс перемещения электрических зарядов, т. е. электрический ток.

Какие же силы совершают работу по поддержанию постоянной разности потенциалов между медным и цинковым электродами? Это так называемые химические силы, действующие внутри элемента Вольта. Другими словами, можно сказать, что источником энергии электрического тока служит энергия, выделяющаяся при химических реакциях между электродами и раствором кислоты.

Отсюда получается, что так называемый источник тока в действительности есть источник энергии. За счет этой энергии и совершается работа по перемещению зарядов по цепи, проявляющаяся, в частности, в нагреве проводников. Энергию, приходящуюся на единицу заряда, обходящего цепь, называют *электродвижущей силой источника*.

В других источниках происходят другие процессы, действуют другие силы, но роль их всегда такая же, как и в рассмотренном нами элементе Вольта.

А. Кикоин

Дифракция волн

Дифракцией называется огибание волнами препятствия, их проникновение в область геометрической тени. Это одно из характерных явлений для волн любой природы.

Особенно заметно дифракция проявляется тогда, когда размеры препятствия сравнимы с длиной волны. Звуковые волны, например, имеют длину порядка метра, и их дифракцию обнаружить легко (звук можно услышать из-за угла). А вот у света длина волны составляет всего лишь доли микрометра, и в обычных условиях наблюдать дифракцию света трудно. Долгое время считалось даже, что свет всегда распространяется прямолинейно.

Качественно явление дифракции волн объясняется с помощью *принципа Гюйгенса*. Первую количественную теорию дифракции света построил французский инженер Огюстен Френель. В 1818 году он представил свой «Мемуар о дифракции света» на конкурс, объявленный Парижской академией наук. В следующем году этот мемуар был премирован, а позже напечатан в трудах Академии.

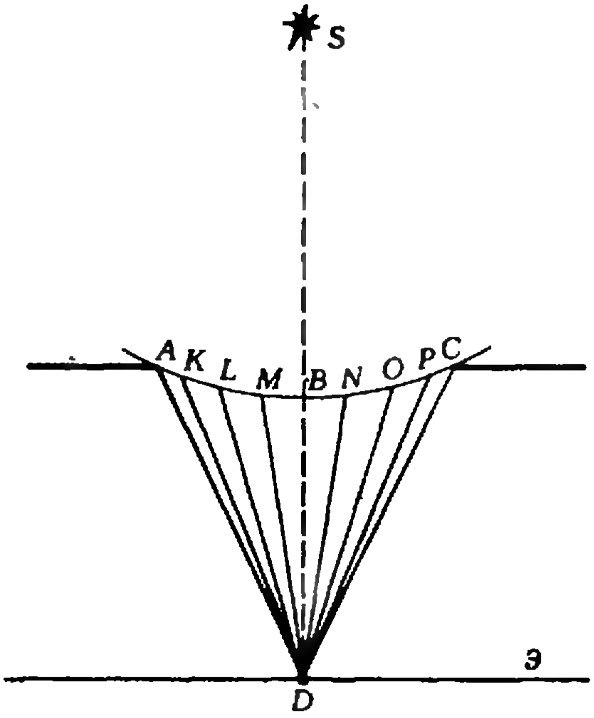


Рис. 1.

Среди членов комиссии, которой было поручено рассмотреть мемуар Френеля, был известный ученый С. Пуассон. Основываясь на теории Френеля, Пуассон проделал расчет для двух частных случаев дифракции на различных препятствиях, не разобранных Френелем, и получил парадоксальные результаты. В первом случае расчет показывал, что в центре геометрической тени от небольшого шарика, поставленного на пути света, должно наблюдаться светлое пятно. Во втором случае получалось, что после прохождения света через круглое отверстие в центре дифракционной картины может появиться темное пятно. Расчеты Пуассона были представлены как доказательство несостоятельности теории Френеля. Однако соответствующие эксперименты блестяще подтвердили все выводы френелевской теории. Этот факт сыграл немаловажную роль для начала широкого признания волновой природы света.

Давайте и мы разберемся в явлении дифракции поподробнее. Рассмотрим дифракцию света на круглом отверстии в непрозрачной ширме. На рисунке 1 дуга ABC изображает фронт волны, испущенной точечным источником света S, в момент достижения волной препятствия. Каждая точка фронта является, согласно принципу Гюйгенса, источником вторичных волн, а их интерференция, по теории Френеля, объясняет дифракционную картину на экране Э.

Чтобы рассчитать результат интерференции вторичных волн, например в точке D в центре экрана, применим метод, предложенный Френелем. Разобьем волновой фронт на зоны (зоны Френеля) по такому принципу: разность расстояний от крайних точек каждой зоны до экрана должна отличаться ровно на половину длины волны света:

$$AD-KD=KD-LD=LD-MD=$$
$$=MD-BD=\lambda/2.$$

Так поступают для того, чтобы воспользоваться известным свойством: волны, имеющие разность хода в половину длины волны (находящиеся в

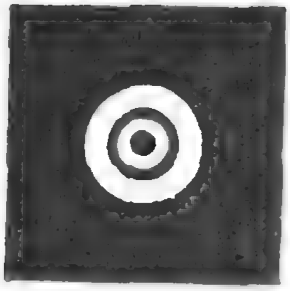


Рис. 2.

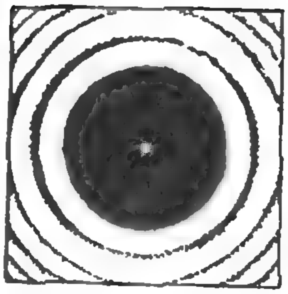


Рис. 3.

противофазе), при сложении гасят друг друга. Каждой точке одной зоны найдется соответствующая точка в соседней зоне, от которой волны придут в точку D в противофазе, а площади всех зон почти одинаковы. Поэтому действия соседних зон в точке D (например, первой и второй, второй и третьей и т. д.) практически уничтожают друг друга.

Теперь легко понять, при каких условиях можно наблюдать «парадокс Пуассона». Если в отверстии умещается четное число зон Френеля, то в центре экрана будет темное пятно. За ним располагается светлое кольцо, затем темное кольцо и т. д. Таким образом, на экране мы будем наблюдать систему чередующихся темных и светлых колец, но центральное пятно будет темным! (рис. 2). Если же в отверстии укладывается нечетное число зон, то результат будет обратным — в центре будет наблюдаться светлое пятно, окруженное чередующимися темными и светлыми кольцами. Дифракционную картину от небольшого шарика, изображенную на рисунке 3, попробуйте объяснить самостоятельно.

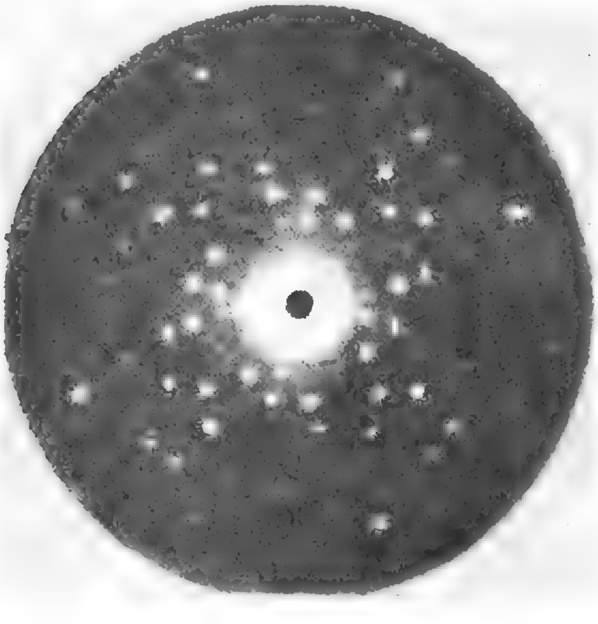


Рис. 4.

Ясно, что наблюдаемая дифракционная картина будет четкой, если число зон Френеля невелико. Так, для видимого света с длиной волны 5×10^{-7} м при диаметре препятствия 1 мм и расстояниях от препятствия до источника света и экрана порядка 1 м на препятствии укладывается всего несколько зон. В таком случае на экране хорошо различимы чередующиеся светлые и темные кольца. При бо́льших размерах препятствия (или при меньших расстояниях) картина становится менее чёткой.

В наше время удается наблюдать дифракцию не только световых волн, но и более коротковолнового рентгеновского излучения, длина волны которого составляет десятки ангстрем (напомним, что 1 ангстрем $=1$ Å $=10^{-10}$ м). Создать препятствия такого размера искусственно очень трудно. Но вот если на пути рентгеновских лучей расположить кристалл, в котором межатомные расстояния как раз такого порядка величины, то возникает дифракционная картина — *лауэграмма* (по имени немецкого ученого М. Лауэ, предложившего впервые в 1912 году использовать для наблюдения дифракции рентгеновских лучей кристалл). Лауэграмма состоит из пятен разной интенсивности, расположенных регулярным образом вокруг центрального пятна (рис. 4 — лауэграмма от пентаэритрита). Ее вид определяется характером «упаковки» атомов в кристалле. Опыты по дифракции рентгеновских лучей не только доказали волновую природу рентгеновского излучения, но и позволили выяснить геометрическую структуру различных кристаллов.

Л. Асламазов

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Доска, находящаяся на гладком полу, связана с лежащим на ней грузом нитью, перекинутой через блок (рис. 1). Масса доски M, груза m, коэффициент трения между ними μ. С каким ускорением будет двигаться доска, если приложить к ней горизонтальную силу F? Нить и блок можно считать идеальными.

2. С какой скоростью должен двигаться маленький шарик внутри гладкой сферы радиусом $R=26$ см, чтобы все время оставаться в горизонтальной плоскости на высоте $h=20$ см от нижней точки сферы?

3. От поезда, идущего с постоянной скоростью $v=64$ км/ч, отделяется пятая часть состава. Через некоторое время скорость отделившихся вагонов уменьшилась в 2 раза. Считая, что сила тяги при разрыве не изменилась, найдите скорость головной части поезда в этот момент. Сила сопротивления движению пропорциональна силе нормальной реакции.

4. Горизонтальная струя воды ударяется о вертикальную стену. После удара вода стекает по стене вниз. Найдите силу, с которой струя действует на стену, если площадь сечения струи $S=5$ см^2, а ее скорость $v=8$ м/с.

5. Снаряд, летящий горизонтально со скоростью v, разрывается на два осколка. Сразу после разрыва скорость одного осколка направлена вертикально и равна v, а скорость другого осколка равна $5\,v$. Найдите отношение масс осколков.

10 класс

6. Два одинаковых положительных заряда находятся на некотором расстоянии друг от друга. Во сколько раз увеличится сила, действующая на один из этих зарядов, если на середине прямой, соединяющей заряды, поместить третий заряд, такой же по знаку, но вдвое больший по величине?

7. Протон (масса m, заряд e) движется из бесконечности, где его скорость равна v, по направлению к неподвижной α-частице (масса $4\,m$, заряд $2\,e$). Найдите наименьшее расстояние между частицами в процессе движения.

8. Плоский конденсатор заряжен до напряжения U. Напряженность поля вне конденсатора (кроме небольшой области возле его краев) можно считать пренебрежимо малой по сравнению с напряженностью внутри конденсатора (рис. 2). Можно ли отсюда сделать вывод, что работа поля по перемещению пробного заряда q из точки A в точку B по траектории, проходящей вне конденсатора, равна нулю?

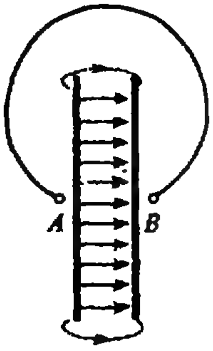


Рис. 2.

9. Два конденсатора, рассчитанные на максимальное напряжение $U=300$ В каждый, но имеющие различные емкости $C_1=500$ пФ и $C_2=300$ пФ, соединены последовательно. Какое наибольшее напряжение можно приложить к такому составному конденсатору?

10. Стеклянная пластина целиком заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора, емкость которого в отсутствие пластины $C=2$ мкФ. Конденсатор зарядили от источника с ЭДС $\mathcal{E}=1000$ В, после чего отключили от него. Найдите механическую работу, которую необходимо совершить против электрических сил, чтобы извлечь пластину из конденсатора. Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon=2$.

11 класс

11. Длина волны красного луча в воде равна длине волны зеленого луча в воздухе. Вода освещена красным светом. Какой цвет увидит человек, открывающий глаза под водой?

12. Для уменьшения паразитного отражения света от стеклянных поверхностей их покрывают тонкими пленками вещества, показатель преломления которого n меньше, чем у стекла (так называемое просветление оптики). Какой должна быть толщина пленки для достижения наилучшего эффекта на длине волны света λ?

13. Сколько главных максимумов можно наблюдать в дифракционной картине при нормальном падении монохроматического света с длиной волны $\lambda=600$ нм на решетку с периодом $d=3$ мкм?

14. Рентгеновская трубка, работающая под напряжением $U=66$ кВ при токе $I=15$ мА, излучает ежесекундно $N=10^{16}$ фотонов. Считая длину волны излучения равной $\lambda=10^{-10}$ м, определите КПД установки.

15. При увеличении частоты падающего на металл света в два раза задерживающее напряжение для фотоэлектронов увеличивается в три раза. Частота первоначально падающего света $\nu=1{,}2\cdot10^{15}$ Гц. Определите длину волны (в нанометрах) света, соответствующую красной границе фотоэффекта для этого металла.

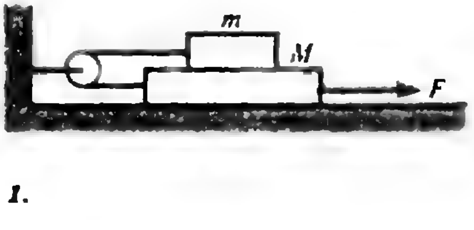


Рис. 1.

Публикацию подготовил А. Черноуцан

Синус и косинус

Синус и косинус — основные понятия тригонометрии — науки об измерении элементов треугольника. Их используют инженеры и строители, геодезисты и артиллеристы. Напомним, что синусом угла α называется ордината точки M единичной окружности с центром в начале координат, если угол между лучом OM и положительным направлением оси абсцисс равен α. А косинусом угла α называется абсцисса этой точки. Связь между этими функциями дают два соотношения:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

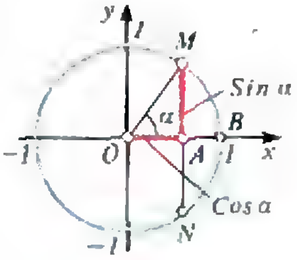
$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Любопытно, что синус ввели не древние греки, хотя они внесли огромный вклад в изучение геометрии треугольника, а индусы, математические интересы которых были ближе к практике. Само название синус является следствием грамматического недоразумения. Дело в том, что индусы называли длину хорды, стягивающей данную дугу, словом «джйя» или «джива», что означало тетиву охотничьего лука. А половину этой хорды называли «джйардха» или «архаджйа», а иногда для краткости называли ее так же, как и полную хорду. Арабы, сохранившие для нас знания древних греков, явились также переносчиками в Европу знаний и культуры Индии. В частности, «арабские цифры», которыми мы пользуемся, заимствованы ими от индусов. И понятие синуса тоже пришло к нам через арабов. В арабской транскрипции слово «джива» писалось как «джиба», потом оно превратилось в слово «джайб». Это не удивительно, поскольку арабы не пишут гласных букв, а обозначают их значками над текстом или под ним, а часто и вообще опускают. Слово «джайб» по-арабски означает «пазуха», поэтому переводчик арабского текста на латинский язык перевел это слово как *sinus*, что по-латыни означает «пазуха».

Индусы пользовались и косинусом, который они называли «котиджйа», и еще одной тригонометрической функцией, называвшейся «уткрамаджйа», а в Европе получившей название «синус-верзус» или «обращенный синус». Он определяется формулой

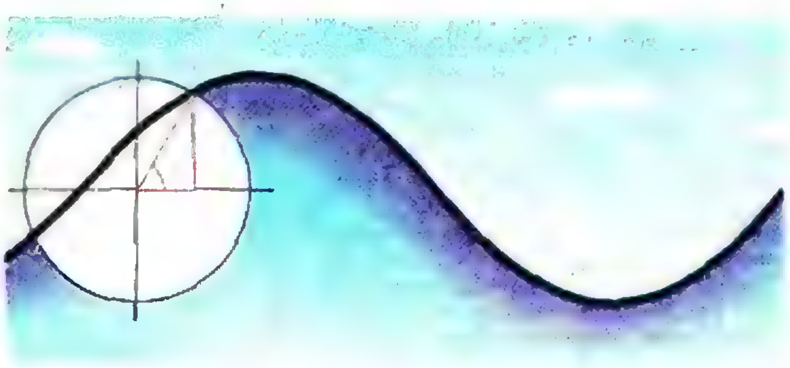
$$\operatorname{sinver}\alpha=1-\cos\alpha.$$

На рисунке отрезок MA — синус угла α, OA — косинус этого угла, а AB — его синус-верзус, являющийся высотой сегмента MNB. Любопытно, что в России высота сегмента часто называлась «стрелкой», что возвращает нас к индийскому охотничьему луку с тетивой MN.



Мы не станем здесь перечислять многочисленные тригонометрические формулы, а обратим свое внимание на график функции

$$y=\sin x.$$



Эта кривая, называемая *синусоидой*, сначала кажется очень искусственной, хотя ее волны напоминают волны на воде. И на самом деле, волны на воде, как и радиоволны, и световые, и звуковые волны, напрямую связаны с функцией

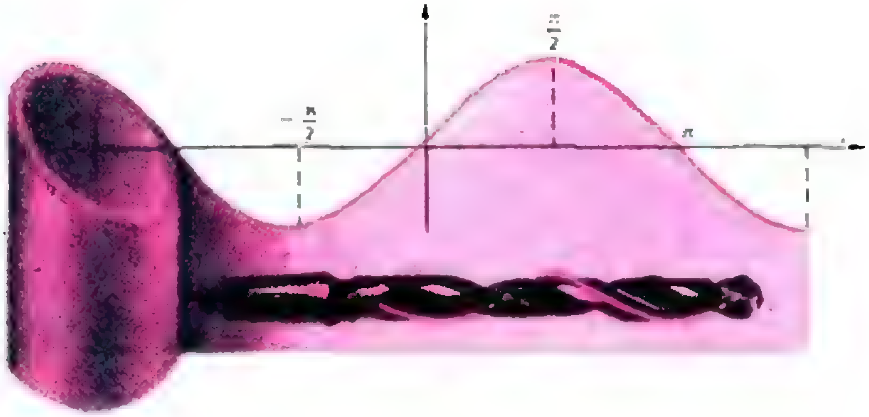
$$y=\sin x.$$

Чтобы получить шаблон для вычеркивания синусоиды, следует обернуть несколько раз свечу листом бумаги, а потом разрезать ее острым ножом под углом 45° к оси свечи (ее фитилю). Развернув бумагу, вы окажетесь владельцами двух отличных шаблонов синусоиды, если принять за единицу радиус свечи. Синусоидами называют также графики всех функций вида

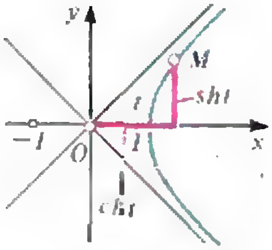
$$y=A\sin(kx+b)+c.$$

Эти кривые получаются из стандартной синусоиды сжатием или растяжением по осям и параллельным переносом. Поэтому график функции

$y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ будет синусоидой, как и график функции $y=\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$. Синусоиду можно увидеть также при взгляде на сверло или пружину.

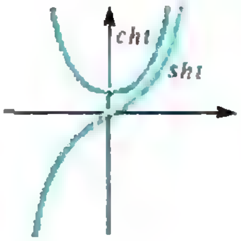


Рассмотрим теперь гиперболу $y=1/2x$ и повернем ее по часовой стрелке на 45° вокруг ее центра. Уравнение полученной кривой



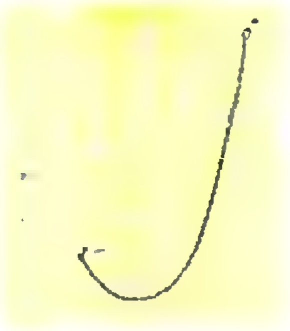
будет таким: $x^2-y^2=1$. Эта гипербола будет пересекать ось абсцисс в точках $A(1, 0)$, и $B(-1;\ 0)$, дальше мы будем рассматривать только правую ее половину. Пусть точка M лежит на гиперболе. Обозначим через t длину дуги AM, если точка M лежит в верхней полуплоскости, и через $-t$, если точка M лежит в нижней полуплоскости. При таком определении число t в зависимости от положения точки M может принимать любое вещественное значение. Теперь мы готовы ввести функции гиперболический синус и гиперболический косинус, положив их равными, соответственно ординате и абсциссе точки M. Они обозначаются так: sh t и ch t. Очевидно соотношение *между ними:* $\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{sh}^2 t=1$. Эти функции оказались связанными с тригонометрическим синусом и косинусом самым тесным образом при переходе от вещественных чисел к комплексным.

Графики функций $y=\mathrm{sh}\,t$ и $y=\mathrm{ch}\,t$ изображены на рисунке.

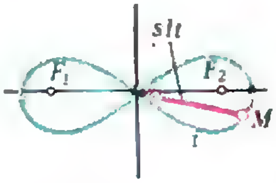


Видно, что одна из функций — четная, а другая — нечетная. График гиперболического косинуса называют также «цепной линией», поскольку *именно такую форму* принимает цепочка, подвешенная за концы.

Кроме тригонометрических и гиперболических, существуют и другие синусы и косинусы, например, лемнискатические, которые определяются через лемнискату Бернулли.



Эта кривая есть множество точек плоскости, произведение расстояний которых до двух заданных точек F_1 и F_2 постоянно и равно четверти квадрата расстояния между этими точками. По форме эта кривая напоминает восьмерку, а само слово «лемниската» означает бантик, которым связывали лавровый венок.



Рассмотрим лемнискату, у которой длина отрезка F_1F_2 равна $\sqrt{2}$. Ее уравнение будет таково:

$$(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2).$$

Более простым будет ее уравнение в *полярных координатах:*

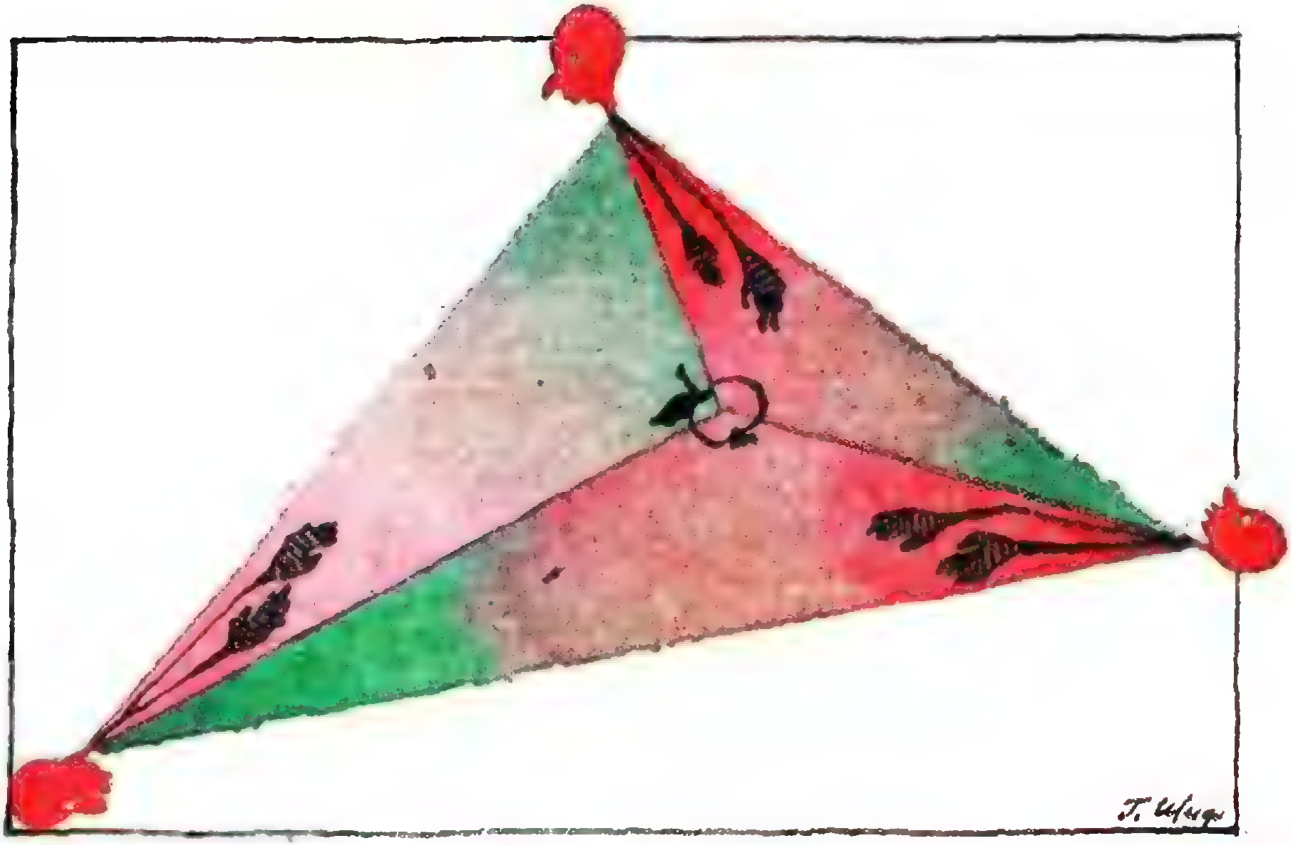
$$r^2=2\cos 2\varphi.$$

Аргументом функции и здесь будет длина дуги, отсчитываемая от точки O по часовой стрелке в правой половине лемнискаты и далее против часовой стрелки в левой ее половине. Лемнискатическим синусом sl t называют длину отрезка OM, если точка M лежит на правой половине кривой, и длину этого отрезка, взятую со знаком минус, если точка M лежит на левой половине кривой. Лемнискатический косинус определяется по формуле:

$$\mathrm{cl}\ t=\mathrm{sl}\,(\omega/2-t),$$

где ω — длина дуги одной половинки восьмерки. Полученные функции также имеют много общего с тригонометрическими. Их графики очень мало отличаются от синусоиды, а сами функции оказались *чрезвычайно полезными* в современной математике.

Материал подготовил А. Савин



Математический кружок

Точки Брокара

В. ПРАСОЛОВ

С каждым треугольником связано много замечательных точек: точка пересечения медиан, точка пересечения высот, центры описанной и вписанной окружностей. Есть и другие замечательные точки. Мы расскажем о двух из них — о точках Брокара.

Точка P, лежащая внутри треугольника ABC, называется первой точкой Брокара, если

$$\angle PAC=\angle PCB=\angle PBA$$

(рис. 1, а). Для второй точки Брокара должны выполняться равенства $\angle QAB=\angle QBC=\angle QCA$ (рис. 1, б).

Прежде чем рассказывать о свойствах этих точек, докажем, что для любого треугольника существует ровно одна первая точка Брокара, а также ровно одна вторая точка Брокара. Начнем с первой из них. Построим на сторонах треугольника ABC подобные ему треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1, как показано на рисунке 2. Так как $\angle PCB=\angle C-\angle PCA$, то равенства $\angle PAC=\angle PCB$ и $\angle PAC=\angle C-\angle PCA$ эквивалентны. Последнее равенство можно переписать в виде $\angle C=\angle PAC+\angle PCA=180°-\angle APC$. Для точки P, лежащей внутри треугольника ABC, это равенство равносильно тому, что она лежит на окружности, описанной около треугольника AB_1C. Аналогичные рассуждения для остальных углов показывают, что P — точка Брокара тогда и только тогда, когда она принадлежит описанным окружностям всех трех треугольников A_1BC, AB_1C и ABC_1. Пусть P_1 — точка пересечения описанных окружностей треугольников A_1BC и AB_1C, отличная от точки C. Тогда

$$\angle AP_1B=360°-AP_1C-\angle CP_1B=$$
$$=\gamma+\beta=180°-\angle AC_1B,$$

а значит, точка P_1 лежит и на описанной окружности треугольника ABC_1, т. е. $P_1=P$ — точка Брокара. Соединим ее со всеми вершинами рассматриваемых треугольников. Из равенства вписанных углов, опирающихся на одну дугу, следует, что углы между полученными отрезками именно такие, как указано на рисунке 2. А так как $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$, отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через точку P.

Задача 1. Постройте на сторонах треугольника ABC подобные ему треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1 так, чтобы отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекались во второй точке Брокара.

Итак, мы доказали, что для любого треугольника существует первая точка Брокара, причем ровно одна. Теперь можно начать обсуждать свойства точек Брокара. Если через центр O описанной окружности треугольника ABC провести прямые AO, BO и CO, то они пересекут окружность в таких точках A_1B_1 и C_1, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны (они симметричны относительно точки O). Точка Брокара обладает похожим свойством.

Задача 2. а) Пусть P — первая точка Брокара. Прямые AP, BP и CP пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle B_1C_1A_1$.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для второй точки Брокара.

Если из центра O описанной окружности треугольника ABC опустить перпендикуляры OA', OB' и OC' на его стороны, то точки A', B' и C' будут серединами сторон треугольника ABC, поэтому $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Точка Брокара P снова обладает похожим свойством.

Задача 3. Из первой точки Брокара P опущены перпендикуляры PA', PB' и PC' на стороны треугольника ABC. Докажите, что $\triangle ABC \sim \triangle B'C'A'$.

В некотором смысле задача 3 после задачи 2 уже излишняя. Дело в том, что справедливо следующее утверждение.

Задача 4. Прямые AX, BX и CX пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках A_1, B_1 и C_1; A', B' и C' — проекции точки X на стороны треугольника ABC. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$.

Обратимся теперь к углу $\varphi = \angle PAC = \angle PCB = \angle PBA$. Его можно выразить через углы треугольника ABC. Сотрем для этого на рисунке 2 все лишнее (см. рис. 3) и опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1K на прямую AC. Тогда

$$\operatorname{ctg}\varphi = AK/A_1K = AC/A_1K + CK/A_1K = (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma) + \operatorname{ctg}\beta.$$

Для второй точки Брокара мы получим точно такое же выражение. Углы, заключенные между 0° и 180°, равны тогда и только тогда, когда равны их котангенсы. Поэтому для второй точки Брокара мы получим тот же самый угол φ; он называется *углом Брокара*.

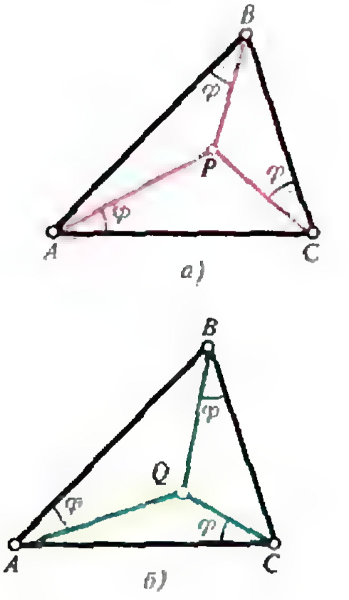


Рис. 1.

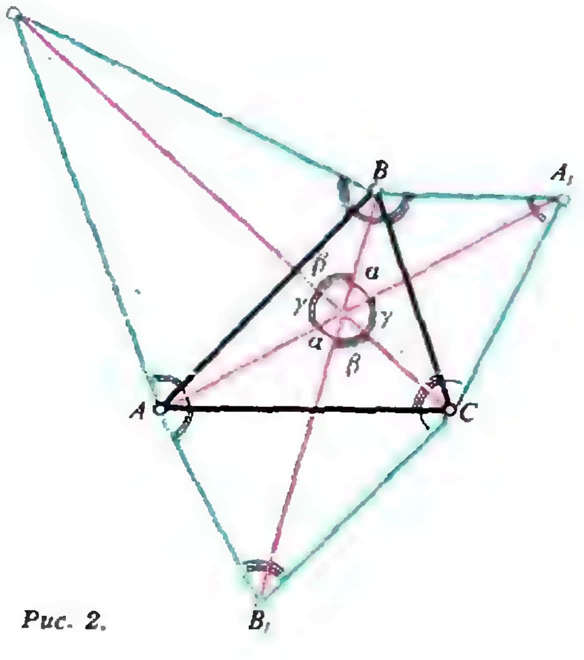


Рис. 2.

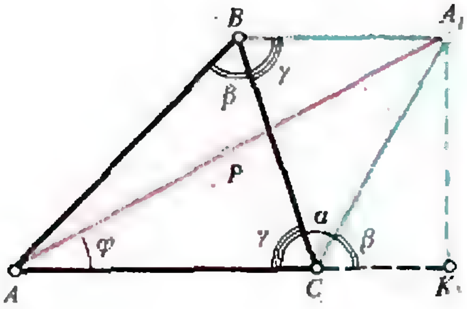


Рис. 3.

Задача 5. а) Докажите, что угол Брокара $\varphi \leqslant 30°$.

б) Внутри треугольника ABC взята точка M. Докажите, что один из углов ABM, BCM и CAM не превосходит 30°. (Отметим, что эта задача предлагалась в 1991 году на Международной математической олимпиаде.)

Обсудим более подробно совпадение углов для первой и второй точек Брокара. Пусть P и Q — эти точки. Отразим прямые AP, BP и CP относительно биссектрис углов A, B и C соответственно. Тогда полученные прямые пересекутся в точке Q. Впрочем, в этом отношении точки Брокара не исключение: для любой точки X, не лежащей на описанной окружности треугольника ABC, при отражении прямых AX, BX и CX относительно биссектрис соответствующих углов получаются прямые, пересекающиеся в одной точке. Мы не будем обсуждать подробно этот замечательный факт — это тема для отдельного разговора. Отметим лишь следующее.

Задача 6. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что прямые, симметричные прямым AO, BO и CO относительно биссектрис углов A, B и C соответственно, проходят через точку пересечения высот треугольника ABC.

Предлагаем вам решить еще несколько задач о свойствах точек и углов Брокара.

7. Пусть P — точка Брокара треугольника ABC; R_1, R_2 и R_3 — радиусы описанных окружностей треугольников ABP, BCP и CAP. Докажите, что $R_1R_2R_3=R^3$, где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

8. Пусть Q — вторая точка Брокара треугольника ABC; O — центр его описанной окружности; A_1, B_1 и C — центры описанных окружностей треугольников CAQ, ABQ и BCQ. Докажите, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, причем O — первая точка Брокара треугольника $A_1B_1C_1$.

9. Докажите, что из медиан треугольника ABC можно составить некоторый треугольник $A_1B_1C_1$, причем углы Брокара обоих треугольников равны.

10. Дан правильный треугольник ABC с центром O. Докажите, что угол Брокара треугольника, образованного проекциями точки X на стороны треугольника ABC, зависит лишь от длины отрезка OX.

Избранные задачи вступительных экзаменов
в серии
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КЛОНДАЙК»

В серию входят несколько сборников,
содержащих задачи вступительных экзаменов
в различные вузы страны за последние 20 лет.
Ко всем задачам даются ответы, подробные указания или решения.
В каждом сборнике задачи распределяются по главам,
а в пределах каждой главы — в порядке усложнения.
Самые трудные задачи соответствуют уровню Московского,
Санкт-Петербургского и Новосибирского университетов
и Московского физико-технического института.

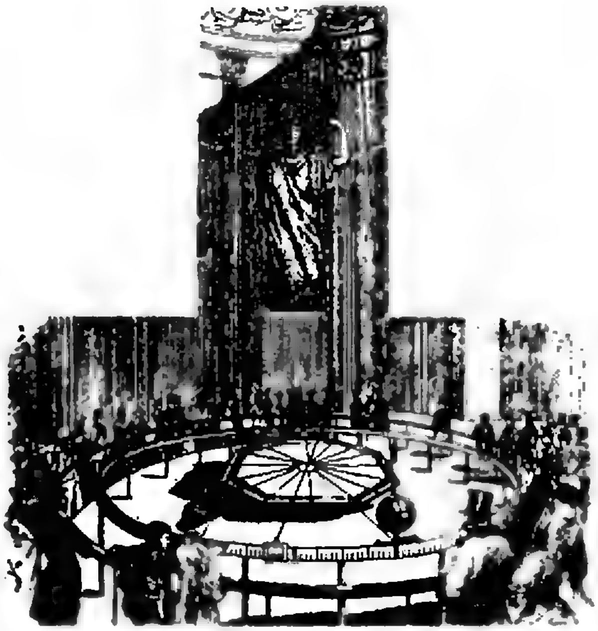
Сборник «514 ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ» вышел из печати
и высылается наложенным платежом по вашим заказам.
Стоимость, включая почтовые расходы, — 12 рублей,
для Якутской-Саха республики,
Камчатской, Магаданской и Сахалинской областей — 16 рублей.

Второй сборник серии — «ЗАДАЧИ НА ПОДОБИЕ» — выйдет
в первом полугодии 1992 года.

Заказы присылайте на листе бумаги размером с почтовую открытку
с написанным на нем вашим адресом (этот лист наклеивается на бандероль).

Наш адрес: 400087, Волгоград-87, а/я 1942.

Нам пишут



О маятнике Фуко

Известно, что первый опыт, подтверждающий вращение Земли вокруг своей оси, осуществил французский физик Жан Бернар Леон Фуко (1819—1868). Опыт проводился с помощью маятника, который теперь называют маятником Фуко. Он представляет собой массивный груз, подвешенный на длинном подвесе (проволоке или нити) так, что маятник может качаться в любой вертикальной плоскости. Если маятник отклонить от положения равновесия и отпустить, то действующие на груз силы тяжести и натяжения подвеса будут все время лежать в плоскости колебаний маятника и не смогут вращать эту плоскость по отношению к инерциальной системе отсчета, связанной со звездами. Однако наблюдатель, находящийся на Земле и вращающийся вместе с ней, будет видеть, что плоскость колебаний маятника медленно поворачивается в сторону, противоположную направлению вращения Земли. Это и подтверждает факт суточного вращения Земли.

Первый демонстрационный опыт колебаний маятника Фуко был проведен в здании Пантеона в Париже в 1851 году. Маятник имел груз массой 28 кг и подвес длиной 67 м. В нашей стране первый маятник Фуко был пущен в 1931 году в Исаакиевском соборе в Ленинграде. Он был еще более «представительным» — массой 54 кг и длиной 98 м.

Возникает естественный вопрос: почему маятник Фуко столь массивный и длинный? Попытаемся ответить.

С одной стороны, ясно, что чем дольше будут продолжаться колебания маятника, тем более заметным будет результат опыта. С другой стороны, известно, что любые собственные колебания всегда затухают. Выясним, от каких же параметров зависит время затухания колебаний маятника, и попробуем оценить эту величину.

Сначала заметим, что, если амплитудное отклонение s_m от положения равновесия маятника мало по сравнению с его длиной L, т. е. $s_m \ll L$, колебания можно считать гармоническими, а их период равным $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Представим время затухания t в виде $t = nT$, где n — число колебаний маятника. Разумно положить, что по порядку величины n определяется отношением максимального значения потенциальной энергии маятника к среднему значению работы силы сопротивления за период колебаний: $n \sim E_{pm}/\bar{A}_c$.

В каждый момент сила сопротивления, действующая на груз со стороны воздуха, равна $F_c \sim \rho_в v^2 R^2$, где $\rho_в$ — плотность воздуха, v — мгновенная скорость, R — линейный размер груза. Усредним это выражение. По аналогии с переменным синусоидальным током, запишем

$$\overline{v^2} = (v_m/\sqrt{2})^2 = 1/2\omega^2 s_m^2,$$

где $\omega = \sqrt{g/L}$ — циклическая частота колебаний. Тогда

$$\bar{F}_c \sim \rho_в R^2 \omega^2 s_m^2, \text{ и } \bar{A}_c \sim \rho_в R^2 \omega^2 s_m^2.$$

Легко показать, что максимальная высота подъема маятника

$$H = L - L\cos\alpha_m \approx s_m^2/(2L),$$

и

$$E_{pm} \approx Mgs_m^2/(2L) \sim \rho g R^3 s_m^2/(2L),$$

где M — масса груза, ρ — его плотность.

В результате получаем искомое время затухания колебаний маятника Фуко:

$$t = nT \sim \frac{E_{pm}}{\bar{A}_c} T \sim \sqrt{\frac{L}{g}} \frac{\rho}{\rho_в} \frac{R}{s_m}.$$

Проанализируем найденное выражение. Представим маятник, все линейные размеры которого в 100 раз меньше. Согласно выражению для t, время затухания колебаний такого маятника уменьшится в 10 раз. Соответственно ослабеет и эффект вращения плоскости колебаний. Вот почему маятник Фуко такой массивный и длинный.

В. Дроздов

Р-значит ракета

Золотой дирижабль

Доктор технических наук
В. БУРДАКОВ

«Честь имею представить Императорскому русскому Техническому обществу мою работу о металлическом аэростате вместе с его бумажной моделью... Прошу покорнейше, уважаемое общество, пособить мне, по мере возможности, материально и нравственно», — это строки из письма К. Э. Циолковского, переданного через Д. И. Менделеева в Техническое общество.*) Менделеев писал 26 сентября 1890 года: «...согласно с желанием г. Циолковского (очень талантливого господина) препровождаю в Техническое общество: 1) его письмо, 2) тетрадь его исследования о форме складного металлического аэростата и 3) бумажную модель к проекту г. Циолковского».

Как известно, седьмой (воздухоплавательный) отдел Императорского русского Технического общества постановил «оказать г. Циолковскому нравственную поддержку, сообщив ему мнение Отдела о его проекте. Просьбу о пособии на производство опытов отклонить». Председатель этого отдела инженер Е. С. Федоров тогда заявил, что «аэростат обречен навеки силою вещей остаться игрушкой ветров». Эти слова впоследствии неоднократно повторяли многочисленные поколения противников управляемых аэростатов. К сожалению, основания к пессимизму были. Напомним хотя бы такой факт.

Великобритания, Германия и США приняли на вооружение систему Цеппелина, однако эти дирижабли не оправдали грандиозных военных и политических надежд. Из 129 построенных «цеппелинов» 83 погибло (большинство из них вне всякой связи с военными действиями; так, 13 дирижаблей сгорело в эллингах от случайного воспламенения).

---

*) Известный русский ученый Д. И. Менделеев отличался разносторонними интерессами. В частности, он много сделал для воздухоплавания и авиации. Известно, что он помогал А. Ф. Можайскому при создании первого в мире самолета, изобрел и изготовил первый высотомер, высказвл идею о создании герметичной кабины для высотного управляемого аэростата, подробно изучил принцип полета птиц, совершил в г. Клину самостоятельный подъем на свободном аэростате в 1887 году для наблюдения солнечного затмения.

Потребовались годы труда, экспериментов, упорной работы по пропаганде управляемых аэростатов, в том числе и работы самого К. Э. Циолковского, чтобы проекты дирижаблей, основанные на новых конструкционных принципах, получили признание. Первая поднявшаяся в воздух модель такого дирижабля была собрана 15 сентября 1935 года из листов нержавеющей стали толщиной 0,1 мм. При сборке она имела длину 44 м, ширину 11 м и высоту 0,36 м. При наполнении водородом оболочка приняла форму веретена. Модель поднимала в воздух 200 кг балласта.

Известно несколько успешных попыток использовать аэростатическую силу и в ракетной технике. Прежде всего необходимо отметить, что ее стали учитывать при расчете летных характеристик тяжелых космических ракет. В качестве примера можно назвать космические ракеты и системы «Сатурн-5», «Энергия», «Спейс Шаттл». Кроме того, известны случаи применения в ракетной технике аэростатов. Например, в проекте Великобритании «Рокун» использовался аэростат типа «Скайхок», который поднимал на высоту до 25 км геофизическую ракету. Известны и более сложные проекты с аэростатами в качестве первых ступеней. Американская фирма «Боинг Эйрплейн» спроектировала для запуска и транспортировки ракет тороидальный баллон. Максимальный диаметр баллона 95 м, минимальный 43 м, а его грузоподъемность рассчитана на ракету массой до 45 т. Баллон разделен на 16 отсеков общим объемом 10^5 м^3 и выполнен из майларовой пленки. Этой же пленкой затянуто внутреннее отверстие тора, причем проведенные фирмой исследования показали, что струя от двигателей ракеты не вызывает разрушения баллона, т. е. аэростатная конструкция первой ступени может быть многоразовой. Баллон заполняется водородом или гелием, высота его подъема с ракетой 6 км, скорость в горизонтальном направлении при транспортировке ракеты на этой же высоте около 120 км/ч. Последняя достигается при одновременной работе установленных на баллоне трех авиационных двигателей, мощность каждого из них 3400 л. с. Двигатели закреплены шарнирно, что обеспечивает широкие возможности для маневрирования и парирования ветровых возмущений.

Об эффективности аэростатических летательных аппаратов говорит такой факт. 20 июня 1958 года корреспондент агенства «Юнайтед Пресс Интернешнл» передал из г. Миннеаполиса сообщение о запуске в США пластмассового аэростата с грузом 102 кг на высоту 40 км. Такая огромная высота (для ее достижения космическая ракета расходует более 60 % своей начальной массы!) — не предел для аэростатических систем.

Использование аэростатических подъемных сил целесообразнее всего начать с создания комбинированных систем, например реактивно-аэростатических.

Так, заполненное газообразным водородом сигарообразное тело способно на начальном участке движения в земной атмосфере использовать аэростатическую силу, а затем — реактивную, получаемую путем истечения того же самого водорода и его сгорания в воздушно-реактивном двигателе (ВРД). Подобный аппарат можно модифицировать, если на его передней части установить массозаборное устройство, а на хвостовой — реактивное сопло. Работая как ВРД с огромной камерой сгорания, плотность газа в которой меньше плотности окружающего воздуха, такой аппарат будет одновременно с реактивной развивать ощутимую аэростатическую силу. Вместо сгорающего горючего для нагрева воздуха может быть использован ядерный реактор.

Существуют, наконец, многочисленные проекты, в которых искусственно увеличивается вертикальный градиент внешнего давления, который и создает аэростатическую силу.

Наибольшее распространение получили проекты специальных пусковых установок, выполненных в виде вертикальных труб, внутри которых размещается ракета. В верхней части трубы, т. е. в области над ракетой, создается искусственное разрежение, а под ракетой за счет втекания воздуха, продуктов сгорания, воды (если труба опущена в море) или при комбинированных воздействиях возникает повышенное давление, создающее выталкивающее усилие. Исследования эффективности подобных сооружений проводятся длительное время в США. Установлено, в частности, что для организации подобного старта ракеты «Атлас» (стартовая масса 115 т) с ускорением 10 g требуется пусковая труба высотой 265 м и диаметром 3 м.

Подобные пусковые системы несколько напоминают увеличенные до гигантских размеров артиллерийские орудия, которые для запуска первых отечественных прямоточных двигателей были применены работниками ГИРДа еще в 1933 году. Необходимо отметить, что возможность применения артиллерийских орудий для предварительного разгона небольших ракет, а также аэродинамических моделей изучается до сих пор. В частности, в США при проведении подобных экспериментов используются тяжелые орудия с диаметром ствола более 400 мм.

Вертикальные потоки атмосферного воздуха, вызванные местными аномалиями вертикальных градиентов давления или устойчивыми ветрами, взаимодействующими с горным рельефом поверхности Земли, также могут быть в принципе использованы для подъема летательных аппаратов. Эта проблема, хорошо знакомая планеристам, может оказаться весьма актуальной и в космонавтике.

Приведем ряд довольно простых рассуждений, из которых можно понять основные закономерности, лежащие в основе работы аппаратов, использующих аэростатическую подъемную силу. Известный из школьных курсов физики закон Архимеда позволяет сделать вывод о том, что удельная (приходящаяся на 1 м^3 объема летательного аппарата) архимедова сила равна:

$$F_А = \varrho g,$$

где $F_А$ — архимедова сила, ϱ — плотность атмосферы, g — ускорение свободного падения. Таким образом, чем больше объем и чем меньше масса собственно конструкции аппарата, тем больше масса поднимаемого полезного груза.

Удельная (приходящаяся на единицу площади) аэродинамическая (ветровая) сила $F_в$, действующая на аппарат, движущийся со скоростью v, равна

$$F_в = C\varrho v^2/2,$$

где C — экспериментальный аэродинамический коэффициент сопротивления, который для сферических аппаратов не зависит от направления обдувки.

Наконец, массы конструкционно подобных аппаратов (имеющих, например, разные размеры, но одинаковую удельную прочность оболочки и одинаковое давление в ней) определяются как

$$m = \gamma l^3,$$

где γ — постоянный коэффициент, l — характерный размер аппарата (например, диаметр для сферической формы).

Устойчивость аппарата к ветровым воздействиям определяется нагрузкой на его мидель*), т. е. отношением массы аппарата к площади его поперечного сечения. Очевидно, что с увеличением размера аппарата l масса растет быстрее, чем мидель, так как она пропорциональна l^3, а мидель — только l^2. Нагрузка на мидель при этом возрастает пропорционально l. Одновременно уменьшается зависимость от воздействия ветра и от турбулентности атмосферы.

Таким образом, увеличение абсолютных размеров летательных аппаратов «легче воздуха» выгодно в отношении их грузоподъемности и оправдано с точки зрения их устойчивости и управляемости.

Использование летательных аппаратов аэростатического типа возможно не только в пределах земной атмосферы, но и в плотных атмосферах других планет, например в атмосфере Венеры, где этот принцип наиболее эффективен. Действительно, организация экспедиции с посадкой на поверхность планеты довольно проблематична. Высокая температура атмосферы на поверхности Венеры (760 К) в сочетании с большим давлением (10^7 Па)**) практически исключают возможность пребывания там человека (во всяком случае, по современным представлениям).

Многочисленные эксперименты, проведенные на спускаемых аппаратах станций «Венера», показали, что на высотах между 40 и 50 км от ее поверхности давление и температура примерно соответствуют земным. Кроме того, на высоте около 49 км заканчивается облачный покров и видимость становится удовлетворительной. Таким образом, спускаемый аппарат, выполненный в виде заполняемого гелием баллона и останавливающийся при снижении в атмосфере Венеры на высоте, соответствующей земным температуре и давлению, смог бы стать уникальным средством для пребывания людей около этой до сих пор загадочной планеты. Возможность регулирования высоты полета в зависимости от изменения давления, свободного перемещения вдоль поверхности планеты, сбрасывания на поверхность и запуска в лежащие выше слои атмосферы радиозондов и, наконец, использования окружающей среды для вентиляции и жизнедеятельности (путем выделения кислорода из углекислого газа атмосферы) создает условия для пребывания экипажа на Венере более комфортные, чем на Марсе.

---

*) Мидель — наибольшее по площади сечение движущегося тела плоскостью, перпендикулярной направлению движения.

**) Давление атмосферы на поверхности Земли 10^5 Па.

К этому необходимо добавить, что отработка такого летательного аппарата может быть проведена в земных условиях. И наконец, возможно применение на первом этапе автоматических аппаратов подобного типа. Такие аппараты, достигающие поверхности Венеры, уже созданы.

Заканчивая рассказ об аппаратах, использующих «даровую», по словам К. Э. Циолковского, аэростатическую силу, аппаратах, работа которых практически не приводит к загрязнению окружающей среды, можно еще раз сказать об их «многоликой» применимости. Это и самые дешевые транспортные средства, и универсальные атмосферные лаборатории, и первые ступени космических ракет-носителей, и, наконец, уникальные лаборатории, которые могут оказаться незаменимыми средствами для исследования многих планет Солнечной системы.

Хорошо известно, что не только Венера, но и такие планеты, как Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун, имеют мощную атмосферу. Атмосфера обнаружена (непосредственными наблюдениями или теоретически) у некоторых спутников планет. Ее имеют, например, так называемые галилеевские спутники Юпитера: Ио, Европа, Ганимед и Каллисто. Имеется атмосфера и у Титана — спутника Сатурна, и у Тритона — спутника Нептуна. Пока еще мало данных о составах и термодинамических параметрах этих атмосфер, однако уже сейчас можно представить, что по аналогии с земными условиями атмосферы планет и их спутников будут затруднять, если не предусмотреть их специальное использование, возможность покидания этих небесных тел ракетными летательными аппаратами, уносящими пробы грунта, автоматические зонды или даже персонал будущих экспедиций. Один из рациональных способов использования планетных атмосфер — создание аппаратов аэростатического типа или комбинированных систем, применяющих также самолетные, вертолетные или атмосферно-реактивные методы создания тяговых усилий в дополнение к аэростатическим.

Напомним, что К. Э. Циолковский, предвидя широкие возможности использования в будущем аппаратов «легче воздуха», говорил, что все затраты по созданию и строительству дирижаблей будут возмещены даже в том случае, если они будут изготовляться из чистого золота.

Олимпиады

Первая математическая олимпиада Мексики

В 1990 году в Мексике прошла первая олимпиада по математике. В заключительном туре, проходившем по традиционной схеме в два дня, участвовало 62 школьника. И в первый, и во второй день предлагалось по четыре задачи, на решение которых отводилось по 4,5 часа.

Задачи

1. Докажите, что если сумма двух несократимых дробей — целое число, то эти дроби имеют одинаковые знаменатели.

2 Сколько целых положительных делителей имеет число 20! (20!=1 · 2 · 3...20)?

3. Даны две параллельные прямые l и l'. Точка P лежит на равных расстояниях от этих прямых. Пусть точки A и B на прямых l и l' такие, что угол APB — прямой. Опишите множество точек M — проекций точки P на отрезок AB.

4. Найдите произведение всех целых положительных чисел, не превосходящих 100, которые имеют ровно три целых положительных делителя. Покажите, что каждое такое число есть полный квадрат.

5. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка M. Обозначим через P и Q проекции этой точки на катеты AB и AC соответственно. Докажите, что треугольник BMP, треугольник CMQ и прямоугольник $MPAQ$ не могут одновременно иметь одинаковые площади.

6. Докажите, что для любого положительного целого числа n число $(n^3-n)(5^{3n+4}+3^{4n+2})$ делится на 3804.

7. Докажите, что для всех положительных целых чисел дробь

$$\frac{n^2+n-1}{n^2+2n}$$

несократима.

8. а) Через точку S в пространстве проведены три прямые l, m и n. Проведена плоскость, перпендикулярная прямой m и пересекающая прямые l, m и n в точках A, B и C соответственно. Углы ASB и BSC равны по 45°, а угол ABC — прямой. Найдите величину угла ASC.

б) Пусть P, Q и R — точки пересечения плоскости, перпендикулярной к прямой l, с прямыми l, m и n соответственно. Пусть также $SP=1$. Найдите длины сторон треугольника PQR. (Можно использовать теорему косинусов для треугольника со сторонами a, b и c: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, где α — угол между сторонами a и b).

Из дальних странствий

Гуд бай, Америка?..

За последние годы столько советских школьников побывало в Соединенных Штатах Америки, что сама по себе поездка очередной группы не выглядит чем-то из ряда вон выходящим. И тем не менее есть по крайней мере два обстоятельства, выделяющих для нас эту поездку от любой другой.

Первое обстоятельство связано с тем, что в третий раз подряд старт одной из групп (а именно о ней и идет речь) обеспечивает журнал «Квант». В этот раз основа группы состояла из победителей космического конкурса «К—Q», проведенного журналом «Квант» в 1990 и 1991 годах.

Это обстоятельство, как понимает читатель, приятное. Чего не скажешь о втором. Но о нем — в конце нашего репортажа.

Любая летняя поездка — удовольствие. Что уж тут говорить о поездке за океан! Советские школьники провели 2 недели в международной школе, расположившейся на территории Военной академии в красивейшем местечке Лонг-Айленд (штат Нью-Йорк). Сама академия, как говорят, напоминает суворовское училище. Может и так, но нам показалось, что и учебные корпуса, и спортивные сооружения, и огромное пространство, занимаемое академией, создают сугубо вольное настроение. Не случайно «объекты» академии не пустуют и летом.

Нынешняя школа — «космическая» еще и потому, что в числе преподавателей были профессор К. Феоктистов — участник полета на первом многоместном космическом корабле и А. Серебров, совершивший полеты на станциях «Салют-7» и «Мир».

К. Феоктистов прочел цикл лекций, связанных с вопросами проектирования космических аппаратов и с оценками задач, стоящих перед разработчиками космической техники. А. Серебров рассказал об использовании эффекта невесомости во время космического полета, а также о трудностях, которые этот эффект вызывает в работе.

Космическая тема, однако, не была единственной на занятиях в школе. Прекрасные лекции по молекулярной биологии прочел израильский профессор Э. Трифонов. Большим интересом пользовались и лекции по математике, которые читал сам директор школы — Э. Лозанский. И это не случайно. Ведь как Э. Трифонов, так и Э. Лозанский имеют уже многолетний опыт проведения занятий в школе.

Кроме советских школьников (учащихся 7—10 классов), под крышей академии были собраны ребята из США, Франции и Швейцарии.

Как всегда, занятия перемежались спортивными сражениями и концертами (силами самих участников школы), поездками к океану и знакомством с культурными и историческими достопримечательностями.

По окончании школы все участники переехали в Вашингтон, где их ждали в университетском городке Джорджтауна. В оставшиеся семь дней для школьников и преподавателей были организованы замечательные экскурсии не только в Вашингтоне, но и в Филадельфии и Балтиморе.

Со своими впечатлениями по традиции делятся сами участники международной школы.

***Илья Тараскин** (Ужгород): Поездка была очень интересной и полезной. Меня больше всего поразила духовная атмосфера, а не материальная обеспеченность. Здесь понимаешь, с какой стороны надо начинать реформы в нашей стране.*

***Константин Петухов** (Старый Оскол): Школа запомнится на всю жизнь. Для меня важными были не только занятия, но и чисто житейская сторона поездки. Удивило меня то, что, как только мы попали в мир порядка и рациональности, все (или почти все) стали жить по его законам... Мне показалось, что из книг и фильмов об Америке я знал достаточно много, но увиденное впечатляло гораздо больше... Я очень благодарен хозяевам за их теплый прием и дружеское отношение, несмотря на то, что мы не всегда были на высоте... Спасибо!*

***Игорь Сперанский** (Донецк): Приехали! Уехали! Три недели пролетели очень быстро. Прекрасная страна и люди, но домой все равно тянет. Все получили массу впечатлений и все очень довольны!*

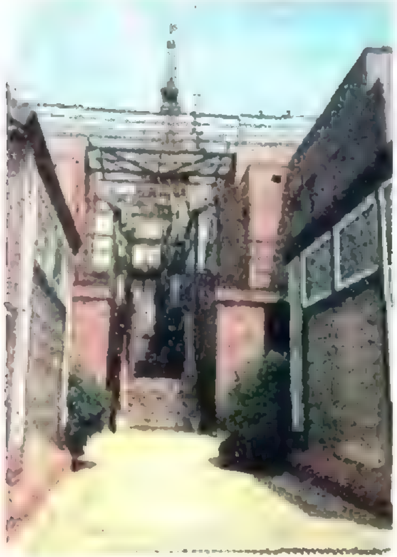
***Ульяна Новикова** (Москва): Что удивительное — всем всего хватает!*

***Антон Бакулев** (Санкт-Петербург): Самая важная отличительная черта — доброжелательное отношение друг к другу. Даже если ты сам кого-нибудь случайно заденешь или толкнешь, тебе же скажут «Простите» и... улыбнутся!*

Лонг-Айленд. В ожидании звонка.

Балтимор.
За нами — «Крузенштерн».

Вашингтон.
Горки «американские»... или «русские»?



***Рубен Ениколопов** (Москва): Единственной для меня неожиданностью оказались люди. Желание сделать добро окружающим поражает...*

***Тимур Рашба** (Махачкала): Посетить все лекции было невозможно из-за того, что они проходили одновременно. Поэтому скажу о лекциях К. Феоктистова. Подкрепленные математическим аппаратом его рассуждения полностью, к сожалению, отвергают мечты о полетах в далекий космос...*

Запомнились шахматные баталии. Причем не только между собой. В один из дней мы дружно, всем лагерем проиграли трехкратному чемпиону США Льву Альбурту.

Мне очень понравилась практичность американцев. К примеру, повезли нас в Брукхейвенскую национальную лабораторию. Там стоит давно заглушенный атомный реактор. Сейчас он используется в качестве музейного экспоната. Хотя реактор и старый, но посмотреть все равно интересно. Кроме этого, нам показали огромный ускоритель заряженных частиц. Посетили мы и Космический центр им. Р. Годдарда, одного из основоположников космонавтики. Оказалось, что центр приспособлен для экскурсий еще лучше. Одна из стен комнаты — стеклянная. Мы стояли и смотрели, а за стеклом работали люди. Они руководили испытаниями по новому варианту запуска корабля «Спейс Шаттл». В другом помещении собирали и испытывали космические аппараты, в третьем — находится межконтинентальная телефонная станция. Показали нам также одну из самых чистых комнат в мире, где шла сборка космического телескопа «Хаббл». Это — гражданские организации. Но была и экскурсия по главному военному ведомству — Пентагону. И хотя там, конечно, нет кабинетов со стеклянными стенами и фотографировать можно не везде, в отличие от космического центра, но даже пройтись по коридорам было очень интересно. Там выставлены флаги различных полков США, множество исторических документов, есть даже рисунки, сделанные солдатами во время различных войн и в мирное время. И все это для того, чтобы налогоплательщик, гражданин Соединенных Штатов Америки, видел, что деньги его идут на полезные для его страны, а значит и для него, дела...

Мы были еще во многих музеях и на выставках. Произвело впечатление, что вход на них бесплатный...

Несомненно, что поездка всем нам дала очень многое. Мы познакомились с культурой другой страны, во многом отличной от нашей. Это должно изменить жизнь всех участников школы в лучшую сторону. В итоге это будет сказываться и на жизни других людей в нашей стране (если такие школы будут проводиться и в будущем). Горячо благодарю всех задумавших и осуществивших школу!

Вашингтон.
Университетский городок.

А теперь вернемся ко второму обстоятельству. Действительно, немного грустному. Речь идет о галопирующих ценах на авиабилеты и на оформление выездных документов. Поэтому редакция очень опасается, как бы третья школа не стала последней. И все же не будем прощаться, а скажем осторожно: «До свидания, Америка!»

Информация

Новый прием во Всесоюзную заочную многопредметную школу на отделения «Математика» и «Языки и литература»

Всесоюзная заочная многопредметная школа Академии педагогических наук при Московском университете им. М. В. Ломоносова*) принимает на индивидуальное обучение учащихся восьмых классов общеобразовательных школ, гимназий и лицеев, а также учащихся СПТУ, за исключением проживающих в Москве и Санкт-Петербурге.

Цель ВЗМШ — рассказать своим ученикам о многих увлекательных вещах, связанных со школьным курсом, предложить и помочь решить интересные разнообразные задачи, приучить самостоятельно работать с книгой и грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге.

Всем окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик» — см. ниже) выдаются соответствующие удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ надо хорошо выполнить вступительную контрольную работу, помещенную ниже. Преимуществом при этом пользуются ребята, проживающие в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах.

Чтобы быть принятым в ВЗМШ, не обязательно решить все задачи. Решения надо записать на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью; не сворачивайте ее в трубку. На обложку наклейте листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	**Московская**
Фамилия, имя ученика	**Иванов Петр**
Год рождения	**1978**
Класс и школа	**8 класс «Б» школы № 2**
Фамилия, имя, отчество учителя (математики или русского языка и литературы)	**Орлов Борис Петрович**
Место работы и должность родителей	**Отец — шофер автобазы № 3** **Мать — медсестра больницы № 1**
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	**123456, Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1.**

1	2	3	4	5	6а	6б	7	8	9	10	11а	11б	12	Всего

В тетрадь вложите два листка бумаги размером 6×14 см с четко написанным вашим адресом (включая индекс), фамилией и именем, а также конверт с адресом.

Задачи в работе должны идти в том же порядке, что и у нас: запишите сначала условие, а затем решение.

Если вы хотите поступить сразу на несколько отделений — каждую работу присылайте в отдельной тетради!

Срок отправки вступительных работ — не позднее

по математике — 30 апреля;

по языкам и литературе — 15 апреля

1992 года (по почтовому штемпелю).

Если вы выдержите конкурс, то начиная с сентября 1992 года будете получать наши материалы, содержащие изложение теоретических вопросов, задачи для самостоятельного решения (с образцами решений) и контрольные работы. Все контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ, а также научными сотрудниками различных учреждений. Филиалы работают по тем же программам и пособиям, что и московская группа ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться (это можно сделать без ограничений с любого месяца в любом отделении связи; подписной индекс 70465; журнал распространяется только по подписке).

Для поступающих на отделение «Математика»

Вступительную работу надо выслать по адресу: *119823, Москва ГСП, МГУ, ВЗМШ (на прием), отделение «Математика»* или по адресу соответствующего филиала.

Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Бишкек (Фрунзе), Воронеж, Гомель, Донецк, Екатеринбург (Свердловск), Иваново, Ижевск, Краснодар, Красноярск, Махачкала, Нальчик, Ростов-на-Дону, Самара (Куйбышев), Ташкент, Ульяновск — филиал МГУ, Худжанд (Ленинабад), Чебоксары, Челябинск, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Брянск, Витебск, Вятка (Киров), Луцк, Магадан, Павлодар, Петроза водск, Тернополь, Уральск, Целиноград, Череповец; работает также филиал в Могилеве при областном Дворце пионеров.

---

*) Так пока называется Всесоюзная заочная математическая школа, которая имеет сейчас 3 отделения «Математика», «Биология», «Языки и литература».

Учащиеся, проживающие на Северо-Западе России (в Архангельской, Калининградской, Петербургской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми республиках), в Беларуси (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей) и в прибалтийских республиках присылают свои работы по адресу: *198097, Санкт-Петербург, ул. Трефолева, д.32, С-З ЗМШ (на прием)*.

Без контрольной работы, только по заявлению, принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзной и республиканских, а также победители краевых и областных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься по той же программе в группах «Коллективный ученик». Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1992 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1992 года начнет учиться в 9 классе и для тех, кто начнет учиться в 10 классе (соответственно на I и II курсе СПТУ). Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с приложением списка учащихся и указанием класса, в котором они будут учиться в 1992/93 учебном году.

Заявление должно быть подписано директором школы (СПТУ) и заверено печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявление следует направлять в адрес ВЗМШ.

Для поступающих на отделение «Языки и литература»

Все поступающие на отделение «Языки и литература» независимо от места проживания высылают решения вступительной работы по адресу: *119823, Москва ГСП, МГУ, ВЗМШ (на прием), отделение «Языки и литература»*.

Принимаются также группы «Коллективный ученик» под руководством учителя русского языка и литературы, родного языка и литературы или иностранного языка.

Вступительная работа («Математика»)

1. Для выборов одного из двух кандидатов в президенты образован 1001 избирательный округ по 10001 избирателю в каждом. Сначала происходят выборы в каждом округе. Побеждает тот кандидат, за которого высказалось большинство округов. Какое наибольшее число голосов мог набрать проигравший кандидат в президенты?

2. От пристани A вниз по течению реки к пристани B отплыл плот. Одновременно от B отплыл в A катер и через 25 минут встретил плот. После прибытия в A катер сразу же развернулся и приплыл в B одновременно с плотом. Больше или меньше часа заняло плавание?

3. Две окружности касаются внутренним образом третьей окружности радиуса R и касаются друг друга (внешним образом). Чему равен периметр треугольника с вершинами в центрах этих окружностей?

4. Найдите все натуральные n, при которых число $\dfrac{19n+91}{(n+17)}$ целое.

5. Биссектриса внешнего угла при вершине A треугольника ABC пересекает продолжение стороны BC в точке E. Докажите, что если длина AE вдвое больше высоты треугольника, опущенной из вершины A, то один из углов B и C треугольника на 60° больше другого.

6. а) Можно ли занумеровать ребра куба числами 1, 2, ... 12 так, чтобы сумма номеров трех ребер, выходящих из каждой вершины, была одна и та же?

б) Тот же вопрос для номеров —6, —5, ... —1, 1, 2, ... 6.

7. Докажите, что $224\underbrace{999\ldots9}_{\substack{100\\ \text{девяток}}}1\underbrace{000\ldots0}_{\substack{102\\ \text{нуля}}}9$ — квадрат целого числа.

8. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри треугольника до его вершин больше половины его периметра.

9. Жители города N делятся на рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда лгут. Однажды 15 жителей этого города встали в круг и каждый из них заявил, что один из его соседей — рыцарь, а другой — лжец. Сколько рыцарей и сколько лжецов могло быть среди этих 15 человек?

10. Найдите все решения в целых положительных числах уравнения

$$x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4+\ldots+x_{14}^4=1992.$$

11. В вершинах правильного n-угольника расставлены синие и красные фишки. Верно ли, что найдутся три фишки одного цвета, расположенные в вершинах равнобедренного треугольника, если: а) $n=7$; б) $n=8$?

12. Винни-Пух шагает вниз в метро по равномерно движущемуся эскалатору. Если он каждую секунду будет проходить вниз две ступеньки, то всего за время спуска насчитает 50 ступенек. Если каждую секунду он будет проходить вниз три ступеньки, то всего насчитает их 60. а) Сколько времени продолжался бы спуск, если бы Винни-Пух не шагал, а просто стоял на эскалаторе?

Сколько ступенек он насчитает, если каждую секунду будет проходить вниз: б) 6 ступенек; в) x ступенек? г) Нарисуйте график зависимости числа пройденных ступенек от x.

Вступительная работа («Языки и литература»)

1. Даны фразы на японском языке и их переводы на русский язык:

1) Сэнсэй-га боку-но мура-кара мати-э итта.
Учитель шел из моей деревни в город.
2) Боку-но томодати-га сэнсэй-но хон-о тотта.
Мой товарищ брал книгу учителя.
3) Хигаси-кара-но кадзэ-га мура-дэ фуйта.
В деревне дул восточный ветер.
4) Сэнсэй-га мити-дэ кава-но фукуро-о сагасита.
Учитель искал на дороге кожаный мешок.
5) Кодомо-га мура-дэ сэнсэй-о мита.
Ребенок видел учителя в деревне.

Задание. Переведите на японский язык:

1) Учитель шел на восток.
2) Товарищ искал в городе кожу.
3) Ребенок видел меня на дороге в город.

2. Задание 1. Приведите пример предложения на русском языке, в котором прилагательное не согласовано в числе с определяемым существительным.

Задание 2. Приведите пример предложения на русском языке, в котором прилагательное не согласовано в падеже с определяемым существительным.

Задание 3. Приведите пример предложения на русском языке, в котором сказуемое не согласовано в числе с подлежащим.

3. Даны пары слов с одинаковым значением:

кидать — бросать,
громадный — огромный,
болезнь — заболевание.

Задание. Определите, всегда ли в речи первое слово пары можно заменить на второе, второе — на первое. Если нет, то укажите условия, при которых это можно сделать, а также условия, при которых этого сделать нельзя.

4. Даны фразы на языке курия (один из африканских языков, который относится к восточной группе языковой семьи банту) с их переводами на русский язык:

1) Agatoco kagakoγeta akaγe.
Зайчик вспоминает корзинку.
2) Agacucu gakogotegerera.
Птенчик слушает тебя.
3) Ekeboe kigukuγinca.
Шакал качает тебя.
4) Ekeboe gikigutiga egekone.
Шакал оставляет банан.
5) Agacucu kagikubukia egekondo.
Птенчик будит обезьяну.
6) Egekondo kegekoboγa egete.
Обезьяна привязывает палку.
7) Egetoco gikuguturia.
Заяц спасает тебя.

Задание. Переведите на язык курия:

1) Обезьяна слушает зайца.
2) Шакальчик спасает корзину.
3) Обезьянка качает палочку.
4) Шакал вспоминает тебя.
5) Птенец оставляет тебя.

Примечание. Буква «c» читается как русское «ч», буква «γ» — как звонкий звук, парный к русскому «х» (украинское «г»).

5. В рязанском говоре русского языка звуку «о» русского литературного языка соответствует иногда «о», иногда «уо». Ниже приведены некоторые слова в том виде, как они выступают в этом говоре:

двуор, пуоп, буоб, нуож, бог, ход, воз, сор.

Задание 1. Дайте свои примеры слов, которые должны произноситься с «уо».

Задание 2. Известно, что в определенное время подобное явление (а именно, переход «о» в «уо» при определенных условиях) было характерно для русского языка в целом. Следы этого явления можно найти в словах русского литературного языка, имевших «о» в начале. Попытайтесь найти хотя бы одно такое слово. Объясните свое решение.

6. Какие черты детектива можно отыскать в повести А. С. Пушкина «Дубровский»?

7. Рассказ А. П. Чехова «Каштанка» написан, как мы обычно говорим, «от третьего лица». Какие особенности повествования вы замечаете?

8. Какие черты романтизма как художественного метода вы отмечаете в повести Н. В. Гоголя «Тарас Бульба»?

9. Какую роль играет образ дороги в поэме Н. В. Гоголя «Мертвые души»?

10. Для достижения своей художественной цели литераторы часто пользуются приемом «говорящей фамилии» (или «говорящего имени»).

Задание 1. В чем суть этого приема? Приведите примеры.

Задание 2. Прочитайте рассказ В. М. Шукшина «Волки». Чем, по-вашему, может быть мотивирован выбор имени главного героя?

Специализированный учебно-научный центр МГУ (СУНЦ МГУ)

объявляет конкурсный набор школьников-москвичей
на физико-математический, химический и экономический профили
в 10-е и 11-е классы.

Первый тур — заочный.
Его задания, а также правила оформления решений,
опубликованы в «Кванте» № 12 за 1991 год (с. 69—70).

Желающие участвовать в конкурсе
должны не позднее 30 апреля 1992 года (по почтовому штемпелю)
выслать решения по адресу:
121357, Москва, Кременчугская ул. 11, СУНЦ МГУ, пр. ком., заочн. экз.
Авторы лучших работ будут приглашены на II тур (письменный экзамен),
который состоится в мае 1992 года.

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием учащихся, оканчивающих восьмые классы одиннадцатилетней общеобразовательной школы, на заочное отделение. Зачисление на Малый мехмат производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого механико-математического факультета (МММФ) является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся.

Занятия на заочном отделении начинаются в октябре. Обучение на малом мехмате бесплатное. Успешно выполнившие все задания получают удостоверение об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 1 мая 1992 года выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все предложенные задачи). Учащиеся, успешно закончившие 9-й или 10-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат при МГУ.

Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;

2) фамилия, имя учащегося;

3) школа и класс (полное название);

4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);

5) фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см^2, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и пришлите по адресу: *119899, Москва, МГУ, Малый мехмат.*

Примечание: для школьников 8—11 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по тел. 939-39-43.

Вступительное задание

1. В некотором городе каждый десятый математик — музыкант, а каждый одиннадцатый музыкант — математик. Кого в городе больше — музыкантов или математиков?

2. Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть взаимно перпендикулярными?

3. Решите уравнение

$$x(x+1)(x^2+x+1)=6.$$

4. Изобразите на координатной плоскости xOy линию, заданную уравнением

$$|x-y|+|x+y|=2.$$

Определите длину этой линии.

5. Докажите, что при всех значениях a и b справедливо неравенство

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a^4+b^4}{2}.$$

6. Пусть P — периметр выпуклого четырехугольника, а L — сумма длин его диагоналей. Докажите, что а) $P<2L$; б) $P>L$.

7. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих уравнению

$$xy=x+y+22.$$

8. В вашем распоряжении имеется ржавый циркуль неизменного раствора r. Пользуясь только этим циркулем, по заданным точкам A и B ($AB<2r$) постройте на луче AB такую точку C, что $AC=2AB$ (опишите процесс построения и дайте его обоснование).

9. Шестизначное число делится на 7. Его первую цифру стерли, а затем записали ее позади последней цифры числа. Докажите, что вновь получившееся шестизначное число тоже делится на 7.

10. В клетках таблицы $n\times n$ расставлены числа 1 или -1 так, что каждое из них равно произведению всех чисел, стоящих в соседних клетках (соседними называем клетки, имеющие общую сторону). Может ли в этой таблице хотя бы один раз встретиться число -1 при а) $n=5$; б) $n=7$?

Поправка

В условии задачи 3 для девятого класса заочного вступительного экзамена в ФМШ МГУ и ФМШ НГУ («Квант» № 12, 1991 г.) допущена опечатка. Дроби, которые нужно сравнить, должны выглядеть так: $\frac{a+c}{b+d}$ и $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$.

Редакция приносит читателям свои извинения.

Пирамида

На четвертой странице обложки предыдущего номера журнала была помещена следующая игра. На нижнюю строку пирамиды (см. рисунок) выставляются фишки двух цветов. Игроки ходят по очереди. Возможны три типа ходов.

Вертикальный ход. Его может совершить лишь фишка нижнего ряда, перейдя на одну из двух соседних клеток верхнего ряда.

Горизонтальный ход. Фишка может перемещаться по своему ряду на любое число свободных клеток.

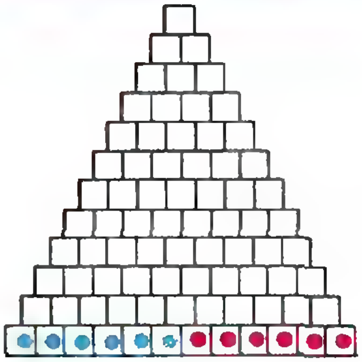
Дополнительное продвижение. В процессе игры три фишки могут занять положение «треугольником» (две снизу, одна сверху). Хозяин верхней фишки после очередного хода или вместо него может ее передвинуть на соседнюю клетку следующего ряда.

Побеждает тот, кто первым достигнет вершины пирамиды.

Наш автор из Минска И. Акулич, проанализировав эту игру, пришел к выводу, что при наилучшей игре партнеров игра закончится... вничью.

Докажем это. Сначала пронумеруем горизонтальные ряды снизу вверх, а клетки каждого ряда — слева направо. Таким образом, каждой клетке игрового поля поставлено в соответствие два числа: номер ряда и номер клетки в ряду.

Пусть в начальной позиции начинающий занимает левые шесть клеток нижнего ряда, т. е. клетки с (1,1) по (1,6), а второй игрок — остальные клетки нижнего ряда, т. е. с (1,7) по (1,12). Покажем, как должен играть начинающий, чтобы не проиграть. Первым ходом он передвигает фишку с поля (1,5) на поле (2,5), а затем все время переставляет одну и ту же фишку с клетки (1,4) на клетку (1,5) и обратно, предоставляя второму полную свободу добираться до вершины.



Поскольку для «пересылки» фишки в третий и более высокие ряды ей необходима «подпорка» из двух фишек, у второго игрока просто *не хватит фишек* для достижения вершины.

Действительно, всем фишкам нижнего ряда разрешается сразу переходить во второй ряд. Таким образом, второй игрок сможет переправить все свои шесть фишек во второй ряд. Но в третий ряд он сможет переслать только пять фишек, поскольку, если допустить, что он переслал в третий ряд все шесть фишек, то для пересылки последней из них он должен был использовать в качестве «подпорки» в первом ряду две фишки соперника. Однако для него доступна лишь одна из них, а именно (1,6), а доступ к остальным перекрывает фишка (2,5). Правда, последняя фишка, перейдя из первого ряда во второй и заняв поле (2,6), сможет служить «подпоркой» для пересылки фишек третьего ряда в четвертый, совместно с *«вражеской» фишкой* (2,5). В четвертый ряд, таким образом, можно переслать все пять фишек из третьего ряда. А вот из четвертого в пятый — только три из них, поскольку две фишки должны остаться в четвертом ряду в роли «подпорок». Рассуждая таким же образом, можно увидеть, что из трех фишек, достигших пятого ряда, лишь одна дойдет до седьмого, а две остальные — лишь до шестого (в этом им поможет «подпорка» из двух фишек, задержавшихся в четвертом ряду). Но тогда единственная фишка, достигшая седьмого ряда, может переместиться лишь в восьмой ряд, использовав в качестве «подпорки» две фишки, задержавшиеся в шестом ряду. И не выше!

Итак, второй игрок не сможет подняться выше восьмого ряда, а следовательно — победить.

Беспроигрышная стратегия для второго игрока аналогична. Он должен независимо от первого хода начинающего сделать ответный ход (1,8)—(2,7), а затем гонять фишку с поля (1,9) на поле (1,8) и обратно. При этом начинающий вершины не достигнет.

Игра, однако, приобретает интерес, если для достижения победы достаточно подняться в восьмой ряд. Тут уж не отсидишься! Трудно сказать, для кого такая игра является выигрышной. Попробуйте-ка разобраться.

ДОЛЛАР ДЖОНА ДЖОНСА

(фантастический рассказ)

Г. КИЛЕР

Двести первого дня 3221 года профессор истории Университета Терры уселся поудобнее перед визафоном и приготовился прочитать свою ежедневную лекцию слушателям, находившимся в самых удаленных уголках Земли.

Устройство, перед которым восседал профессор, по виду напоминало гигантский оконный переплет. Оно состояло из трех или четырех сотен матовых квадратных экранов. Прямо по центру экранов не было: там располагался продолговатый темный участок, ограниченный снизу небольшим выступом. На выступе лежал кусочек мела. Сверху свисал большой бронзовый цилиндр. Именно в него нужно было говорить во время лекции.

Прежде чем нажать на кнопку и дать сигнал своим слушателям собраться у местных визафонов, профессор достал из кармана крохотный приборчик и приложил его к уху. Легкое нажатие рычажка на крышке — и комнату огласил громкий металлический голос, казалось исходивший откуда-то из пространства и монотонно повторявший: «Пятнадцать часов одна минута... пятнадцать часов одна минута... пятнадцать часов одна минута...» Быстрым движением профессор сунул миниатюрный приборчик в карман жилета и нажал кнопку на боковой поверхности визафона.

Как бы в ответ один за другим вспыхнули матовые экраны, и на них появились лица и плечи молодых людей весьма странного вида: с огромными крутыми лбами, совершенно лысых, беззубых, в огромных роговых очках. Один экран по-прежнему оставался пустым. Профессор слегка нахмурился, но, видя, что все остальные экраны засветились, начал свою лекцию:

— Рад, что вы все собрались у своих визафонов. Тема моей сегодняшней лекции представляет интерес не столько для историка, сколько для экономиста. В отличие от наших прошлых встреч речь пойдет не об отдельных событиях, разыгравшихся на протяжении нескольких лет, а о грандиозной панораме событий, охватывающей десять веков и завершающейся в 2946 г., то есть примерно триста лет назад. Я расскажу вам о гигантском состоянии, выросшем из одного-единственного доллара, который Джон Джонс на заре цивилизации, или, если быть точным, в 1921 г., то есть тринадцать веков назад, положил в банк...

Я только что упомянул доллар Джона Джонса. Некоторые из вас, особенно те, кто лишь недавно записался на курс по истории, несомненно, спрашивает себя: «Кто такой Джон Джонс? И что такое доллар?»

— В те далекие времена, когда Национальное евгеническое общество еще не разработало существующей ныне научной регистрации людей, человеку приходилось обходиться весьма несовершенной системой номенклатуры, изобиловавшей повторами и не позволявшей точно идентифицировать личность. При этой системе Джонов Джонсов было бы больше, чем калорий в британской единице теплоты. Но я имею в виду вполне определенного Джона Джонса, жившего в двадцатом веке. О нем и пойдет речь в сегодняшней лекции. О жизни Джона Джонса мы знаем немного. Известно лишь, что он был непримиримым врагом частной собственности и ратовал за создание общества всеобщего процветания.

Теперь о долларе. В наши дни, когда за истинное мерило ценности принят психоэрг, представляющий собой комбинацию одного психа — единицы эстетического удовлетворения и одного эрга — единицы механической энергии, трудно представить себе, что в двадцатом веке из рук в руки в обмен на жизненные блага переходил небольшой металлический диск, который и назывался долларом.

Тем не менее дело обстояло именно так. В обмен на эти самые доллары человек расходовал свою умственную или физическую энергию. Получив доллары, он тратил их на приобретение пищи и крова, на одежду, развлечения и оплату операции по удалению червеобразного отростка.

Многие имели обыкновение класть доллары в специальные хранилища, которые назывались банками. Банки в свою оче-

---

Рассказ перепечатывается из сборника научно-фантастических рассказов «Неувязка со временем» (М.: Наука, 1991).

редь вкладывали доллары в займы и коммерческие предприятия. Каждый раз, когда Земля пересекала эклиптику, банки взимали со своих клиентов либо наличными, либо по безналичному расчету шесть процентов от первоначальной суммы займа. Тем же, кто оставлял им свои доллары на хранение банки начисляли три процента за право временного пользования этими металлическими дисками. Ежегодная надбавка называлась «годовыми». Говорили: «Банк выплачивает три процента годовых».

Банк не мог гарантировать вкладчику абсолютную сохранность долларов, отданных на хранение. Время от времени служащие банка, прихватив с собой чужие доллары, пускались в бега и скрывались в малонаселенных и труднодоступных уголках Земли. Случалось также, что группы кочевников, которых тогда называли «громилами», посещали банки, силой открывали бронированные сейфы и удалялись, унося с собой их содержимое.

Но вернемся к теме нашей лекции. В 1921 г. один из многочисленных Джонов Джонсов совершил явно непоследовательный акт, вписавший его имя в историю. Что он сделал?

Он обратился в один из банков, носивший название «Первого национального банка Чикаго», и отдал на хранение один металлический диск — серебряный доллар, открыв счет на имя некоего лица. Этим лицом был не кто иной, как сороковой потомок Джона Джонса. В специальном документе (который назывался завещанием), также оставленном на хранение в банке, Джон Джонс оговорил, что право наследования передается старшему ребенку в каждом поколении его потомков.

Банк согласился с условиями Джона Джонса и принял доллар на хранение. Было оговорено также, что банк будет присоединять три процента годовых к вкладу. Это означало, что к концу каждого года банк увеличивал сумму, числившуюся на счету у сорокового потомка Джона Джонса, на три сотых по сравнению с началом года.

О самом Джоне Джонсе до нас дошли весьма скудные сведения. Известно только, что через 10 лет, в 1931 г., он умер, оставив после себя несколько детей.

Те из вас, кто слушает курс математики у профессора Л123М72421муж из Университета Марса, должно быть, помнят, что любое число x, если его периодически увеличивать на величину, составляющую p-ю долю его текущего значения, после n циклов станет равным $x(1+p)^n$.

В нашем случае x равен одному доллару, p — трем сотым, а n — числу лет, в течение которых вклад хранится в банке. В своей лекции я приведу несложные расчеты, а те, кто сегодня в форме, могут производить их в уме.

К моменту смерти Джона Джонса на счету его сорокового потомка была следующая сумма.

Профессор подошел к продолговатому темному участку визафона и быстро написал мелом:

1931 г. через 10 лет 1,34 $.

— Волнистый иероглиф справа,— пояснил он,— это идеограмма, изображающая доллар.

— Итак, время шло, как идет только время. Прошло сто лет. Первый национальный банк еще существовал, а то, что некогда называлось Чикаго, превратилось в величайший населенный пункт на Земле. К этому времени на счету у сорокового потомка Джона Джонса было...

Профессор добавил еще одну строку:

2021 г. через 100 лет 19,10 $.

— На протяжении следующего столетия в образе жизни людей произошло множество мелких изменений, но все сильнее раздавались голоса тех, кто ратовал за отмену частной собственности. Первый национальный банк еще принимал вклады на хранение, и доллар Джона Джонса продолжал расти. Имея в запасе тридцать четыре грядущих поколения, счет в банке выглядел теперь так:

2121 г. через 200 лет 346 $.

К концу следующего столетия на счету сорокового потомка Джона Джонса уже была довольно внушительная по тем временам сумма:

2221 г. через 300 лет 6920 $.

В следующем столетии произошло весьма важное событие. Я имею в виду 2299 г., когда каждый человек на земном шаре был зарегистрирован под цифровым кодом в центральном бюро Национального евгенического общества.

Противники частной собственности по-прежнему взывали к ее отмене, но Первый национальный банк в Чикаго к тому времени превратился в первый Международный банк Земли. А как вырос доллар Джона Джонса? Изучим состояние счета в исторический 2299 г. накануне четырехсотлетия со дня его открытия:

2299 г. через 378 лет 68 900 $.
2321 г. через 400 лет 132 000 $.

Вы видите, что вклад Джона Джонса значительно приумножился, но еще не достиг тех размеров, которые позволяли бы говорить о необычайном богатстве. На Земле в те времена существовали гораздо более внушительные состояния. Например, потомок человека, некогда носившего имя Джона Д. Рокфеллера, обладал несравненно большим богатством, но, переходя от поколения к поколению, оно дробилось и таяло. Итак, перенесемся еще на одно столетие. К концу его на счету было:

2421 г. через 500 лет 2 520 000 $.

Во времена Джона Джонса на Земле жил человек, один из тех, кого называли учеными, по имени Илья Мечников. Из древних египетских папирусов и книг, хранящихся в собрании библиотеки Карнеги, мы знаем, что Мечников выдвинул гипотезу о том, что старение, или, точнее, одряхление, вызывается особыми бактериями-палочками. Впоследствие его гипотеза подтвердилась. Но насколько правильных взглядов Мечников придерживался относительно этиологии дряхления, настолько глубоко он заблуждался относительно терапии этого недуга.

Он предложил, друзья мои, бороться с бактерией и убивать ее продуктом брожения секрета молочных желез ныне вымершего животного под названием «корова», муляж которого вы в любое время можете увидеть в музее Солнечной системы.

Из бронзового цилиндра донесся дружный смех и возгласы удивления. Профессор подождал, пока утихнет приступ веселья, и продолжал с серьезным видом:

— Прошу вам, друзья мои, не улыбаться. Это — лишь один из странных и причудливых предрассудков, существовавших в те далекие времена.

Много позже, в двадцать пятом веке, проблемой дряхления занялся профессор К122В62411муж. Он не стал стратить свое драгоценное время на эксперименты с продуктом брожения секрета молочных желез коровы. Профессор К122В622411муж обнаружил, что открытые в незапамятные времена рентгеновские лучи, которые, как вы, физики, помните, не отклоняются в магнитном поле, в действительности представляют собой смесь двух разновидностей лучей, которые он назвал е-лучами и ж-лучами. Последние лучи в чистом виде были смертельны для бактерий-палочек, оставаясь в то же время совершенно безвредными для клеток человеческого организма. Как вы, должно быть, знаете, открытие профессора К122В62411муж привело к весьма важным последствиям, ибо позволило увеличить продолжительность человеческой жизни до двухсот лет. Этот век, говорю вам без обиняков, стал переломным в жизни всего человечества.

Но я рассказывал вам о событии, может быть, не столь важном, но, несомненно, более интересном. Я имею в виду вклад, завещанный Джоном Джонсом своему сороковому потомку. К тому времени, о котором сейчас пойдет речь, один доллар вырос в гигантскую сумму. Капитал, предназначавшийся потомку Джона Джонса, достиг таких размеров, что был учрежден специальный банк и назначен специальный совет директоров, в обязанность которым вменялось следить за разумным помещением всего несметного богатства. Следующая выписка из счета убедит вас, что в моих словах нет преувеличения:

2521 г. через 600 лет 47 900 000 $.

В 2621 г. в истории человечества произошли два события первостепенного значения. Вряд ли среди вас найдется человек, которому не приходилось бы слышать об открытии профессора Р222Д29333муж. Он обнаружил, что направление силы тяжести изменяется на обратное, если тело колеблется в направлении, перпендикулярном плоскости эклиптики, с частотой, равной четному кратному натурального логарифма числа 2. Тотчас же были построены вибрационные корабли, и люди получили возможность летать на любую планету. Открытие профессора Р222Д29333муж проложило землянам дорогу к семи новым мирам: Меркурию, Венере, Марсу, Юпитеру, Сатурну, Урану и Нептуну. Последовал подлинный земельный бум, и тысячи бедняков обрели желанное богатство.

Но земля, которая прежде была одним из главных источников благосостояния, вскоре утратила всякую ценность и стала пригодна разве что для игры в гольф. Причиной тому было второе научное открытие.

По существу, друзья мои, это было даже не открытие, а усовершенствование химического процесса, известного с незапамятных времен. Я имею в виду постройку на всех планетах огромных дезинтеграционных фабрик, на которые воздушным экспрессом доставлялись тела умерших обитателей соответствующей планеты. Процесс этот широко используется и поныне, поэтому вы все знаете, как он проводится. Под действием тепла тела умерших разлагаются на элементы: водород, кислород, азот, углерод, кальций, фосфор и т. д. Эти элементы поступают в специальные резервуары, хранятся там, и по мере надобности из них синтезируются пищевые таблетки для тех из нас, кто еще жив. Тем самым создается нескончаемая цепь от мертвого к живому. Нужно ли говорить, что необходимость в земледелии и животноводстве отпала, так как продовольственная проблема, над решением которой с незапамятных времен билось человечество, была решена раз и навсегда. Второе открытие привело к двум важным последствиям. Во-первых, как я уже говорил, резко упали сильно вздутые цены на землю, так как отпала необходимость возделывать ее. Во-вторых, люди обрели наконец досуг, позволивший им заняться наукой и искусством.

Что же касается доллара Джона Джонса, то, многократно приумноженный, он контролировал теперь бесчисленные предприятия и огромные пространства на Земле. Да и не удивительно, ибо банковский счет теперь выглядел так:

2621 г. через 700 лет 912 000 000 $.

Без преувеличения можно сказать, что это было величайшее частное состояние на земном шаре, и в 2621 г. ему еще предстояло расти тринадцать поколений, прежде чем появится сороковой потомок Джона Джонса.

Но продолжим нашу лекцию. В 2721 г. в сенате и палате представителей парламента Солечной системы завершилась важная политическая баталия. Я имею в виду острые дебаты по поводу того, представляет ли земная Луна достаточно серьезную помеху для космической навигации, чтобы ее следовало уничтожить. Большинством голосов было принято решение избавиться от естественного спутника Земли. Участь Луны была решена.

Прошу прощения, мои юные друзья! Я как-то упустил из виду, что в вопросах истории вы осведомлены не столь хорошо, как я сам. Рассказывая вам о Луне, я совсем забыл, что многие из вас не знают, что это такое. Настоятельно советую тем из вас, кто еще не был в музее Солнечной системы на Юпитере, побывать там как-нибудь в воскресенье. Поезда межпланетной линии отправляются через каждые полчаса. Вы увидите там действующую модель некогда существовавшего спутника Земли, который до того, как его разрушили, освещал по ночам Землю, отражая солнечный свет своей неровной поверхностью.

После того как парламент счел нежелательным оставлять Луну там, где она всегда находилась, инженеры приступили к демонтажу ночного светила. Они откалывали от Луны часть за частью и отправляли осколки межпланетными грузовыми кораблями на Землю. С Земли осколками с помощью специального взрывчатого вещества зоодолита выстреливали в сторону Млечного Пути, придавая им скорость 11 217 м/с. Эта скорость сообщала каждому осколку кинетическую энергию, достаточную для преодоления земного притяжения на всем пути от земной поверхности и до бесконечности. Смею утверждать, что осколки Луны и поныне несутся в межзвездном пространстве.

Когда начались работы по демонтажу Луны, на счету сорокового потомка Джона Джонса числилось

2721 г. через 800 лет 17 400 000 000 $.

Разумеется, имея в своем распоряжении такую колоссальную сумму, директора фонда Джона Джонса произвели крупные капиталовложения на Марсе и Венере.

В начале двадцать девятого столетия, а точнее, в 2807 г., Луна была полностью раздроблена на куски и разбросана в космическом пространстве. На всю работу по ее демонтажу потребовалось 86 лет. Приведу две выписки из счета сорокового потомка Джона Джонса: в год завершения работ по уничтожению Луны, незадолго до девятисотлетия со дня основания фонда, и по истечении 900 лет:

2807 г. через 886 лет 219 000 000 000 $.
2821 г. через 900 лет 332 000 000 000 $.

В этих скупых строках заложен простой и глубокий смысл: к 2807 г. будущий потомок Джона Джонса был практически владельцем всей недвижимости на Земле, Марсе и Венере — за исключением территории университетского городка на каждой планете. Эта территория была собственностью университета.

А теперь я попрошу вас последовать за мной и перенестись в 2906 г. В этом году директора фонда Джона Джонса оказались перед неразрешимой проблемой. Согласно завещанию Джона Джонса, оставленному в 1921 г., банк должен был выплачивать три процента годовых. В 2900 г. был жив тридцать девятый потомок Джона Джонса по имени Дж664М42721муж. Ему тогда исполнилось тридцать лет, и он собирался жениться на девушке по имени Т246М42652жен.

Вы, конечно, хотели бы знать с какой проблемой столкнулись директора фонда? А вот с какой.

Произведя тщательную инвентаризацию и оценку недвижимого имущества и всех богатств на Нептуне, Уране, Сатурне, Юпитере, Марсе, Венере и Меркурии, а также на Земле и точный подсчет стоимости энергии, оставшейся в Солнце, по весьма умеренной цене за калорию, директора обнаружили, что полная стоимость Солнечной системы составляет 630 952 524 136 215 $.

Как показывает простой расчет, если мистер Дж664М42721муж женится на мисс Т246М42652жен и у них в браке родится ребенок, то в 2921 г. по прошествии тысячи лет с того дня, когда Джон Джонс открыл в банке счет на 1 доллар, этот ребенок будет владеть состоянием:

2921 г. 1000 лет 6 310 000 000 000 $.

Нетрудно видеть, что дефицит составил бы 47 475 867 385 $. Банк просто не смог бы выплатить сороковому потомку Джона Джонса то, что ему причиталось.

Члены правления банка были в панике. Высказывались самые фантастические проекты. Например, предлагалось отправить экспедиционный корпус к ближайшей звезде с целью захвата какой-нибудь другой солнечной системы и восполнения дефицита за счет распродажи новых территорий. Но этот проект был отклонен, ибо на осуществление его потребовалось бы слишком много лет.

Перед мысленным взором несчастных директоров фонда Джона Джонса живо вставали картины нескончаемых судебных тяжб и разбирательств, но буквально накануне величайшего из судебных процессов, который когда-либо знала история, произошло нечто такое, что в корне изменило дальнейший ход событий.

Профессор извлек из жилетного кармашка миниатюрный приборчик, приложил его к уху и нажал рычажок.

— Пятнадцать часов пятьдесят две минуты... пятнадцать часов пятьдесят две минуты... пят...

Профессор сунул приборчик в карман и продолжал:

— К сожалению, я должен закончить лекцию. В шестнадцать часов у меня назначена встреча с профессором С122Б24999муж из университета Сатурна. Итак, на чем мы остановились? Ах, да! Я говорил о небывалом судебном процессе, который грозил директорам фонда Джона Джонса.

Так вот, этот самый мистер Дж664М42721муж, тридцать девятый потомок Джона Джонса, поссорился с мисс Т246М42652жен. Их ссора свела к нулю надежды на брак между ними. Никто не хотел уступать другому. Он так и не женился, она так и не вышла замуж. В 2946 г. мистер Дж664М42721муж, прожив всю жизнь холостяком и не оставив после себя детей, умер.

Солнечная система не перешла в частные руки. Немедленно вмешалось межпланетное правительство и объявило об отчуждении фонда Джона Джонса в пользу государства. Немедленно упразднилась частная собственность. В мгновение ока мы достигли всеобщего благоденствия.

Лекция окончена. Все свободны.

Один за другим лица слушателей исчезали с экранов визафона.

Профессор остался сидеть в кресле, размышляя о чем-то.

— Удивительный человек был этот Джон Джонс Первый,— задумчиво проговорил он наконец.— Какая сила предвидения! Какой ум! В особенности если учесть, что жил он в двадцатом веке, когда кругом царило невежество. Но как близка была его тщательно продуманная схема к полному краху. Что было бы с милым его сердцу обществом всеобщего процветания, если бы сороковой наследник Джона Джонса все-таки появился на свет?

Опыт последних лет — в книге

ТИПИЧНЫЕ ОШИБКИ ПО МАТЕМАТИКЕ
НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В ВУЗЫ И ТЕХНИКУМЫ

написанной опытными экзаменаторами
Белорусского государственного университета.

Книгу высылает
Научно-производственный вычислительный центр «Университетский»
по предварительным заказам, направляемым по адресу:
220050, Минск, а/я 171.

Оплата — при получении книги по почте.

Варианты
вступительных
экзаменов

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{5\operatorname{tg}x+10}=\frac{5}{2}\sin x+\frac{1}{\cos x}.$$

2. Найдите все значения параметра a, при которых расстояние между корнями уравнения

$$2\log_a x+3\log_{ax^2}a+5=0$$

меньше 6/25.

3. В равнобедренный треугольник ABC ($AB=BC$) вписана окружность. Прямая, параллельная стороне AB и касающаяся окружности, пересекает сторону AC в точке M такой, что $MC=\frac{2}{5}AC$. Найдите радиус окружности, если периметр треугольника ABC равен 20.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(4x+y)(z+1)+4z=0,\\ xy+y-x=-1,\\ xy-zy+2z=1+x.\end{cases}$$

5. Сфера, вписанная в треугольную пирамиду $KLMN$, касается одной из граней пирамиды в центре вписанной в эту грань окружности. Найдите объем пирамиды, если

$$MK=\frac{5}{4},\ \angle NMK=\frac{\pi}{2},$$

$$\angle KML=3\operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

$$\angle NML=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_7(3-2x)\cdot\log_x(3-2x)=\log_7(3-2x)+\\+\log_7 x^2.$$

2. Отрезок AD является биссектрисой прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90°$). Окружность радиусом $\sqrt{15}$ проходит через точки A, C, D и пересекает сторону AB в точке E так, что $AE:AB=3:5$. Найдите площадь треугольника ABC.

3. Числа

$$-\sin x,\ 4\sin x\operatorname{ctg}2x,\ \cos x$$

являются членами арифметической прогрессии с номерами k, $k+1$, $k+2$ соответственно. Найдите все значения x и k, если седьмой член этой прогрессии равен 1/5.

4. На координатной плоскости рассматривается фигура M, состоящая из всех точек, координаты $(x;\ y)$ которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{xy}{15}}\geqslant y-2x,\\ \frac{x-25}{x^2+y^2-625}>\frac{1}{26}.\end{cases}$$

Изобразите фигуру M и найдите ее площадь.

5. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ основанием является трапеция $ABCD$ ($BC\parallel AD$), $BC=\frac{4}{5}AD$, $\angle ASD=\angle CDS=\frac{\pi}{2}$. Все вершины пирамиды лежат на окружностях оснований цилиндра, высота которого равна 2, а радиус основания равен 5/3. Найдите объем пирамиды.

Вариант 3

1. Решите неравенство

$$x\cdot3^{\log_{1/9}(16x^4-8x^2+1)}<\frac{1}{3}.$$

2. При каких значениях параметра a вершина параболы

$$y(x)=x^2-(2\sqrt{5}\cos a-3)x-\frac{25}{4}\cos 4a$$

лежит на прямой $y=3x$, причем парабола пересекает ось OY в точке с отрицательной ординатой?

3. На диагонали BD прямоугольной трапеции $ABCD$ ($\angle D=90°$, $BC\parallel AD$) взята точка Q так, что $BQ:QD=1:3$. Окружность с центром в точке Q касается прямой AD и пересекает прямую BC в точках P и M. Найдите длину стороны AB, если $BC=9$, $AD=8$, $PM=4$.

4. На координатной плоскости рассматривается фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(a;\ b)$ которых таковы, что система уравнений

$$\begin{cases}ax+(b-4)y=2,\\ (a-4)x+by=3,\\ bx-(a+6)y=3\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Изобразите фигуру Ф и составьте уравнения всех прямых, каждая из которых проходит через точку (0; 7) и имеет с фигурой Ф единственную общую точку.

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит ромб $ABCD$ с острым углом при вершине A. Высота ромба равна 4, точка пересечения его диагоналей является ортогональной проекцией вершины S на плоскость основания. Сфера радиуса 2 касается плоскостей всех граней пирамиды. Найдите объем пирамиды, если расстояние от центра сферы до прямой AC равно $\frac{2\sqrt{2}}{3}AB$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сани с седоком и собакой общей массой M съезжают с постоянной скоростью v_0 с горы (рис. 1), имеющей уклон α ($\cos\alpha=6/7$). Собака массой m спрыгивает с саней по ходу их движения и приземляется со скоростью, равной v и направленной под углом β ($\cos\beta=3/7$) к горизонту. Сани после этого продолжают двигаться по горе вниз. Найдите скорость саней с седоком после прыжка собаки.

2. Резиновый шарик массой $m=2$ г надувается гелием при температуре $t=17$ °C. При достижении в шарике давления $p=1{,}1$ атм он лопается. Какая масса гелия была в шарике, если перед тем, как лопнуть, он имел сферическую форму? Известно, что резиновая пленка рвется при толщине $\delta=2\cdot10^{-3}$ см. Плотность резины $\rho=1{,}1$ г/см^3, молярная масса гелия $\mathrm{M}=4$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

3. В схеме, изображенной на рисунке 2, в начальный момент времени ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсатор большой емкости C не заряжен. Через некоторое время после замыкания ключа K_1 амперметр А показывает силу тока $I=1$ мкА. В этот момент замыкают ключ K_2. Какую силу тока покажет амперметр сразу после замыкания ключа K_2, если известно, что $R_2=2R_1=10^8$ Ом, а ЭДС батареи $\mathscr{E}=100$ В? Внутренними сопротивлениями амперметра и батареи пренебречь.

4. Интерферометр Рэлея используется для точного измерения показателя преломления газов. Для этого на пути одного из интерферирующих лучей ставится кювета $Г$ прямоугольной формы и длины $L=10$ см с исследуемым газом, а на пути другого — компенсатор K, с помощью которого добиваются, чтобы в центре плоскости наблюдения P разность хода между лучами равнялась нулю (рис. 3). Чему равен показатель преломления газообразного азота, если после замены в кювете воздуха на азот интерференционная картина сместилась ровно на одну полосу в сторону, соответствующую увеличению показателя преломления? Показатель преломления воздуха $n_в=1{,}000292$. Измерения проводились на длине волны света $\lambda=500$ нм.

Вариант 2

1. Тележка и ящик с равными массами удерживаются упором A на наклоненной под углом α ($\mathrm{tg}\,\alpha=0{,}4$) к горизонту поверхности горки (рис. 4). Упор убирают, и ящик с тележкой приходят в движение. Во сколько раз при этом уменьшается сила давления тележки на ящик? Коэффициент трения скольжения между ящиком и поверхностью горки $\mu=0{,}2$. Соприкасающиеся поверхности стенок ящика и тележки считайте гладкими и расположенными перпендикулярно поверхности горки.

2. В цилиндре под поршнем находится смесь ν молей жидкости и ν молей ее

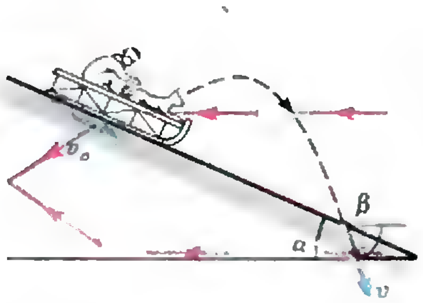


Рис. 1.

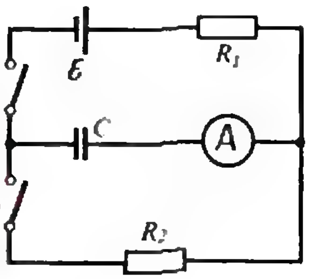


Рис. 2.

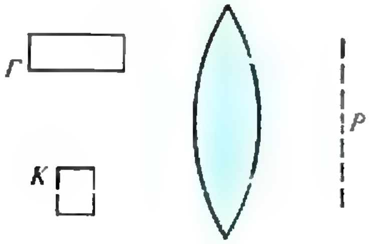


Рис. 3.

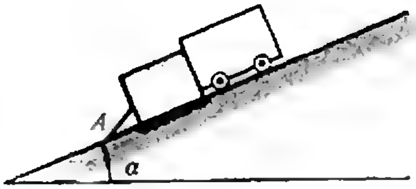


Рис. 4.

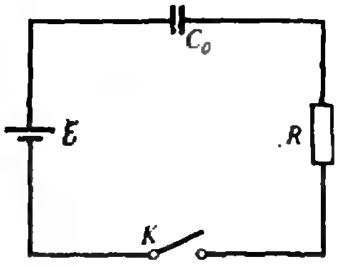


Рис. 5.

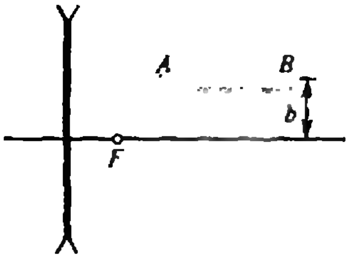


Рис. 6.

насыщенного пара при температуре T_0. При медленном изобарическом нагреве содержимого цилиндра к нему подвели количество теплоты Q, и температура внутри цилиндра увеличилась на ΔT. Найдите изменение внутренней энергии содержимого цилиндра. Объемом жидкости можно пренебречь.

3. В схеме, изображенной на рисунке 5, после замыкания ключа K через некоторое время τ устанавливается стационарный режим. Какая мощность будет выделяться в резисторе сопротивлением R, если начать изменять емкость конденсатора по закону $C(t)=C_0(1+A\sin\omega t)$, $A<1$? Рассмотрите случай медленных изменений емкости, т. е. когда $2\pi/\omega \gg \tau$. Параметры $\mathcal{E}$, C_0, R, A, ω считайте заданными. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.

4. Булавка расположена на прямой, параллельной главной оптической оси тонкой отрицательной линзы, так, что ее ближний конец A находится на расстоянии $d=19$ мм от плоскости линзы (рис. 6). Расстояние между главной оптической осью линзы и булавкой $b=8$ мм. Известно, что длина изображения булавки в линзе в 8 раз меньше длины самой булавки. Найдите длину булавки, если фокусное расстояние линзы $F=15$ мм.

Вариант 3*)

1. После разрыва неподвижного снаряда образовалось четыре осколка. Осколок массой $m_1=4$ кг полетел вертикально вниз со скоростью $v_1=150$ м/с, массой $m_2=3$ кг — горизонтально на юг со скоростью $v_2=100$ м/с, массой $m_3=1$ кг — горизонтально на восток. Осколок массой $m_4=3{,}5$ кг полетел со скоростью $v_4=200$ м/с. Найдите скорость третьего осколка.

2. Моль идеального одноатомного газа расширяется сначала в изобарическом процессе, а затем в процессе с линейной зависимостью давления от объема (рис. 7). Известно, что $V_2/V_1=V_3/V_2$, а прямая 2—3 проходит через начало координат. Найдите отношение объемов V_2/V_1, если количество теплоты Q_{12}, подведенное к газу на участке 1—2, в четыре раза меньше работы A_{23}, совершенной газом на участке 2—3.

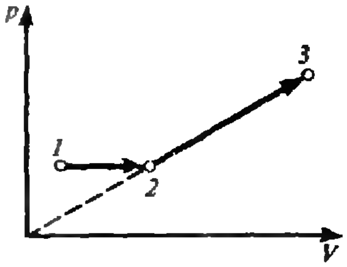


Рис. 7.

3. Через два последовательно соединенных проводника с одинаковыми сечениями S, но разными удельными сопротивлениями ρ_1 и ρ_2 ($\rho_2>\rho_1$) течет ток I (рис. 8). Определите знак и величину поверхностной плотности заряда, возникающего на границе раздела проводников.

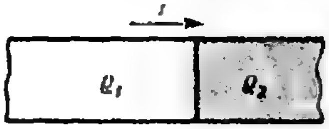


Рис. 8.

4. На тонкую рассеивающую линзу падает луч под углом $\alpha=8^\circ$ ($\mathrm{tg}\,\alpha=0{,}14$) к главной оптической оси, пересекая ее на расстоянии $a=4$ см от плоскости линзы. Найдите фокусное расстояние линзы, если преломленный линзой луч идет под углом $\beta=12^\circ$ ($\mathrm{tg}\,\beta=0{,}21$) к главной оптической оси.

Публикацию подготовили
В. Дерябкин, С. Самарова

---

*) Этот вариант предлагался в марте 1991 года на очном зачете в Заочной физико-технической школе при МФТИ.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$1+\frac{3}{x-a-1}=\frac{5a+5}{(x-a-1)(x-2)}.$$

2. Найдите множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\log_{|x+1|-2|x-1|+6} y>$$

$$>\log_{|x+1|-2|x-1|+6}(x+4).$$

3. Решите уравнение

$$\sin x-2\sin 2x+\sin 3x=$$

$$=|1-2\cos x+\cos 2x|.$$

4. В правильную четырехугольную пирамиду вписан полушар так, что плоская грань его лежит на основании пирамиды, а шаровая поверхность касается боковых граней пирамиды. Найдите отношение полной поверхности полушара к полной поверхности пирамиды, если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α.

5. Докажите, что при $a=2$ неравенство

$$9^x+(2a+4)\cdot 3^x+3a+1>0$$

выполняется для любых x. Найдите все другие значения параметра a, при которых неравенство выполняется для любых x.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$1+\frac{5a-3}{x-a}=\frac{5(2a+1)(1-a)}{(x-a)(x-3a+1)}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3(x^2-4x+3)-\log_3(x^2-10x+9)=$$

$$=-\log_3|5x-3|.$$

3. Решите уравнение

$$(3\cos x-\pi)(2\sin x^2-\operatorname{tg} x^2)=0$$

и найдите сумму его корней, принадлежащих промежутку $[-\pi; 0]$.

4. В основании пирамиды лежит правильный треугольник ABC со стороной 2 см. Грань ACD перпендикулярна основанию, причем $AD=CD=\sqrt{6}$ см. Найти длину ребра BD, а также площади всех тех сечений пирамиды, которые являются квадратами.

5. При каких значениях параметра a неравенство

$$|x+a|<4-x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение?

Физика

Задачи устного экзамена

1. С какой высоты надо бросить горизонтально тело, чтобы оно столкнулось в воздухе с другим телом, брошенным под углом $\alpha=60°$ к горизонту с той же начальной скоростью из точки, отстоящей на расстоянии $s=1{,}0$ м по горизонтали от места бросания первого тела?

2. Определите ускорение груза массой m_1, если $m_0=3{,}0$ кг, $m_1=1{,}0$ кг, $m_2=2{,}0$ кг (рис. 1).

3. На клин массой $M=10$ кг положили тело массой $m=1{,}5$ кг на высоте $h=20$ см от горизонтальной поверхности. Угол наклона клина к горизонту $\alpha=30°$. На сколько сдвинется клин, когда тело достигнет горизонтальной плоскости? Трение между клином и горизонтальной плоскостью отсутствует.

4. Один моль идеального газа совершает цикл, изображенный на рисунке 2 в

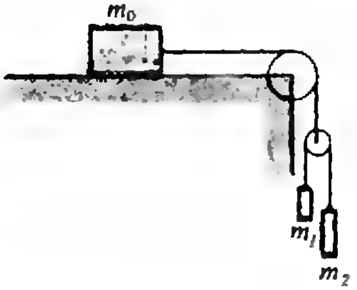


Рис. 1.

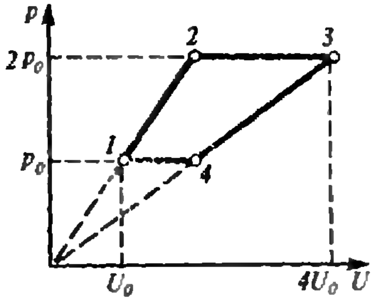


Рис. 2.

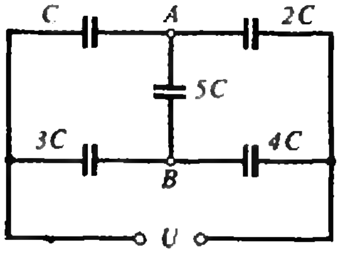


Рис. 3.

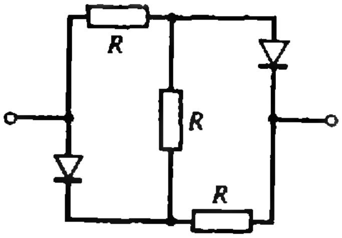


Рис. 4.

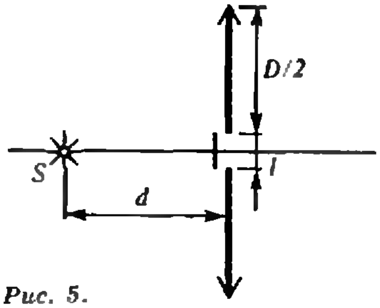


Рис. 5.

координатах p и U, где p — давление, U — внутренняя энергия газа. Определите КПД цикла.

5. Определите относительную влажность воздуха, находившегося в баллоне емкостью $V=83$ л при температуре $t=100$ °C, если до полного насыщения пара понадобилось испарить в этот объем дополнительно $\Delta m=18$ г воды.

6. Определите заряд конденсатора, подключенного между точками A и B, если $U=71$ В, $C=1{,}5$ мкФ (рис. 3).

7. В сеть переменного тока с напряжением $U=220$ В включена схема, состоящая из двух идеальных диодов и трех одинаковых резисторов сопротивлением $R=5{,}0$ кОм каждый (рис. 4). Какая мощность выделяется на резисторах?

8. По кольцу радиусом $R=2{,}5$ см, сделанному из проволоки сечением $S=1{,}5$ мм^2, течет ток $I=2{,}0$ А. Кольцо помещено в однородное магнитное поле с индукцией, равной $B=0{,}1$ Тл и перпендикулярной плоскости кольца. Определите механическое напряжение в кольце.

9. Человек рассматривает зрачок своего глаза в плоском зеркале толщиной $l=1{,}5$ см на расстоянии наилучшего зрения ($d_0=25$ см). На каком расстоянии от зеркала расположен глаз человека? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

10. Собирающая линза с диаметром $D=5{,}0$ см и фокусным расстоянием $F=50$ см разрезана по диаметру пополам, и половинки раздвинуты на расстояние $l=5{,}0$ мм (рис. 5). Точечный источник света S расположен на расстоянии $d=1{,}0$ м от линзы. На каком расстоянии от линзы можно наблюдать интерференционную картину? Щель между половинками линзы закрыта.

Публикацию подготовили
Г. Ефашкин, В. Тонян

Московский педагогический государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Средний годовой процент прироста добычи угля на одной из шахт из года в год остается постоянным. Если годовой процент прироста добычи был бы увеличен на 10,5 %, то через 2 года было бы добыто угля в 1,21 раза больше, чем в обычных условиях. Определите средний годовой процент прироста добычи угля (в обычных условиях).

2. Решите уравнение

$$\sqrt{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}=\frac{\sqrt{6}}{\sin x+\cos x}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{5x-1}2x>\log_{2x}\frac{4x^2}{5x-1}.$$

4. Найдите наибольшее расстояние от точки с координатами (2; 0) до точек графика функции

$$f(x)=\sqrt{12+5x-2x^2}.$$

5. Основание пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$ со сторонами $a\sqrt{3}$ и a. Ребро SC перпендикулярно к плоскости основания, а ребро SA образует с ней угол α. Вычислите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной прямой SA и проходящей через BD.

Вариант 2
(*математический факультет*)

1. В одном сплаве веса золота и серебра относятся как 1:2, а в другом — как 2:3. Сколько граммов каждого сплава нужно взять, чтобы после совместной переплавки получить 95 граммов нового сплава, содержащего 7 частей золота и 12 частей серебра?

2. Решите уравнение

$$1+\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}=2\cos^2 x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_x\left(\log_3\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right)<$$

$$<\log_{1/x}\left(\log_{1/3}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)\right).$$

4. Найдите наименьшее расстояние от точки с координатами (—4; 0) до точек графика функции

$$f(x)=|x|\sqrt{4-x}.$$

5. Отрезок прямой, соединяющей центр основания правильной треугольной пирамиды с серединой бокового ребра, равен стороне основания. Найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

Вариант 3
(индустриально-педагогический факультет)

1. Вычислите угол между векторами $a=3p+2q$ и $b=p+5q$, где p и q — единичные взаимно перпендикулярные векторы.

2. Решите уравнение

$$\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2.$$

3. Решите неравенство

$$\log_4(x-1)+1\geqslant\log_2 x.$$

4. Постройте график функции $y=-x^4+8x$.

5. Решите неравенство

$$\frac{x^2+4}{x+1}\geqslant 0.$$

Вариант 4
(*физический факультет*)

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $10\sqrt{2}$ см и образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем параллелепипеда, если одна сторона основания больше другой на 2 см.

2. Решите уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\cos^2 2x+0{,}25.$$

3. Решите неравенство

$$(x^2+x)^2\geqslant 4(x+1)^2.$$

4. Постройте график функции $y=x^3-3x^2$.

5. Решите неравенство

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{4-x}<\left(\frac{5}{2}\right)^{2x+1}.$$

Вариант 5
(*химический факультет*)

1. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 13 см и 14 см, меньшая его диагональ 17 см, площадь основания 168 см^2. Определите площадь боковой поверхности.

2. Решите уравнение

$$\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 8x=\frac{1}{4}\sin 12x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_3\log_2\log_{0,5}x\geqslant 0.$$

4. Постройте график функции $y=x^4+4x$.

5. Решите неравенство

$$\frac{5-x}{x^2-x-6}<0.$$

Задачи устного экзамена

Математический факультет

1. Вычислите $\operatorname{arctg} 3+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

2. Сравните числа $\sqrt{\log_3 5}$ и $\log_3\sqrt{15}$.

3. Трехзначное число делится на 9. Средняя цифра равна сумме двух крайних цифр. Число сотен вдвое больше числа единиц. Найдите это число.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\sin^5 x-\sin x.$$

5. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=\frac{x^3+1}{3}$ в точке его пересечения с осью абсцисс.

6. Найдите $\sin 997{,}5^\circ$.

7. Докажите тождество $\cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ = \frac{1}{4}$.

8. Докажите неравенство $\sin x + \cos x < \frac{\pi}{2}$ $(x \in \mathbf{R})$.

9. Докажите неравенство $\log_{49} 5 + \log_{25} 7 > 1$.

10. Постройте график функции

$$y = x^{\log_x(8x^2-1)}.$$

Факультет начальных классов

1. Решите уравнение $\sin^2 x - \sin 2x = 3\cos^2 x$.

2. Решите уравнение $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.

3. Решите уравнение $x \cdot 3^{\log_x 3} = 9$.

4. Решите неравенство $\frac{1}{2} > \frac{1}{|x-1|-3}$.

5. Решите неравенство $\log_5 \sqrt{x} - 2\log_{25} x > 2$.

6. Решите неравенство $27^{-2/3} < \sqrt{9^{3x-1}}$.

7. Постройте равнобедренный треугольник по высоте и углу при вершине.

8. Основания трапеции 4 см и 10 см, одна из боковых сторон составляет с меньшим основанием угол 150°. Найдите эту боковую сторону, если площадь трапеции равна 21 см^2.

9. Постройте график функции $y = \frac{\sin 2x}{\cos x}$.

10. Постройте график функции $y = x^2 + 2|x| + 1$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два связанных между собой бруска, массы которых $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг, движутся по горизонтальной поверхности под действием горизонтальной силы $F = 4$ Н, приложенной ко второму бруску. Каково ускорение брусков? Какова сила натяжения связывающей их нити? Коэффициент трения $\mu = 0{,}1$.

2. Маятник массой $m = 0{,}3$ кг отклоняют от вертикали на угол $\alpha = 90^\circ$ и отпускают. Найдите силу натяжения нити при прохождении маятником положения равновесия.

3. Снаряд массой $m = 6$ кг, летевший горизонтально со скоростью $v = 130$ м/с, попал в неподвижную тележку с песком и застрял в песке, в результате чего тележка приобрела скорость $u = 10$ м/с. Какова масса тележки с песком?

4. Баллон содержит газ при температуре $t_1 = 27$ °С и давлении $p_1 = 4 \cdot 10^6$ Па. Каким станет давление газа, если из баллона выпустить половину массы газа, а температуру понизить до $t_2 = 12$ °С?

5. Какую работу совершит идеальный тепловой двигатель, имеющий температуру нагревателя $t_1 = 527$ °С и холодильника $t_2 = 47$ °С, если от нагревателя получено количество теплоты $Q = 20$ кДж?

6. В электрическом чайнике мощностью $P = 600$ Вт можно вскипятить $V = 1{,}5$ л воды за $\tau = 20$ мин при начальной температуре воды $t = 20$ °С. Найдите КПД чайника. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К), плотность $\rho = 10^3$ кг/м^3.

7. Какой скоростью обладает электрон, пролетевший разность потенциалов $U = 100$ В? Масса электрона $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ кг, заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, начальная скорость электрона равна нулю.

8. Пылинка массой $m = 3 \cdot 10^{-9}$ г находится между горизонтальными пластинами, к которым приложено напряжение $U = 6$ кВ. Расстояние между пластинами $d = 3$ см. Каков заряд пылинки, если она висит в воздухе?

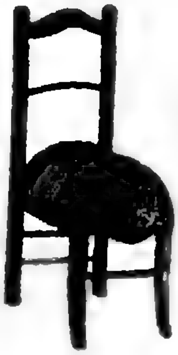
9. По цепи, состоящей из источника тока с электродвижущей силой $\mathscr{E} = 12$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом и реостата, идет ток $I = 0{,}5$ А. Каким будет ток при уменьшении сопротивления реостата в два раза? Чему будет равно напряжение на реостате в этом случае?

10. Из некоторой жидкости на границу ее раздела с воздухом падает луч света. Угол падения $\alpha = 30^\circ$. Отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу. Найдите показатель преломления жидкости.

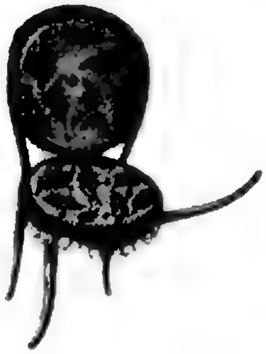
Публикацию подготовили
Г. Карасев, О. Овчинников

„Квант" улыбается

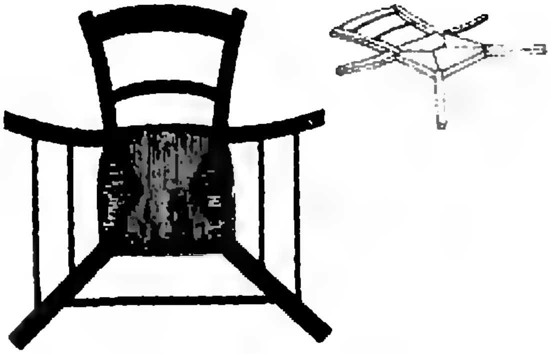
Предметы меблировки



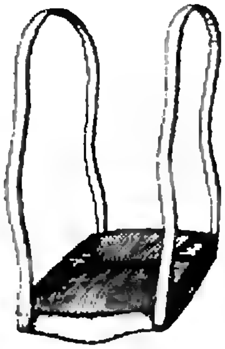
Стул для наездников. Продлевает удовольствие от верховой езды.



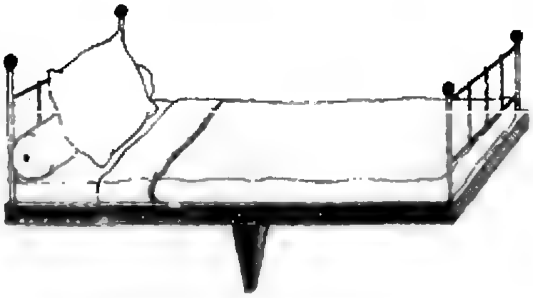
Стул «Тулуз-Лотрек» для танцовщицы канкана.



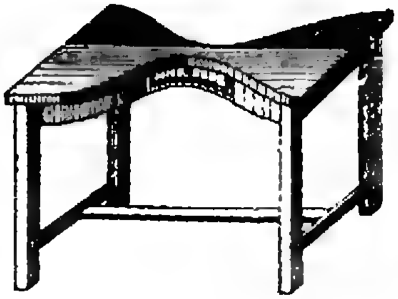
Плоский стул. Удобен тем, что занимает мало места.



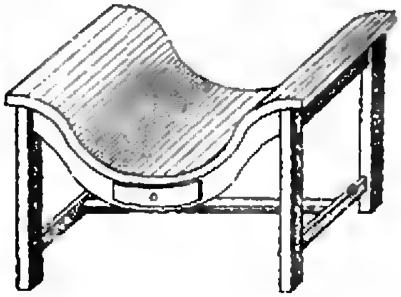
Походный стул. С помощью бретелек вешается на плечи и позволяет отдыхать на ходу.



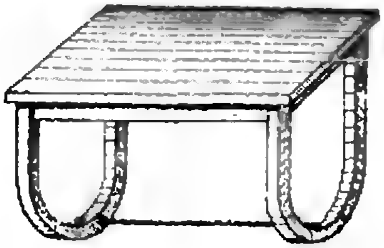
Кровать для эквилибриста. Позволяет продолжать тренировку во время сна.



Стол для беседы тет-а-тет. Позволяет собеседникам сидеть вплотную друг к другу.



Стол для толстяков.



Стол-качалка. Предназначен для увеселительных прогулок на пароходе. Повторяет любой крен палубы.

Из «Каталога невозможных объектов» Карельмана.
Перевод с французского.

Ответы, указания, решения

[illegible]игры со спичками

1. Пример. Пусть, скажем, позиция (a, b, c) такова: $a=1\ 100\ 101$, $b=11\ 101\ 010$, $c=100\ 011\ 010$; эта позиция не является проигрышной, ибо суммы цифр, задающих 1-й, 3-й, 5-й, 8-й и 9-й разряды чисел a, b и c, нечетны (разряды всегда считаются с конца числа). Больший из этих разрядов — это 9-й; из того, что сумма соответствующих цифр нечетна, следует, что хоть одна из этих цифр — это 1. Изменим теперь число c, в котором на 9-м с конца месте стоит 1, так, чтобы у него изменились цифры, отвечающие 1-му, 3-му, 5-му, 8-му и 9-му разрядам (т. е. заменим его числом $c_1=010\ 001\ 111$, или, короче, числом $10\ 001\ 111$); позиция (a, b, c_1) будет уже проигрышной, а так как $c_1<c$, то игрок может перейти от позиции (a, b, c) к позиции (a, b, c_1).

Докажите сами, что разобранное на этом примере рассуждение является общим (т. е. применимо к любой выигрышной позиции).

2. Это следует из того, что любой ход меняет хоть одну цифру в (двоичной) записи чисел a, b и c (т. е. заменяет 0 на 1 или 1 на 0); при этом в данном разряде такое изменение касается лишь одной цифры.

3. Для любого n проигрышные позиции определяются условием, аналогичным указанному в теореме 1.

В случае $n=2$ стратегия беспроигрышной игры сводится к следующему: *надо каждым своим ходом брать столько спичек из большей по численности кучки, чтобы в обеих кучках спичек оставалось поровну* (это, разумеется, можно сообразить и не используя двоичной системы счисления).

4. Позиция (a, b, c) (где все числа a, b и c записаны в четверичной системе счисления) проигрышна тогда, когда в любом разряде совокупность цифр чисел a, b и c имеет следующий вид: (0, 0, 0), или (0, 1, 1) или (0, 2, 2), или (0, 3, 3), или, наконец, (1, 2, 3).

5. Сравните с задачей 14 из статьи И. Яглома «Системы счисления», опубликованной в «Кванте» № 12 за 1990 год. Если запись числа в фибоначчиевой системе счисления кончается нечетным числом нулей, то запись числа a получается из нее дописыванием цифры 0; если же она кончается четным числом нулей, то для получения записи числа a нужно к записи числа $p-1$ приписать цифру 1. То, что пара a, b определяется по p однозначно, докажите сами. Заметим еще, что чем больше p, тем больше определенное по нему a. (Это будет использовано в решении задачи 6.)

6. Будем считать, что $b-a\geqslant 0$, т. е. $p=b-a\geqslant 0$. Существует проигрышная позиция (b_1, a) (где мы теперь не требуем, чтобы b_1 было больше a) и проигрышная позиция (b', a'), где $b'-a'=p$ (задача 5). Если $b_1<b$, то играющий может одним ходом перейти к позиции (b_1, a); если же $b_1>b$, то $b_1-a>p$, и поэтому (см. решение предыдущей задачи) $a>a'$. Поэтому играющий может перейти к позиции (a', b').

7. Это следует из того, что не существует двух разных проигрышных позиций (a, b) и (a_1, b_1), где одно из чисел a, b равнялось бы одному из чисел a_1, b_1 или где $b-a=b_1-a_1$.

8. Проигрышные позиции определяются условием, аналогичным указанному в теореме 1.

[illegible]анные школьные задачи по физике

1. В зависимости от численных значений данных величин возможны два случая — тела движутся или тела неподвижны. Предположим, что реализуется первый случай. Так как нить нерастяжима, ускорения доски и груза будут равны по величине и направлены в противоположные стороны. Запишем уравнения движения тел в проекциях на горизонтальную ось, направленную вправо (рис. 1):

$$F-F_{\text{тр}}-T=Ma,$$
$$-T+F_{\text{тр}}=-ma,$$

где T — натяжение нити, $F_{\text{тр}}$ — сила трения между доской и грузом. Учитывая, что в случае скольжения $F_{\text{тр}}=\mu mg$, окончательно получим

$$a=\frac{F-2\mu mg}{m+M}.$$

Этот ответ будет верен только при выполнении условия $F\geqslant 2\mu mg$. Если же $F<2\mu mg$, тела останутся неподвижными, т. е. $a=0$.

2. На шарик (рис. 2) действуют две силы — сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Ускорение шарика направлено к центру горизонтальной окружности, по которой он движется, и равно v^2/r, где v — скорость шарика, r — радиус окружности. Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на оси X и Y:

$$N\sin\alpha=m\frac{v^2}{r},$$

$$N\cos\alpha-mg=0.$$

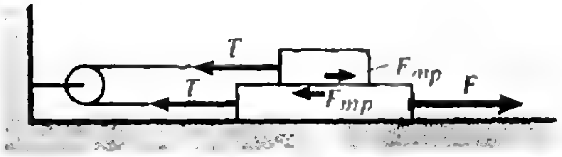


Рис. 1.

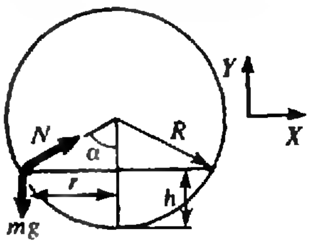


Рис. 2.

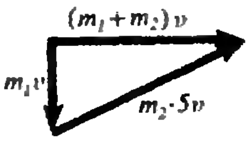


Рис. 3.

Исключая N, получаем

$$v^2=gr\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Учитывая, что $\mathrm{tg}\,\alpha=r/(R-h)$, а $r^2=R^2-(R-h)^2$, находим

$$v=\sqrt{gh(2R-h)/(R-h)}=3\text{ м/с}.$$

3. Так как не изменились ни сила тяги, ни суммарная сила сопротивления движению, импульс системы, состоящей из двух частей состава, не изменился:

$$mv_0=0{,}2mv_0/2+0{,}8mu,$$

где u — скорость головной части поезда в интересующий нас момент. Получаем

$$u=9v_0/8=72\text{ км/ч}.$$

4. По третьему закону Ньютона, сила, действующая на стену со стороны струи, равна по величине силе, действующей на струю со стороны стены. Чтобы найти эту силу (F), запишем закон изменения импульса воды (p) за время Δt:

$$F\Delta t=\Delta p.$$

Но

$$\Delta p=\rho(Sv\Delta t)v,$$

где ρ — плотность воды, а в скобках записан объем воды, которая за время Δt ударилась о стену и потеряла свою скорость. Окончательно находим

$$F=\rho v^2S=32\text{ Н}.$$

5. Запишем закон сохранения импульса системы:

$$(m_1+m_2)\vec{v}=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2,$$

где $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ — скорости первого и второго осколков. На рисунке 3 представлен соответствующий этому равенству треугольник, причем учтено, что вектор $\vec{u}_1$ перпендикулярен вектору $\vec{v}$, $u_1=v$, $u_2=5v$. Применяя к этому треугольнику теорему Пифагора, находим

$$m_1/m_2=3.$$

6. Полная сила, действующая на один из одинаковых зарядов q, складывается из силы F отталкивания от второго заряда q и силы $8F$ отталкивания от заряда $2q$, расположенного вдвое ближе. Значит, полная сила равна $9F$, т. е. в 9 раз больше первоначальной.

7. В момент наибольшего сближения скорости частиц одинаковы (относительная скорость равна нулю). Найдем эту скорость u из закона сохранения импульса:

$$mv=(m+4m)u\Rightarrow u=v/5.$$

Чтобы найти наименьшее расстояние r между частицами, запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{(m+4m)u^2}{2}+k\frac{e\cdot 2e}{r}.$$

Подставляя $u=v/5$ и $k=1/(4\pi\varepsilon_0)$, получаем

$$r=\frac{5e^2}{4\pi\varepsilon_0 mv^2}.$$

8. Так как работа электростатического поля не зависит от траектории, ее можно найти, пронеся заряд через конденсатор по прямой: $A=qU$. Получается, что работа не равна нулю.

9. Так как заряды на последовательно соединенных конденсаторах равны, напряжения на них связаны соотношением

$$C_1U_1=C_2U_2.$$

Первым будет пробит конденсатор, имеющий меньшую емкость, т. е. второй конденсатор (с емкостью C_2). В момент пробоя на нем будет напряжение $U_2=U$, а на первом конденсаторе — напряжение $U_1=U_{\max}-U$. Тогда получаем

$$U_{\max}=U(C_1+C_2)/C_1=480\text{ В}.$$

10. Минимальная работа по извлечению пластины равна изменению электрической энергии конденсатора:

$$A=\Delta W_{\text{эл}}=\frac{q^2}{2C_2}-\frac{q^2}{2C_1},$$

где $C_2=C$ — емкость конденсатора в отсутствие пластины, $C_1=\varepsilon C$ — его емкость в присутствии пластины, $q=C\mathscr{E}$ — заряд конденсатора. Получаем

$$A=C\varepsilon(\varepsilon-1)\mathscr{E}^2/2=2\text{ Дж}.$$

Заметим, что $A=\Delta W_{\text{эл}}$ только в том случае, когда можно пренебречь тепловыми потерями и кинетической энергией пластины.

11. Красный. Восприятие цвета определяется частотой, которая не изменяется при переходе света из одной среды в другую.

12. Луч, отраженный от дальней поверхности пленки (границы пленки со стеклом) проходит дополнительный путь $\Delta l=2h$, где h — толщина пленки, по сравнению с лучом, отраженным от ее передней поверхности. Длина волны света в пленке $\lambda_{\text{п}}=\lambda/n$, где n — показатель преломления вещества пленки. Условие минимума в отраженном свете имеет вид

$$\Delta l=(2k+1)\lambda_{\text{п}}/2,\ k=0,\ 1,\ 2\ldots$$

Минимальная толщина пленки ($k=0$) получается равной

$$h_{\min}=\lambda_{\text{п}}/4=\lambda/(4n).$$

13. Направление на главный максимум k-го порядка определяется условием

$$d\sin\varphi_k=k\lambda.$$

Наблюдать можно только те максимумы, для которых $\sin\varphi_k<1$, т. е. $k<d/\lambda$. Так как $d/\lambda=5$, будут видны максимумы до 4-го порядка включительно. Всего на экране можно наблюдать 9 главных максимумов — центральный и по четыре с обеих сторон от него.

14. Энергия, ежесекундно излучаемая трубкой, равна энергии вылетевших фотонов: $P_{\text{и}}=N(hc/\lambda)$, а потребляемая лампой мощность равна $P_{\text{п}}=UI$. Следовательно, КПД установки

$$\eta=\frac{P_{\text{и}}}{P_{\text{п}}}=\frac{Nhc}{\lambda UI}=0{,}02=2\ \%.$$

Здесь $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света.

15. Запишем уравнение Эйнштейна для каждого излучения, причем учтем, что максимальная кинетическая энергия вылетевших электронов равна $eU_\text{з}$, где $U_\text{з}$ — задерживающее напряжение:

$$h\nu = A + eU_\text{з},$$
$$h\cdot 2\nu = A + e\cdot 3U_\text{з}.$$

Работа выхода A определяет искомую длину волны света, соответствующую красной границе фотоэффекта:

$$A = hc/\lambda_\text{кр}.$$

Из полученных уравнений находим

$$\lambda_\text{кр} = 2c/\nu = 500 \text{ нм}.$$

[illegible]ковский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $x = -\arccos 1/\sqrt{5} + \pi k$, $x = \arccos 1/\sqrt{5} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 25\cos^4 x + 60\cos^2 x - 16 = 0, \\ \dfrac{5}{2}\sin x + \dfrac{1}{\cos x} \geqslant 0. \end{cases}$$

2. $a \in (5/6;\ 1) \cup (1;\ 5/3) \cup (5/2;\ +\infty)$.

Указание. При $a > 0$, $a \neq 1$ уравнение с помощью замены $t = \log_a x$ приводится к виду $t^2 + 3t + 2 = 0$, откуда $x = 1/a^2$, $x = 1/a$. Остается решить неравенство $|a^2 - a| \leqslant \dfrac{5}{25} a^2$ при $a > 0$, $a \neq 1$.

3. $4/\sqrt{5}$. Указание. Пусть K — точка пересечения касательной со стороной BC. Докажите, что периметр треугольника MKC равен AC. С другой стороны, из подобия $\triangle MKC$ и $\triangle ABC$ следует, что $P_{MKC} = \dfrac{2}{5} P_{ABC}$, откуда $AC = 8$, $AB = BC = 6$. Для вычисления радиуса окружности воспользуйтесь формулой $S = rp$.

4. $(0;\ -1;\ 1/3)$, $(-2;\ 3;\ -5)$. Указание. Из второго уравнения следует вычесть третье, затем из полученного уравнения выразить z через y, из второго уравнения — x через y и подставить эти выражения в первое уравнение.

5. Если сфера с центром в точке O касается граней двугранного угла с ребром l в точках P, Q, а точки A и B лежат на прямой l, то $\angle PAB = \angle QAB$ (докажите это).

Отсюда следует, что прямая, соединяющая вершину пирамиды с точкой касания сферы, является биссектрисой соответствующего плоского угла тогда и только тогда, когда два других плоских угла при этой вершине равны между собой.

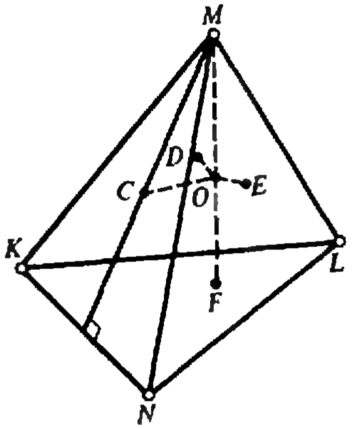


Рис. 4.

Но при вершине M все плоские углы разные, так что сфера касается именно грани KLM в центре вписанной в эту грань окружности (рис. 4). При этом, как мы показали выше,

$$\angle CMK = \angle DMK, \quad \angle DML = \angle EML, \quad \angle EMN = \angle CMN,$$

где C, D, E, F — точки касания сферой граней NMK, KML, LMN, KLN соответственно. Поэтому

$$\angle NMC = \frac{1}{2}(\angle NMK + \angle NML - \angle KML) = \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

$$\angle KMC = \angle KMD = \frac{\pi}{2} - \angle NMC = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

$$\angle LMD = \angle LME = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

Далее, из равенства углов MKN и NKL следует, что точка M лежит в плоскости, перпендикулярной KLN и проходящей через биссектрису KF угла NKL. Аналогично получаем, что M лежит в плоскостях, перпендикулярных LKN и проходящих через LF и NF, т. е. $MF \perp KLN$. Но $OF \perp KLN$, а значит, $O \in MF$.

Вариант 2

1. $x = 1/2$.

2. 32. Указание. Угол AED — прямой, $AC = AE$, $\triangle DEB \sim \triangle ABC$.

3. $x = -\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$, $k = 11$;

$x = \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4} + 2\pi n$, $n \in Z$, $k = 15$.

Указание. Для арифметической прогрессии (a_n)

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} \text{ при } k > 1.$$

4. $\dfrac{625}{2}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{3}{5}\right) - 72\pi$.

Указание. Множество M показано на рисунке 5.

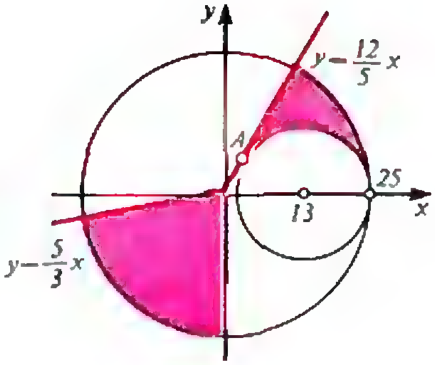


Рис. 5.

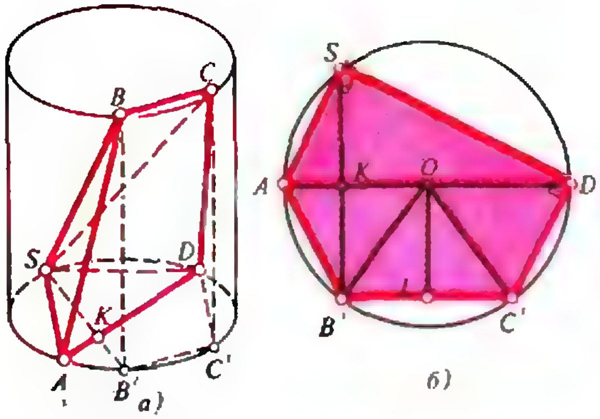


Рис. 6.

5. 2. Рассмотрим прямоугольный треугольник, гипотенуза которого есть хорда круга радиуса R, а вершина прямого угла лежит в плоскости, параллельной плоскости круга. Тогда расстояние между этими плоскостями не превосходит R. Используя замечание и числовые данные задачи $(5/3<2)$, заключаем, что либо вершины A и D находятся на разных основаниях цилиндра, либо треугольник ASD лежит в плоскости одного из оснований. Первый случай невозможен, так как тогда $AB \parallel CD$. Поэтому AD — диаметр (рис. 6, а) и $\angle CDS=\pi/2 \Rightarrow C'D \perp SD$ (рис. 6, б), $ASDC'$ — прямоугольник; $AD=10/3$, $BC=8/3$, $AB'=$ $=C'D=AS$, поэтому $SK=B'K=OL=1$. Пусть h — высота пирамиды, опущенная из вершины S, тогда

$$V=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot h=\frac{1}{6}(AD+BC)\cdot BK\times$$

$$\times SK\sin\angle BKB'=\frac{1}{6}(AD+BC)\cdot SK\cdot BB'.$$

Вариант 3

1. $(-\infty;\ -1/2)\cup(-1/2;\ 1/4)\cup(1;\ +\infty)$.

Указание. Неравенство равносильно системе

$$|4x^2-1|>3x,\ x\neq\pm1/2.$$

2. $\alpha=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{3}\right)+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

Указание. Вершина параболы $y(x)=x^2+$ $+px+q$ находится в точке $x_0=-p/2$, $y_0=$ $=q-p^2/4$. Условие $y_0=3x_0$ приводит к уравнению относительно α:

$$25\cos^2 2\alpha+5\cos 2\alpha-12=0.$$

3. 3. Указание. Пусть B' — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на прямую AD. Тогда $B'A=1$. Затем найдите отрезок $BB'=x$, пользуясь тем, что радиус окружности равен $\frac{3}{4}x$, а расстояние от ее центра до отрезка PM равно $x\cdot 14$.

4. См. рис. 7. Уравнения прямых: $b=2a+7$,

$$b=-\frac{60}{91}a+7,\ a=0.$$

Указание. Решив систему, составленную из первых двух уравнений, получаем

$x=\frac{12-b}{4(a+b-4)}$; $y=\frac{a+8}{4(a+b-4)}$. Подставляя полученные значения x и y, приходим к уравнению $(a+13)^2+b^2=169$ при $a+b\neq4$. При $a+b=4$ решение системы существует лишь при $a=-8$, $b=12$.

5. $8\sqrt{2}$. Решение. Рассмотрим равнобедренный треугольник SKN $(SK=SN)$ и проведем биссектрисы всех его внутренних и внешних углов. Тогда в каждой из точек O_1, O_2, O_3, O_4 и только в них пересекаются три биссектрисы (по одной из каждой вершины). Отметим, что $O_1O_2 \parallel KN$, $S\in O_1O_2$, $O_2S=SN=SK=SO_1$. Пусть SK и SN — апофемы граней ASB и DSC (рис. 8), тогда в плоскости KSN (рис. 9) возникает ранее рассмотренная картинка. Случай точек O_3 и O_4 невозможен, т. к. тогда $O_1H=2=HN$ и $\angle HNS=\pi/2$. Поэтому центр сферы может лежать только на прямых $A'B'$ и $C'D'$, проходящих через точки O_1 и O_2 и параллельных AB и CD, а высота пирамиды равна радиусу сферы, т. е. $SH=2$. Те же самые рассуждения, примененные к плоскостям граней SBC, SAD и $ABCD$, показывают, что центр сферы может находиться только в вершинах ромба $A'B'C'D'$ $(A'D' \parallel B'C' \parallel AD)$, а точка S является центром этого ромба; $A'B'C'D' \backsim$ $\backsim ABCD$ с коэффициентом подобия $SN/HN=$ $=\sqrt{2}$.

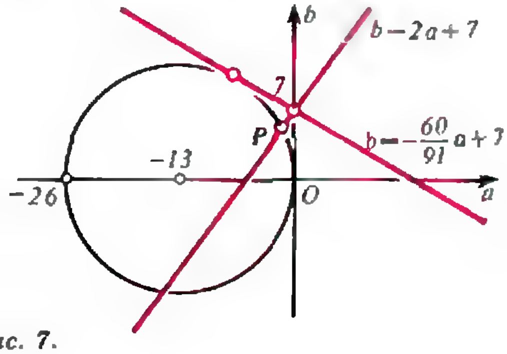


Рис. 7.

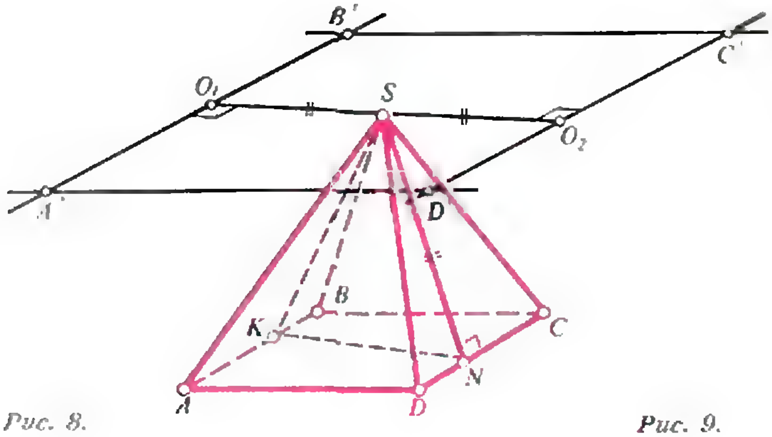


Рис. 8.

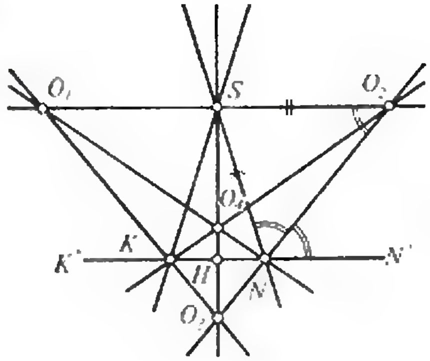


Рис. 9.

Точки A' и C' не подходят, т. к. тогда $2\sqrt{2}AB/3=2$ и $AB=3/\sqrt{2}<4=KN$.
Для точек B' и D':

$$BH^2=\frac{1}{2}B'S^2=\frac{1}{2}(B'H^2-SH^2)=\frac{4}{9}AB^2-2,$$

$$BH^2=\frac{1}{4}BD^2=\frac{1}{4}((AB-\sqrt{AB^2-16})^2+16)=$$

$$=\frac{1}{2}(AB^2-AB\sqrt{AB^2-16}).$$

Отсюда получаем $AB=3\sqrt{2}$.

$$V=\frac{1}{3}AB\cdot KN\cdot SH=8\sqrt{2}.$$

Физика

Вариант 1

1. Так как скорость саней v_0 постоянна, коэффициент трения между санями и горкой $\mu=\operatorname{tg}\alpha$. Это означает, что векторная сумма сил реакции опоры $\vec{R}=\vec{F}_{тр}+\vec{N}$ направлена всегда вертикально вверх (рис. 10). Нетрудно убедиться, что даже при действии произвольной силы $\vec{F}$ на сани проекции сил $\vec{F}_{тр}$ и $\vec{N}$ на горизонтальную ось X компенсируют друг друга. Поэтому можно записать закон сохранения *импульса вдоль оси* X (*и только вдоль нее; по любым другим осям закон сохранения импульса не выполняется*):

$$Mv_0\cos\alpha=(M-m)u\cos\alpha+mv\cos\beta,$$

откуда находим искомую скорость саней после прыжка собаки:

$$u=\frac{Mv_0\cos\alpha-mv\cos\beta}{(M-m)\cos\alpha}=\frac{2Mv_0-mv}{2(M-m)}.$$

2. Площадь поверхности шарика равна $4\pi r^2$, объем оболочки $4\pi r^2\delta$, ее масса

$$m=\rho\cdot 4\pi r^2\delta.$$

Масса M заключенного в шарик гелия определяется из уравнения Менделеева—Клапейрона

$$p\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=\frac{M}{\mathrm{M}}RT.$$

Решая полученные уравнения совместно, находим

$$M=\frac{\mathrm{M}mp}{6RT\rho\delta}\sqrt{\frac{m}{\pi\rho\delta}}\approx 0{,}47 \text{ г}.$$

3. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (см. Ф1325).

4. В среде с показателем преломления n длина волны уменьшается в n раз, т. е. в воздухе $\lambda_в=\lambda/n_в$, а в азоте $\lambda_а=\lambda/n_а$. Соответственно, на длине кюветы L укладывается число длин волн, равное

$$N_в=L/\lambda_в=Ln_в/\lambda \text{ и } N_а=Ln_а/\lambda.$$

По условию задачи, при замене в кювете воздуха на азот интерференционная картина сместилась ровно на одну полосу, следовательно,

$$N_а-N_в=1, \text{ или } Ln_а-Ln_в=\lambda.$$

Отсюда

$$n_а=n_в+\lambda/L=1{,}000297.$$

Вариант 2

1. В том случае, когда тележка и ящик удерживаются упором, сила давления тележки на ящик

$$N_1=mg\sin\alpha.$$

Когда упор убран, уравнение движения ящика можно записать в виде

$$ma=mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha+N_2,$$

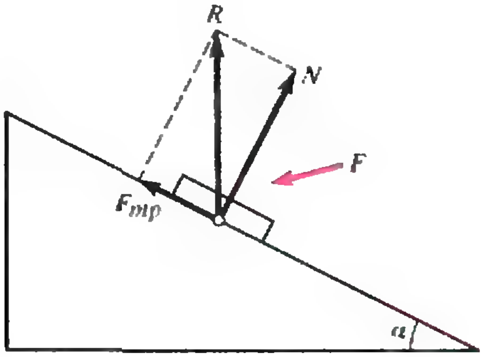


Рис. 10.

а тележки —

$$ma = mg\sin\alpha - N_2,$$

где N_2 — сила взаимодействия ящика и тележки в этом случае. Решая совместно все три уравнения, получаем

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\mu} = 4.$$

2. Процесс состоит из двух этапов. На первом происходит испарение жидкости при неизменной температуре T_0. При этом объем насыщенного пара увеличивается вдвое, и совершается работа

$$A_1 = p\Delta V_1 = pV_1 = \nu RT_0,$$

где V_1 — объем, занимаемый ν молями насыщенного пара. На втором этапе происходит изобарический нагрев 2ν молей пара, и совершается работа

$$A_2 = p\Delta V_2 = 2\nu R\Delta T.$$

Из первого начала термодинамики изменение внутренней энергии содержимого цилиндра равно

$$\Delta U = Q - A = Q - (A_1 + A_2) = Q - \nu RT_0 - 2\nu R\Delta T.$$

3. При условии $2\pi/\omega \gg \tau$ можно считать, что напряжение на конденсаторе остается постоянным:

$$U_C = \mathscr{E} = \text{const}.$$

Тогда заряд конденсатора меняется по закону

$$Q_C = \mathscr{E}C_0(1 + A\sin\omega t).$$

Отсюда переменная составляющая тока, текущего через конденсатор, равна

$$i_\sim = Q'_C = \mathscr{E}C_0A\omega\cos\omega t,$$

ее амплитуда —

$$I_\sim = \mathscr{E}C_0A\omega,$$

а мощность, выделяемая на резисторе, составляет

$$P = \frac{I_\sim^2 R}{2} = \frac{(\mathscr{E}C_0A\omega)^2R}{2}.$$

4. $l = 8F\sqrt{F^2 + b^2}/(d+F) - (d+F) = 26$ мм.
Указание. См. рис. 11.

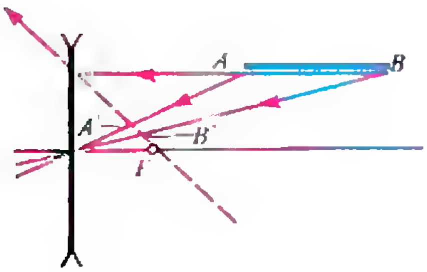


Рис. 11.

Вариант 3

1. Согласно закону сохранения импульса (см. рис. 12),

$$m_4\bar{v}_4 + m_3\bar{v}_3 + m_2\bar{v}_2 + m_1\bar{v}_1 = 0,$$

или

$$(m_4v_4)^2 = (m_3v_3)^2 + (m_2v_2)^2 + (m_1v_1)^2.$$

Отсюда

$$v_3 = \sqrt{(m_4v_4)^2 - (m_1v_1)^2 - (m_2v_2)^2}/m_3 = 200 \text{ м/с}.$$

2. Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты

$$Q_{12} = \Delta U + p\Delta V = 3/2R(T_2 - T_1) + p(V_2 - V_1) =$$
$$= 5/2\,RT_2(\alpha - 1)/\alpha,$$

где $\alpha = V_2/V_1 = V_3/V_2$.
Работа газа на участке *2* — *3* равна

$$A_{23} = (p_2 + p_3)(V_3 - V_2)/2 = RT_2(\alpha^2 - 1)/2.$$

По условию задачи

$$4A_{23} = Q_{12},$$

откуда получаем

$$\alpha = V_2/V_1 = V_3/V_2 = 4.$$

Очевидно, что второй корень квадратного уравнения ($\alpha = 1$) не отвечает условию задачи.
3. Для любого участка проводника можно записать закон Ома в виде

$$U = El = IR = I\rho l/S,$$

где U — разность потенциалов на длине проводника l, E — напряженность электрического поля в проводнике. Отсюда получаем

$$\frac{E_1}{\rho_1} = \frac{E_2}{\rho_2} = \frac{I}{S},$$

или

$$E_2 - E_1 = (\rho_2 - \rho_1)I/S.$$

С другой стороны,

$$E_2 - E_1 = \sigma/\varepsilon_0,$$

где σ — поверхностная плотность заряда, ε_0 — электрическая постоянная.
Тогда окончательно

$$\sigma = \varepsilon_0(\rho_2 - \rho_1)I/S > 0.$$

4. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта» (см. Ф1332).

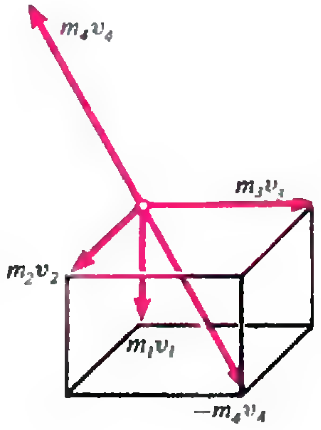


Рис. 12.

[redacted]ковский институт тронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $a+3$ и (-3) при $a\notin\{-1;-4\}$, (-3) при $a=-1$ и (-1) при $a=-4$.

2. $\{x\in(-3;-2)\cup(8;9),\quad 0<y<x+4\}\cup\{x\in\in(-2;8),\ y>x+4\}$.

Указание. Рассмотрите сначала функцию

$$u(x)=|x+1|-2|x-1|+6.$$

Ее значения лежат между нулем и единицей при $x\in(-3;-2)\cup(8;9)$ и больше единицы при $x\in(-2;8)$. В первом случае $\log_u y$ убывает с возрастанием y, во втором — возрастает.

3. $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ 2\pi k,\ -\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. **Указание.** Данное уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases}(\sin x\pm 1/2)(\cos^2 x-\cos x)=0,\\ \sin x(\cos x-1)\cos x\geqslant 0.\end{cases}$$

4. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi\sin^2\alpha\cos\alpha}{4(1+\cos\alpha)}$, где S_1 — площадь поверхности полушара, S_2 — боковая поверхность пирамиды. **Указание.** Рассмотрите сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной основанию и двум противоположным боковым граням. В таком сечении легко выразить через радиус полушара все необходимые данные для нахождения площади.

5. $a\in[1/8;+\infty)$. **Указание.** После замены переменной $u=3^x$ данное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases}u^2+(2a+4)u+8a+1>0,\\ u>0.\end{cases}$$

Остается выяснить, при каких значениях параметра a часть графика параболы $y=u^2++(2a+4)u+8a+1$, лежащая в правой полуплоскости, целиком лежит в верхней полуплоскости.

Вариант 2

1. $a-2$ и $4-2a$ при $a\notin\left\{-\frac{1}{2};1;\frac{4}{3}\right\}$, 5 при $a=-\frac{1}{2}$, (-1) при $a=1$, $\left(-\frac{2}{3}\right)$ при $a=\frac{4}{3}$.

2. 0.

3. $\pm\sqrt{\pi k}$, $\pm\sqrt{\frac{\pi}{3}+2\pi k}$, $\pm\sqrt{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}$, $k\geqslant 0$, $k\in Z$. Сумма корней, принадлежащих отрезку $[-\pi;0]$, равна

$$S=-(\sqrt{\pi/3}+\sqrt{\pi}+\sqrt{5\pi/3}+\sqrt{2\pi}++\sqrt{7\pi/3}+\sqrt{3\pi}).$$

4. $BD=2\sqrt{2}$, площадь сечения, являющегося квадратом, равна $8(3-2\sqrt{2})$. **Указание.** Для нахождения ребра BD удобно рассмотреть сечение пирамиды плоскостью, содержащей это ребро и перпендикулярной основанию пирамиды. Чтобы найти все сечения, являющиеся квадратами, заметьте, что в таких случаях секущая плоскость должна быть параллельна двум скрещивающимся под прямым углом ребрам. Такая пара ребер только одна — BD и AC. Нетрудно понять, что из всех плоскостей, параллельных двум этим ребрам, только одна дает в сечении квадрат.

5. $(-4;17/4)$. **Указание.** График функции $y=|x+a|$ отличается от графика функции $y=|x|$ лишь сдвигом вдоль оси абсцисс. Множество тех значений x, где выполнено данное неравенство, расположено между точками касания параболы $y=4-x^2$ с графиком функции $y=|x+a|$ при двух указанных выше значениях параметра a.

Физика

1. $h=s\sin\alpha/(1-\cos\alpha)=1{,}7$ м.

2. $a=g\,\frac{4m_1m_2+m_0(m_1-m_2)}{4m_1m_2+m_0(m_1+m_2)}=2{,}9$ м/с^2.

3. $l=hm\operatorname{ctg}\alpha/(M+m)=4{,}4$ см.

4. $\eta=2/13=15\,\%$.

5. $\varphi=1-\Delta mRT/(\mathrm{M}p_{\text{н}}V)=0{,}627=62{,}7\,\%$, где $R=8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная, $\mathrm{M}=18$ г/моль — молярная масса воды, $p_{\text{н}}=10^5$ Па — давление насыщенного пара при 100 °С.

6. $q=10\,CU/71=15$ мкКл.

7. $P=5\,U^2/(3R)=16$ Вт.

8. $\sigma=IBR/S=3{,}3$ кН/м^2.

9. $x=d_0/2-l/n=11{,}5$ см.

10. $L=\frac{dF(D+l)}{(D+l)(d-F)-ld}=1{,}22$ м.

Указание. См. рис. 13.

[redacted]ковский педагогический арственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. 5 %. **Указание.** Если x — искомая величина, то условие задачи записывается в виде $\left(1+\frac{x+10{,}5}{100}\right)^2=$

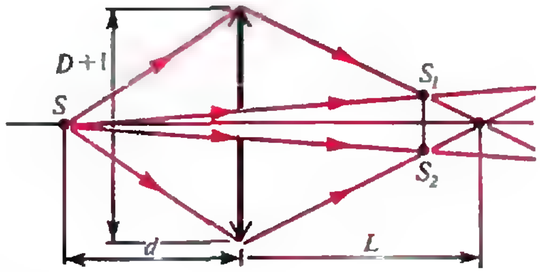


Рис. 13.

$=1{,}21\left(1+\frac{x}{100}\right)^2$, откуда $1+\frac{x+10{,}5}{100}=$ $=1{,}1\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)$.

2. $\frac{\pi}{12}+2\pi k, \frac{5\pi}{12}+2\pi k,\ k\in Z$. **Указание.** Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin 2x=1/2,\\ \sin x+\cos x>0.\end{cases}$$

3. $(1/5;\ 1/3)\cup(1/3;\ 2/5)\cup(1/2;+\infty)$. **Указание.** Приведите неравенство к виду $\frac{(y-1)^2}{y}>0$, где $y=\log_{2x}(5x-1)$.

Полученное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}y>0,\\ y\neq 1.\end{cases}$$

4. $\frac{\sqrt{65}}{2}$. **Указание.** Исследуйте на экстремум функцию

$d(x)=\left(\sqrt{(x-2)^2+(\sqrt{12+5x-2x^2}-0)^2}\right)^2=$ $=-x^2+x+16$ в области определения $f(x)$, т. е. на $[-3/4;\ 4]$.

5. $\frac{a^2}{2}\sqrt{8+4\,\mathrm{tg}^2\alpha}$. **Предостережение.** $S_{BKD}\neq\frac{1}{2}KO\cdot BD$.

Вариант 2

1. 45 г, 50 г. 2. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. **Указание.** Преобразуйте уравнение к виду $2t^2+t-1=0$, где $t=|\sin x|$.

3. $(4;\ +\infty)$. **Указание.** Правую часть неравенства приведите к виду $-\log_x\log_3\frac{x+2}{x-2}$. Исходное неравенство с учетом его О.Д.З. будет равносильно системе

$$\begin{cases}\log_3\frac{x+2}{x-2}<1,\\ x>2.\end{cases}$$

4. $\frac{2\sqrt{51}}{9}$. 5. $\arccos\frac{7}{15}$.

Вариант 3

1. 45°. 2. $\frac{\pi}{2}(2k+1),\ \frac{\pi}{4}(2k+1),\ \frac{\pi}{14}(2k+1),$ $k\in Z$.

3. 2. 5. $[-2;\ -1)\cup[2;\ +\infty)$.

Вариант 4

1. 480 см³. 2. $\frac{\pi}{8}(2k+1),\ k\in Z$.

3. -1, $(-\infty;\ -2]\cup[2;\ +\infty)$. 5. $(-5;\ +\infty)$.

Вариант 5

1. 432 см². 2. $\frac{\pi}{8}k,\ k\in Z$. 3. $(0;\ 0{,}25]$.

5. $(-2;3)\cup(5;\ +\infty)$.

Устный экзамен

Математический факультет

1. $\frac{\pi}{2}$. 2. $\log_3\sqrt{15}>\sqrt{\log_3 5}$. 3. 693.

4. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$, $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Указание. Исследуйте на экстремум функцию $f(t)=t^3-t$ на $[-1,\ 1]$. 5. $y=x+1$. 6. $\frac{1}{4}\sqrt{2(4+\sqrt{2}+\sqrt{6})}$. **Указание.** $\sin 997{,}5^\circ=$ $=-\cos 7{,}5^\circ=-\sqrt{(1+\cos(45^\circ-30^\circ))/2}$.

7. **Указание.** Умножьте обе части уравнения на $4\sin 36^\circ$.

8. **Указание.** При $x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ возведите обе части неравенства в квадрат.

Факультет начальных классов

1. $-\frac{\pi}{4}-\pi k$, $\mathrm{arctg}3+\pi k$, $k\in Z$. 2. $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$. 3. 3. 4. $(-\infty;\ -4)\cup$ $\cup(-2;\ -4)\cup(6;\ +\infty)$. 5. $(0;\ 1/625)$. 6. $(-1;\ +\infty)$. 8. 3.

	1	2	3	4	5	6	7	8	В	Н	П	М
1	▨		0:0			1:0	1:0	1:0	3	1	0	3:0
2		▨			1:0	1:0	1:0	1:0	4	0	0	4:0
3	0:0		▨		0:0	1:1	0:0		0	4	0	1:1
4				▨	1:0	1:0	1:0	1:0	4	0	0	4:0
5		0:1	0:0	0:1	▨			2:0	1	1	2	2:2
6	0:1	0:1	0:1	0:1		▨			0	1	3	1:4
7	0:1	0:1	0:0	0:1			▨		0	1	3	0:3
8	0:1	0:1		0:1	0:2			▨	0	0	4	0:5

Рис. 14.

Физика

1. $a=F/(m_1+m_2)-\mu g=4$ м/с²; $T=Fm_1/(m_1+m_2)=2{,}5$ Н.
2. $T=3mg=9$ Н.
3. $M=m(v-u)/u=72$ кг.
4. $p_2=p_1T_2/(2T_1)=1{,}9\cdot10^5$ Па.
5. $A=Q(1-T_2/T_1)=12$ кДж.
6. $\eta=\rho Vc(t_к-t)/(P\tau)=0.7$ (здесь $t_к=100$ °С — температура кипения).
7. $v=\sqrt{2eU/m}=5{,}9\cdot10^6$ м/с.
8. $q=mgd/U=1{,}5\cdot10^{-16}$ Кл.
9. $I'=2\mathscr{E}/(r+\mathscr{E}/I)=0{,}9$ А; $U'=\mathscr{E}-I'r=10{,}2$ В.
10. $n=\operatorname{ctg}\alpha=1{,}7$.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 9 за 1991 г.)

1. Эта задача имеет «подвох». Не все заметили, что ребята, живущие на нижних этажах, могут подниматься к себе, не пользуясь лифтом.

Правильный ответ таков: лифтер поднимает 13 школьников на 14-й этаж, и один из них уже дома, четверо ребят, живущие на этажах с 15-го по 18-й, поднимаются дальше уже по лестнице, а восемь — спускаются к себе (на этажи с 6-го по 13-й). Четыре же оставшихся школьника, чьи квартиры находятся на этажах со 2-го по 5-й, поднимаются пешком, вообще не пользуясь лифтом. При этом суммарное неудовольствие равно

$$0+(1+2+3+4+5+6+7+8)+\\+4(1+2+3+4)=76.$$

2. См. рис. 14 на с. 79.
3. См. рис. 15.

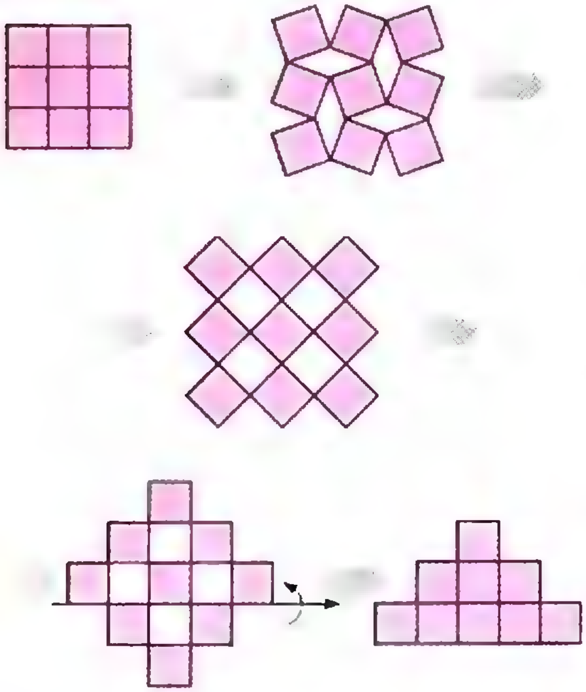


Рис. 15.

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович,
Ю. Лысов, Т. Петрова, А. Сосинский,
А. Стасенко, С. Табачников,
В. Тихомирова, В. Уроев, А. Черноуцан,
А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, Л. Кардасевич,
С. Коновалов, Е. Коршунова, А. Котова, А. Савин,
В. Сурдин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, С. Лухин, Э. Назаров,
П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Фото представили:
В. Дубровский, Т. Лозанская, В. Николаев

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор В. Соронина

103006, Москва К-6, ул. Тверская, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54, факс 251-55-57

Сдано в набор 28.10.91. Подписано к печати 05.02.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,45.
Тираж 85 939 экз. Заказ 1700. Цена 1 р. 10 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и массовой информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

XI ЧЕМПИОНАТ МИРА

В 1967 году состоялась первая в истории встреча компьютеров за шахматной доской. Советская программа «Каисса» в телеграфном матче из четырех партий сразилась с американской программой, созданной в Станфордском университете, и выиграла матч со счетом 3:1. Став достоянием широкой прессы, этот поединок дал мощный импульс к развитию компьютерных шахмат во многих странах мира. За прошедшие четверть века шахматные компьютеры добились фантастических результатов: если в 60-е годы они играли как простые любители, то ныне их удостаивают внимания самые выдающиеся игроки, включая Г. Каспарова и А. Карпова.

На первых этапах развития компьютерных шахмат отношения между собой выясняли только программы, разработанные для больших машин, супер-ЭВМ, занимавших тогда целые этажи научно-исследовательских институтов. В таких условиях не каждый программист мог попробовать свои силы. Ситуация изменилась с появлением на свет микро-ЭВМ, особенно персональных компьютеров (PC). Теперь любой владелец собственной машины получил возможность создать свою шахматную программу. В результате возник новый вид состязаний — с участием микрокомпьютеров и программ для PC.

В чемпионатах супер-ЭВМ, которые проводятся раз в три года, начиная с 1974-го, допускаются микрокомпьютеры и любые программы. В настоящее время сильнейшей программой, написанной для больших машин, является американка «Дип Сот». Кстати, в этом году ей предстоит отстаивать свой чемпионский титул.

Что касается микрокомпьютеров, то их чемпионаты проводятся ежегодно с 1980 года. При этом, как правило, турнир проходит один, а чемпионы определяются сразу в нескольких группах.

К первой относятся программы, записанные на обычных дискетах и предназначенные для мощных персональных компьютеров, совместимых с IBM PC (самый популярный класс PC, в том числе в нашей стране). С такими программами многим читателям, наверное, не раз доводилось играть. Во многих PC они даже входят в математическое обеспечение, т. е. заложены в память ЭВМ. До недавнего времени эти программы не отличались большим мастерством, но сейчас положение изменилось (об этом чуть дальше).

Ко второй группе относятся программы, разработанные для специализированных машин, приспособленных только для игры в шахматы. Речь, по существу, идет не столько об отдельных программах, сколько о программном обеспечении (Software) — техническом и программном комплексе, специально разработанном для успешной шахматной игры. Software может быть «вмонтировано» в робота, самые распространенные компьютеры такого сорта — «Фиделити» и «Мефисто», неоднократные чемпионы мира.

К этой же группе относят и Software, предназначенные для пользователей PC. Это может быть специальная машина, которая подключается к домашнему компьютеру.

Наконец, третью группу составляют любительские программы — обычно они не отличаются большой шахматной силой и часто пишутся на компьютерах, более простых, чем IBM PC.

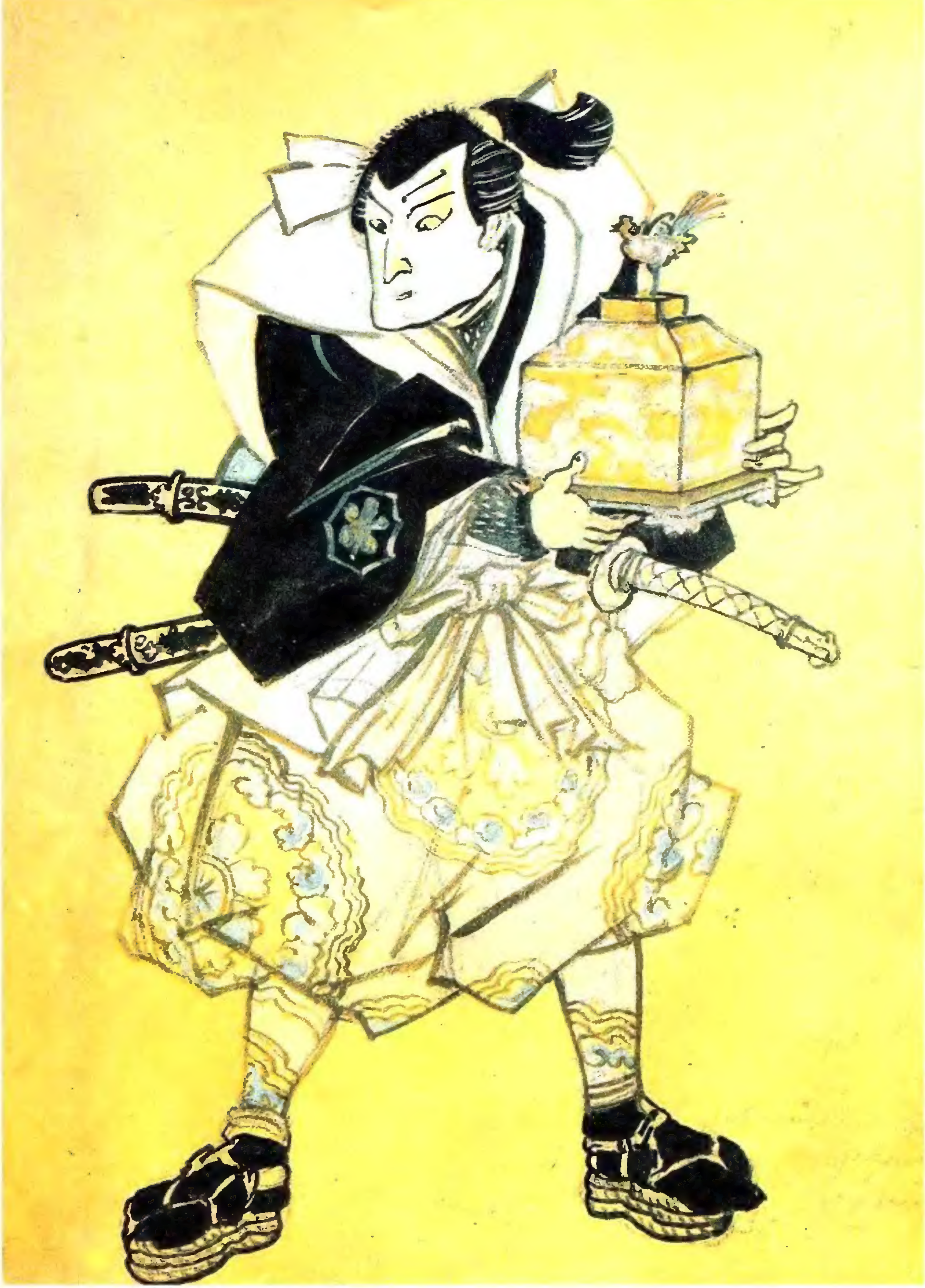
Теперь, когда мы разобрались с категориями шахматных программ, расскажем об итогах 11-го чемпионата мира среди микрокомпьютеров, состоявшегося в прошлом году в канадском городе Ванкувер. 15 программ состязались в семи турах по швейцарской системе. Первое место в турнире неожиданно заняла программа-приставка «Гидеон» (автор — голландец Эд Шредер) — 6 очков и единственное поражение (от «Мефисто»). «Гидеон» был объявлен чемпионом мира в группе Software.

На пол-очка меньше набрала программа «М-Чесс» — поражение от «Гидеона» и одна ничья. «М-Чесс», созданная американцем Марти Хиршем, записана на обычной дискете. Таким образом, эта программа стала чемпионкой в группе PC. Надо сказать, что это довольно крупное событие в мире шахматных компьютеров. То, что шахматные программы для PC в состоянии на равных соперничать со специализированными микрокомпьютерами, делает компьютерные шахматы еще более разносторонними и интересными.

Знаменитый робот «Мефисто» (программа принадлежит англичанину Ричарду Лэнгу), о котором мы неоднократно писали, набрал пять очков (поражения от программ «М-Чесс» и «Кинг») и оказался на третьем месте, опередив «Кинга» (автор — Джохан Коннинг из Дании) по коэффициентам. Пятой была программа «Сайтек» (авторы — Дан и Касе Спраклен), шестой — программа «Хиркс» (ее написал Марк Уник из Англии), которая стала чемпионкой мира в группе любительских программ.

Итак, после побед в семи чемпионатах подряд «Мефисто» впервые расположился ниже первой строчки. В знак уважения к заслугам любимца публики был проведен матч «Гидеон» — «Мефисто». Ожесточенная схватка закончилась мирно — 2:2, и обеим программам были присвоены звания абсолютных чемпионов мира. Так, на дружеской ноте, завершился XI чемпионат мира среди микрокомпьютеров. Наиболее интересные партии, сыгранные в Ванкувере, а также встречи победительниц турнира с мастерами мы приведем в следующих выпусках «Шахматной странички».

Е. Гик

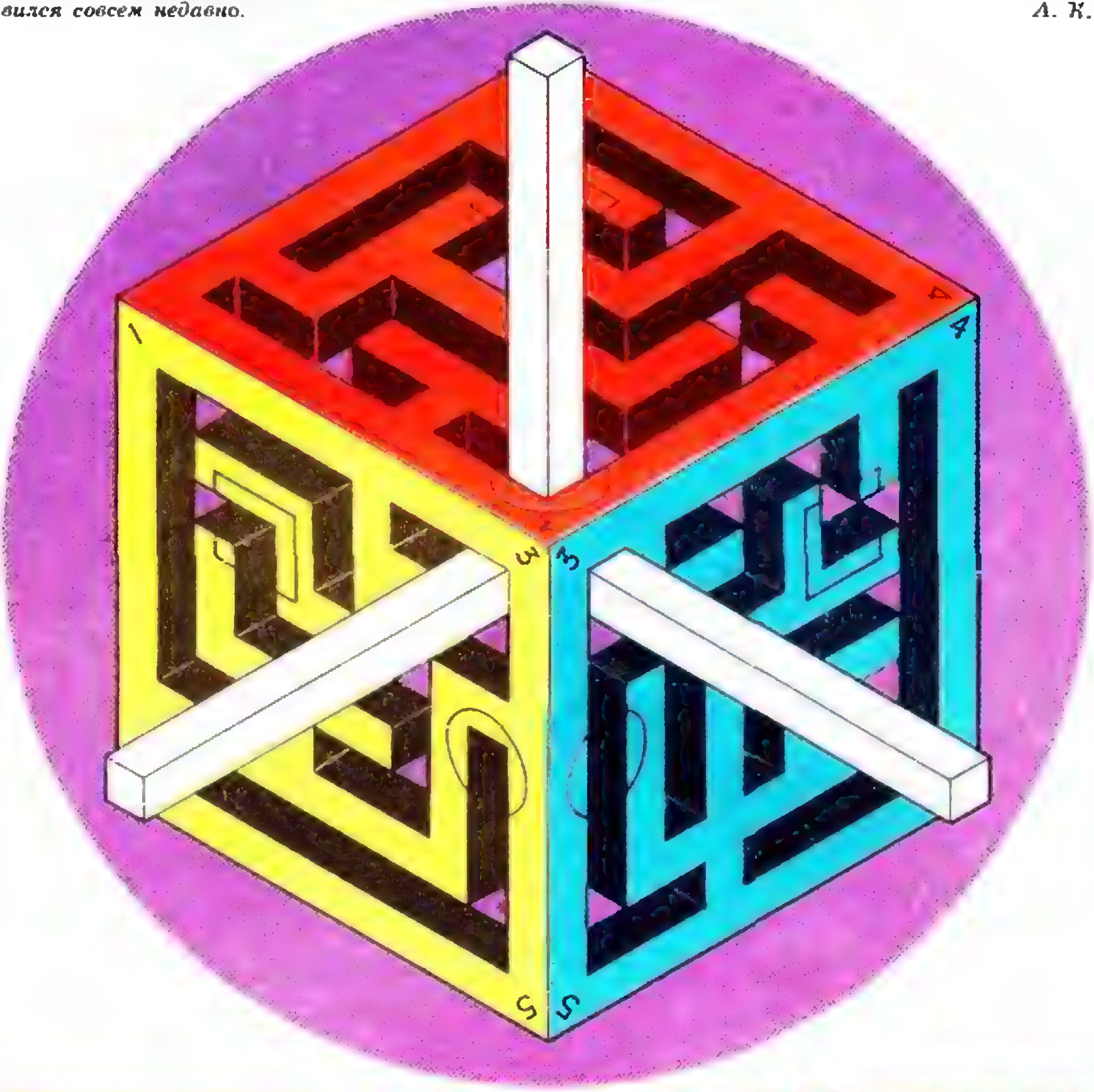


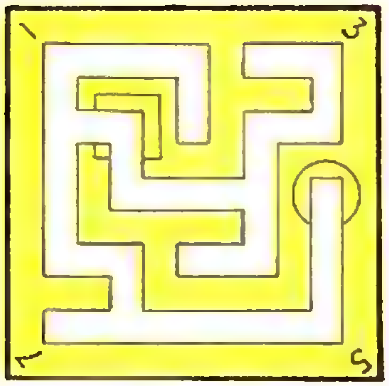
1 р. 10 к.
Индекс 70465

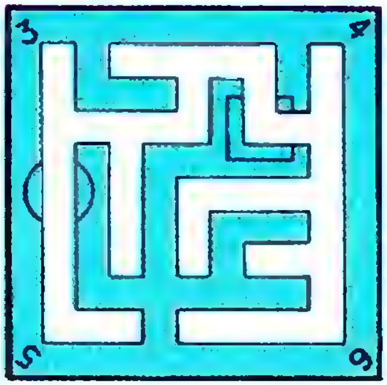
Только две головоломки оспаривают право называться самыми древними, одна из них — мозаика, другая — лабиринт. Казалось бы, за тысячелетнюю историю придумано столько лабиринтов, что предложить что-нибудь принципиально новое невозможно. Но вот на нашей картинке вы видите лабиринт, который появился совсем недавно.

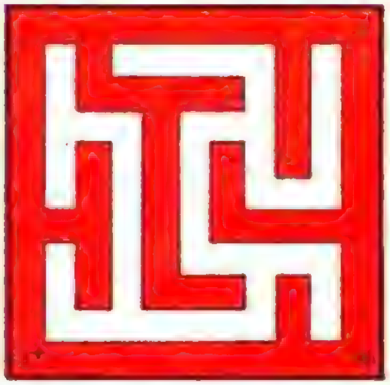
Новая игрушка представляет собой коробочку, сложенную из трех пар обычных лабиринтов. Внутри коробочки помещено перекрестие из трех палочек, которое называется курсором. Задача состоит в том, чтобы за одну минуту перевести перекрестье курсора из одного угла кубика в другой.

А. К.









НОМЕР
2

КВАНТ 2 1992

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Российской академии наук,
Президиум
Академии педагогических наук
и коллектив редакции
журнала «Квант»

Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *В. Эдельман.* Металлы
10 *В. Смилга.* Как начиналась геометрия
18 *В. Бернштам, И. Манзон.* Пинч-эффект

Задачник «Кванта»

20 Задачи М1326—М1330, Ф1333—Ф1337
22 Решения задач М1296—М1300, Ф1313—Ф1317
29 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

31 Задачи
32 *А. Савин.* Про умножение
36 Конкурс «Математика 6—8»

Школа в «Кванте»
Математика 9—11:

37 Вписанный четырехугольник

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Лаборатория «Кванта»

42 *Н. Бурлаки.* Опыты с вращающейся жидкостью

Практикум абитуриента

47 *А. Афонин, В. Капшай, М. Капшай, В. Шолох.* Что покажет динамометр?

Игры и головоломки

52 *И. Акулич.* Ни Лойд, ни Дьюдени...

58 **Варианты вступительных экзаменов 1991 г.**

Новости науки

66 Живой компьютер?

Фантастика

67 *У. Моррисон.* Мешок

72 **Ответы, указания, решения**

«Квант» улыбается *(57)*

Реклама *(9)*

Наша обложка

1 *Фотография культуры нейронов. О получении таких культур сегодня и о возможности их использования в электронике завтра — читайте в рубрике «Новости науки».*
2 *Фантастический металлический монстр Макса Эрнста («Grabbeigabe», 1925 г.) — символ чуждого человеческому. А для нас металлы привычны, они объект изучения специалистов (см. статью на с. 2).*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Плоская складная головоломка.*

© «Квант», 1992

МЕТАЛЛЫ

Доктор физико-математических наук
В. ЭДЕЛЬМАН

Что такое металлы?

«Металлом называется светлое тело, которое ковать можно»,— писал в 1763 году Ломоносов. Загляните в ваш учебник химии и вы увидите, что металлы обладают характерным металлическим блеском («светлое тело»), хорошо проводят тепло и электрический ток. Правда, тут же вы прочтете, что существуют элементы, проявляющие свойства как металлов, так и неметаллов. Другими словами, нет четкой грани, отделяющей одно от другого. Химика, который интересуется, в первую очередь, химическими реакциями и для которого каждый элемент — свой особый мир, такая неоднозначность не очень смущает. А вот физика это не устраивает. Если физика делит тела на металлы и неметаллы, то нужно понять, в чем их принципиальное различие. Поэтому надо так определить, что такое металл, чтобы, как и в других случаях в области точных наук, удовлетворить двум требованиям:

1) все металлы должны обладать всеми без исключения приписываемыми им признаками;

2) иные объекты должны не обладать хотя бы одним из этих признаков.

Вооружившись этими соображениями, посмотрим, все ли металлы без исключения имеют все свойства, приписываемые им учебником. Начнем с «ковать можно», т. е. с пластичности, говоря современным языком. И тут же, по созвучию, мы вспомним пластмассы: ведь не зря они так названы, многим из них свойственна пластичность — способность необратимо изменять форму без разрушения. Конечно, медь, железо, алюминий ковать легко, со свинцом еще проще, индий — довольно редкий и дорогой металл — можно мять почти как воск (а воск ведь — не металл!), щелочные металлы и того мягче. А попробуйте стукнуть по обычному чугуну — и он разлетится на кусочки! Ну, тут металлурги скажут: это потому, что чугун — не простое вещество. Он состоит из кристаллов железа, разделенных прослойками углерода, т. е. графита. Вот по этим-то прослойкам чугун и ломается. Ну что же, все верно. Только вот беда — хрупкий графит, как оказывается, современная физика относит к металлам! Да и не один графит: числятся, например, среди металлов мышьяк, сурьма и висмут, но ковать их можно с таким же успехом, как стекло — разлетаются на мелкие кусочки!

Проделайте такой простой опыт: разбейте баллон сгоревшей лампы, достаньте оттуда вольфрамовую спираль и попробуйте ее раскрутить. Ничего не выйдет, она рассыпется в пыль! Но ведь как-то ее сумели скрутить на заводе? Значит, может быть и такое — то можно деформировать, то нельзя, в зависимости от того, что происходило с образцом в прошлом. Что ж, придется, видимо, с этим признаком — пластичностью — расстаться. Тем более, что он присущ многим неметаллам; ведь то же стекло — нагрей его, и оно станет мягким и податливым.

Итак, укорачиваем формулировку и двигаемся дальше.

На очереди — «блеск», или, говоря научным языком, оптические свойства. Блестящих предметов много: и вода, и стекло, и полированные камни, да мало ли что еще. Так что просто «блеском» не обойтись, вот и говорится: для металлов характерен *металлический* блеск. Ну, это совсем хорошо: получается, что металл — это металл. Правда, интуитивно мы

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 5 за 1981 год.

чувствуем, что металлическим блеском блестят полированные медь, золото, серебро, железо. А широко распространенный минерал пирит — разве не блестит, как металлы? Про типичные полупроводники германий и кремний и говорить не приходится, по внешнему виду их от металлов никак не отличишь. С другой стороны, не так давно научились получать хорошие кристаллы таких соединений, как двуокись молибдена; кристаллы эти коричнево-фиолетовые и на обычный металл мало похожи. Оказывается, это вещество надо считать металлом. Почему — будет ясно чуть дальше.

Так что блеск как чисто «металлический» признак отпадает.

На очереди — теплопроводность. Пожалуй, этот признак можно отбросить сразу — все без исключения тела проводят тепло. Правда, про металлы говорится, что они *хорошо* проводят тепло. Но, боюсь, на вопрос «что такое хорошо и что такое плохо?» в этом случае ни один папа не ответит.

Хорошо ли проводит тепло медь? Посмотрим в таблицу и сразу же столкнемся со встречным вопросом: а какая медь и при какой температуре? Если взять чистую медь, например ту, из которой делают провода для радиоприборов, и нагреть ее до красного каления, т. е. отжечь, то при комнатной температуре она да еще чистое серебро будут проводить тепло лучше любого другого металла. Но погните такой медный образец, стукните или зажмите в тисках — и его теплопроводность станет заметно хуже. А что произойдет, если кусочек отожженной меди начать охлаждать? Сначала теплопроводность будет расти, увеличится в десятки раз при температуре около 10 К, а потом начнет быстро падать и при достижении абсолютного нуля должна стать нулевой (рис. 1).

Возьмем теперь другой металл — висмут. Картина для него очень похожа на ту, которую мы видели для меди, только максимум теплопроводности лежит при 3 К, а при комнатной температуре висмут проводит тепло плохо, не многим лучше, чем кристалл кварца. Но кварц-то — не металл! И тот же кварц, как видно из рисунка 1, по своим теплопроводным свойствам иногда оказывается не хуже меди. А плавленный кварц, т. е. кварцевое стекло, проводит тепло плохо, примерно как нержавеющая сталь.

Кварц — не исключение. Все кристаллы хорошего качества ведут себя подобным образом, только числа будут немного различными. У алмаза, например, уже при комнатной температуре теплопроводность лучше, чем у меди.

Отбрасываем с чистым сердцем теплопроводность и жалеть об этом не будем. И не только потому, что по этому признаку металл от неметалла не так уж легко отличить, но и потому, что, оказывается, специфические черты в теплопроводности металлов (а такие есть) являются следствием его электропроводности — последнего оставшегося свойства.

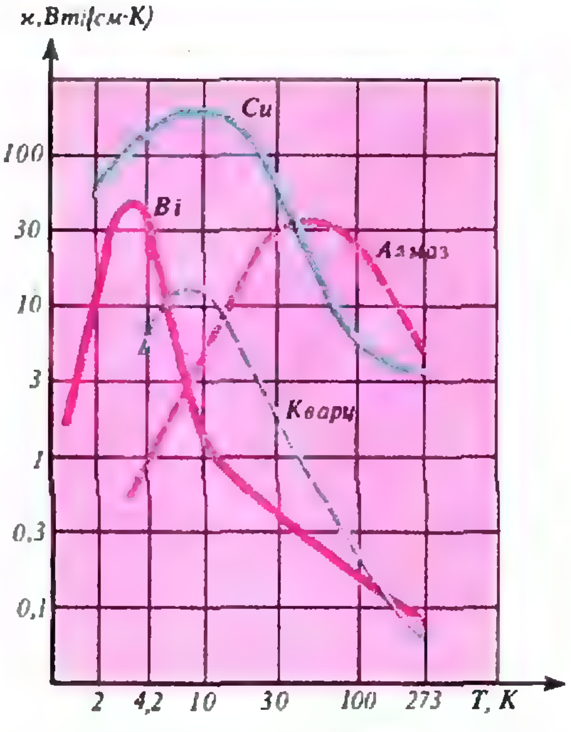


Рис. 1. Зависимость удельной теплопроводности от температуры для различных веществ. (Удельная теплопроводность — это количество теплоты, которое протекает между противоположными гранями кубика со стороной 1 см при разности температур между этими гранями 1 К в 1 с.)

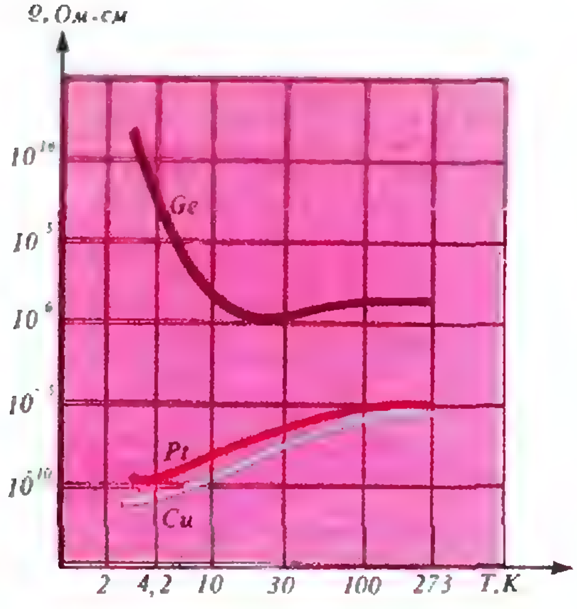


Рис. 2. Зависимость удельного сопротивления чистых металлов (меди и платины) и полупроводника (чистого германия) от температуры.

И опять в формулировке, приведенной в начале статьи, уточнение — не просто электропроводность, а *хорошая* электропроводность. А ведь когда речь шла о теплопроводности, эпитет «хорошая» нас насторожил и, как оказалось, не напрасно. Что же — и последнее свойство под подозрением? Надо обязательно его спасать, а то мы останемся вообще без металлов, а заодно без полупроводников, без изоляторов. Вот это наука получается! Любой школьник в большинстве случаев не задумываясь скажет, с чем он имеет дело, а копнули поглубже — остановились в недоумении.

И есть от чего. Возьмем таблицы физических величин и посмотрим на числа. Вот, к примеру, при комнатной температуре удельное сопротивление ϱ (Ом· см) меди $\sim 1{,}55\ 10^{-6}$; у висмута $\varrho \sim 10^{-4}$; у графита $\varrho \sim 10^{-3}$; у чистых кремния и германия $\varrho \sim 10^{2}$ (но, добавляя примеси, его можно довести до $\sim 10^{-3}$); у мрамора $\varrho = 10^{7} - 10^{11}$; у стекла $\varrho = 10^{10}$; а где-то в конце списка — янтарь с удельным сопротивлением до 10^{19}. И где же тут кончаются металлы-проводники и начинаются диэлектрики? А мы еще не упомянули про электролиты. Обычная морская вода неплохо проводит ток. Что же — и ее считать металлом?

Посмотрим, не поможет ли нам температура. Если повышать температуру, то различия между веществами начнут сглаживаться: у меди сопротивление начнет расти, у стекла, например, уменьшаться. Значит, надо проследить за тем, что произойдет при охлаждении. И вот тут мы наконец увидим качественные различия. Посмотрите на рисунок 2: при температурах жидкого гелия, вблизи абсолютного нуля, вещества разделились на две группы. У одних сопротивление остается небольшим, у сплавов или у не очень чистых металлов ϱ почти не изменяется при охлаждении, у чистых металлов сопротивление сильно уменьшается. Чем чище и совершеннее кристалл, тем значительнее это изменение. Иногда ϱ при температуре, близкой к абсолютному нулю, меньше, чем при комнатной, в сотни тысяч раз. У других веществ, например у полупроводников, с понижением температуры сопротивление начинает стремительно возрастать, и чем ниже температура, тем оно больше. Если бы можно было добраться до абсолютного нуля, то ϱ стало бы бесконечно большим. Впрочем, достаточно и того, что сопротивление реально становится столь большим, что никаким современным прибором его уже не измеришь.

Итак, мы добрались до ответа:
металлы — это такие вещества, которые проводят электричество при любой температуре.

В противоположность этому диэлектрики перестают проводить ток, если их охладить до абсолютного нуля. Если пользоваться таким определением, то и графит, и двуокись молибдена оказываются металлами. А куда же отнести полупроводники? Если речь идет о чистых, совершенных кристаллах, то они, строго говоря, диэлектрики. Но если в них содержится много примесей, то они могут стать металлами, т. е. сохранять проводимость при самых низких температурах.

Что же у нас осталось в конце концов? Нам удалось выявить *единственный* существенный признак, руководствуясь которым мы можем, если не в повседневной практике, то хотя бы в принципе, всегда отличить металл от неметалла. А раз этот признак единственный, то оказываются автоматически удовлетворенными оба условия, выполнения которых мы потребовали в начале статьи.

Почему металлы проводят ток?

Уже давно было замечено, что одни элементы, такие как медь, золото, серебро, железо, свинец, олово, и в чистом виде, и при сплавлении друг с другом образуют металлы. Другие, например фосфор, сера, хлор, азот, кислород, не только сами металлами не являются, но и соединяясь с металлами превращают их в диэлектрики. Пример тому — обыкновенная соль NaCl. Поэтому в химии появилось деление элементов на металлы и неметаллы.

Такая классификация, однако, не более чем констатация фактов, хотя на первый взгляд она претендует на то, чтобы объяснить свойства веществ исходя только из строения атомов. В самом деле, посмотрим на таблицу Менделеева. Элементы, расположенные в одном столбце, очень похожи по своим химическим свойствам. А вот будут ли изготовленные из них кристаллы или сплавы проводить электрический ток? Глядя на таблицу, ответить на этот вопрос нельзя. Так, все элементы первой группы — металлы, за исключением первого — водорода. Но ведь закон, который кому-то разрешено нарушать,— уже не закон. Правда, во второй группе дело обстоит лучше: здесь все элементы — привычные металлы; а в третьей группе опять сбой: бор — полупроводник, а алюминий — прекрасный металл. Дальше еще хуже. Первый элемент четвертой группы — углерод; мы уже упоминали, что графит, так называют кристалл углерода,— это металл. А вот алмаз — тоже кристалл, составленный из атомов углерода, но расположенных иначе, чем в графите,— изолятор. Кремний и германий — классические полупроводники. Олово — казалось бы, типичный металл. Однако... Если всем знакомое белое блестящее олово долго подержать при температуре —30 °С, то его кристаллическая структура изменится, а внешне оно посереет. И это олово — его так и называют «серое олово» — полупроводник! А свинец всегда металл.

Если начинать смешивать разные элементы, то картина совсем усложнится. Возьмем, например, и сплавим два металла индий и сурьму — в пропорции один к одному. Получим широко применяемый в технике полупроводник InSb. С другой стороны, мы уже говорили, что двуокись молибдена MoO_2 при $T \approx 0$ K проводит ток, т. е. MoO_2 — металл. (И WO_2, и Re_2O_3 и некоторые другие оксиды — тоже металлы.) А если получающиеся из атомов кристаллы сильно сжать, сдавить, то, оказывается, чуть ли не все вещества становятся металлами, даже такие типичные металлоиды, как сера. Правда, для нее давление перехода в металлическое состояние очень велико — несколько сотен тысяч атмосфер (а для водорода еще больше).

Похоже, что разделить элементы на металлы и неметаллы — не такая уж простая задача. Во всяком случае, ясно, что, рассматривая отдельные атомы, мы не можем сказать, будет ли вещество, составленное из этих атомов, проводить ток при $T \approx 0$ K, потому что огромную роль играет то, как расположены атомы друг относительно друга. Поэтому для ответа на вопрос «почему металлы проводят ток?» надо изучать, как атомы взаимодействуют между собой, образуя твердое тело.

Посмотрим, как обстоит дело с простейшим из металлов — литием. Порядковый номер Li — три. Это означает, что ядро атома Li содержит три протона и положительный заряд ядра компенсируют три электрона. Два из них образуют заполненную *s*-оболочку, ближайшую к ядру, и сильно связаны с ядром. Оставшийся электрон расположен на второй s-оболочке. На ней мог бы поместиться еще один электрон, но его у лития нет. Все остальные разрешенные состояния энергии свободны, и электроны на них попадают только при возбуждении атома (например, при сильном нагреве паров лития). Схема уровней в атоме лития показана на рисунке 3.

Рассмотрим теперь множество атомов лития, находящихся в ограниченном объеме. Они могут образовывать газ (пар), жидкость или твердое тело. При достаточно низкой температуре силы взаимного притяжения препятствуют тепловому движению атомов, образуется кристалл. Это наверняка происходит при абсолютном нуле температуры, когда все известные вещества, кроме гелия,— кристаллы.

Итак, из опыта известно, что при низких температурах твердое тело — устойчивое состояние для лития. Но, как известно, устойчивым всегда является такое состояние вещества, в котором его внутренняя энергия меньше, чем в других возможных агрегатных состояниях при той же температуре. Суммарное уменьшение энергии при переходе из одного состояния в другое легко измерить — ведь это и есть теплота испарения или плавления.

С микроскопической точки зрения при низких температурах внутренняя энергия вещества есть, в первую очередь, сумма энергий электронов атомов, составляющих тело. Но электроны в атомах занимают строго определенные уровни энергии. Значит, мы можем ожидать, что при сближении атомов изменятся уровни энергии. При этом распределение электронов по уровням должно оказаться таким, чтобы их суммарная энергия была меньше, чем сумма энергий электронов в таком же количестве изолированных друг от друга атомов.

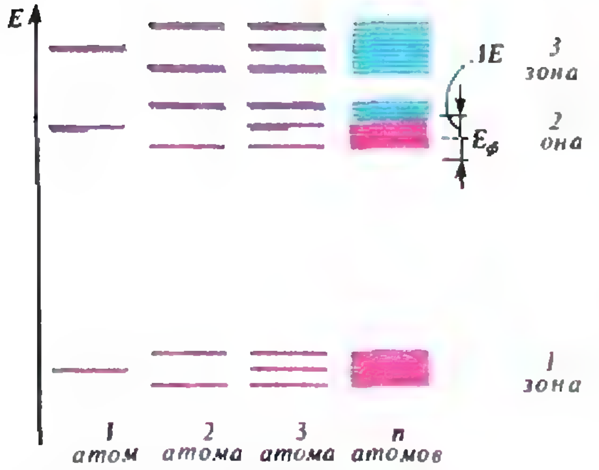


Рис. 3. Схема уровней энергии атома лития и их трансформации в зоны при объединении атомов в кристалл. Красным цветом обозначены занятые состояния.

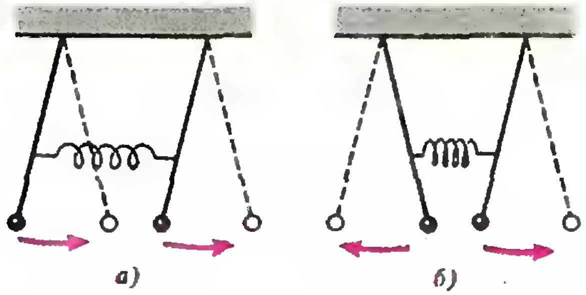


Рис. 4. Колебания связанных маятников.

Что произойдет с уровнями, можно понять исходя из аналогии движения электрона в атоме с любой колебательной системой, например с маятником. Пусть у нас есть два совершенно одинаковых маятника. Пока они не взаимодействуют друг с другом, частота колебаний обоих маятников одна и та же. Введем теперь взаимодействие между ними — свяжем их, например, мягкой пружинкой. И сразу же вместо одной частоты появятся две. Посмотрите на рисунок 4: связанные маятники могут колебаться синфазно, а могут навстречу друг другу. Очевидно, в последнем случае их движение будет более быстрым, т. е. частота колебаний такой системы выше собственной частоты колебаний одного маятника. Таким образом, связь приводит к расщеплению частот. Если связать три маятника, то станет уже три собственных частоты, у системы из четырех связанных маятников четыре собственные частоты и так далее до бесконечности.

Поведение любой другой колебательной системы подобно. Если мы заменим маятники, например, на электрические колебательные контуры, то, как хорошо знают радиолюбители, при введении связи между ними их собственные частоты также расщепляются. Электроны в атоме — это тоже своеобразная колебательная система. Как и маятник, электроны имеют массу, есть сила Кулона, возвращающая их к положению равновесия; и этим определяется движение электронов в атоме, характеризуемое, согласно квантовой механике, собственной частотой. Для электронов включение взаимодействия при взаимном сближении приводит к тому, что частоты, бывшие до того одинаковыми, становятся немного разными.

В квантовой механике имеется прямая связь между энергией и частотой колебаний, выражаемая формулой $E=h\nu$, где $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, а ν — частота колебаний. Поэтому надо ожидать, что при сближении двух атомов лития каждый из уровней, показанных на рисунке 3, расщепится на два. Каждому новому уровню энергии будет соответствовать своя электронная оболочка теперь уже не отдельного атома, а «молекулы». Оболочки заполняются электронами по тому же правилу, что и у атома,— по два электрона на оболочку. Та пара оболочек, которая получилась из самого нижнего уровня, будет полностью заполнена электронами. Действительно, на них можно разместить четыре электрона, а их у двух атомов лития — шесть. Остаются два электрона, которые теперь расположатся на нижнем из уровней второй пары. Заметьте, какой произошел качественный скачок: раньше эти два электрона занимали два из четырех состояний, имеющих одинаковую энергию. Теперь у них появилась возможность выбирать, и они расположились так, чтобы их суммарная энергия была поменьше. Нетрудно сообразить, что произойдет при добавлении следующих атомов: для трех атомов каждый исходный уровень расщепится на три (см. рис. 3). Девять электронов расположатся так: шесть на нижней триаде уровней, возникших из уровня ближайшей к ядру внутренней заполненной оболочки атома; еще два электрона — на нижнем уровне следующей триады; оставшийся электрон — на среднем уровне той же триады. Еще одно место на этом уровне остается свободным, а верхний уровень полностью пуст. Если взять n атомов ($n\gg1$), то каждый уровень расщепится на n тесно расположенных уровней, образующих, как говорят, полосу или зону разрешенных значений энергии. В нижней полосе все состояния заняты, а во второй — только половина, и именно те, энергия которых ниже. Следующая полоса — полностью пустая.

Расстояние между соседними уровнями в зоне легко оценить. Естественно считать, что при сближении атомов изменение энергии электронов атома примерно равно теплоте испарения вещества, пересчитанной на один атом. Она составляет для металлов обычно несколько электронвольт, а значит, и полная ширина зон ΔE, определяемая взаимодействием соседних атомов, должна иметь тот же масштаб, т. е. $\Delta E\sim1$ эВ$\approx10^{-19}$ Дж. Для расстояния между уровнями получим $\delta E\sim\Delta E/n$, где n — число атомов в образце. Это число чрезвычайно велико: межатомное расстояние составляет всего несколько ангстремов, и объем, приходящийся на один атом, оказывается всего $\sim10^{-22}$ см^3. Если наш образец имеет, для определенности, объем 1 см^3, то для него $n\approx10^{22}$. Поэтому численно оказывается $\delta E\approx\approx10^{-22}\cdot\Delta E\approx10^{-41}$ Дж. Эта величина столь мала, что всегда можно пренебречь квантованием энергии внутри зоны и считать, что в пределах зоны разрешены любые значения энергии.

Итак, в кристалле уровни энергии размываются в зоны, имеющие ширину, сравнимую с расстоянием между ними. Разрешенными для электронов являются состояния внутри зоны, и здесь электроны могут иметь практически любую энергию (разумеется, в пределах ширины зоны). Но очень важно, что число мест в каждой зоне строго ограничено и равно удвоенному числу атомов, составляющих кристалл. И это обстоятельство, совместно с принципом минимума энергии, определяет распределение электронов по зонам.

Теперь у нас все готово, чтобы наконец понять, почему литий проводит ток. Взглянем опять на рисунок 3. Что же получилось? Пока атомы были сами по себе, все электроны находились во вполне определенных состояниях, строго одинаковых для всех атомов. Теперь атомы объединились в кристалл. Сами атомы в кристалле не только одинаковы, но и совершенно одинаково расположены относительно соседей (за исключением, конечно, тех, которые попали на поверхность кристалла). А все электроны имеют теперь разные энергии. Это может быть только в том случае, если электроны больше не принадлежат отдельным атомам, а каждый электрон «поделили» между собой все атомы. Другими словами, электроны свободно передвигаются внутри идеального кристалла, образуя как бы жидкость, которая заполняет весь объем образца. И электрический ток — это направленный поток этой жидкости, аналогичный текущей по трубам воде.

Чтобы заставить воду течь по трубе, надо создать разность давлений у концов трубы. Тогда под действием внешних сил молекулы приобретут направленную скорость — вода потечет. Очень важно здесь появление именно направленной скорости, ведь сами по себе молекулы хаотически движутся с громадными скоростями — при комнатной температуре средняя скорость теплового движения молекулы порядка 10^3 м/с. Так что дополнительная энергия, приобретаемая молекулой в потоке, мала по сравнению с энергией теплового движения.

Дополнительная энергия, которую надо сообщить электрону, чтобы он участвовал в общем направленном движении электронов в кристалле (а это и есть ток), также мала по сравнению с собственной энергией электрона. В этом нетрудно убедиться. Мы уже говорили, что энергия электрона по порядку величины равна 1 эВ$=1{,}6\times10^{-19}$ Дж. Если вспомнить, что для свободного электрона $E=mv^2/2$ и $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, то легко найти скорость: $v\sim10^6$ м/с. Предположим, что все электроны участвуют в токе, а их в 1 м^3 проводника $n\sim10^{28}\,Z$ (Z — заряд ядра). Тогда в проводе с поперечным сечением $S=10^{-6}$ м^2 при токе $I\approx10$ А (при большем токе провод расплавится) направленная скорость электронов равна $v_н=I/neS\approx10^{-2}$—10^{-3} м/с. Значит, энергия электрона, участвующего в токе, больше энергии E свободного электрона всего на $10^{-8}\,E$, т. е. на $1{,}6\cdot10^{-27}$ Дж.

И тут мы сталкиваемся с удивительным фактом: оказывается, электроны, которые расположены в нижней зоне, называемой обычно валентной, не могут изменить свою энергию на малую величину. Ведь если какой-то электрон увеличит свою энергию, то это значит, что он должен перейти на другой уровень, а все соседние уровни в валентной зоне уже заняты. Свободные места есть только в следующей зоне. Но чтобы туда попасть, электрон должен изменить свою энергию сразу на несколько электронвольт. Вот так и сидят электроны в валентной зоне и ждут журавля в небе — энергичного кванта. А кванты нужной энергии бывают у видимого или ультрафиолетового света.

Итак, жидкость есть, а течь она не может. И если бы у лития было всего два электрона в атоме, т. е. если бы мы строили картинку для атомов лития, то получили бы мы изолятор. Но твердый гелий — действительно изолятор, так что мы можем уже поздравить себя с некоторым успехом: мы еще не объяснили, почему в металлах может течь ток, зато поняли, почему диэлектрики, где электронов полным-полно и все они «размазаны» по всему кристаллу, не проводят ток.

А что же литий? Да ведь у него есть вторая зона, которая заполнена только наполовину. Энергию, разделяющую занятые и свободные уровни внутри этой зоны, называют энергией Ферми $E_ф$. Как мы уже говорили, разность энергий между уровнями в зоне очень невелика. Электрону, который расположен в зоне возле уровня Ферми, достаточно чуть-чуть увеличить свою энергию — и он на свободе, там, где состояния не заняты. Электронам из приграничной полосы ничто не мешает увеличить энергию под действием электрического поля и приобрести направленную скорость. А ведь это и есть ток! Но так же легко этим электронам и потерять направленную скорость, столкнувшись с атомами-примесями (которые всегда есть) или с другими нарушениями идеальной структуры кристалла. Этим объясняется сопротивление току.

Кажется, ясно, почему гелий — изолятор, а литий — проводник. Попробуем-ка наши представления применить к следующему элементу — бериллию. И тут — осечка, модель не сработала. У бериллия — четыре электрона, и, казалось бы, должны быть полностью заняты первая и вторая зоны, а третья обязана быть пустой. Получается изолятор, в то время как бериллий — металл.

Дело вот в чем. Если ширина зон достаточно велика, то они могут налезть друг на друга. Про такое явление говорят, что зоны перекрываются. У бериллия так и происходит: минимальная энергия электронов в третьей зоне меньше, чем максимальная во второй. Поэтому электронам оказывается энергетически выгодно оставить пустой часть второй зоны и занять состояния внизу третьей. Вот и получается металл.

А что будет с другими элементами? Перекрываются зоны или нет, заранее сказать нельзя, для этого нужны громоздкие расчеты на ЭВМ, и то не всегда можно получить достоверный ответ. Но вот что примечательно: из нашей схемы следует, что если брать элементы с нечетным числом электронов, то всегда должен получаться металл, если только структурной единицей в кристалле является отдельный атом. А вот водород, например, азот и фтор не желают кристаллизоваться в такую решетку. Они предпочитают сначала объединиться попарно, а уже молекулы, содержащие по четному числу электронов, выстраиваются в кристалл. И законы квантовой механики не мешают ему быть диэлектриком.

Итак, мы теперь знаем, что такое металл с точки зрения физики, и разобрались в самой сути явления, поняв, почему в принципе существуют изоляторы и проводники. Мы увидели, что нельзя предложить простой способ объяснения, почему какое-то конкретное вещество оказалось диэлектриком или металлом. Сделать это можно, лишь вооружившись всей мощью аппарата современной квантовой механики и вычислительной техники, но это уже задача специалистов.

Внимание!

Поступила в продажу
и высылается наложенным платежом книга:

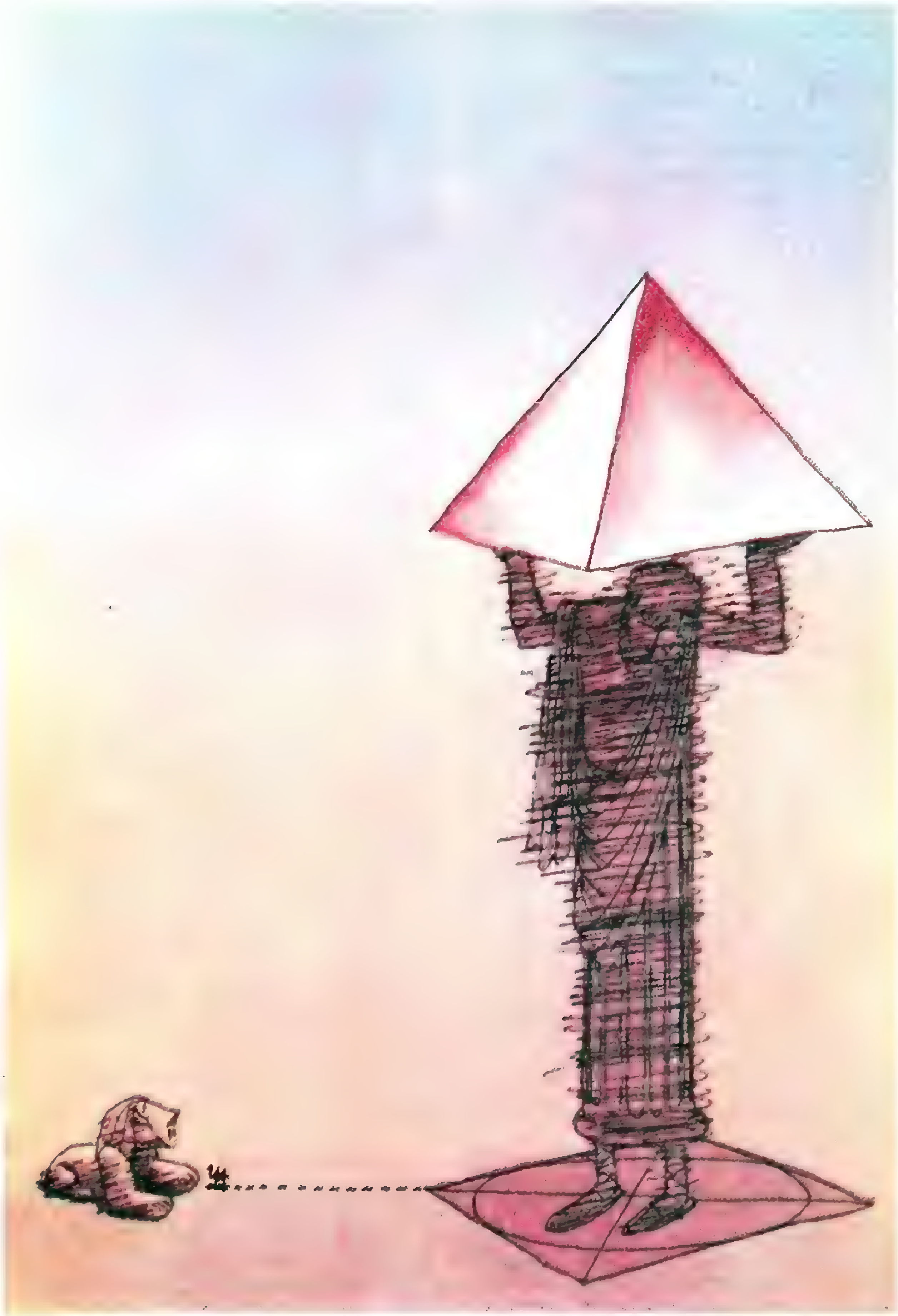
Селинов И. П. ***СТРОЕНИЕ И СИСТЕМАТИКА АТОМНЫХ ЯДЕР***
(М.: Наука, 1990, цена 7 р.)

В монографии, основываясь на наиболее достоверных экспериментальных данных, описываются закономерности, лежащие в основе систематики нуклидов и их свойств.

В отдельном приложении к книге помещены пять цветных таблиц атомов, атомных ядер и субъядерных частиц. Они восполняют пробел в наглядных справочных диаграммах по строению материи.

Издание рассчитано на специалистов в области ядерной физики, преподавателей, студентов. Оно может быть также полезно школьникам, интересующимся физикой.

Заказы направляйте по адресу:
117393, Москва, ул. Академика Пилюгина, д. 14, корп. 2,
магазин № 3 «Книга — почтой» «Академкнига».



КАК НАЧИНАЛАСЬ ГЕОМЕТРИЯ

Доктор физико-математических наук
В. СМИЛГА

Истинное начало этой истории теряется во мгле времен.

Где, как и когда начиналась геометрия?.. Где, как и когда обрела она законченную форму и заслужила право называться наукой?.. Кто был тот неведомый, первый, предложивший аксиоматическое ее построение? Не знаем и, вероятно, не узнаем.

Принято думать, что это сделали греки. Быть может, прославленные египетские жрецы или не менее прославленные халдейские маги суть истинные отцы этой науки. Но они не озаботились тем, чтобы оставить для потомков труды, подтверждающие их приоритет.

Как бы то ни было, в седьмом веке до нашей эры геометрия приходит в Грецию. И здесь греки, поклонники холодной логики и филигранного изящества чистого интеллекта, любовно оттачивают (или, быть может, создают?) одно из самых красивых и долговечных творений человеческой мысли — науку геометрию.

Тогда-то и начинается азартная и драматическая игра в чистую логику, затянувшаяся вот уже на два с половиной тысячелетия...

Фалес

Предполагают, что геометрию начинала Ионийская школа, а точнее, сам ее основатель — Фалес Милетский, проживший что-то около сотни лет (640—540 или 546 годы до нашей эры).

Толком мы мало что знаем о нем.

Точно известно, что имел он титул одного из семи мудрецов Греции, что по официальному счету идет как первый философ, первый математик, первый астроном и вообще первый по всем наукам в Греции. По-видимому, он был тем же для Греции, что Ломоносов для России. В молодости Фалес попал в Египет, куда фараон Псамметих только-только начал допускать иностранцев. Вероятно, он оказался там по торговым делам — известно, что свою карьеру Фалес начинал купцом.

В Египте Фалес застрял на много лет, изучая науки в Фивах и Мемфисе. Потом он вернулся домой и основал философскую школу, выступая, очевидно, не столько как самостоятельный мыслитель, сколько как популяризатор египетской мудрости.

Считается, что геометрию и астрономию привез именно он.

Что именно сделал он в геометрии, мы можем только гадать, хотя греческие авторы приписывали ему довольно много.

Например, Прокл Диддох утверждает, что Фалес доказал теоремы о равенстве вертикальных углов, о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, о том, что диаметр делит круг пополам и еще ряд других.

Допустив даже, что все историки писали сущую истину, мы не можем сказать, самостоятельно ли Фалес пришел к этим теоремам или просто пересказал идеи египтян.

По-видимому, единственный бесспорный факт из его научной деятельности — предсказание солнечного затмения 585 года до нашей эры. Но легенд о Фалесе ходило множество, и это само по себе доказывает, что ученый он был крупный.

Во всяком случае, одному у него

могут поучиться все философы: краткости. Полное собрание его сочинений (разумеется, до нас не дошедшее) по преданию составляло всего 200 стихов.

Пифагор

Ученики и последователи Фалеса уделяли немало внимания геометрии в своих ученых занятиях. Однако центральной математической школой в VI—V веках до нашей эры была, несомненно, Пифагорейская.

Биографические сведения о Пифагоре в основном сводятся к нескольким анекдотам. В этом он очень походит на Фалеса Милетского. Неясности начинаются уже с вопроса о его происхождении. Бертран Рассел, суммируя имеющиеся данные, заключает: «Некоторые говорят, что он был сыном состоятельного гражданина по имени Мнесар, другие же считают, что он был сыном бога Аполлона. Я предоставляю читателю выбирать между двумя этими противоположными версиями».

Полагают, что жил Пифагор столь же основательно, что и Фалес,— около ста лет (предположительно 560—470 или 580—500 годы до нашей эры, что для нас почти одно и то же). Опять же, как и Фалес, он лет двадцать набирался мудрости в Египте; затем (и в этом он Фалеса превзошел) еще лет десять жил в Вавилоне, где тоже поднакопил знаний. Утверждают также, что он путешествовал по Индии, но этому никто не верит.

В каждой второй брошюре о боксе можно прочитать, что Пифагор был олимпийским чемпионом по кулачному бою, хотя первоисточник столь любопытных данных никогда не указывается (по крайней мере мне он не известен). Приятно, впрочем, сознавать, что философ и математик может оказаться боксером экстра-класса.

Но если насчет боксерских данных Пифагора и есть некоторые сомнения, то о его активном, хотя и не очень удачном, вмешательстве в политику мы знаем наверняка. Известно, например, что граждане сицилийского города Кротона, где он основал по возвращении из дальних стран свою школу и попутно втравил весь город в тяжелую междоусобную войну, в итоге попросили его убраться вместе со школой. Это он и сделал, и довольно поспешно, что было разумно и своевременно.

Особых восторгов как личность Пифагор не вызывает, хотя, несомненно, ученым он был очень сильным. Его Пифагорейский орден философов и математиков слишком уж напоминает казарму, а сам основатель и глава подозрительно смахивает на какого-то фюрера, хотя и несравненно более культурного, чем те, что имели успех в двадцатом столетии.

Это нам Пифагор представляется в основном математиком. Сам же он, как и его современники, полагал, что истинная его профессия — пророк. А как известно, каждый пророк обязан отчасти быть фокусником, отчасти демагогом, отчасти шарлатаном. Всем этим Пифагор, видимо, владел в полном ассортименте. А ученики, стараясь по мере сил, распространяли в массах доказательства богоизбранности учителя. Рассказывали, что у него было золотое бедро; рассказывали, что достойные люди видели его одновременно в двух разных местах; рассказывали также, что когда однажды он переходил вброд реку, последняя от восторга вышла из берегов, радостно восклицая: «Да здравствует Пифагор!». (На мой взгляд, речной бог выбрал не лучший способ прославления, ибо в первую очередь Пифагор должен был изрядно вымокнуть. Но так передавали эту историю ученики.)

Говорят также, что он читал проповеди скотам, поскольку мало различал их и людей.

Именно сам Пифагор — очевидно, для пущего авторитета — распространял, популяризировал, холил и лелеял идею, что его родитель не кто иной, как светоносный и лучезарный Аполлон (задав тем самым немало лишней работы своим биографам).

Кроме того, Пифагор оказался истинным отцом популярного и ныне обычая — присваивать научные результаты своих учеников. Причем дело было поставлено вполне официально: существовал декрет, по которому авторство всех математических работ школы приписывалось Пифагору. Хотя подобные вещи не такая уж редкость и в наши дни, все же двадцать пять столетий несколько смягчили и облагородили нравы. Великий же Пифагор вообще вне конкуренции на этой стезе. Он исхитрился устроить так, что верные ученики объявляли его автором работ, выполненых намного позже его кончины.

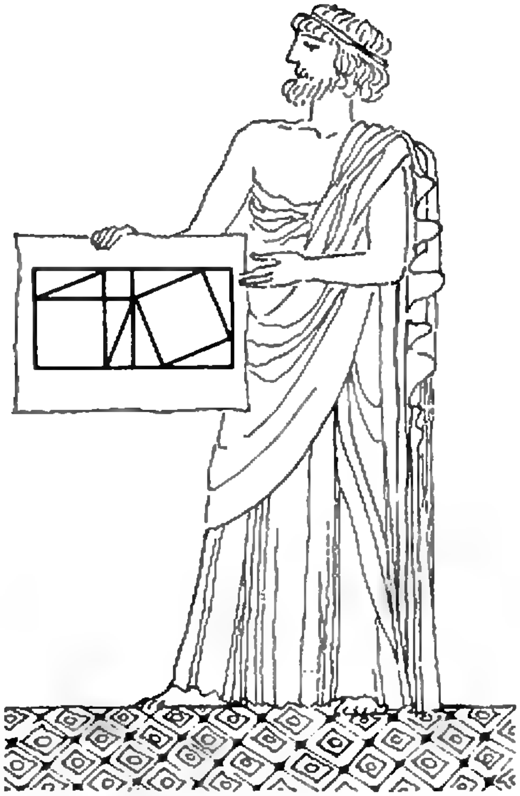
Понятно, что при таких порядках наиболее безусловным и безоговорочным научным доводом в Пифагорейской школе считалась ссылка на «самого». Так и говорили на хорошем древнегреческом языке: «Сам сказал». После чего дискуссия была неуместна и даже несколько опасна.

Далее, решения математических задач тщательно засекречивались. Были и другие «табу», сведенные в подробный список, слегка напоминающий творчество сумасшедшего руководителя детского сада. Опасаясь показаться голословным, я процитирую часть правил хорошего тона для джентльменов из Пифагорейского клуба. Вот они:

1. Воздерживайся от употребления в пищу бобов.
2. Не поднимай то, что упало.
3. Не прикасайся к белому петуху.
4. Не откусывай от целой булки.
5. Не ходи по большой дороге.
6. Вынимая горшок из огня, не оставляй следа его на золе, но помешай золу.

И так далее, все в том же духе.

И эта компания время от времени захватывала власть то в одном, то в другом греческом городе, устанавливая там культ Пифагора и, соответственно, требуя выполнения своего устава. Правда, как меланхолически замечает Бертран Рассел, «те, которые не были возрождены новой верой, жаждали бобов и рано или поздно восставали».



Как уже было сказано, накопленные знания пифагорейцы тщательно скрывали. И, кто знает, может быть, геометрия осталась бы неизвестной всему человечеству до самых наших дней, если бы не оплошность одного из рядовых членов Пифагорейской школы. Вот как пифагорейцы объясняли, почему геометрия стала открыто распространяться. Это произошло по вине одного из них, который потерял деньги общины. После этого несчастья община позволила ему зарабатывать деньги, преподавая геометрию,— и геометрия получила название «Предание Пифагора».

Любопытно, что, судя по всему, существовал учебник геометрии с таким названием.

Что же касается истории с деньгами, если в ней есть зерно истины, я, хотя не считаю себя злорадным человеком, был бы счастлив узнать, что наш пифагореец отнюдь не потерял деньги, а прокутил их в ближайшем портовом кабачке, потягивая вино, наслаждаясь похлебкой из белого петуха с бобовой приправой, с удовольствием кусая от целой булки и распевая затем негармоничные песни на большой дороге.

На этом мы и расстанемся с Пифагором. Нам предстоит отметить великие заслуги перед геометрией еще одного малоприятного, на мой вкус, человека.

Платон

Платон, живший в 428—348 годах до нашей эры, считается, и, должно быть, справедливо — я не специалист — одним из величайших философов Греции.

Геометрия ко времени Платона уже была очень развита. Было решено много весьма и весьма сложных задач, доказаны сложнейшие теоремы. Но ясной позиции во взглядах на общую схему построения науки еще не было. Развитие геометрии, как нередко бывает в науке, стимулировалось задачами, решения которых никак не удавалось отыскать. Требовалось при помощи циркуля и линейки, не привлекая никаких других геометрических инструментов:

— разделить данный угол на три равных части (трисекция угла);

— построить квадрат с площадью, равной площади данного круга (квадратура круга);

— построить куб с объемом, в два раза бо́льшим объема данного куба (делосская задача).

Только в конце прошлого века было доказано, что в такой постановке ни одна из этих задач не может быть решена, хотя, если использовать другие геометрические инструменты или (что то же) использовать при построении геометрические места точек, отличные от прямой либо дуги окружности, то все три задачи легко решаются.

Однако принятые у греков правила игры не позволяли пользоваться при решении задач ничем, кроме циркуля и линейки. Платон даже обосновал это ссылкой на авторитет богов.

Так что ни одна из проблем решена не была, но по ходу дела геометрия была основательно разработана.

Я с великим сожалением опускаю все анекдоты, связанные с этими задачами. Историй много, и все они прелестны, но нельзя слишком отвлекаться. Вспомню лишь одно из преданий, связанное именно с Платоном и показывающее его с лучшей стороны.

Однажды, рассказывает Эратосфен, на острове Делосе вспыхнула эпидемия чумы. Жители острова, естественно, обратились к Дельфийскому оракулу, который повелел удвоить объем золотого кубического жертвенника Аполлону, не изменяя его формы. За советом обратились к Платону. Платон задачи не решил, но зато истолковал оракул в том смысле, что боги гневаются на греков за нескончаемые междоусобные войны и желают, чтобы они, греки, вместо кровавых побоищ занимались бы науками и особенно геометрией. Тогда чума исчезнет.

Платон очень много сделал для развития математики и весьма ценил ее. На входе в его академию был даже высечен весьма категорический лозунг: «Да не войдет сюда тот, кто не знает геометрии». Дело в том, что Платон полагал: «Изучение геометрии приближает к бессмертным богам» — и воспитывал в этом духе своих учеников, приплетая математику к месту и не к месту.

По-видимому, Платон первый четко потребовал: математика вообще и геометрия в частности должны быть построены дедуктивным образом. Иначе говоря, все утверждения (теоремы) должны строго логически выводиться из небольшого числа основных положений — аксиом. Такая постановка — крупнейший шаг вперед.

Некоторые из учеников Платона выросли в блестящих геометров. Но надо сказать, что и по своим взглядам, и по методам организации школы, и по любви к саморекламе Платон очень напоминает Пифагора.

На мой взгляд, как философ и как человек, Платон довольно несимпатичен. Во всяком случае, созданная им теория идеального государства, образцом которого послужила реальная и вполне фашистская страна — Спарта — восторга, мягко говоря, не вызывает. Основные положения его утопии в общем удовлетворяют требованиям нацистов. Всю свою жизнь он яростно боролся против демократии в политической жизни и против материализма в духовной. Философов-материалистов Платон не только абстрактно поносил в своих философских сочинениях, но, демонстрируя неплохую практическую хватку, нередко дискутировал, как сказали бы теперь, «в жанре политического доноса».

Приведу пример. Был в те времена в Греции замечательный философ, один из первых материалистов — Анаксагор. (Мы почти ничего не знаем о его геометрических работах; известно, однако, что в темнице, где ему пришлось сидеть за свои взгляды, он исследовал проблему квадратуры круга.)

И вот Платон в одном из сочинений — в диалоге жителя Афин (рупор самого Платона) и спартанца — так расправляется с Анаксагором.

Афинянин: «Когда мы, стремясь получить доказательства существования богов, ссылаемся на Солнце, Луну, Звезды и Землю как на божественные существа, то ученики этих новых мудрецов возражают нам, что все это ведь только земля и камни, и они (т. е. камни) совершенно не в состоянии заботиться о людских делах.»

Спартанец молниеносно чует ересь и возмущенно восклицает: «Какой же вред для семьи и государства проистекает от таких настроений у молодежи!»

Так дискутировал Платон.

Евклид

К IV—III векам до нашей эры геометрия вполне оформилась как наука. Были устоявшиеся традиции, детально разработанные методы решения задач, крупные достижения, было уже несколько учебников и различные научные школы.

Рассказать обо всех геометрах доевклидового периода — а список математиков того времени включает несколько десятков славных имен — и об их работах, естественно, невозможно. И поскольку у нас не многотомный исторический труд, а небольшая статья, оставим предтеч и перейдем непосредственно к Евклиду.

Жил и работал он во время весьма любопытное.

В 323 году до нашей эры то ли вследствие острой лихорадки, то ли в результате неумеренного пьянства или просто от доброй порции яда отправился на свидание к отцу своему Зевсу царь царей земных, изрядно уже потрепанный жизнью, хотя сравнительно молодой, тридцатитрехлетний мужчина — Александр Македонский.

Полубога подобающим образом проводили и перешли к текущим делам. А дел хватало: надо было делить империю. Размеры ее были невероятны. Всего лишь за десять лет оказались завоеванными страны, в сотни раз превосходившие маленькую полунищую Македонию.

Границы известного мира расширились во много раз, и теперь предстояло переварить проглоченное. Было ясно, что для одного такое наследство непомерно, и отдавать все малолетнему брату Александра или же второму наследнику — сыну, появившемуся на свет через несколько месяцев после смерти отца, было просто смешно. Посему империю полюбовно растащили те полководцы, которых Александр не успел казнить. Они поклялись в вечной дружбе, заключили вечный мир, порядком выпили на радостях, обменялись суровыми мужскими пожатиями на прощанье — и, естественно, началась междоусобная резня.

Более других в этой сваре повезло осмотрительному Птолемею, который при дележке отхватил себе Египет. Наследники его постепенно ассимилировались, а династия оказалась не только самой прочной и долговечной, но и прославилась тем, что дала истории Клеопатру.

И самый первый Птолемей, и все последующие Птолемеи славны тем, что были покровителями наук. Какие у них на то были мотивы, трудно сейчас разобраться, но факты таковы: в III—II веках до нашей эры Александрия превратилась в основной научный центр эллинистического мира. И наиглавнейшим научным институтом был знаменитый Александрийский музей с Александрийской библиотекой. Сюда-то и пригласил Птолемей Евклида, и именно здесь Евклид написал «Начала» — книгу, в истории человечества бесспорно уникальную.

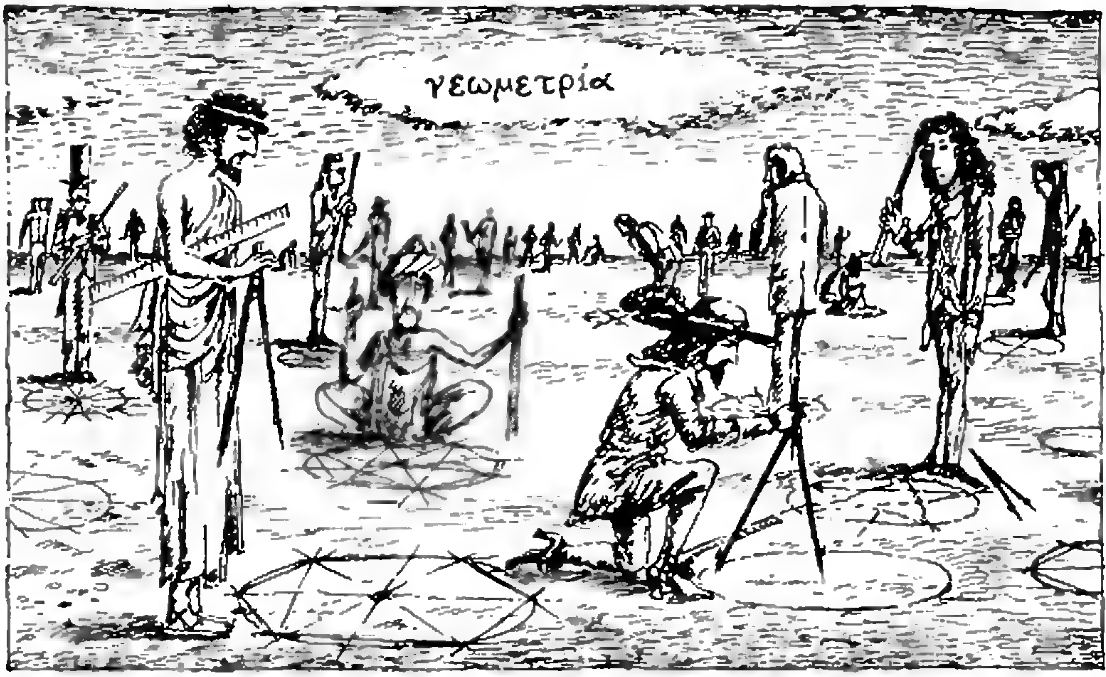
Снова я должен сделать традиционное уже признание: о самом Евклиде практически ничего не известно.

Легенды, конечно же, имеются. Рассказывают, например, что Птолемей поначалу сам захотел одолеть премудрости геометрии, но довольно скоро обнаружил, что изучение математики требует некоторых усилий. Тогда он призвал Евклида и вопросил его, полагаю, как джентльмен джентльмена, нельзя ли постигнуть все тайны науки как-нибудь попроще? На что Евклид ответил: «В геометрии нет царского пути». Остается неведомым, продолжал ли после этого царь занятия математикой (вероятнее всего, он утешился в занятиях, более приличествующих царям,— таких, как приемы, охота, пиры, услады гарема, наконец).

Рассказывают также, что однажды к Евклиду явился изучать геометрию некий молодой прагматик. Первый вопрос, который он задал будущему учителю, был следующий: какая практическая польза будет от штудирования «Начал»? Тогда Евклид, весьма и весьма задетый, призвал раба и сказал: «Дай ему обол (грош), он ищет выгоды, а не знаний».

Надо, впрочем, сознаться, что обе истории столь традиционны, учитывая представление древних греков о мудрецах и о математике, что особо доверять им не приходится. «Точные» же биографические данные основываются на заметках неизвестного арабского математика XII века: «Евклид, сын Наукрата, сына Зенарха, известный под именем Геометра, ученый старого времени, по своему происхождению грек, по местожительству сириец, родом из Тира...»

Все.



Человек бесследно растворился в веках. Осталась его работа.

«Начала»

Повторюсь — эта книга уникальна. Более двух тысяч лет она была главным и практически единственным руководством по геометрии для ученых как западного, так и восточного мира. Еще в конце XIX столетия во многих английских школах геометрию изучали по адаптированному изданию «Начал», и вряд ли можно найти более выразительное свидетельство популярности. В этом смысле конкурировать с «Началами» могут разве что Библия и Евангелие.

Но, в отличие от них, основа «Начал» — строгая и жесткая логика, точнее, Евклид все время стремится к таковой. Можно полагать, что он был последователем Платона и Аристотеля. А Платон, как вы помните, требовал строго дедуктивного построения математики.

В фундаменте — аксиомы, основные положения, принимаемые без доказательства, а далее все должно быть строго логично выведено из аксиом. Этот идеал и пытается осуществить Евклид.

С современных позиций буквально вся его аксиоматика неудовлетворительна. Но это легко заявлять сейчас, после 25 веков исследований.

А в свое время логика Евклида оставляла совершенно подавляющее впечатление. Во всяком случае, не следует забывать, что сама логическая схема ее стала с тех пор канонической для построения любого раздела математики.

Попытки изложить геометрию на основе аксиоматического метода были и до Евклида. Но можно уверенно заключить, что работа Евклида была наиболее удачной. Свидетельство тому — необычайная известность его книги уже в древнем мире, благодаря которой она и дошла до нас.

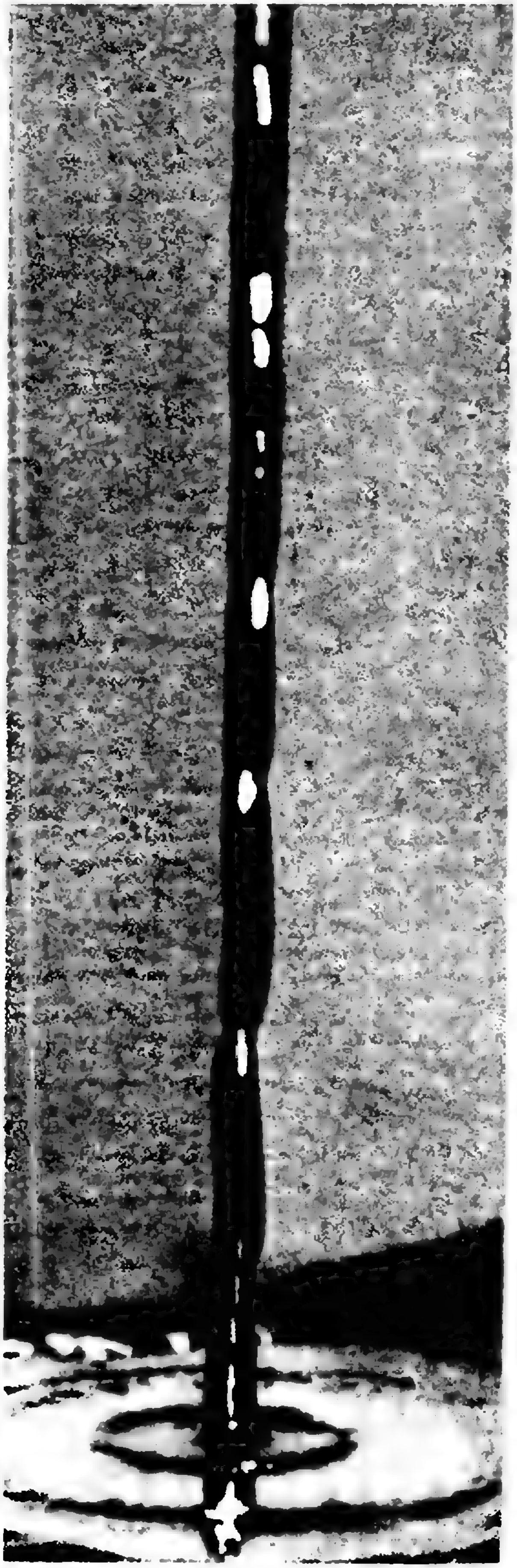
«Начала» блестяще написаны, в них чувствуется мастер своего дела, тонкий ученый и великолепный педагог. Поэтому поголовное поклонение математиков Евклиду и его «Началам» понятно и оправданно. Добавим еще, что эта книга обратила в математическую веру несколько десятков молодых людей, ставших впоследствии крупнейшими математиками мира.

Влияние Евклида было поразительно во все века во всех краях света. Вот, например, в каких восхищенных тонах говорил о «Началах» один из виднейших математиков эпохи Возрождения Кардан: «Неоспоримая крепость их догматов и их совершенство настолько абсолютны, что, по-видимому, только тот способен отличать в сложных вопросах геометрии истинное от ложного, кто усвоил Евклида».

А вот слова неизвестного английского геометра (это уже середина XIX века): «Никогда не было системы геометрии, которая в существенных чертах отличалась бы от плана Евклида; и до тех пор, пока я не увижу этого собственными глазами, я не поверю, что такая система может существовать».

Приведу одно яркое свидетельство влияния «Начал» буквально на все области мышления. Один из крупнейших в истории Западного мира философов, замечательный не только как философ, но и как человек — Спиноза — весь план своего основного сочинения «Этика» целиком заимствовал у Евклида.

И, наконец, для тех, кого не убеждает пример Спинозы, я приберег Ньютона. Его основополагающий труд «Начала натуральной философии» копирует не только заглавие книги Евклида, но и ее построение: великий Ньютон тоже выводит все свои результаты из набора аксиом!



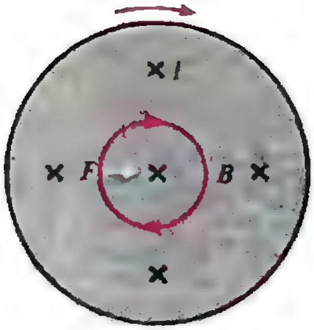
ПИНЧ-ЭФФЕКТ

В. БЕРНШТАМ,
И. МАНЗОН

> *Все, что видим мы,— видимость только одна,*
> *Ибо тайная сущность вещей — не видна.*
> Омар Хайям

Этой бездонно глубокой мыслью, чей почтенный девятивековой возраст дает ей право на более достойное применение, хочется лишь проиллюстрировать то, что обычная, хорошо знакомая свободно падающая струя не так проста, как кажется на первый взгляд. Если заменить столь несовершенный оптический прибор, как наш глаз с присущей ему инерционностью восприятия изображения, обычным фотоаппаратом, имеющим короткие выдержки (около 1/1000 с), то можно увидеть, что струя представляет собой не просто подрагивающий падающий столбик жидкости, а тело более сложной формы. Во-первых, примерно через одинаковые промежутки на струе наблюдаются сужения, «амплитуда» которых растет по мере удаления от истока; во-вторых, и сама ось струи отличается от прямой, изгибаясь в некое подобие спирали или винта. Здесь мы встречаемся с неустойчивостями жидкого цилиндра. Первую из них называют перетяжечной или «сосисочной», вторую — винтовой. За оба эти действия ответственны силы поверхностного натяжения жидкости, которые столь ярко проявляют себя, стремясь превратить капли росы в правильные шарики. И в этом случае, и в случае со струей силы поверхностного натяжения (их еще называют капиллярными) стремятся уменьшить поверхностную энергию, т. е. свести к минимуму площадь свободной поверхности.

Исследования разрушения струи капиллярными силами имеют долгую и богатую историю, восходящую к работе Савара 1833 года. Среди ученых,



изучавших капиллярные явления на струях,— Плато, Рэлей, Бор. Рэлей, например, установил, что если цилиндрическую струю разрезать на одинаковые цилиндры и сделать из них круглые капли, то энергия, связанная с поверхностным натяжением, станет меньше — если высота цилиндров больше длины окружности, лежащей в их основании. Поэтому периодические возмущения формы поверхности струи, у которых длина волны больше периметра сечения, будут расти вплоть до полного разрушения струи.

Интересно, что есть еще одни силы совсем иной природы, которые оказывают на струю подобное действие.

Более 80 лет назад, в 1907 году, вышла в свет статья Эдвина Нортрупа «Некоторые новейшие наблюдения проявления сил внутри электрического проводника», с которой началось изучение гидродинамики электропроводной токонесущей жидкости. Из статьи «Некоторые новейшие наблюдения...»: «Несколько месяцев назад мой друг Карл Геринг описал мне удивительное и, по-видимому, новое явление, которое он наблюдал. Он обнаружил, что при прохождении сравнительно большого переменного тока через жидкий проводник, находящийся в лотке, жидкость сжимается в поперечном сечении и вспучивается по длине лотка, вскарабкиваясь на электроды. При дальнейшем увеличении тока он обнаружил, что сжатие поперечного сечения становится настолько большим в некоторой точке, что образуется глубокий провал в жидкости... С еще бóльшим увеличением тока провал достигал дна лотка, вследствие чего цепь разрывалась. После этого... жидкость смыкалась снова и опять разрывалась».

Так как действие сил на струю и на проводник похоже на сдавливание и пощипывание (pinch), этот эффект в шутку назвали «пинч-эффектом».

Токонесущая струя жидкого металла — тот интересный объект, где капиллярные и электромагнитные силы действуют сообща и их действие складывается. Приводит это к тому, что сужения («перетяжки») развиваются быстрее и расстояния между соседними перетяжками становятся меньше. Происходит это вот почему. Как вы знаете, ток, текущий по проводу, создает вокруг него вихревое магнитное поле, линии индукции которого представляют собой окружности. Однако поле возникает не только вне провода, но и внутри него, в толще проводника. Как видно на рисунке, направления поля и тока таковы, что на любой элемент тока действует сила, направленная к оси провода. В невозмущенном состоянии эта сила уравновешивается силой давления жидкости (которое должно быть больше в центре провода). При уменьшении же в каком-то месте толщины струи из-за случайных причин величина индукции магнитного поля в нем увеличивается, электромагнитная сила растет, вытесняя жидкость из узкого участка и еще больше уменьшая радиус струи вплоть до полного разрыва. Подобным же образом разрушает струю и винтовая неустойчивость.

В последнее время у токонесущей жидкометаллической струи появились новые «родственники». Первый из них — это взрывающаяся проволочка (тонкая проволочка, по которой пропускают очень короткие импульсы тока большой величины; этот ток сначала плавит проволочку, а потом разрушает ее точно так же, как и струю, за счет развития неустойчивостей). Нужны взрывающиеся проволочки, чтобы получать импульсы

(Окончание см. на с. 51)

Задачник „Кванта"

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 мая 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1326» или «Ф1333». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер вашей школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М1326 — М1330, Ф1333 — Ф1337

М1326. Последовательность (a_n) определяется по следующим правилам:

$$a_0=9,\ a_{k+1}=3a_k^4+4a_k^3 \text{ для любого } k>0.$$

Докажите, что a_{10} содержит более 1000 девяток (в десятичной записи).

М. Вялый

М1327. Круг поделили хордой AB на два круговых сегмента и один из них повернули вокруг точки A на некоторый угол. Пусть при этом повороте точка B перешла в точку D (рис. 1). Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BD, перпендикулярны друг другу.

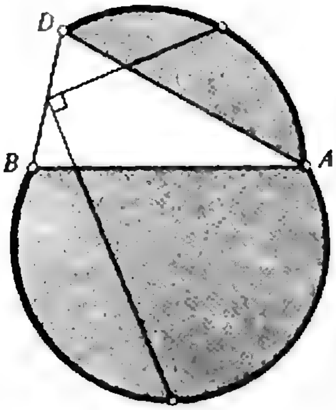


Рис. 1.

З. Насыров

М1328. Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[-1;\ 1]$, причем сумма кубов этих чисел равна 0. Докажите, что сумма $x_1+x_2+\ldots+x_n$ не превосходит $n/3$.

Ф. Назаров

М1329. Докажите, что в выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ три прямые, соединяющие середины противоположных сторон (т. е. таких, что их концы не соединены никакой стороной этого шестиугольника), пересекаются в одной точке в том и только в том случае, если площади треугольников ACE и BDF равны.

Н. Седракян

М1330. На плоскости проведено n прямых общего положения (никакие три не проходят через одну точку и никакие две не параллельны). Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не меньше

а) $n/3$, б) $(n-1)/2$, в)* $n-2$

треугольников.

Д. Фомин

Задачник „Кванта"

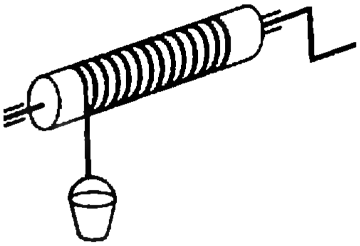


Рис. 2.

Ф1333. Ведро с водой свисает с ворота колодца, тяжелая ручка ворота находится в нижнем положении (рис. 2). Если ведро отпустить, оно начнет двигаться и достигнет дна колодца. Подберем количество воды таким, чтобы при его уменьшении ведро при движении не достигало дна. При каком положении ручки ворота система в этом случае может находиться в равновесии? Веревку считайте легкой. Трением можно пренебречь.

Б. Корсунский

Ф1334. Тонкая квадратная пластинка *АБВГ* сделана из меди. Ее нагревают со стороны торца *АБ*, поддерживая его температуру равной 100 °С, и охлаждают со стороны трех остальных торцов, поддерживая их температуру равной 0 °С. Найдите температуру в центре пластинки.

А. Шапиро

Ф1335. Внутри длинной трубы, наполненной воздухом, двигают с постоянной скоростью поршень, при этом в трубе распространяется со скоростью 320 м/с упругая волна. Считая перепад давлений на границе распространения волны равным 1000 Па, оцените перепад температур. Давление в невозмущенном воздухе 1 атм, температура 300 К.

Р. Александров

Ф1336. Плоский конденсатор, состоящий из двух круглых пластин площадью S, находящихся на малом расстоянии d друг от друга, заряжают до разности потенциалов U. На одинаковом расстоянии L от обеих пластин помещают маленький шарик, масса которого m и заряд q. Шарик отпускают. Найдите его ускорение в первый момент после отпускания и предельную скорость, которую он наберет за большое время. Считайте расстояние L во много раз бо́льшим, чем размеры конденсатора. Силу тяжести не учитывайте.

З. Рафаилов

Ф1337. При исследовании на переменном токе «черного ящика» была использована схема, показанная на рисунке 3. Напряжение звукового генератора на всех частотах было равно 1 В, показания милливольтметра на разных частотах приведены в таблице. Что может находиться внутри «черного ящика»? Рассчитайте параметры элементов предложенной вами схемы (постарайтесь обойтись без экзотических приборов, все равно никто их вам не доверит — еще испортите!).

Таблица

f, кГц	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
U, мВ	540	90	195	380	520	620	690	750	790	820

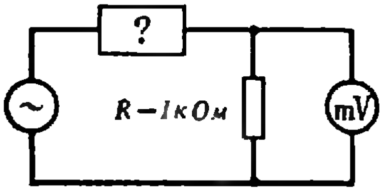


Рис. 3.

А. Ящиков

Задачник „Кванта"

Решения задач

М1296—М1300, Ф1313—Ф1317

М1296. *Из многоугольника можно получить новый многоугольник с помощью следующей операции: разрезав его по отрезку на 2 части, одну из частей перевернуть и приставить к другой части по линии разреза, если при этом части не будут иметь общих точек, кроме точек разреза. Можно ли с помощью нескольких таких операций из квадрата получить треугольник?*

Ответ: нельзя.

Прежде всего заметим, что при указанных в условии операциях не меняются ни периметр, ни площадь многоугольника. Докажем, что площадь треугольника периметра $2p$ меньше площади квадрата того же периметра. Площадь квадрата равна $p^2/4$. Площадь треугольника, равную по формуле Герона $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, можно оценить с помощью неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$\sqrt{S}=\sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)}<\frac{p+p-a+p-b+p-c}{4}=\frac{p}{2},$$

откуда $S\leqslant\frac{p^2}{4}$. (В неравенстве знак $<$, а не $\leqslant$, так как p, $p-a$, $p-b$ и $p-c$ не могут быть равными.)

И. Воронович

М1297. *Числа α и β удовлетворяют равенствам*

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=1,$$
$$\beta^3-3\beta^2+5\beta=5.$$

Найдите $\alpha+\beta$.

Ответ: $\alpha+\beta=2$.

Пусть $f(x)=x^3-3x^2+5x=(x-1)^3+2(x-1)+3$. Функция $g(y)=y^3+2y$ — возрастающая и нечетная. Из равенств $g(\alpha-1)=f(\alpha)-3=-2$ и $g(\beta-1)=f(\beta)-3=2$ следует, что $\alpha-1=-(\beta-1)$. Поэтому $\alpha+\beta=2$.

Б. Кукушкин

М1298. *Билет лотереи — карточка, на которой имеется 50 пустых подряд расположенных клеток. Каждый участвующий в лотерее во все клетки записывает числа от 1 до 50 без повторений. Организаторы лотереи по таким же правилам заполняют свою карточку-эталон. Выигрышным считается билет, у которого хотя бы в одной клетке записано такое же число, какое записано в этой же клетке карточки-эталона. Какое наименьшее количество билетов надо заполнить играющему, чтобы иметь выигрышный билет независимо от того, как заполнена карточка-эталон?*

Ответ: 26 билетов.

Чтобы наверняка выиграть, 26 билетов можно заполнить, например, так:

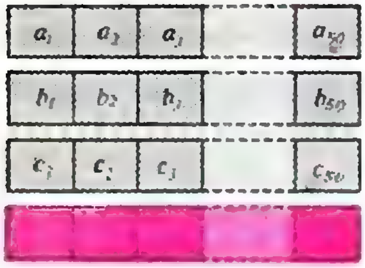
1, 2, 3, ... 25, 26, 27, ... 50
2, 3, 4, ... 26, 1, 27, ... 50
. . . .
25, 26, 1, ... 23, 24, 27, ... 50
26, 1, 2, ... 24, 25, 27, ... 50

В карточке-эталоне хотя бы одно из чисел 1, 2, ..., 26 должно находиться на одном из первых 26-ти мест, поскольку остальных мест всего 24. Это число и сделает одну из заполненных карточек выигрышной.

В то же время любые 25 заполненных карточек не гарантируют выигрыша. Докажем это. Расположим 25 заполненных карточек и эталон, как показано на рисунке.

Будем заполнять эталон так, чтобы ни одно из чисел, записанных в эталоне, не совпадало с числами, записанными над ним.

Ясно, что единицу можно записать в эталон с соблюдением условия. Пусть уже записаны числа 1, 2, ..., $a-1$. Рассмотрим число a. Если его можно записать



в одну из оставшихся клеточек эталона, сделаем это.

Если нельзя, т. е. если в клетках, допустимых для a (этих клеток не меньше 25-ти), уже стоят числа $x_1, x_2, \ldots x_{25}, \ldots, x_k$, выберем любую свободную клетку. В столбце над ней стоят не больше 25-ти чисел, среди которых есть и число a, так что чисел, не равных a, среди них не больше 24. Выберем число x_i, не содержащееся в этом столбце, запишем его в пустую клетку, а на место числа x_i впишем a. Продолжая этот процесс, придем к заполнению эталона, при котором ни один из 25-ти билетов не будет выигрышным.

А. Берзиньш

М1299. *На доске выписаны n чисел. Разрешается стереть любые два из них, скажем a и b, и вместо них записать одно число $(a+b)/4$. Эта операция повторяется $n-1$ раз, и в результате на доске остается одно число. Докажите, что если на доске первоначально были выписаны n единиц, то в результате всех операций на доске останется число не меньшее чем $1/n$.*

Из почти очевидного неравенства

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}\,(a>0,\ b>0)$$

следует, что сумма S обратных величин чисел, записанных на доске, не увеличивается. Вначале она была равна n. Поэтому в конце процесса $S\leqslant n$. Но это и значит, что последнее записанное число $1/S\geqslant 1/n$.

Б. Берлов

М1300. *Следователь придумал план допроса свидетеля, гарантирующий раскрытие преступления. Он собирается задавать вопросы, на которые возможны только ответы «да» или «нет» (то, какой вопрос будет задан, может зависеть от ответов на предыдущие). Следователь считает, что все ответы будут верные; он подсчитал, что в любом варианте ответов придется задать не более 91 вопроса. Покажите, что следователь может составить план с не более чем 105 вопросами, гарантирующий раскрытие преступления и в случае, если на один вопрос может быть дан неверный*

Первоначальный план следователя модифицируется включением дополнительных вопросов. Сначала следователь задает 13 вопросов, предусмотренных его первоначальным планом. После этого он задает 14-й вопрос: «Солгали ли вы в предыдущей серии вопросов?» Если свидетель отвечает «нет», то задаются серии из 12, 11, ..., 2 и 1 вопросов исходного плана, причем контрольный вопрос повторяется после каждой серии. Если на один из контрольных вопросов получен ответ «да», эта серия вопросов повторяется, после чего допрос идет по первоначальному плану уже без контрольных вопросов (свидетель может солгать лишь однажды).

Пусть ответ «да» получен на k-й контрольный вопрос. Тогда сверх исходного плана будет задано $k+14-k=14$ вопросов. Таким образом, такой план позволит следователю выяснить истину за 105 вопросов.

В общем случае, если по первоначальному плану следователь должен задать N вопросов, то в ситуации, когда на один из вопросов может быть дан неверный ответ, наш способ гарантирует выяснение истины за $N+q$ вопросов, где q — наименьшее натуральное число, для которого $N\leqslant q(q-1)/2$.

ответ (но может быть, что все ответы верные).

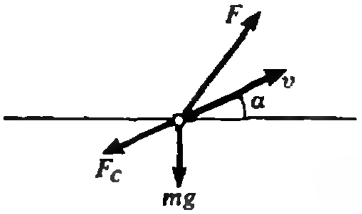
Примечание: если у вас получаются только планы с более чем 105 вопросами, напишите лучший из них.

Задачник „Кванта"

Интересно выяснить, является ли это число вопросов наименьшим, а также разобраться в аналогичной задаче, где на k вопросов могут быть даны неверные ответы.

А. Анджанс, И. Соловьев, В. Слитинский

Ф1313. *Шмель может лететь вертикально вверх с максимальной скоростью v_1, а вниз — со скоростью v_2. Считая «силу тяги» шмеля не зависящей от направления полета, а силу сопротивления воздуха пропорциональной скорости шмеля, определите максимальную скорость полета шмеля под углом α к горизонту.*



Запишем условия равномерного полета шмеля вверх:

$$F-mg=F_{c1}=kv_1$$

и вниз:

$$F+mg=F_{c2}=kv_2.$$

Отсюда можно выразить отдельно «силу тяги» F и силу тяжести mg через постоянный коэффициент k и скорости:

$$F=\frac{k}{2}(v_1+v_2),\quad mg=\frac{k}{2}(v_2-v_1).$$

Пусть искомая скорость шмеля равна v и направлена под углом α к горизонту. Тогда можно записать (см. рисунок):

$$\vec{F}+m\vec{g}+\vec{F}_c=0,$$

или

$$F^2=m^2g^2+F_c^2+2mgF_c\sin\alpha.$$

Поскольку $F_c=kv$, после простых преобразований получим

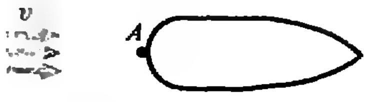
$$v^2+(v_2-v_1)\sin\alpha\cdot v-v_1v_2=0,$$

и

$$v=\left(\sqrt{(v_2-v_1)^2\sin^2\alpha+4v_1v_2}-(v_2-v_1)\sin\alpha\right)/2.$$

Б. Корсунский

Ф1314. *Модель дирижабля обдувают в аэродинамической трубе потоком воздуха со скоростью $v=300$ м/с. В точке A (точно по оси) скорость потока обращается в нуль (см. рисунок). Найдите температуру воздуха около этой точки. Наружная температура равна $T=300$ К.*



Обозначим температуру и давление воздуха вдали от модели T_1 ($T_1=T=300$ К) и p_1, а в интересующей нас точке — T_2 и p_2. В случае стационарного потока можно проследить за некоторой порцией газа — как она перемещается и что с ней происходит. Возьмем для определенности один моль воздуха (молярная масса воздуха $M=29$ г/моль) и рассмотрим «трубу», в которую он входит вдали и из которой выходит около модели. Чтобы избежать чисто формальных трудностей, связанных с полной остановкой потока возле интересующей нас точки, будем считать эту скорость малой по сравнению с начальной (но не равной в точности нулю!).

Внешний воздух, «заталкивая» нашу порцию газа в «трубу» у входного отверстия, совершает над газом работу

$$A_1=p_1V_1,$$

где V_1 — объем одного моля воздуха при температуре T_1. Выходя из трубы, газ совершает работу, «расталкивая» окружающий воздух, т. е. над газом совершается отрицательная работа

$$A_2 = -p_2 V_2,$$

где V_2 — объем моля воздуха при температуре T_2.

Будем считать, что газ в «трубе» не обменивается теплом с окружающим воздухом. (Строго говоря, это не так, но разумно оценить такой теплообмен мы не сможем. Поэтому мы получим верхнюю границу для интересующего нас температурного эффекта.) Тогда изменение внутренней энергии нашей порции газа определяется работой внешних сил и изменением кинетической энергии движения этой порции как целого:

$$A_1 + A_2 + \frac{Mv^2}{2} = \Delta U = C_V(T_2 - T_1) = \frac{5}{2} R(T_2 - T_1)$$

(воздух — двухатомный газ, поэтому для него молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_V = 5/2\,R$).

Используя уравнение состояния идеального газа для одного моля $pV = RT$, найдем

$$A_1 = p_1 V_1 = RT_1, \quad A_2 = -p_2 V_2 = -RT_2.$$

Теперь можно записать:

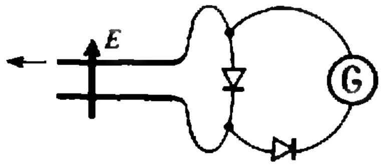
$$RT_1 - RT_2 + \frac{Mv^2}{2} = \frac{5}{2} R(T_2 - T_1),$$

откуда

$$T_2 = T_1 + \frac{Mv^2}{7R} \approx 345\ \text{К}.$$

А. Зильберман

***Ф1315.** Для измерения напряженности (E) электростатического поля в опыте используют плоский конденсатор ($S = 100$ см^2, $d = 1$ мм), одна из пластин которого неподвижна (см. рисунок). Другую пластину периодически с помощью специального механического устройства*



Если замкнуть между собой пластины конденсатора, помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью E, то на пластинах возникнут разноименные заряды

$$q_1 = -q_2 = CEd = \varepsilon_0 SE.$$

В нашем случае при каждом толчке площадь обкладки конденсатора изменяется от величины S до нуля и обратно. Это значит, что заряды обкладок также периодически изменяются.

В нашей схеме диоды включены так, что заряды стекают через один диод, а притекают обратно — через другой. Таким образом, ток через гальванометр не равен в среднем нулю (как было бы в схеме без диодов — если просто замкнуть пластины через гальванометр).

Каждый раз через гальванометр протекает заряд, равный

$$q = \varepsilon_0 SE.$$

скачком убирают в сторону, резко уменьшая емкость конденсатора. Считая элементы измерительной цепи (диоды и гальванометр) идеальными, найдите показания гальванометра при $E=1000$ В/см и периоде механических толчков $T=0{,}01$ с. Подумайте, сильно ли зависит ответ от возможной неидеальности диодов и гальванометра.

Поэтому средний ток через него равен

$$I=\frac{q}{T}=\frac{\varepsilon_0 SE}{T}=8{,}85\cdot 10^{-7}\ \text{А}\approx 0{,}9\ \text{мкА}.$$

При данной частоте толчков стрелка гальванометра практически не дрожит, так что его показания такими и будут.

В ответ не вошла одна из заданных в условии величин — расстояние между пластинами d. Значит ли это, что она не нужна? Не совсем. Разность потенциалов между обкладками конденсатора равна

$$\Delta\varphi = Ed = 100\ \text{В}.$$

По сравнению с этой величиной напряжение открытого диода пренебрежимо мало (оно составляет несколько сотен милливольт), а это существенно для нашего решения — мы ведь считали, что заряды полностью стекают с пластин.

Неидеальность диода может проявляться в наличии небольшого обратного тока (у идеального диода ток в обратном направлении в точности равен нулю). Впрочем, у достаточно распространенных кремниевых диодов обратный ток во много раз меньше «полезного» тока 0,9 мкА, и этой неидеальностью вполне можно пренебречь.

Не очень важна и неидеальность гальванометра — она связана с тем, что его сопротивление R не равно нулю (как у идеального измерителя тока), а составляет обычно несколько сотен ом. Для нас важно, чтобы за половину периода T заряды успевали практически полностью перетекать, т. е. чтобы

$$RC \ll T.$$

В нашем случае $C=\varepsilon_0 S/d\approx 10^{-10}$ Ф (опять пригодилось значение d) и

$$RC\approx 10^{-7}\ \text{с} \ll T = 10^{-2}\ \text{с}.$$

Замечание. На практике пластину не толкают, а поворачивают — пластины делают в виде двух полукругов. Проблема измерения напряженности электростатического поля состоит в том, что для отклонения стрелки гальванометра нужно совершать работу, а электростатическое поле этого «не умеет», потому и приходится прибегать к механическим устройствам. Сама же величина E очень важна. Например, для самолета, летящего в облаках,— чтобы не попасть в область электрнческих разрядов.

З. Рафаилов

***Ф1316.** Полупроводниковый терморезистор имеет зависимость сопротивления от температуры вида $R=R_0(1-\alpha t)$. Когда терморезистор нагрет до температуры t, он рассеивает в окружающую среду мощность $P=B(t-t_{\text{окр}})$. Какой ток будет течь в цепи, если к терморезистору подключить источник с напряжением U?*

Пусть при напряжении U ток через терморезистор составит I. Тогда запишем

$$R=\frac{U}{I}=R_0(1-\alpha t),$$

$$P=UI=B(t-t_{\text{окр}}).$$

Для того чтобы найти связь между током и напряжением, нужно исключить из этих уравнений температуру t:

$$t=t_{\text{окр}}+\frac{UI}{B},$$

$$\frac{U}{I}=R_0\left(1-\alpha t_{\text{окр}}-\alpha\frac{UI}{B}\right),$$

$$U=\frac{R_0(1-\alpha t_{\text{окр}})}{\alpha R_0 I/B+1/I}.$$

При малых токах, когда мощность мала и температура терморезистора почти не отличается от окружающей, он ведет себя как обычный резистор с сопротивлением $R=R_0(1-\alpha t_{\text{окр}})$. С увеличением тока температура резистора увеличивается и при больших токах приближается к критическому значению

$$t_{\text{кр}}=1/\alpha.$$

Но вопрос в задаче поставлен несколько иначе: каким будет ток при подаче напряжения U? Сложность в том, что одному значению U соответствуют два (либо — при больших напряжениях — ни одного) значения тока. Легко найти граничное напряжение $U_{\text{гр}}$, выше которого решения нет,— оно соответствует минимальному значению знаменателя при токе $I=I_{\text{кр}}$:

$$U_{\text{гр}}=U(I_{\text{кр}})=U\left(\sqrt{\frac{\alpha R_0}{B}}\right)=\frac{R_0(1-\alpha t_{\text{окр}})}{\sqrt{B/(\alpha R_0)}(1+(\alpha R_0/B)^2)}.$$

Выше этого напряжения решений нет. Но все же — какой ток потечет по цепи, если подключить к ней напряжение большее, чем $U_{\text{гр}}$? Какой-нибудь наверняка потечет, только мы его не сможем подсчитать, исходя из условий задачи — они становятся противоречивыми. Ясно, что «настоящий» терморезистор имеет другую — более сложную — зависимость сопротивления от температуры (она не дает отрицательных значений сопротивления при $t>t_{\text{кр}}=1/\alpha$), и там подобной проблемы не будет.

Теперь о той области напряжений, для которой возможны два значения тока. Если медленно повышать напряжение, то и ток будет повышаться, т. е. реализуется меньшее из двух значений тока. Но возможно равновесие и при втором — большем значении, если резистор заранее «подогреть». Подумайте сами, будет ли такое равновесие устойчивым.

А. Зильберман

Ф1317. К усилителю низкой частоты подключаем громкоговоритель и микрофон и устанавливаем их на расстоянии 0,5 м друг от друга. Плавно увеличивая усиление, добьемся того, что система «завоет». Оцените частоту звука при этом. Что изменится, если выводы громкоговорителя поменять местами? (Примечание: такой опыт легко проделать при помощи обычного магнитофона.)

Самовозбуждение системы (мы слышим, как она «воет») связано с наличием положительной обратной связи между микрофоном и громкоговорителем. Толчок, приводящий к сдвигу мембраны микрофона, вызывает появление сигнала на выводах микрофона. Усиленный сигнал сдвигает диффузор громкоговорителя, появляется звуковая волна, «добежав» до микрофона, она толкает его мембрану и т. д.

Почему мы называем такую обратную связь «положительной»? В самом деле для различных частот эта связь различна, но интересующий нас шумный эффект связан как раз с тем, что на некоторых частотах связь именно «положительная».

В зависимости от подключения выводов громкоговорителя, условие «баланса фаз» для частоты f будет выглядеть так:

$$\frac{l}{v}=\frac{1}{f}n \text{ либо } \frac{l}{v}=\frac{1}{f}\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

где l/v — время распространения звуковой волны от громкоговорителя до микрофона, n — целое положительное число.

На какой же именно частоте «взвоет» система, если плавно прибавлять усиление? Ответ зависит от того, насколько «одинаково» излучает громкоговоритель звуки разных частот (и микрофон тоже — его чувствительность к звукам разных частот тоже различна). Обычно неравномерность частотной характеристики громкоговорителя довольно велика. Простой, без затей, громкоговоритель лучше всего работает на частотах 1—2 килогерца, намного хуже он излучает низкие частоты. Именно на этих частотах и возникнет самовозбуждение. Интересно, что, меняя усиление на различных частотах при помощи регулятора тембра усилителя, можно в довольно широких пределах изменять эту частоту.

Итак:

$$\text{при } n=1 \quad f_1=\frac{nv}{l}=\frac{330 \text{ м/с}}{0{,}5 \text{ м}}=660 \text{ Гц}$$

$$\text{или } f_1=\frac{3}{2}\,\frac{330 \text{ м/с}}{0{,}5 \text{ м}}=990 \text{ Гц},$$

$$\text{при } n=2 \quad f_2=1320 \text{ Гц или } f_2=1650 \text{ Гц},$$

$$\text{при } n=3 \quad f_3=1980 \text{ Гц или } f_3=2310 \text{ Гц}.$$

Это наиболее подходящие для самовозбуждения частоты. Ясно, что звук вовсе не будет «синусоидальным» — он будет содержать множество гармоник.

Р. Александров

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1276—М1290, Ф1283—Ф1297, справились с задачами М1276, М1277, М1281, М1282, М1286. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

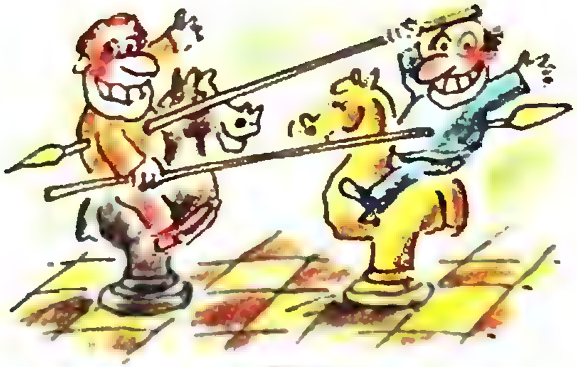
Е. Аксенова (Санкт-Петербург) 87, 88; *Ю. Алексеенко* (Киев) 78, 79, 83—85,87—90; *А. Алиев* (Баку) 79, 84, 87, 88; *Д. Антипов* (Киев) 84, 87, 88; *Ж. Асылбеков* (Алмв-Ата) 84, 87; *А. Ахмедов* (Баку) 83, 84, 87, 88; *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) 88; *Е. Беркович* (Киев) 88; *Ю. Бондарчук* (Киев) 87, 88; *А. Бородин* (Донецк) 78—80, 83—85, 87—90; *В. Бринюк* (Донецк) 78, 79, 83—85, 87—89; *А. Буздалин* (Москва) 84, 87, 88; *О. Бурд* (Киев) 78, 88; *П. Бусоргин* (Полинск) 87; *Б. Вайнер* (Киев) 78, 83, 84, 87—90; *А. Васильев* (п. Даниловка Киевской обл.) 87—89; *И. Винарчук* (Киев) 87—89; *Ю. Войценко* (Днепрорудный) 87; *М. Волошина* (Москва) 78; *М. Воронецкая* (Ижевск) 78, 87, 88; *О. Гайдай* (Львов) 78, 79, 83, 84, 87, 88, 90; *В. Гамидов* (п. Борадыгях) 84, 87, 88; *П. Гвоздев* (п. Котельнич Кировской обл.) 84, 87; *С. Гетун* (Киев) 83, 84, 87—89; *А. Гордиященко* (п. М. Рогань Харьковской обл.) 84; *Ю. Горенбургов* (Санкт-Петербург) 78, 87—89; *П. Григорьев* (Самара) 79, 87, 88, 90; *А. Григорян* (Кумайри) 87, 88; *В. Григорян* (Ереван) 84; *Т. Григорян* (Ереван) 87; *С. Гудзенко* (Павлоград) 78, 87; *Ю. Дадамов* (п. Борадыгях) 84, 87, 88; *И. Доманов* (Донецк) 84, 87; *Д. Дудко* (Киев) 79, 83, 84, 87—90; *Г. Дудьева* (Донецк) 84; *Ф. Еникеева* (Ташкент) 78; *А. Жученко* (Донецк) 83, 84, 87, 88; *Ю. Забелышинский* (Харьков) 83, 84, 87—89; *В. Замятин* (Киров) 87, 88; *С. Зиновьев* (Харьков) 83, 84, 87, 88; *С. Зиновьев* (Москва) 79; *С. Иоффе* (п. Черноголовка Московской обл.) 83—85, 87—90; *Р. Исмаилов* (Санкт-Петербург) 79, 80, 83, 84; *В. Казанцева* (Ижевск) 87; *Е. Каминская* (Одесса) 84; *Т. Карнаух* (Киев) 79, 84, 87, 88, 90; *Д. Картохин* (Санкт-Петербург) 88; *Р. Касымов* (Ангрен) 84, 87, 88; *С. Климов* (Ижевск) 78, 79, 83—85, 87, 88; *Н. Когабаев* (Усть-Каменогорск) 79, 84, 87, 88; *А. Коган* (Днепропетровск) 87, 88; *П. Кожевников* (Калуга) 78, 79, 83, 84, 87—90; *К. Козлов* (Глазов) 78, 79; *А. Копытин* (Воронеж) 84, 87, 89; *А. Корниенко* (Днепропетровск) 87—89; *В. Коростышевский* (п. Ясный Оренбургской обл.) 84; *А. Кривенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 79, 84; *А. Кривенко* (Ростов) 87; *Д. Кример* (Брест) 88; *И. Кузнецова* (Новороссийск) 87; *С. Кузьмич* (Минск) 78—80, 83, 87—90; *А. Кукушкин* (Москва) 83, 85, 87, 88, 90; *И. Куряндчик* (Санкт-Петербург) 78, 80; *Я. Лавренюк* (Киев) 78, 79, 84, 87, 88; *И. Левин* (Москва) 84, 88; *П. Левин* (Москва) 87—89; *Н. Лисицын* (Ижевск) 83, 84, 87—89; *Э. Магеррамов* (Баку) 79, 87, 88; *О. Макеева* (Винница) 78; *А. Малыш* (Хабаровск) 88; *Н. Мамедов* (Баку) 78, 87, 88; *Д. Мартынов* (Нижний Новгород) 87, 88; *А. Мелконян* (Кумайри) 87, 88; *А. Мельник* (Гайворон) 83; *А. Мимеев* (Владимир) 88; *М. Мокляк* (Кременчуг) 83—85, 87, 88; *А. Монахов* (Глазов) 87, 88; *А. Мороз* (Днепропетровск) 87, 88; *А. Мотрунич* (Ужгород) 84, 87, 88; *Т. Назарова* (Желтые Воды) 84, 87; *А. Назарян* (Тбилиси) 87; *Б. Насыпанный* (Гайворон) 78, 83—85, 88; *В. Неселовский* (Одесса) 88; *С. Одрибец* (Переяслав-Хмельницкий) 83, 84, 87—89; *С. Павличков* (Евпатория) 79, 83—85, 87, 88; *Д. Панов* (Москва) 78, 83—85, 87—90; *Е. Перельман* (Санкт-Петербург) 79, 83; *А. Петросян* (Ереван) 78, 83, 84, 87—90; *В. Пиковский* (Киев) 87—89; *Э. Пикялите* (Вильнюс) 78; *М. Плетюхов* (Брест) 84; *Ю. Полонский* (Витебск) 78, 79, 83, 87—90; *Т. Потапова* (Новгород) 87; *Н. Пошевенчук* (Пинск) 84, 87; *О. Пушин* (Санкт-Петербург) 84, 88; *К. Рахимов* (Хорезм) 84; *Д. Рекалов* (Киев) 87, 89, 90; *Ф. Рзаев* (п. Борадыгях) 87, 88; *Д. Рудаков* (Москва) 78; *А. Рымов* (Талды-Курган) 78; *Л. Рябова* (Клин) 87; *Ю. Савицкий* (Донецк) 83, 84, 87, 88; *С. Сагадатов* (Уфа) 88; *А. Сарсембаев* (Алма-Ата) 79, 87; *В. Севриновский* (Москва) 78, 79, 84, 88, 89; *С. Сикорский* (с. Вузловая Львовской обл.) 78, 84; *Г. Сироткин* (Харьков) 79, 84; *А. Соклаков* (Брест) 88; *В. Соколов* (Хабаровск) 88; *А. Солодушкин* (Томск) 78, 83, 84, 87—89; *И. Сорожо* (Минск) 87; *В. Спирин* (Саратов) 88; *В. Степанов* (Апвтиты) 87; *Д. Сухов* (Энергодар) 79, 84; *А. Таратин* (Северодвинск) 87, 88; *О. Тевс* (Донецк) 87; *А. Теплинский* (Каменец-Подольский) 79, 87—89; *М. Тройников* (Ижевск) 87, 88; *Д. Туретаев* (Алма-Ата) 84; *Б. Турешбаев* (Кзыл-Орда) 79, 87; *Е. Турчин* (Днепропетровск) 79, 84, 85, 87—89; *К. Удод* (Донецк) 87, 88; *А. Уханов* (Евпатория) 79, 84, 85, 87, 88; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 79, 83, 84, 87—90; *А. Флджян* (Кумайри) 87, 88; *У. Хаджаев* (Хорезмская обл.) 84; *Ф. Хаитова* (Шават) 87; *М. Хасин* (Донецк) 78, 83—85, 87, 88; *А. Хацкевич* (Брест) 84; *К. Хвенкин* (Минск) 78, 80, 83, 84, 87—89; *Р. Ходжаниязов* (Хорезмская обл.) 78; *Ю. Ходзинский* (Киев) 79; *К. Чередниченко* (Севастополь) 78, 79, 84, 87; *А. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 83, 84, 87, 89; *Н. Шешина* (Нижний Тагил) 88; *О. Шпырко* (Киев) 83, 84, 87; *В. Яновский* (Харьков) 78, 80, 83, 84, 87—90.

Физика

Ю. Адамов (Минск) 93; *Д. Антипов* (Киев) 83, 85, 86, 93, 95; *Д. Апальков* (Харьков) 83, 89, 93—95; *Д. Асадов* (Имишли) 89, 95; *Я. Бабкин* (Киев) 89, 90, 93, 95, 97; *С. Базылько* (Северодвинск) 93, 95; *И. Бейбалиев* (с. Чиликар Хивского р-на) 93; *К. Блиох* (Харьков) 84, 85; *Д. Боднарь* (Винница) 93, 95, 97; *В. Борохов* (Керчь) 93; *Т. Бретман* (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 93; *Е. Буривцов* (Уфа) 83; *С. Васильев* (Горловка) 93, 96; *А. Ващилко* (Барановичи) 93; *П. Волынец* (Брест) 83—86, 89, 90; *И. Воскобойник* (Киев) 84, 86, 88—90, 93—97; *А. Вылугин* (Донецк) 89, 90; *А. Гаврилов* (Алма-Ата) 93; *Д. Гагасов* (Борисов) 84, 85, 88, 89, 92, 93; *О. Гайдай* (Львов) 88, 89, 93, 95; *Д. Гайдунько* (Алма-Ата) 83, 84, 88, 89, 92, 93; *А. Галанин* (Сергиев Посад) 83—91, 93—95, 97; *П. Гвоздев* (Котельнич) 89, 93, 95; *В. Глазков* (Коломна) 83—85, 93, 97; *В. Головач* (с. Волока Черновицкой обл.) 83, 84, 89, 90, 92, 93, 97; *В. Горгадзе* (Нальчик) 83—87, 93—97; *П. Гребенев* (Кузнецовск) 83—86, 88—97; *А. Гревцев* (Москва) 83—86, 88—95, 97; *А. Григорян* (Кумайри) 93; *Т. Григорян* (Ереван) 88, 89, 93, 95; *Я. Грода* (Брест) 93; *Ю. Гройсман* (Ташкент) 83, 86, 93, 95, 97; *Р. Гулгазарян* (Ереван) 88—90, 93, 95; *Н. Гуляев* (Нижний Новгород) 83, 85—97; *А. Гуреев* (Новгород) 89, 95; *А. Давлетов* (Алма-Ата) 83, 86, 87; *В. Дербеденев* (Кропоткин) 89, 93—95; *А. Дерeглазов* (Самара) 89; *С. Дибров* (Киев) 93, 95; *И. Дискин* (Запорожье) 83; *А. Дубков* (Москва) 88, 89, 93, 95; *С. Дудий* (п. Комсомольский Харьковской обл.) 88, 89, 92, 93, 95—97; *Ю. Егоров* (Авдеевка) 84—86, 89, 90, 93, 95, 96; *А. Ельников* (Донецк) 88—90, 93—97; *С. Емельянов* (Канаш) 83—87, 93—97; *А. Ермошко* (Орша) 84, 86; *Н. Ефремов* (Екатеринбург) 83, 85, 86, 89, 92, 94; *С. Жак* (Тернополь) 84, 88—90, 92—95, 97; *В. Железняков* (Вольск) 93; *В. Жукова* (Кузнецовск) 93, 95; *И. Журавлев* (Старый Оскол) 83—86, 89, 90, 92, 93, 95; *А. Жураев* (Таллинн) 89, 93; *Р. Загребаев* (Старый Оскол) 83—87; *С. Занкович* (Николаев) 83—93, 95—97; *А. Засепский* (Брест) 83, 85, 88, 89; *М. Зацепин* (Липецк) 85, 89, 90, 94; *И. Зозуля* (Одесса) 84—87, 89, 91, 92, 95—97; *А. Зубков* (Москва) 93—97; *С. Ивленков* (Тольятти) 83; *Н. Ивченко* (Киев) 83—88, 90, 92—97; *А. Исаенко* (Жлобин) 95; *Б. Иютин* (Тула) 93, 94; *Ч. Камчибеков* (Арзамас) 84, 89; *О. Каргольцев* (Мичуринск) 84, 93; *И. Катеринчук* (Городок) 93; *Д. Кашурин* (Киев) 93; *Н. Клембовский* (Николаев) 83, 85, 86, 88—90, 92—95, 97; *И. Кобелев* (Сергиев Посад) 88, 89; *К. Коваль* (Запорожье) 83—85, 88, 89, 92, 93, 95, 97; *А. Ковальский* (Казань) 89; *Д. Коверник* (Иркутск) 89; *В. Кожевников* (Североморск) 83, 84, 93; *Н. Козачек* (Червоноармейск) 93; *В. Козлов* (Старый Оскол) 83—97; *Т. Колесникова* (Вишневое) 83, 86, 89, 92, 93; *В. Коновалов* (Старый Оскол) 89, 93; *П. Корешков* (Черкассы) 93—95; *А. Король* (Брест) 85, 88, 89, 92—95, 97; *М. Косицин* (Тольятти) 83, 89; *Д. Кример* (Брест) 83—86, 88, 89, 93; *И. Кузнецова* (Новороссийск) 89, 93; *А. Кукушкин* (Москва) 88, 89; *Ю. Кулик* (Канев) 83—85, 88—90, 92—95, 97; *В. Куликов* (Москва) 84; *А. Куранов* (Москва) 93, 95; *А. Кутлимуратов* (Дружба) 83; *Д. Лазорук* (Ивано-Франковск) 85; *С. Лапицкий* (Гродно) 83, 84, 89; *В. Ларькин* (Правдинск) 83, 85—89, 91—95, 97; *В. Лель* (Усть-Каменогорск) 86; *В. Леонов* (Старый Оскол) 83; *В. Линев* (Скопин) 89; *И. Линчевский* (Брест) 83; *В. Лобас* (Киев) 85; *С. Малащицкая* (Кузнецовск) 83, 84; *Ю. Маравин* (Евпатория) 83, 85—88, 90, 92—97; *А. Матрунич* (Ужгород) 83—87, 89—97; *М. Махмудов* (Исфара) 83, 85, 86, 89, 93, 95, 96; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 83—85, 87—91, 93, 95, 97; *А. Меликян* (Ереван) 95; *А. Мелконян* (Кумайри) 93; *В. Мушик* (Кузнецовск) 83, 84, 89, 93—95; *А. Назарян* (Тбилиси) 93, 95; *А. Наливайко* (Старый Оскол) 84, 85, 88, 89, 93, 95; *А. Науменко* (Севастополь) 93, 95, 97; *А. Нежуренко* (Киев) 83—87, 89, 93—97; *Д. Немировский* (Черкассы) 93, 95, 97; *М. Немировский* (Одесса) 84, 88—90, 92; *И. Олимов* (Ходжент) 84; *А. Ольховец* (Киев) 83, 85, 86, 88—90, 92, 93, 95—97; *Д. Островский* (Санкт-Петербург) 83—86, 88—92; *Х. Оталконов* (Ургенч) 83; *Х. Отоженов* (Ургенч) 93, 95; *М. Охрименко* (Черкассы) 83—85; *А. Павлин* (Новая Ушица) 93, 95; *А. Пасеко* (Кузнецовск) 83, 84, 93, 95; *Д. Пастухов* (Витебск) 84—97; *Д. Петрайтис* (Вольск) 83, 84, 93, 95; *А. Пикалов* (Канаш) 83—91, 93—96; *В. Писляков* (Тверь) 83, 84, 93, 95, 97; *А. Пищальченко* (Старый Оскол) 85, 93; *М. Плетюхов* (Брест) 83—86, 89, 90, 93—96, 97; *С. Польшин* (Харьков) 85—87; *В. Понкратов* (Старый Оскол) 83, 88, 89, 92; *Е. Порошенко* (Алма-Ата) 84; *Д. Потишко* (Харьков) 84, 86, 87, 89, 90, 92, 95, 97; *С. Прокушев* (Сосногорск) 93, 95; *Е. Рослый* (Омск) 83—85; *В. Рыбачук* (Винница) 93, 95, 97; *К. Селтнепесов* (Ашхабад) 83, 84; *А. Семенюга* (Сосновый Бор) 93, 94, 97; *В. Сергиенко* (Брест) 83; *В. Сиско* (Таллинн) 83, 84; *Д. Смирнов* (Кузнецовск) 83, 84; *Н. Сождыкбеков* (Алма-Ата) 83, 85, 86; *А. Соклаков* (Брест) 83—86, 88, 89, 93; *А. Столповская* (Днепрорудный) 88—90; *А. Тарасов* (Пятигорск) 88—90, 92; *А. Таратин* (Северодвинск) 88, 89; *О. Тейтельбойм* (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 84, 88, 89, 93; *А. Терентьев* (Канаш) 83—91, 93—97; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 83—86, 88, 89, 93; *В. Толпекин* (Одесса) 83, 85, 86, 88, 89, 91—93, 97; *Е. Топчий* (Запорожье) 84; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 83, 86, 87; *Ю. Третьяков* (Алма-Ата) 83, 86, 87, 89—92; *А. Федоренко* (Омск) 89, 90, 93, 95, 97; *Д. Федорец* (Харьков) 89—92, 95, 97; *А. Флджян* (Кумайри) 93; *М. Фролов* (Воронеж) 83; *М. Хамаза* (Нижний Новгород) 84, 85, 89, 92; *Р. Хапков* (Старый Оскол) 83, 85, 88, 89; *А. Хацкевич* (Брест) 83—85, 89, 90, 93—95; *С. Чиков* (пгт Светлый Яр) 89, 95; *А. Чистый* (Брест) 83—86, 88, 89, 93—95; *Д. Чичкан* (Барановичи) 83, 84, 86—89, 91, 93; *Е. Шабловский* (Могилев) 89, 95; *И. Ширяев* (Кузнецовск) 83—85, 89, 93—95; *А. Шкредов* (Витебск) 93, 95; *А. Шпагин* (Мариуполь) 83, 85, 86, 88—95, 97; *В. Шпырко* (Киев) 95; *И. Шпырко* (Киев) 93, 95; *О. Шпырко* (Киев) 83—97; *И. Шукрулло* (Ургенч) 83, 84; *А. Шукуров* (Гузарский р-н Кашкадарьинской обл.) 89, 93, 95; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 88—91, 93, 95—97; *А. Щекин* (Запорожье) 85, 86; *Д. Юдин* (Самара) 83—85, 89, 90; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 83—86, 88—97; *А. Ямилов* (Донецк) 83, 89, 93, 95; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 83, 84, 88—95, 97.

„Квант" для младших школьников

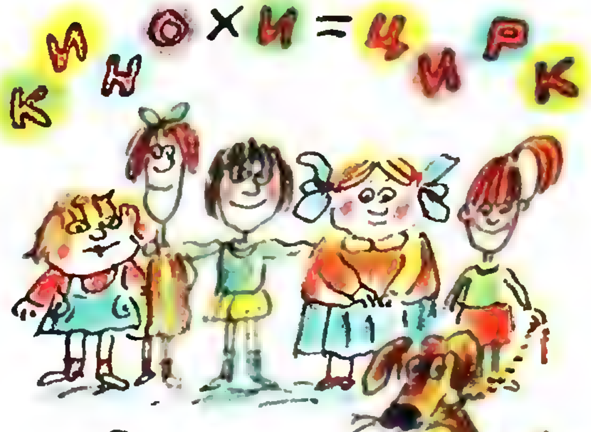
Задачи



1. Когда закончился шахматный турнир, выяснилось, что каждый его участник выиграл белыми фигурами столько же партий, сколько все остальные участники выиграли черными. Докажите, что все участники одержали по одинаковому числу побед.

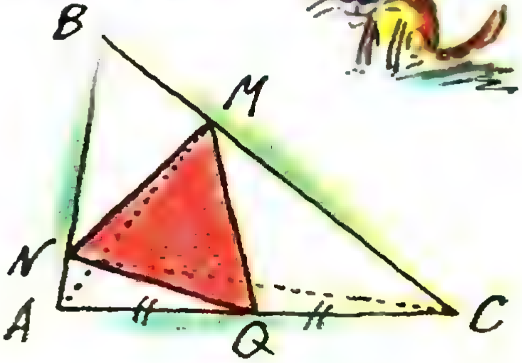
2. В Лондоне над входом в метро висит не буква *M*, а буква *U*, поскольку по-английски метро называется *underground*, что означает «подземка». Это слово начинается и оканчивается одной и той же комбинацией из трех букв. Найдите русские слова с таким же свойством (содержащие больше 6 букв).

3. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.



4. Маша и Катя вместе весят 40 кг, Катя и Света — 50 кг, Света и Даша — 60 кг, Даша и Галя — 70 кг, Галя и Маша — 80 кг. Сколько весит каждая из девочек?

5. В остроугольном треугольнике ABC угол B равен 60°, AM и CN — его высоты, а Q — середина стороны AC. Докажите, что треугольник MNQ — равносторонний.



Эти задачи нам предложили С. Токарев, И. Акулич, Л. Мочалов, Н. Нецветаев и В. Произволов.

Про умножение

Кандидат физико-математических наук
А. САВИН

Кому как, а мне таблица умножения давалась с трудом. Конечно, «дважды два — четыре» и «пятью пять — двадцать пять» запомнились легко, а вот «семью восемь» или «девятью шесть» никак не укладывались в голове. «Трудные» произведения я вычислял примерно так: «пятью восемь — сорок, да дважды восемь — шестнадцать, значит, всего пятьдесят шесть». Но учитель требовал беглых ответов, и таблицу приходилось «долбить» наизусть. Это знакомо не только мне одному — недаром сотни лет школяры разных стран, каждый на своем языке, называли ее «долбица умножения». (Между прочим, среди моих учеников — студентов физтеха — встречаются такие, кто знает ее весьма нетвердо.)

В конце концов таблицу я выучил. Впоследствии выяснилось, что это было нужно не учителю, а мне самому: с ее помощью оказалось возможным перемножать любые числа, причем довольно быстро.

Так я прожил много лет в полной уверенности, что без таблицы умножения числа быстро не перемножить. Эту уверенность подкрепляло то, что я узнавал о способах умножения в Индии, Китае, в Европе эпохи Возрождения...

И вот однажды я наткнулся на «русский крестьянский способ умножения», который был распространен в России два столетия назад, и с изумлением обнаружил, что русские крестьяне умели перемножать числа *без помощи таблицы умножения!* Им достаточно было уметь умножать и делить на два, а также складывать числа.

Вот как они это делали.

Напишем одно из чисел слева, второе — справа на одной строчке. Левое число будем делить, правое — умножать на два, а результаты записывать в столбик так, как показано на рисунке 1. Если в какой-то момент придется делить на два нечетное число, остаток отбросим. Когда от левого числа останется единица, вычеркнем все тѐ строки, в которых слева стоят четные числа. Все, что осталось справа, сложим. Полученное число — произведение тех двух чисел, с которых мы начали!

Сначала я, конечно, не поверил прочитанному и честно перемножил 13 и

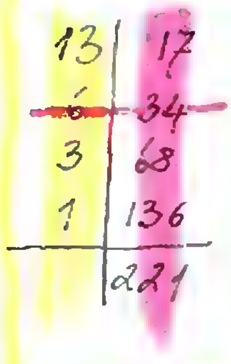


Рис. 1.

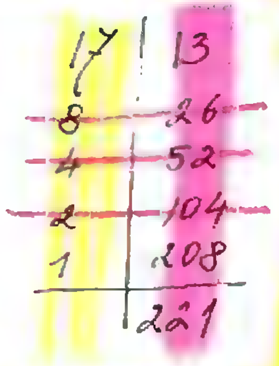


Рис. 2.

17 по предложенному рецепту. Получился правильный ответ: 221. Я поменял числа местами и перемножил их снова. Ответ не изменился — снова 221 (рис. 2).

Я отказывался верить своим глазам: уж слишком это походило на фокус вроде известных примеров неправильных действий, дающих верные результаты,— таких, как изображенное на рисунке 3 «сокращение» дробей.

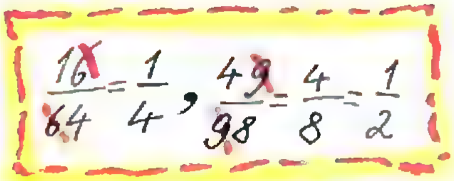

$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}, \frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

Рис. 3.

Но метод оказался абсолютно правильным!

Прежде, чем читать дальше, попробуйте таким способом перемножить несколько пар чисел, чтобы освоиться с ним и набрать некоторый запас уверенности в его справедливости. Посчитали? А теперь я покажу, что это действительно способ умножения, всегда дающий верный результат.

В двух предыдущих номерах нашего журнала были опубликованы статьи И. Яглома «Системы счисления» и «Две игры со спичками», в которых подробно рассказывалось, в частности, и о двоичной системе счисления. Всякое число в ней записывается с помощью нулей и единиц: $32=100\,000_2$, $13=1101_2$, $17=10\,001_2$. Маленький «хвостик» — цифра 2, приписанная к числу,— показывает, что это число записано в двоичной системе счисления. Расшифровываются эти записи так:

$$32=100\,000_2=1\cdot2^5+0\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+0,$$

$$13=1101_2=1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1,$$

$$17=10\,001_2=1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+1.$$

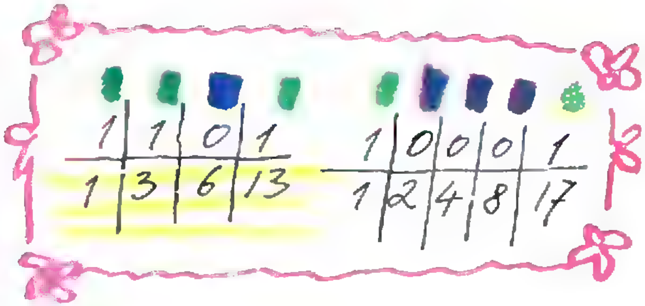


Рис. 4.

Запишем под каждой цифрой двоичного представления числа 13 левую колонку чисел, получившуюся при умножении «русским крестьянским способом». То же самое проделаем и с числом 17 (рис. 4). Заметили закономерность? Да, да! Если в двоичной записи числа на некотором месте стоит 1, то под ним оказывается нечетное число, а если 0 — то четное. Попробуйте доказать это.

А я переформулирую теперь правило умножения по-крестьянски. В правом столбце записываются чи́сла, равные второму сомножителю, умноженному на 2 в степени на единицу меньшей, чем номер строчки, в которую мы записываем это число. Затем результаты умножаются на 1, если число слева в той же строке нечетно, и на ноль, если четно. Для наглядности я предлагаю добавить еще один столбец, посередине, и записывать в него остаток от деления на два числа́, стоящего слева в той же строке (рис. 5). Таким образом, при умножении по-крестьянски происходит, по сути, перемножение построчно среднего и правого столбца, а затем сложение полученных результатов. В примере с тринадцатью и семна-

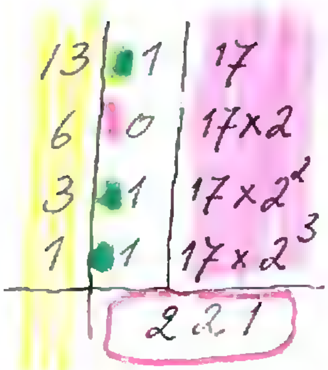


Рис. 5.

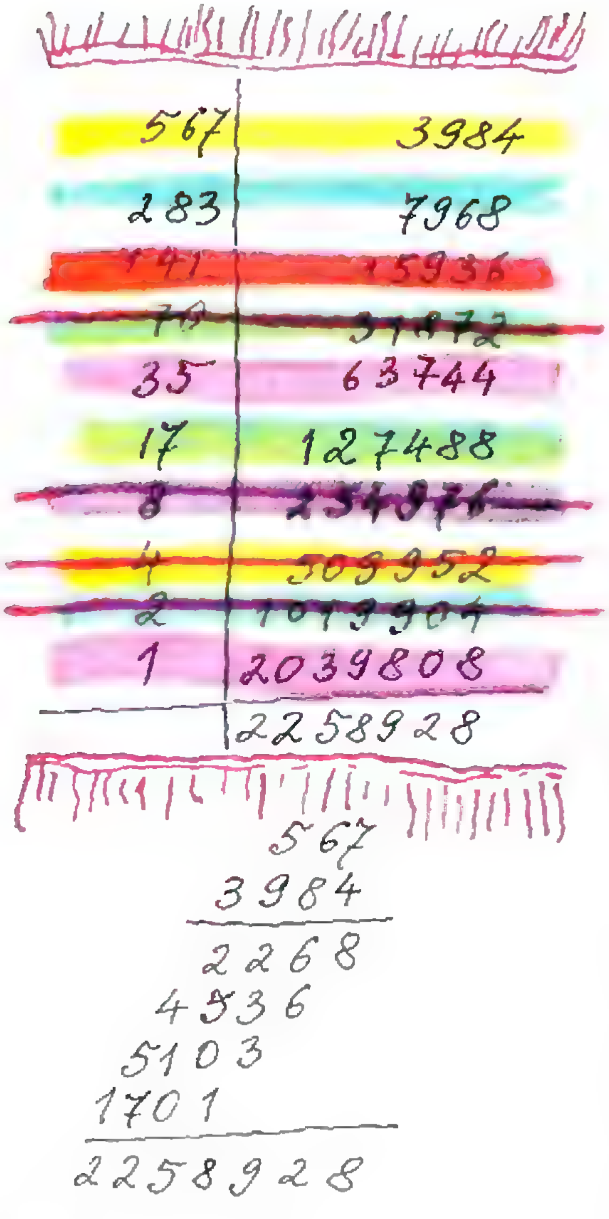
дцатью получаем:

$$17\cdot1\cdot1+17\cdot0\cdot2+17\cdot1\cdot2^2+17\cdot1\cdot2^3=17(1+0\cdot2+1\cdot2^2+1\cdot2^3)=17\cdot1101_2=17\cdot13,$$

или

$$13\cdot1\cdot1+13\cdot0\cdot2+13\cdot0\cdot2^2+13\cdot0\cdot2^3+13\cdot1\cdot2^4=13(1+0\cdot2+0\cdot2^2+0\cdot2^3+1\cdot2^4)=13\cdot10001_2=13\cdot17.$$

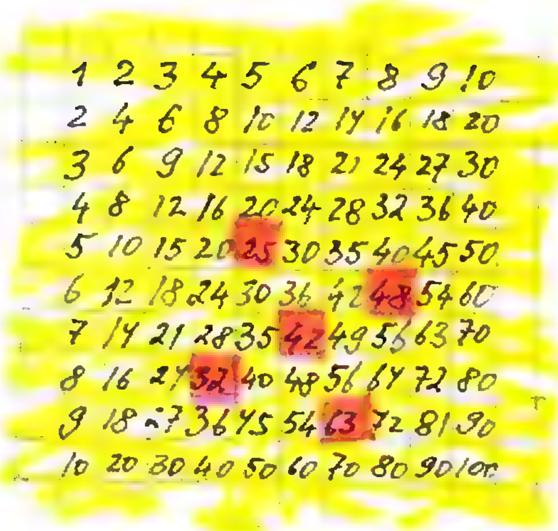
Выходит, русский крестьянский способ умножения основан на представлении одного из сомножителей в двоичной системе счисления? Не правда ли, просто и красиво?



567	3984
283	7968
141	15936
~~70~~	~~31872~~
35	63744
17	127488
~~8~~	~~254976~~
~~4~~	~~509952~~
~~2~~	~~1019904~~
1	2039808
	2258928

567
3984
2268
4536
5103
1701
2258928

Рис. 6.



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Рис. 7.

А как будет работать такой способ умножения с большими числами, скажем, такими: 567 и 3984? Посмотрим. На рисунке 6 внизу приведено привычное нам «табличное» умножение. Там приходится складывать меньше чисел, но каждое из них получено куда более сложным способом, чем в верхнем варианте на этом же рисунке. Получается, что, выигрывая в простоте вычислений, мы проигрываем во времени, так что привычное умножение, пожалуй, лучше...

«Нет! — скажут те, кто до сих пор не в ладах с таблицей умножения.— Ведь при крестьянском методе не нужно зубрить таблицу, а это кое-что значит!» В пользу таблицы умножения я приведу такой довод: пожалуй, накладно будет хватать бумагу и ручку, чтобы подсчитать, сколько стоят 8 пирожков по 70 копеек за штуку, или лезть для этого в сумку за тетрадью, на обложке которой помещена «таблица Пифагора» (рис. 7).

Она действительно такая древняя — более двух тысяч лет назад пифагорейцы умножали числа с ее помощью. (Недавно ташкентский математик А. Азамов заметил любопытное ее свойство: если четыре числа этой таблицы расположены в вершинах квадрата, центр которого — тоже число таблицы Пифагора, то число в центре квадрата равно среднему арифметическому чисел в его вершинах. Так, для чисел, выделенных на рисунке 7, имеем: 42=(25+48+63++32)/4.)

За долгие тысячелетия развития математики было придумано множество способов умножения чисел. Итальянский математик конца XV — начала XVI веков Лука Пачиоли в своем трактате об арифметике приводит 8 различных способов умножения. Вот два из них, на мой взгляд, наиболее интересные.

В первом, который носит название «маленький за́мок», цифры верхнего числа (рис. 8), начиная со старшей, поочередно умножаются на нижнее число и записываются в столбик с добавлением нужного числа нулей, и затем результаты складываются. Преимущество этого метода перед обычным в том, что уже с самого начала определяются цифры старших разрядов, а это бывает важно при прикидочных расчетах.

Второй способ носит не менее романтическое название: «ревность» (или «решетчатое умножение»). Рисуется решетка, в которую затем вписывают результаты промежуточных вычислений (на самом деле — нужные числа из таблицы умножения). Эта решетка представляет собой прямоугольник, разбитый на квадратики, каждый из которых разделен диагональю (рис. 9). «Такая решетка напоминает решетчатые ставни-жалюзи, которые вешались на венецианские окна, мешая уличным прохожим видеть сидящих у окна дам и монахинь»,— пишет Лука Пачиоли.

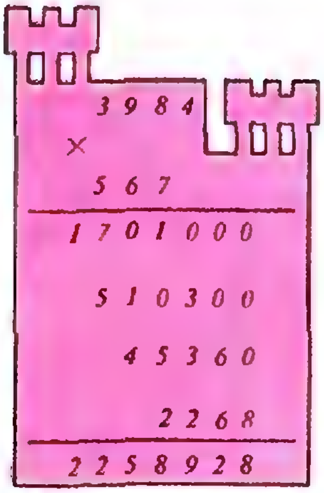


Рис. 8.

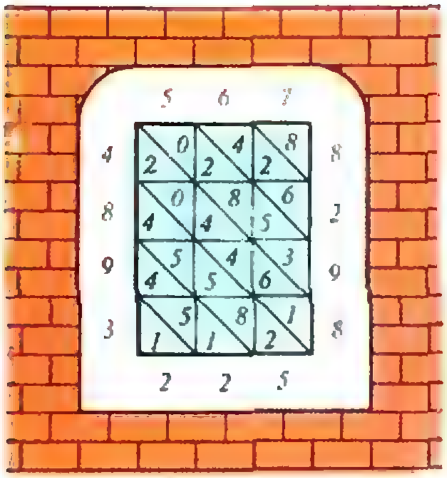


Рис. 9.

Перемножим этим способом числа 567 и 3984. Сверху таблицы запишем один сомножитель, а слева — другой. Затем в каждой клетке запишем произведение цифр сомножителей, стоящих с ней в одной горизонтали и в одной вертикали. Десятки записываются в левых нижних треугольниках, а единицы — в правых верхних. После заполнения таблицы складываются числа вдоль направлений проведенных диагоналей, результат записывается справа и снизу от таблицы. Этот способ хорош вычислительной простотой: клетки решетки заполняются прямо из таблицы умножения, а на долю вычислителя остается только сложение.

Остальные шесть способов, описанные Лукой Пачиоли, как и первые два, основаны на таблице умножения. Существует множество других способов умножения чисел с применением таблицы, придуманных в разное время и в разных странах. Но другого метода, кроме русского крестьянского, который обходился бы без нее, похоже, не существует.

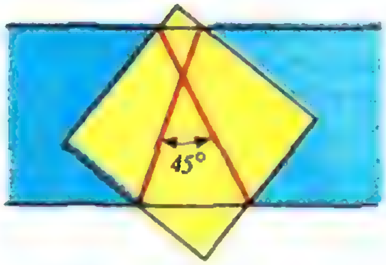
Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач (по 3 задачи в каждом номере) и закончится в апреле этого года.
Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 апреля 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

16. *На полосу положили квадрат, сторона которого равна ширине полосы, притом так, что его граница пересекла границу полосы в четырех точках (см. рисунок). Докажите, что две прямые, проходящие накрест через эти точки, пересекаются под углом 45°.*

В. Произволов



17. Калиф Гарун-аль-Рашид одарил троих придворных астрологов десятью кошельками. Мудрецы, сев подсчитывать доход, обнаружили, что один кошелек пуст, во втором лежит одна таньга, в третьем — две, и так далее, до десятого, в котором оказалось девять таньга. Гуссейн Гуслия взял себе два кошелька. Абдурахман ибн Хоттаб и его брат Омар Юсуф разделили оставшиеся кошельки так, что более заслуженный и умудренный годами Абдурахман получил бо́льшую сумму денег. По дороге домой на Омара Юсуфа напали разбойники и отняли четыре кошелька, так что от подарка калифа у него осталось лишь 10 таньга. Какие кошельки достались Гуссейну Гуслия?

И. Акулич

18. Имеется неограниченный запас монет в 1, 2, 5, 10, 20, 50 копеек и в 1 рубль. Известно, что сумму в A копеек можно уплатить B монетами. Докажите, что сумму в B рублей можно уплатить A монетами.

Д. Фомин

Школа в „Кванте"

Математика 9—11

Вписанный четырехугольник

В этой заметке мы рассмотрим свойства вписанного четырехугольника. Напомним, что многоугольник называется *вписанным, если существует окружность, на которой лежат все его вершины.* Эта окружность называется *описанной* около многоугольника. Известно, что около любого треугольника можно описать окружность. Легко привести и пример вписанного четырехугольника — квадрат. Однако, сколько ни пытайся описать окружность около ромба, не являющегося квадратом, ничего не получится! Поэтому среди всех четырехугольников полезно выделить класс таких, около которых можно описать окружность.

С этого мы и начнем. Необходимое условие того, что около четырехугольника можно описать окружность, уже известно (А. Погорелов «Геометрия 7—11»): *сумма противоположных углов вписанного четырехугольника равна 180°.* Это легко доказывается с помощью теоремы об угле, вписанном в окружность.

Докажем, что это же условие является и достаточным.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Пусть $\angle DAB + \angle DCB = 180°$. Опишем окружность около треугольника ABD и покажем, что точка C также будет лежать на этой окружности. Предположим, что это не так. Тогда либо она лежит вне окружности (рис. 1, *а*), либо внутри окружности (рис. 1, *б*). Пусть прямая BC пересекает окружность в точках B и E (возможно, совпадающих, если C лежит вне окружности, а BC — касательная). Соединим точки E и D. Заметим теперь, что $\angle BED = \angle BCD$, так как, с одной стороны, четырехугольник $ABED$ — вписанный, поэтому $\angle DAB + \angle DEB = 180°$, а с другой стороны, по условию, $\angle BAD + \angle BCD = 180°$. Но тогда прямые DC и DE параллельны. А поскольку они имеют общую точку D, это значит, что они совпадают, т. е. совпадают и точки C и E. Таким образом, четырехугольник $ABCD$ — вписанный.

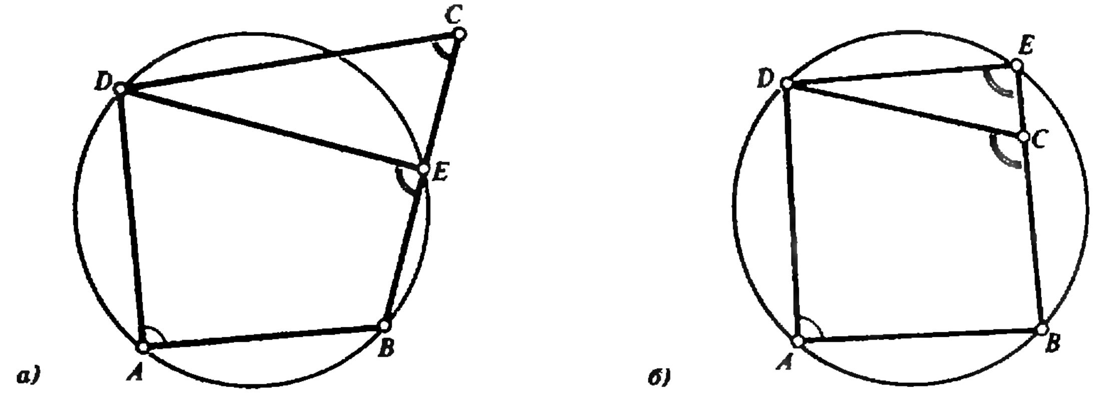
Итак, доказана

Теорема 1. *Для того, чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма его противоположных углов была равна 180°.*

Упражнение 1. Докажите, что около трапеции можно описать окружность тогда и только тогда, когда она равнобокая.

Теперь посмотрим, где находится центр окружности, описанной около четырехугольника, если она существует. Справедливо следующее

Утверждение. *Если четырехугольник является вписанным, то центр описанной около него окружности — точка пересечения середин-*



а) б)

Рис. 1.

ных перпендикуляров к сторонам четырехугольника.

Упражнение 2. Докажите это утверждение.

Вписанный четырехугольник обладает рядом интересных свойств. Одно из них было доказано древнегреческим математиком и астрономом Клавдием Птолемеем (ок. 100 г. н. э.— ок. 178 г. н. э.) в его знаменитом сочинении «Альмагест». Вот эта теорема, носящая ныне имя Птолемея:

Теорема 2. *Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.*

Доказательство этой теоремы было опубликовано в нашем журнале (см., например, статью «Теорема Птолемея и некоторые тригонометрические соотношения» в № 4 за 1991 г.).

Упражнение 3 *(обобщенная теорема Птолемея).* Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Четыре окружности касаются данной в точках A, B, C и D. Пусть a, b, c, d, e и f — длины общих внешних касательных к окружностям, касающихся данной в точках A и B, B и C, C и D, D и A, A и C, B и D соответственно. Докажите, что $ef=ac+bd$.

Другому древнему греку, Герону Александрийскому (ок. I в. н. э.), принадлежит известная формула вычисления площади треугольника через длины его сторон

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника, а p — его полупериметр.

Оказывается, что эта формула обобщается на случай вписанного четырехугольника, а именно справедлива

Теорема 3. *Если вписанный четырехугольник имеет длины сторон a, b, c и d, то его площадь S может быть вычислена по формуле*

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где $p=\frac{a+b+c+d}{2}$ *— полупериметр четырехугольника.*

Эта теорема была установлена индийским математиком Брахмагуптой (ок. 598 г. н. э.— 660 г. н. э.). До наших дней дошло его сочинение «Усовершенствованное учение Брахмы», значительную часть которого составляют математические результаты. В нем, в частности, изложены способы решения квадратных уравнений и правило суммирования арифметической прогрессии.

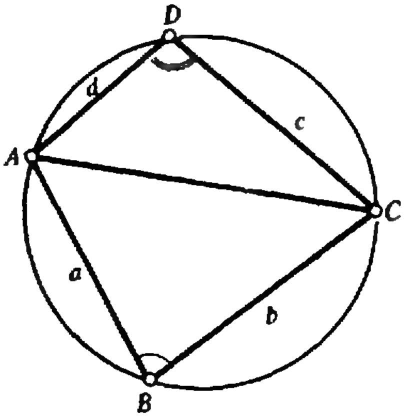


Рис. 2.

Докажем формулу Брахмагупты. Для этого разобьем четырехугольник $ABCD$ со сторонами a, b, c и d диагональю AC на два треугольника (рис. 2). По теореме косинусов

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2-2cd\cos D.$$

Так как $ABCD$ — вписанный четырехугольник, то $\angle D=180^\circ-\angle B$, а поэтому $\cos D=-\cos B$, $\sin D=\sin B$. Следовательно,

$$a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B,$$

или

$$a^2+b^2-c^2-d^2=2(ab+cd)\cos B. \quad (1)$$

Площадь четырехугольника равна сумме площадей треугольников, на которые он разбивается своей диагональю, т. е.

$$S=\frac{1}{2}ab\sin B+\frac{1}{2}cd\sin D=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B,$$

или

$$4S=2(ab+cd)\sin B. \quad (2)$$

Возведем равенства (1) и (2) в квадрат и сложим их, учитывая, что $\cos^2 B+\sin^2 B=1$. Получим, что

$$16S^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=(2ab+2cd)^2.$$

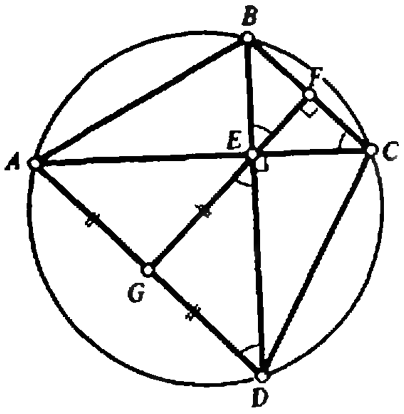


Рис. 3.

Откуда

$$16S^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=(2ab+2cd-(a^2+b^2-c^2-d^2))(2ab+2cd+(a^2+b^2-c^2-d^2))=$$
$$=((c+d)^2-(a-b)^2)((a+b)^2-(c-d)^2)=(c+d-a+b)(c+d+a-b)\times$$
$$\times(a+b-c+d)(a+b+c-d)=$$
$$=(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d)=$$
$$=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

Окончательно получаем, что

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Теорема доказана.

Упражнение 4. Докажите, что если четырехугольник со сторонами a, b, c и d вписан в окружность радиуса R, то его площадь равна

$$S=\frac{1}{4R}\sqrt{(ab+cd)(bc+ad)(ca+bd)}.$$

Рядом интереснейших свойств обладает вписанный четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Укажем некоторые из них.

Свойство 1. *Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей и перпендикулярная одной из сторон, делит противоположную сторону пополам.*

Свойство 2. *Расстояние от центра описанной окружности до любой из сторон равно половине противоположной стороны.*

Свойство 3. *Сумма квадратов сторон равна увосьмеренному радиусу описанной окружности.*

Свойство 4. *Ломаная, вершинами которой являются две противоположные вершины четырехугольника и центр описанной окружности, делит площадь четырехугольника пополам.*

Докажем свойство 1. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник, диагонали которого перпендикулярны, и прямая l проходит через точку E пересечения диагоналей и перпендикулярна стороне BC. Точки пересечения ее со сторонами BC и AD обозначим через F и G (рис. 3). Тогда $\angle BCA=\angle BDA$, $\angle BCA=\angle BEF$, $\angle BEF=\angle GED$. Поэтому $\angle GED=\angle BDA$, т. е. EGD — равнобедренный треугольник. Аналогично и AEG — равнобедренный треугольник, т. е. $AG=GE=GD$.

Упражнение 5. Докажите свойства 2, 3 и 4.

В заключение предлагаем решить еще несколько задач, связанных со вписанным четырехугольником.

Задачи

1. $ABCD$ — вписанный четырехугольник, продолжения сторон которого пересекаются в точках E и K. Докажите, что точки пересечения биссектрис углов AED и AKB со сторонами четырехугольника $ABCD$ являются вершинами ромба.
2. Пусть P, Q и M — соответственно точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника и продолжений его противоположных сторон. Докажите, что центр окружности, описанной около этого четырехугольника, совпадает с точкой пересечения высот треугольника PQM.
3. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Из вершин A и B опущены перпендикуляры на сторону CD, пересекающие диагонали в точках K и M. Докажите, что $AKMB$ — ромб.
4. $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Перпендикуляр к AB, восставленный в точке A, пересекает прямую CD в точке M, а перпендикуляр к AD, восставленный в точке A, пересекает прямую BC в точке N. Докажите, что MN проходит через центр описанной окружности.
5. Докажите, что если четырехугольник вписан в окружность, то произведение расстояний от точки, лежащей на этой окружности, до двух противоположных сторон равно произведению расстояния от этой точки до двух других сторон, а также произведению расстояний от той же точки до диагоналей.

Д. Терёшин

А так ли хорошо знаком вам

магнетизм ?

Таким образом, все магнитные явления я свел к чисто электрическим действиям.

А.-М. Ампер

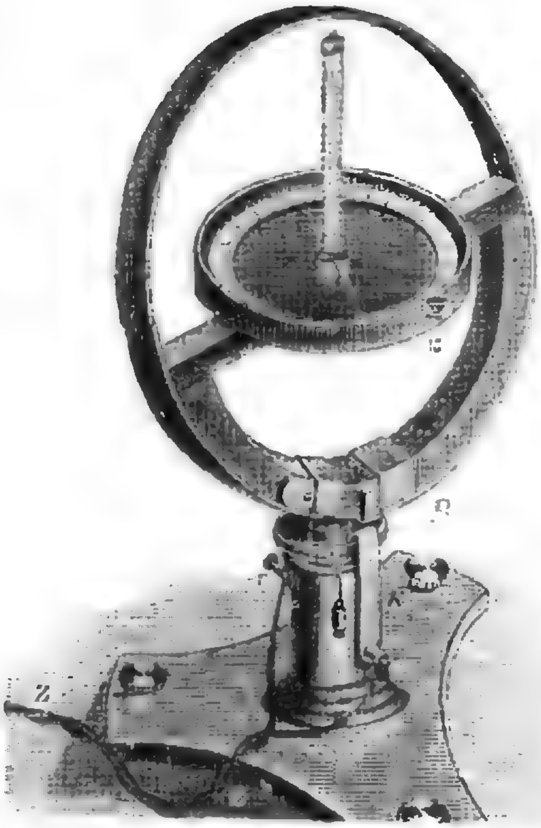
Так как я уже давно рассматривал силы, проявляющиеся в электрических явлениях всеобщими природными силами, то я должен был отсюда вывести и магнитные действия.

Х. Эрстед

В конце лета 1820 года редакции научных журналов, физические общества и некоторые видные физики Европы получили из Копенгагена небольшую — всего в 4 страницы — брошюру на латинском языке. Автором ее был датчанин Х. Эрстед, а называлась она «Опыты, относящиеся к действию электрического конфликта на магнитную стрелку». В брошюре сообщалось об опытах по воздействию на магнитную стрелку электрического тока, текущего по проволоке, замыкающей вольтову батарею.

Тщательное исследование поведения собственно магнитов было проведено еще У. Гильбертом на рубеже XVI и XVII веков. Но идея связи магнитных и электрических явлений, если и приходила кому-то в голову, экспериментального подтверждения долгое время не получала. Открытие Эрстеда послужило началом цепной реакции исследований и величайших достижений в области электромагнетизма, повлекших через полстолетия мощный технический переворот. И здесь нельзя не назвать имена А.-М. Ампера, М. Фарадея, Д. Араго, Э. Ленца, Д. Максвелла...

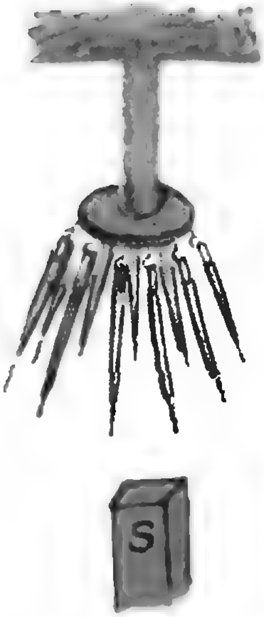
Эти странички нашего «Калейдоскопа» — всего лишь крохотное окошко в мир электромагнетизма, причем сегодня нас будет интересовать только его «магнитная сторона».



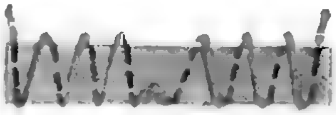
Вопросы и задачи

1. Имеются два одинаковых стальных стержня, один из которых намагничен. Как узнать, какой из них намагничен, не пользуясь ничем, кроме самих стержней?

2. К небольшому латунному диску свободно подвесили несколько стальных иголок, как показано на рисунке. Если снизу к иголкам медленно подносить сильный магнит (например, южным полюсом), то сначала иголки разойдутся, а затем, когда магнит приблизится почти вплотную, снова вернутся в вертикальное положение. Почему?



3. Намагнитится ли однородный железный стержень, если пропустить ток через катушку, намотанную на стержень так, как изображено на этом рисунке?



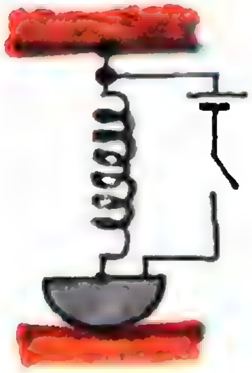
4. Незаряженное металлическое кольцо охладили до сверхпроводящего состояния и начали быстро вращать. Возникнет ли вокруг этого кольца магнитное поле?

5. К двум противоположным точкам проволочного кольца подведены идущие радиально провода, со-

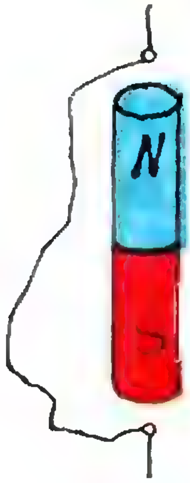
единенные с весьма удаленным источником тока. Чему равна индукция магнитного поля в центре кольца?

6. Отчего два параллельных проводника, по которым идут токи в одном направлении, притягиваются, а два параллельных катодных пучка отталкиваются?

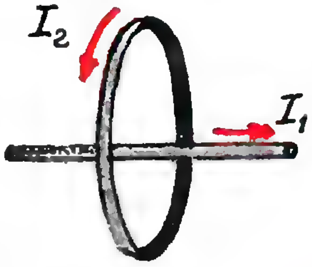
7. Один конец проводящей пружины закреплен, а другой погружен в чашечку со ртутью. Почему при пропускании тока проводник то сокращается, размыкая цепь, то удлиняется, вновь замыкая ее?



8. Около сильного длинного прямолинейного магнита помещают гибкий свободный проводник. Как расположится проводник, если по нему пропустить ток, направленный сверху вниз?



9. Прямолинейный ток I_1 проходит по оси кругового тока I_2. С какой силой взаимодействуют эти токи?

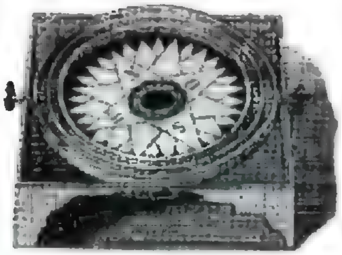


10. Две катушки, по которым текут токи, взаимодействуют между собой с определенной силой. Как изменится эта сила, если обе катушки свободно надеть на общий замкнутый железный сердечник?

11. Картина линий индукции магнитного поля Земли выглядит, как показано на рисунке. Какой формы электрический ток мог бы создать магнитное поле такой же конфигурации?

Микроопыт

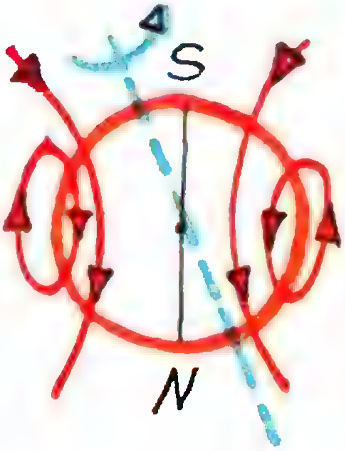
Прикрепите магнитную стрелку к пробке и опустите в воду. Как будет вести себя стрелка под действием лишь магнитного поля Земли? А если к ней поднести полюс постоянного магнита?



Любопытно, что...

... большинство китайских мудрецов объясняли в древности поведение магнитной стрелки действием внеземных сил, например притяжением конца стрелки Полярной звездой.

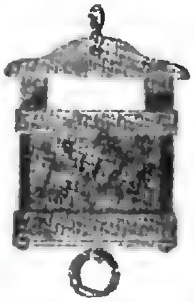
... безразличное отношение физиков в начале XIX века к вопросу о магнитном действии постоянного тока объяснялось тем, что «скрытое», незримо текущее «вольтово электричество» считалось особым, «тихим» состоянием электричества, неспособным на магнитное воздействие, наблюдаемое при бурном искровом электрическом разряде.



...как это случается, сам Эрстед дал открытому им явлению неверное толкование, считая, что воздействие на магнитную стрелку является результатом нагревания проводника током.

... уже в первом докладе Ампера, состоявшемся менее чем через два месяца после выхода в свет брошюры Эрстеда, содержалась его революционная теория, ликвидирующая представление о невесомых магнитных субстанциях, считавшееся неоспоримым на протяжении более тридцати лет.

... в прошлом веке была широко распространена точка зрения на хорошо знакомые нам линии индукции магнитного поля как на натяжения эфирной материи.



... многие небесные тела — планеты и звезды — обладают собственными магнитными полями. Однако наши ближайшие соседи — Луна, Венера и Марс — не имеют поля, подобного земному. Магнитное же поле Земли «непостоянно» — его полюса «гуляют» со скоростью 5—6 километров в год; это явление называют вековой вариацией магнитного поля.

... палеомагнитные исследования — самое строгое доказательство дрейфа континентов. По намагниченности железных месторождений, возникших несколько сот миллионов лет назад, можно «восстановить» некогда существовавший в Южном полушарии единый гигантский суперконтинент Гондвану, который позже раскололся на Южную Америку, Африку, Азию (частично), Австралию и, возможно, Антарктиду.

Что читать о магнетизме в «Кванте»
(публикации последних лет)

1. «Пути электромагнитной теории» — 1988, № 2, с. 2;
2. «Полярные сияния» — 1989, № 5, с. 58;
3. «Калейдоскоп «Кванта» — 1990, № 4, с. 40;
4. «Сила Ампера в однородном магнитном поле» — 1991, № 5, с. 39.

Материал подготовил А. Леонович

Лаборатория „Кванта"

Опыты с вращающейся жидкостью

Н. БУРЛАКИ

> *Из кувшина вылить можно только то, что было в нем.*
> Ш. Руставели

Эксперименты с вращающейся жидкостью демонстрируют сложные пространственные движения, порой — очевидные, но необъяснимые, порой — невероятные, но поучительные. Большинство из них можно провести в школьной физической лаборатории или в домашних условиях.

Буря в стакане воды. Почему чаинки собираются в центре стакана после того, как их раскрутили ложкой? Этот вопрос занимал даже Альберта Эйнштейна, которому и приписывают авторство опыта с чаинками. Не исключено, что здесь сработал «эффект громкого имени» и авторство в объяснении ранее известного явления действительно было приписано выдающемуся ученому, но теперь мы не можем с уверенностью сказать, что же было на самом деле. В любом случае объяснение Эйнштейна, опубликованное в 1926 году на страницах журнала «Naturwissenschaften», заслуживает того, чтобы привести его здесь: «Я начну с небольшого эксперимента, который каждый может легко повторить. Представим себе чашку с плоским дном, полную чая. Пусть на дне ее имеется несколько чаинок, которые остаются там, так как оказываются тяжелее вытесняемой ими жидкости. Если с помощью ложки привести во вращение жидкость в чашке, то чаинки быстро соберутся в центре дна сосуда. Объяснение этого явления заключается в следующем... Слои жидкости, находящиеся по соседству со стенками чашки, задерживаются благодаря трению, так что угловая скорость вращения... будет вблизи дна меньше, чем вдали от него. Результатом этого явится круговое движение жидкости, которое возрастает до тех пор, пока под влиянием трения не станет стационарным. Чаинки сносятся в центр круговым движением, что и доказывает его существование».

В своем письме к Эйнштейну один из основоположников квантовой механики Э. Шредингер, называя это объяснение «очаровательным», не удержался от весьма нестандартного комплимента основателю теории относительности: «Случайно, несколько дней тому назад, моя жена расспрашивала меня о «феномене чашки чая», но я не сумел дать разумное объяснение. Она говорит, что теперь никогда не сможет перемешивать чай, не вспоминая Вас».

Но вернемся непосредственно к опыту с чаинками. Хотя точного расчета движения чаинок не имеется, качественные соображения просты. «Мокрые» чаинки, плотность которых больше плотности воды, находятся на дне стакана и поэтому при своем движении испытывают силу трения о стекло. Вращаются они не в центре сосуда, а вблизи него, образуя как бы «пояс астероидов». Ширина «пояса»

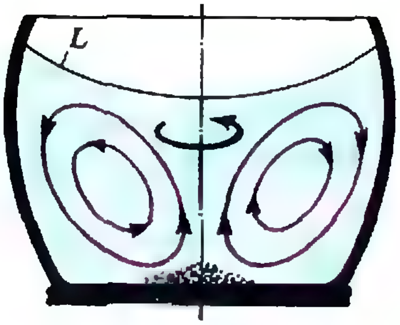


Рис. 1.

зависит от степени неоднородности чаинок: чаинки разных размеров и масс вращаются по окружностям разных радиусов. Лишь на заключительной стадии торможения они собираются в центре. Этому способствуют восходящие вблизи оси сосуда токи, показанные на рисунке 1 красными линиями и образующиеся вследствие того, что при уменьшении скорости вращения свободная поверхность L, имевшая форму параболоида вращения, стремится стать снова плоской. Чаинки увлекаются придонным потоком, направленным к оси сосуда.

«Опыт» с чаинками мы проводим каждый день, но не обращаем на их поведение особого внимания. Давайте проведем этот столь хорошо знакомый нам опыт еще раз и попытаемся выяснить, как ведут себя в процессе движения и на его заключительной стадии не только те чаинки, которые находятся на дне стакана, но и те, которые плавают внутри объема и на поверхности воды («сухие» чаинки). Вместо чаинок можно взять другие частицы, желательно калиброванные. Воду можно раскрутить ложкой, оставляя стакан неподвижным. Возможен и другой способ «закручивания» жидкости — можно раскрутить стакан просто в ладонях (при достаточной ловкости) или поставив его на середину вращающегося диска проигрывателя.

Итак, возможны следующие варианты проведения опыта с чаинками: фиксировать их положение во время вращения или после него, раскручивать чай или стакан и, наконец, наблюдать за придонными, поверхностными или плавающими внутри объема частицами. Всего $2\times2\times3=12$ комбинаций. Впрочем, существует много других вариантов этого на вид простого, а по своей природе чрезвычайно сложного опыта.

Вихри Тейлора. Не менее интересно наблюдать за поведением жидкости, находящейся между двумя коаксиальными цилиндрами. Течение жидкости, вызванное вращением одного или обоих цилиндров, представляет собой сложное гидродинамическое явление. При малой скорости вращения (малой закрутке) течение в любой горизонтальной плоскости одинаково, т. е. не зависит от вертикальной координаты. С увеличением закрутки возникают так называемые ламинарные (упорядоченные) вихри Тейлора. Фотография вихрей Тейлора при течении машинного масла в зазоре между неподвижным стеклянным и вращающимся металлическим цилиндрами приведена на рисунке 2 слева. Для визуализации течения в масло добавлен алюминиевый порошок. Схема течения дана на рисунке 3, направление движения частиц показано стрелками.

С дальнейшим ростом скорости вращения появляется периодическое искривление вихрей Тейлора. Наконец, при еще большей скорости на периодическое течение наклады-

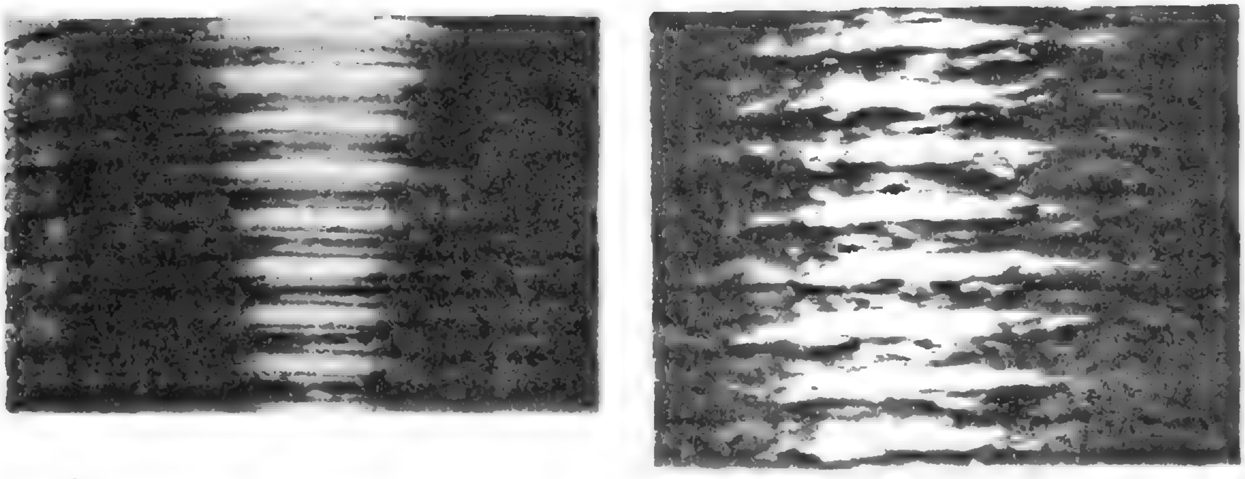


Рис. 2.

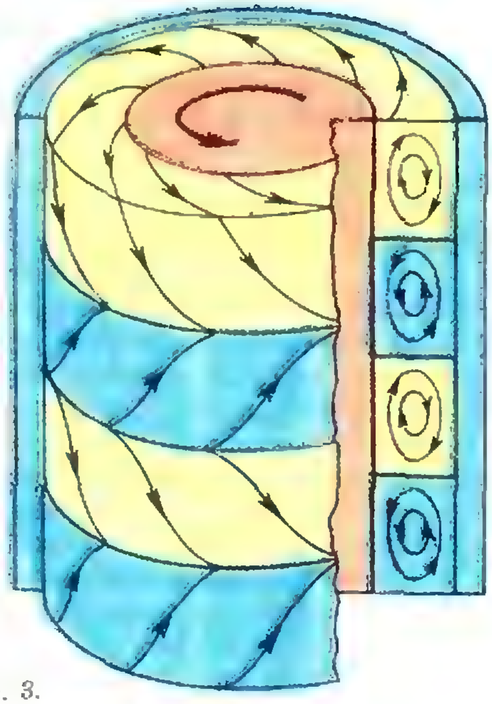


Рис. 3.

вается хаотическое движение (рис. 2, справа). Такие вихри называют турбулентными.

Закрученные потоки. В 1931 году было открыто неожиданное явление, заключающееся в следующем. В специальной камере, имеющей круглое выходное отверстие, закручивают воздух, сжатый до 10 атмосфер. По выходе из отверстия температура воздуха на оси и на периферии оказывается различной. Если на периферии воздух комнатной температуры, то на оси его температура падает до минус 200 градусов Цельсия! Это явление называется эффектом Ранка. В настоящее время природа этого явления до конца не выяснена, хотя исследованию эффекта Ранка посвящается много работ, созываются специальные симпозиумы. Поиск продолжается...

Поскольку эффект Ранка в условиях школьной лаборатории наблюдать нельзя, так как для его осуществления нужна специальная камера, проведем эксперимент, легко воспроизводимый даже в домашних условиях и чем-то напоминающий опыт Ранка. Этот опыт демонстрирует взаимодействие вращательного и поступательного движений жидкости, вытекающей из вращающегося сосуда (рис. 4).

Предлагаемый эксперимент можно поставить следующим образом. Сосуд с водой укрепите на подшипниках так, чтобы он мог свободно вращаться вокруг своей оси, раскрутите его, а затем снимите крутящие усилия и одновременно откройте сток в дне. После этого скорость вращения сосуда начнет заметно возрастать.

Форма свободной поверхности в этом опыте зависит от скорости вращения и от высоты жидкости H в сосуде. Если скорость вращения мала или велико значение H, на свободной поверхности образуется небольшая впадина (рис. 5). С увеличением скорости вращения или с уменьшением H вихрь достигает дна сосуда, а затем проникает в вытекающую из отверстия струю. Подобные воронки можно наблюдать в реках, при спуске воды в ванной.

Взрыв вихря. В 1957 году американские ученые Пекхем и Аткинс обнаружили необычное явление — внезапное разрушение спиральных вихрей (взрыв вихря), сходящих с боковых кромок самолетного крыла. Наблюдать этот необычный эффект можно только в условиях научно-исследовательской лаборатории, поэтому мы лишь расскажем об этом интересном явлении и приведем его фотографии.

Модель треугольного крыла самолета устанавливают в потоке жидкости (или воздуха) под некоторым углом к направлению течения. С нижней плоскости крыла частицы жидкости устремляются на верхнюю, где давление меньше, и движутся по потоку вдоль крыла, образуя отходящие от его боковых кромок спиральные вихри. Почти прямые оси вихрей (визуализированные с помощью впрыскиваемой вблизи вершины крыла жидкой краски) искривляются, обретая нерегулярную форму (рис. 6).

Это во многом загадочное явление изучают в специальных вихревых камерах, где поток воды закручивается искусственным образом, на-

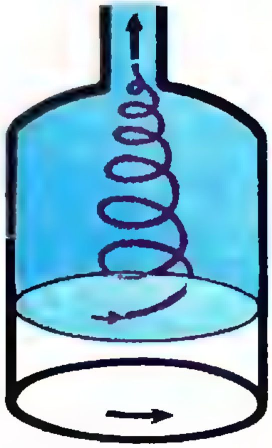


Рис. 4.

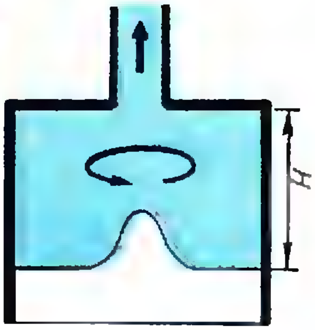


Рис. 5.

пример лопастями вентилятора (в данном случае модель крыла отсутствует), а по оси камеры вводится краска. При малой скорости вращения потока образуется спиральная структура, фотография которой показана на рисунке 7 вверху; при большой скорости осевая линия приобретает «пузыревидную» форму (рис. 7, внизу). Таковы два основных типа взрыва вихря.

Наблюдение пророчицы Деборы. Не только в опытах с вращающейся жидкостью, но и в любых других ситуациях, где проявляется влияние вязкости, следует различать два типа жидкостей: ньютонову и неньютонову.

Жидкости и газы, состоящие из «легких» молекул с относительными молекулярными массами не более 1000, называют ньютоновыми. К ним относятся воздух и вода при наших земных условиях. Классическая гидродинамика описывает движение ньютоновой жидкости.

«Тяжелые» жидкости — неньютоновы — состоят из огромных молекул, каждая из которых представляет собой цепь из большого числа повторяющихся звеньев. Примером являются полимерные жидкости, молекулярная масса которых $10^5—10^8$: растворы синтетических и биологических полимеров и неразбавленные полимеры, называемые «расплавами». Сюда относятся полиэтилен $(—CH_2—)_n$, полистирол $(—CH_2—CH(C_6H_5)—)_n$, натуральный каучук $(—CH_2—C(CH_3){=}CH—CH_2—)_n$ и т. д. (Здесь n — очень большое число порядка $10^3—10^6$.)

Неньютоновы жидкости обладают рядом особенностей. Например, они имеют память. Дело в том, что время, характерное для процесса перестройки длинных молекул, может превышать время наблюдения за течением жидкости. Течение не успевает перестроиться, имеет место эффект запаздывания, а значит, эффект памяти.

Как утверждает библейская мифология, пророчица Дебора изрекла, что пред Богом текут даже горы. Она первая подметила аналогию между поведением жидких и твердых тел.

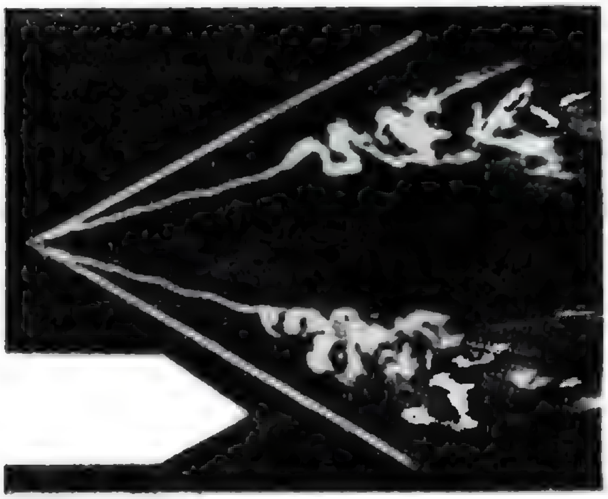


Рис. 6.

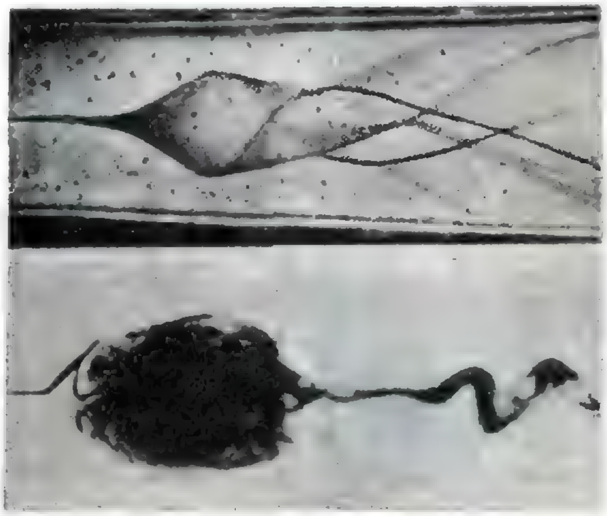


Рис. 7.

Но что самое важное — Дебора ясно выразила идею разных временны́х масштабов. За время своей жизни человек не заметит уменьшения горы — оно незначительно. А по временно́й шкале Бога горы текут! Ученые часто шутят — юмор помогает им в трудной работе. Числом Деборы они назвали отношение характерного времени «настройки» молекул к времени наблюдения. Когда число Деборы велико, жидкость ведет себя подобно твердому телу. При малых числах Деборы жидкость ведет себя как ньютонова. В промежуточном случае, когда число Деборы порядка 1, жидкость обладает рядом аномальных свойств.

Удивительные свойства неньютоновых жидкостей. Двигаясь в трубе, жидкость испытывает силу трения о ее поверхность, в результате чего кинетическая энергия переходит в тепловую. Поэтому снижение силы трения является важной технической проблемой. Как оказалось, добавление в жидкость малого количества полимера значительно снижает силу трения. Это удивительное и до конца не понятое явление называется эффектом Томса. Всего лишь 20 миллионных долей полиокса (длинноцепочного полимера) могут снизить силу трения турбулентного потока в трубе на 50 %!

В 50-е годы американские пожарные начали добавлять полимерные добавки в жидкость, вытекающую из брандспойта, при этом длина струи увеличивалась в полтора раза. Полимерные добавки в смазывающих материалах повышают ресурсы станков и приборов. Можно увеличивать скорость судна путем впрыскивания вблизи его носовой части малых количеств полимерного раствора. Имеется гипотеза, что дельфины и другие обитатели морей и океанов тоже «используют» эффект Томса для уменьшения гидродинамического сопротивления.

Теперь, подготовленные к неожиданностям, снова перейдем к теме нашей беседы — опытам с вращающейся жидкостью. Сравним, как поведут себя ньютоновы и неньютоновы жидкости, оказавшись в одинаковых условиях. В наших опытах в качестве ньютоновой жидкости можно использовать воду, а неньютоновой — подсолнечное масло.

Вставьте во вращающийся стакан с водой неподвижный стержень, ось которого совпадает с осью стакана. Свободная поверхность не утратит форму параболоида вращения. Если же вместо воды взять подсолнечное масло, то жидкость поднимется в центре стакана. Свободная поверхность уже не будет параболоидом. Опыт можно изменить: вращать не стакан, а стержень. Эффект будет тот же самый. Подобная картина возникает, если убрать стержень, а на дно стакана поместить вращающийся диск. Свободная поверхность ньютоновой жидкости в центре опускается, неньютоновой — поднимается.

Если вращающийся диск разместить на поверхности жидкости, то наряду с первичным потоком, скорость которого направлена по касательной к диску, возникнет вторичный поток в меридиональном направлении (красные линии на рисунке 8). В ньютоновой (*а*) и неньютоновой (*б*) жидкостях направления вторичного течения противоположны.

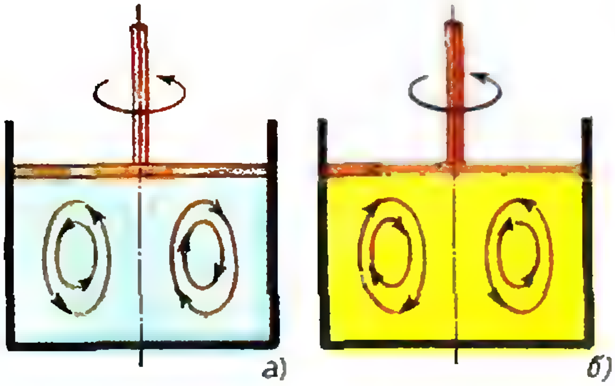


Рис. 8.

Практикум абитуриента

Что покажет динамометр?

Кандидат физико-математических наук
А. АФОНИН,
кандидат физико-математических наук
В. КАПШАЙ,
М. КАПШАЙ,
кандидат физико-математических наук
В. ШОЛОХ

Задачи о показаниях измерительных приборов часто кажутся простыми. Дело, вероятно, в том, что, когда вводится новая физическая величина, всегда сразу же дается рецепт, с помощью какого устройства и как именно следует эту величину измерять. В дальнейшем, считая вопрос исчерпанным, к тонкостям процесса измерения возвращаются редко.

Это относится и к измерениям с помощью простейших приборов, например — пружинного динамометра.

Хорошо известно, что если к обоим концам динамометра приложены одинаковые по модулю силы F_0, то динамометр покажет именно это значение силы. При этом пружина динамометра растянется, и ее абсолютное удлинение Δl_0 определится соотношением $F_0 = k\Delta l_0$, где k — жесткость пружины. Вроде бы все просто. Но...

Задача 1. *За один конец пружинного динамометра тянут с силой $F_1 = 50$ Н, за другой — с силой $F_2 = 70$ Н. Что покажет динамометр?*

На вопрос этой задачи отвечают обычно, что динамометр покажет либо F_2, либо F_1. Встречаются также ответы $F_2 + F_1$ и $F_2 - F_1$. На самом деле ни один из этих ответов не является верным. А что же верно? Об этом — чуть позже.

С помощью пружинного динамометра можно также определить массу m тела, поскольку нетрудно измерить силу тяжести, равную mg. Вроде бы тоже все просто. Однако...

Задача 2. *Как определить массу пружины динамометра, имея в своем распоряжении только этот динамометр?*

Оказывается, обе сформулированные задачи тесно связаны друг с другом, хотя на первый взгляд это может показаться и странным. Скоро вы в этом убедитесь. Но прежде рассмотрим еще одну, несколько более простую задачу и решим ее.

Задача 3. *За один конец динамометра тянут с силой, равной F. Что покажет динамометр?*

Для начала попытаемся четко понять, что означает этот вопрос.

Ясно, что, глядя на динамометр, мы можем сказать только, растянулась его пружина или нет и если растянулась, то на сколько. Мы можем также измерить величину абсолютного удлинения пружины в единицах длины, например в сантиметрах. Определить же значение силы можно лишь после предварительной градуировки шкалы динамометра в единицах силы, например в ньютонах, с помощью закона Гука.

Очень важными являются также следующие два условия: 1) во время измерения динамометр покоится в не-

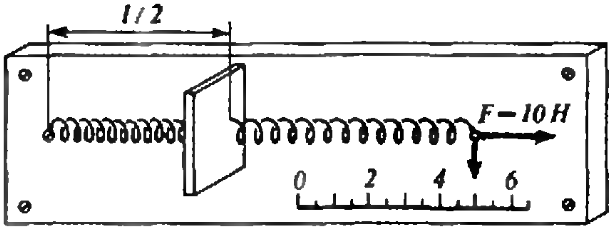


Рис. 1.

которой инерциальной системе отсчета; 2) пружина динамометра растягивается равномерно по всей длине. Проще всего эти два условия обеспечиваются равенством сил, действующих на оба конца пружины динамометра. В важности второго условия нетрудно убедиться с помощью следующего рассуждения. Допустим, мы закрепили одну половину пружины (соединенную со шкалой) так, что она вообще не будет деформироваться и перемещаться, а за свободный конец второй половины пружины тянем с силой F (рис. 1). Что в этом случае покажет динамометр? Очевидно, половина пружины под действием силы F удлинится на столько же, на сколько удлинится вся пружина под действием силы $F/2$. Таким образом, стрелка динамометра покажет силу $F/2$.

Итак, если сила натяжения постоянна вдоль пружины и равна F, динамометр покажет F. Если же сила натяжения равна нулю на одной половине пружины и F на другой, динамометр покажет $F/2$. А что если сила натяжения будет изменяться вдоль пружины еще каким-нибудь, более сложным образом? Какой будет суммарная деформация всей пружины (ведь именно она «ответственна» за показание стрелки динамометра)? Как, наконец, создать неравномерную силу натяжения, не закрепляя части пружины?

Оказывается, в условиях задачи 3 реализуется именно такая ситуация. Так что же происходит, если сила F действует только на один конец динамометра?

Во-первых, динамометр движется и движется равноускоренно (других сил нет). Его ускорение равно $a=F/m$, где m — масса пружины. При таком движении взаимное расположение точек пружины не изменяется со временем. Можно сказать, что пружина движется как твердое тело (при условии, разумеется, что возможные продольные колебания быстро затухают). При этом взаимное расположение точек движущейся пружины может, конечно, отличаться от их расположения в неподвижном состоянии.

Во-вторых, различные участки пружины будут деформироваться по-разному, поскольку сила натяжения будет изменяться вдоль пружины. Определим эту силу, считая, что пружина расположена горизонтально и сила F действует на ее правый конец.

Для дальнейшего удобства «пронумеруем» точки (витки) пружины с помощью непрерывно изменяющейся величины x следующим образом (рис. 2). Вместо того, например, чтобы говорить «точка пружины, которая находится на расстоянии x от левого конца пружины в недеформированном состоянии», будем говорить кратко «точка x». Очевидно, что x изменяется в пределах от 0 до l, где l — длина недеформированной пружины. Силу натяжения в точке x обозначим $F(x)$; при этом понятно, что $F(0)=0$ и $F(l)=F$. Заметим, что масса участка пружины от точки 0 до точки x равна $m_x=mx/l$. Для того чтобы этот участок двигался с ускорением $a=F/m$, необходимо, чтобы на него со стороны остальной части пружины действовала сила — сила натяжения в точке x —

$$F(x)=m_xa=\frac{mx}{l}\,\frac{F}{m}=\frac{F}{l}x.$$

Эта сила линейно зависит от параметра точки пружины x (рис. 3).

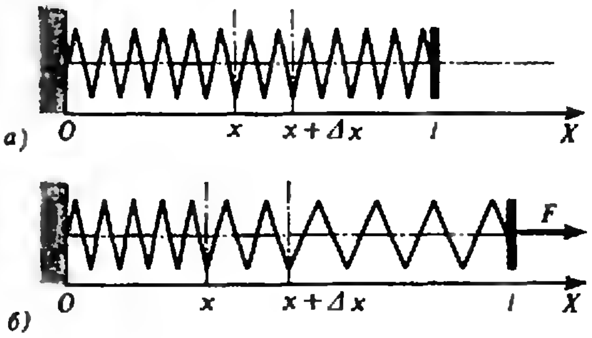


Рис. 2.

Т кон

Теперь задача сводится к тому, чтобы, зная силу натяжения в каждой точке пружины, определить деформацию всей пружины. Для этого поступим так. Выделим малый (по сравнению с l) участок недеформированной пружины между точками x и $x+\Delta x$ (рис. 2, *а*). Длину этого участка Δx будем обозначать также b. На левый конец этого участка действует сила натяжения $F(x)=Fx/l$, на правый — сила натяжения $F(x+\Delta x)=$ $=F(x+b)/l$. Равнодействующая этих сил, направленных в разные стороны, равна Fb/l. Поскольку масса выделенного участка есть mb/l, он движется с ускорением, равным F/l, т. е. с ускорением всей пружины.

Так как силы Fx/l и $F(x+b)/l$ отличаются на малую (по сравнению с ними) величину Fb/l, можно считать, что участок Δx растягивают в обе стороны с силой Fx/l, под действием которой он деформируется. Найдем величину абсолютного удлинения этого участка.

Если бы на оба конца пружины действовала сила F_0, в каждой точке x сила натяжения также равнялась бы F_0, и пружина была бы растянута равномерно. Абсолютное удлинение всей пружины было бы равно

$$\Delta l_0=\frac{F_0}{k},$$

где k — жесткость пружины, а относительное удлинение —

$$\frac{\Delta l_0}{l}=\frac{F_0}{kl}.$$

При этом относительное удлинение любого участка было бы таким же. Например, для участка длиной b

$$\frac{\Delta b}{b}=\frac{F_0}{kl}.$$

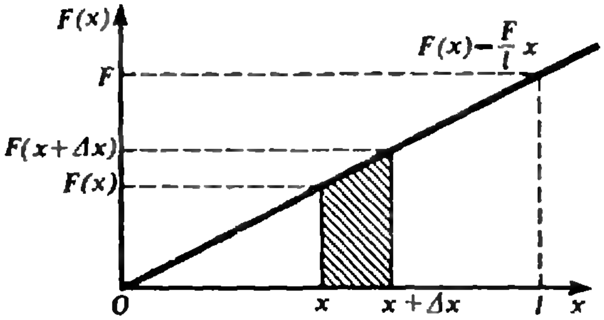


Рис. 3.

В случае же, когда сила натяжения зависит от x, относительное удлинение участка длиной b будет другим:

$$\frac{\Delta b}{b}=\frac{F(x)}{kl}.$$

Это означает, что участки возле правого конца пружины растягиваются больше, возле левого — меньше (см. рис. 2, *б* и рис. 4). Абсолютное удлинение этого участка есть

$$\Delta b=\frac{F(x)}{kl}b=\frac{1}{kl}F(x)\Delta x.$$

Заметим, что величина абсолютного удлинения участка Δx, с точностью до постоянного коэффициента $1/(kl)$, равна площади прямоугольника со сторонами $F(x)$ и Δx или $F(x+\Delta x)$ и Δx (см. рис. 3). Ясно, что в пределе (для бесконечно малых Δx) силы $F(x)$ и $F(x+\Delta x)$ совпадают, а площади указанных прямоугольников равны как между собой, так и площади заштрихованной на рисунке 3 трапеции.

Для того чтобы найти абсолютное удлинение всей пружины, разделим ее на n кусков малой длины точками $x_1=0, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}=l$. Будем считать, что $\Delta x_i=(x_{i+1}-x_i)\ll l$ (n велико). Абсолютное удлинение i-го участка выразится формулой

$$\Delta l_i=\frac{1}{kl}F(x_i)\Delta x_i,$$

а абсолютное удлинение всей пружины —

$$\Delta l=\sum_{i=1}^{n}\Delta l_i=\frac{1}{kl}\sum_{i=1}^{n}F(x_i)\Delta x_i.$$

Устремим теперь длину каждого участка к нулю (а их число к бесконечности). Тогда получим

$$\Delta l=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{1}{kl}\sum_{i=1}^{n}F(x_i)\Delta x_i.$$

Ясно, что эта сумма, с точностью до коэффициента $1/(kl)$, равна сумме площадей трапеций, подобных заштрихованной на рисунке 3, а ее предел — площади прямоугольного треугольника с катетами F и l. Следовательно,

$$\Delta l=\frac{1}{kl}\frac{Fl}{2}=\frac{F}{2k}.$$

Для тех, кто знаком с понятием определенного интеграла, запишем

$$\Delta l=\frac{1}{kl}\int_0^l F(x)dx=\frac{1}{kl}\int_0^l \frac{Fx}{l}\,dx=\frac{F}{2k}.$$

Итак, абсолютное удлинение Δl всей пружины, на один конец которой действует сила F, найдено. Можно сказать, что это удлинение будет таким же, если на оба конца динамометра действует так называемая эффективная сила $F_{эф}=k\Delta l=F/2$. Но, как уже говорилось, если на оба конца динамометра действуют одинаковые силы, динамометр показывает именно ее. Таким образом, если на один конец динамометра действует сила F, то динамометр показывает силу $F/2$ (и движется равноускоренно). При этом заметим, что показание динамометра не зависит ни от массы m пружины, ни от ее длины l в свободном состоянии, ни от жесткости k.

Разобравшись с задачей 3, вернемся к задаче 1. Если на правый конец динамометра действует сила F_2, а на левый F_1, то пружина движется с ускорением $a=(F_2-F_1)/m$. Для участка пружины от 0 до x имеем

$$F(x)-F_1=m_x a=\frac{mx}{l}\,\frac{F_2-F_1}{m},$$

следовательно, сила натяжения в точке x равна

$$F(x)=F_1+\frac{F_2-F_1}{l}x.$$

Абсолютное удлинение можно найти с помощью тех же рассуждений, что и раньше. Так, с одной стороны, абсолютное удлинение пружины равно площади заштрихованной на рисунке 5 трапеции (деленной на kl). С другой стороны, его можно выразить в виде интеграла:

$$\Delta l=\frac{1}{kl}\int_0^l\left(F_1+\frac{F_2-F_1}{l}x\right)dx=\frac{F_2+F_1}{2k}.$$

Таким образом, динамометр, на концы которого действуют различные силы F_1 и F_2, растягивается так, как если бы на оба его конца действовала одна и та же сила $F_{эф}=k\Delta l=(F_1+F_2)/2$. Другими словами, динамометр показывает (независимо от величин m, l и k) силу, равную полусумме F_1 и F_2, и движется при этом равноускоренно. В частном случае, когда $F_1=0$, мы получим результат задачи 3: $F_{эф}=F_2/2$. В другом частном случае, когда $F_1=F_2=F$, имеем $F_{эф}=F$, т. е. когда силы, действующие на оба конца динамометра, одинаковы, динамометр, как и должно быть, показывает именно эту силу и покоится.

Теперь рассмотрим задачу 2. Так можно ли сделать какие-нибудь измерения с помощью одного только динамометра? Оказывается, можно. Сначала расположим динамометр горизонтально и убедимся, что его стрелка находится на нулевом делении. Затем расположим динамометр вертикально, держа за верхний конец пружины, который прикреплен к шкале. В таком положении стрелка динамометра (нижний конец пружины) покажет не ноль — пружина растянется под действием силы тяжести. Но на сколько? Что же теперь покажет динамометр?

Заметим, что в вертикальном положении на концы пружины действуют различные силы. На верхнем конце сила натяжения пружины равна mg, где m — масса пружины, на нижнем сила натяжения равна нулю. Кроме того, сила натяжения на расстоянии x от нижнего конца пружины равна $F(x)=mgx/l$ (покажите). Но тогда ситуация такая же, как и в задачах 1 и 3. Воспользовавшись их результатами, находим, что динамометр покажет эффективную силу $F_{эф}=mg/2$.

Рис. 4.

Вывод: масса пружины динамометра равна $m=2F_{эф}/g$, где $F_{эф}$ — показания динамометра в вертикальном положении.

В заключение — несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Динамометр подвешен вертикально за верхний конец (за который пружина прикреплена к шкале). К его нижнему концу подвешен (верхним концом) второй динамометр, а к нижнему концу второго — третий. Все динамометры одинаковые. Верхний динамометр показывает силу F. Что показывают второй и третий динамометры? Массой шкал пренебречь.

2. Пружина в горизонтальном положении имеет длину 1 м. Подвешенная за один конец, она растягивается до 1,2 м. Другая такая же пружина имеет в горизонтальном положении длину 2 м. До какой длины она растянется, *если ее тоже подвесить за один конец?*

3. Пружина динамометра может как растягиваться, так и сжиматься, подчиняясь в обоих случаях закону Гука. За один конец динамометра тянут с силой 70 Н, другой толкают в том же направлении с силой 50 Н. Что покажет динамометр?

4. Стержень, изготовленный из упругого материала (металл, резина), аналогичен пружине. Если на его торцы действуют одинаковые растягивающие силы F, то относительное удлинение стержня равно $\Delta l/l=F/(ES)$, где S — площадь поперечного сечения стержня, E — коэффициент, зависящий от свойств материала (модуль Юнга). Какой должна быть длина стального стержня в горизонтальном положении, чтобы при подвешивании его за один конец длина стержня увеличилась на 1 мм? Для стали $E=2{,}1\cdot10^5$ Н/мм^2, плотность $\rho=7{,}8\cdot10^3$ кг/м^3.

5. Стальной стержень (см. предыдущую задачу), поставленный «на попа», имеет длину 1 м. Какой будет длина стержня, если его подвесить за верхний конец?

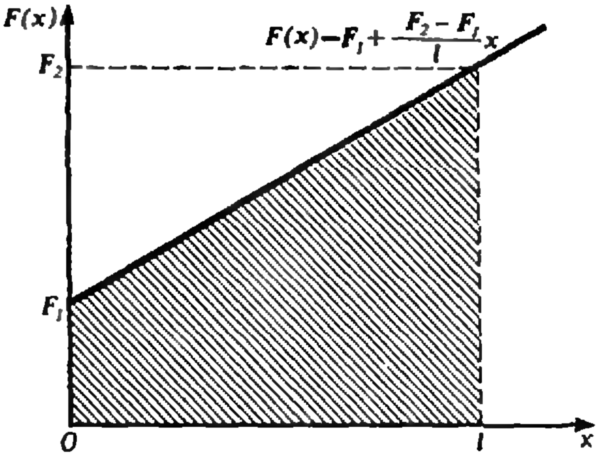


Рис. 5.

Пинч-эффект

(Начало см. на с. 18)

сверхвысокого напряжения (миллионы вольт). Делается это следующим образом. При разрушении расплавленной проволочки ее сопротивление практически мгновенно увеличивается во много раз, в то время как ток в цепи, определяемый в основном индуктивностью проволочки, почти не изменяется. Поэтому и возникает импульс высокого напряжения (который сложно получить другими способами).

И еще один «родственник» жидкометаллической струи — плазменный шнур термоядерного реактора. Оказывается, и он подвержен такому же разрушению, как токонесущая струя! Создатели термоядерного реактора столкнулись с коварнейшим свойством плазмы — ее неустойчивостью. Если в плазменном шнуре возникает перетяжка или другое отклонение от состояния равновесия, то под действием локально усиливающегося магнитного поля оно увеличивается до полного разрыва шнура. За миллионные доли секунды плазменный шнур разрушается.

Именно это явление иллюстрирует жидкометаллическая токонесущая струя на нашей фотографии (с. 18). Но перечень интересных и красивых физических эффектов, которые способна демонстрировать свободная струя, далеко не исчерпывается тем, что можно увидеть на этой фотографии. «Все, что видим мы,— видимость только одна...»

Ни Лойд, ни Дьюдени...

И. АКУЛИЧ

Есть такой анекдот. В редакции молодому поэту сказали:

— У Вас есть два стихотворения, которые не смогли бы написать ни Пушкин, ни Лермонтов.

— Правда? — обрадовался тот.

— Да, одно о радио, другое о телевидении.

Многим из нас знакомы прекрасные задачи известных сочинителей головоломок Сэма Лойда и Генри Дьюдени. Повозиться с ними одно удовольствие. Особый колорит этим задачам придает то, что авторы представили их в виде коротких историй, будто бы имевших место в действительности, притом для решения зачастую приходится привлекать сведения, явно не содержащиеся в условии. Сборники таких головоломок («Математическая мозаика» Лойда и «Кентерберийские головоломки» Дьюдени) исчезли с прилавков книжных магазинов практически мгновенно.

В этой статье читателю предлагается несколько задач, также изложенных в виде историй. Их не смогли бы составить ни Лойд, ни Дьюдени как раз в силу причин, указанных в анекдоте: того, о чем пойдет речь, в их времена просто не существовало. Итак:

Число на асфальте

Петя и Коля, встретившись на улице, увидели написанное мелом на асфальте двузначное число. Петя прибавил к нему 4 и затем поделил на 7, а Коля поделил его на 9 и затем отнял 1. Результаты совпали.

Какое число было написано?

«Что же здесь современного?» — спросит читатель. Конечно же, асфальт! В те времена дороги асфальтом не покрывали, а писать мелом на брусчатке крайне неудобно. Поэтому можно смело утверждать, что ни Лойд, ни Дьюдени составить такую задачу не смогли бы.

Шахматные часы

В печати промелькнуло сообщение об изобретении новых шахматных часов. Такие часы отводят каждому игроку первоначально 40 минут, а после каждого сделанного хода резерв времени увеличивается на 2 минуты. Таким образом, во-первых, сохраняется общепринятая норма времени (2 часа на 40 ходов)*), и во-вторых, при обдумывании каждого хода игрок имеет запас времени не менее двух минут, что снижает вероятность грубых ошибок, вызываемых цейтнотом. После 40 ходов партия откладывается и затем доигрывается с новым контролем времени.

В шахматном турнире с использованием этих часов встретились шахматисты *A* и *B*, причем шахматист *A* тратил на обдумывание каждого хода одинаковое время. Сделав очередной

---

*) Въедливый читатель заметит, что не 2 часа, а 1 час 58 минут. (*Прим. ред.*)

ход, он заметил, что всего израсходовал столько же времени, сколько у него осталось в резерве. Еще через несколько ходов он обнаружил, что запас стал в два с половиной раза меньше затрачено времени. Известно также, что его противник сделал в партии не менее 14 ходов, и встреча закончилась без доигрывания победой одного из игроков.

А теперь попробуйте ответить на вопросы:

1) Кто играл белыми?

2) Кто выиграл?

Вот еще одна современная задача, но связанная не с достижениями науки и техники, а с новой модной теорией.

Задача о биоритмах

Прошлым летом (как сейчас помню — второго числа) мы отмечали день рождения Сергея Сергеевича, а той же осенью (помнится, десятого числа) — день рождения его племянника.

— Мы с племянником — близкие натуры,— заявил тогда Сергей Сергеевич,— и не только по причине родства, но и потому, что наши биоритмы полностью совпадают.

— Это точно,— подтвердил племянник.

Вопросы:

1) В каком месяце родился Сергей Сергеевич?

2) В каком веке родился Сергей Сергеевич?

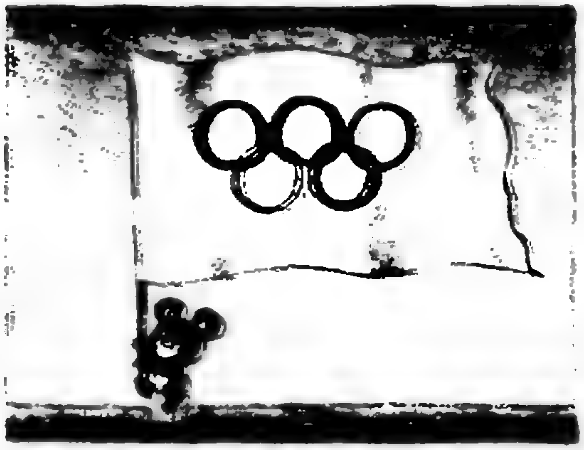
Примечание (для тех, кто не знает, что такое биоритмы): существует теория, согласно которой при рождении человека одновременно «включаются» три цикла: физический, эмоциональный и интеллектуальный продолжительностью соответственно 23, 28 и 33 суток; в первой половине каждого цикла соответствующие способности и склонности человека повышены, во второй — понижены.

В следующей задаче попробуйте определить не месяц и не век, а год.

Какой год?

Петр Петрович родился в день открытия Олимпийских игр. Как-то, отметив свой день рождения, он обнаружил, что его возраст стал равен сумме цифр текущего года. В каком году родился Петр Петрович?

А сейчас — самая «свежая» задача, хотя она с виду таковой не кажется.



КНИГА
ЖАЛОБ

Задача о киоске

Весной 1991 года Петя купил в киоске набор марок за 51 копейку, жевательную резинку за 1 рубль 20 копеек, 12 листов цветной бумаги и 3 конверта, но цену листа бумаги и конверта он не знал. Когда киоскер назвал сумму: 2 рубля 2 копейки, Петя сразу воскликнул: «Не может быть!», но потом оказалось, что все правильно. Почему Петя заподозрил ошибку? Сколько стоит конверт и лист бумаги?

Задача о мармеладе

Один школьник описывал другому случай, происшедший с ним в школьном буфете:

БЕРЕГИТЕ ХЛ

— Захотелось мне мармеладу, а денег мало. Я подсчитал свои возможности и говорю: «Взвесьте мне, пожалуйста, 25 граммов», а буфетчица в ответ: «У меня гирьки такой нет, самая маленькая — 50 граммов». Так я и ушел несолоно хлебавши. (Весы в буфете рычажные, с двумя чашками и без стрелок.)

— Ну ты и профан! — воскликнул собеседник.— Разве ты не знаешь, что каждая медная монета весит столько же граммов, сколько копеек составляет ее достоинство? Ты бы сказал: «Вот Вам 5 медяков по 5 копеек, они весят как раз 25 граммов» — и все в порядке.

— Будь у меня такие деньги, я бы купил больше. Но у меня-то было всего 4 копейки...

Поразмыслив, приятели нашли два способа взвесить 25 граммов мармелада в указанных условиях. А найдет ли читатель?

Надеюсь, предложенные задачи пришлись вам по вкусу. Надеюсь также, что прежде чем читать приведенные ниже решения, вы сами поломаете голову в поисках путей к ним...

Решения

Число на асфальте

Задача кажется очень простой и разрешимой очевидным образом. Но не тут-то было!

Более сообразительные школьники сразу поймут: что-то не так. Действительно, Петя сначала *увеличил* число, а затем взял от него *седьмую* часть; Коля же взял *девятую* часть, которую затем еще и *уменьшил*. Но ведь тогда у Пети наверняка должен получиться больший результат, чем у Коли! Менее сообразительные просто попробуют решить задачу «в лоб» и, обозначив искомое число через x, составят уравнение: $(x+4)/7=x/9-1$, откуда $x=-49{,}5$, что вообще не лезет ни в какие ворота.

В чем же дело? Чтобы разобраться, еще раз осмыслим условие задачи. Итак, Петя и Коля встречаются (видимо, лицом к лицу), затем опускают глаза вниз и видят число... Скорее всего, так оно и было. Но тогда они увидят число с разных сторон! Теперь понятно, в чем причина: некоторые числа, будучи перевернутыми, имеют вполне корректный вид, но другие числовые значения. Однако это возможно, только если каждая цифра такого числа допускает переворачивание. Какие же это цифры? Это, конечно, 0 и 8, переходящие сами в себя; 6 и 9, переходящие друг в друга; а также с некоторой натяжкой цифра 1 (здесь можно спорить, но на всякий случай включим и ее). Какие-то из них и составили записанное на асфальте двузначное число, которое Петя воспринял как некоторое число $П$, а Коля — как его «антипод» $К$. Тогда $(П+4)/7=К/9-1$, откуда $7К=9(П+11)$. Во-первых, отсюда следует, что $К>П$ (что, впрочем, и без того очевидно), а во-вторых, становится ясно, что $К$ делится на 9.

Из цифр 0, 1, 6, 8, и 9 можно составить всего 5 чисел $К$, делящихся на 9 (включая на всякий случай и начинающиеся цифрой 0). Это: 09, 18, 81, 90 и 99, которым соответствуют $П$, равные 60, 81, 18, 06 и 66. Значения $К$, равные 09 и 18, придется отбросить, так как для них $К<П$. Для остальных трех значений сделаем прямую проверку:

1) $К=81$, $П=18$. Тогда $(П+4)/7=22/7$ и $К/9-1=8$. Не подходит.

2) $К=90$, $П=06$. Тогда $(П+4)/7=10/7$ и $К/9-1=9$. Тоже не подходит.

3) $К=99$, $П=66$. Тогда $(П+4)/7=10$ и $К/9-1=10$. Это подходит.

Итак, Петя и Коля видели одно и то же число, но Петя воспринял его как 66, а Коля — как 99.

Шахматные часы

Пусть игрок A сделал n ходов и на обдумывание каждого хода тратил t минут. Тогда всего он потратил tn минут.

Шахматные часы отвели ему 40 минут первоначально и по 2 минуты за каждый сделанный ход, т. е. $(40+2n)$ минут. Из них tn минут он израсходовал, поэтому после n-го хода его запас составляет $(40+2n-tn)$ минут.

Если после n-го хода израсходованное время равно запасу, то $tn=40+2n-tn$, откуда $t=(20+n)/n$.

Если после другого, m-го хода израсходованное время оказалось в 2,5 раза больше резерва, то, рассуждая аналогично, получим $tm=2{,}5(40+2m-tm)$, откуда $t=(200+10m)/7m$.

Приравняв полученные значения t, имеем $(20+n)/n=(200+10m)/(7m)$, откуда $m=200n/(140-3n)$.

Видно, что с ростом n растет и m (так как числитель возрастает, а знаменатель уменьшается). При этом наименьшее n, при котором m будет целым,— это $n=5$ (тогда $m=8$). Следующее по величине значение n, при котором m будет также целым,— это $n=20$ (тогда $m=50$). Но в последнем случае партия продолжалась бы не менее 50 ходов, и она по этой причине должна быть отложена, а затем доиграна, что противоречит условию. Еще бо́льшие значения n влекут за собой еще бо́льшие значения m. Поэтому возможен лишь один вариант: $n=5$, $m=8$. Тогда $t=(20+n)/n=5$ минут.

А теперь подсчитаем, на сколько ходов хватило бы времени шахматисту A, если бы он тратил 5 минут на ход. Видно, что после каждого хода его запас времени уменьшается на 3 минуты, поэтому он может сделать максимум 13 ходов, после чего останется лишь минута, т. е. 14-й ход он сделать не успеет.

По условию, игрок B сделал не менее 14 ходов. Если бы B играл черными, то тогда A, играя белыми, тоже сделал бы не менее 14 ходов, но это, как мы только что выяснили, невозможно. Поэтому A играл черными.

После того как B, играя белыми, сделал 14 ходов, наступила очередь A делать 14-й ход. Но у него не хватит на это времени! И поэтому он наверняка проиграл, просрочив время (или сдался после 14-го хода противника, либо же получил мат на 14-м ходу). Во всяком случае, A проиграл.

Задача о биоритмах

Так как НОК (23, 28, 33)=21252, то чтобы биоритмы Сергея Сергеевича и его племянника совпали, разность их возрастов должна быть кратна 21252 дням. Так как это более 58 лет, то ясно, что либо дядя и племянник ровесники, либо один из них старше на 21252 дня (поскольку оба они одновременно живы, то бо́льшие разности нереальны).

Но ровесниками они быть не могут, т. к. день рождения дяди летом, а племянника — осенью. Кроме того, так как $21252=365\times58+82$, то разность их возрастов составляет 58 лет плюс какой-то срок, заведомо меньший трех месяцев. Поэтому если бы племянник был старше, то день рождения дяди наступил бы позже дня рождения племянника на срок, не превышающий трех месяцев, т. е. дядя родился бы осенью или зимой, но никак не летом. Поэтому племянник не может быть и старше дяди.

Итак, дядя старше племянника на 21252 дня.

Теперь определим, в каком веке родился дядя. Здесь, очевидно, возможны два варианта: XIX или XX век. Допустим, дядя родился в XX веке. Так как $58=14\times4+2$, то из 58 идущих подряд лет либо 14, либо 15 високосных, и следовательно, дядя старше племянника на 58 полных лет плюс либо $82-14=68$, либо $82-15=67$ дней, т. е. немногим более двух месяцев. Два летних или осенних идущих подряд месяца могут содержать вместе либо 61 день (например, август+сентябрь), либо 62 дня (только июль+август). Поэтому окончательно дядя старше племянника на 58 полных лет, 2 полных месяца и сверх того либо $67-62=5$ дней, либо $67-61=68-62=6$ дней, либо $68-61=7$ дней. Но тогда если дядя родился 2-го числа, то племянник мог родиться либо $2+5=7$-го, либо $2+6=8$-го, либо $2+7=9$-го числа, но никак не 10-го! Как же так?

Разгадка в том, что 1900-й год не был високосным. Поэтому если дядя родился в XIX веке, то из 58 подряд идущих лет либо 13, либо 14 високосных. Если их 13, то дядя старше племянника на 58 полных лет и 69 дней; и если к тому же два идущих подряд месяца — не июль с августом, то дядя старше племянника на 58 лет, 2 месяца и 8 дней, что как раз удовлетворяет условию (ибо $2+8=10$).

Итак, дядя родился в XIX веке.

Определим месяц его рождения. Так как он, по условию, родился летом, то возможны 3 варианта: 2-е июня, 2-е июля и 2-е августа. Соответствующие даты для племянника: 10-е августа, 10-е сентября и 10-е октября. Первый вариант не подходит: в нем племянник родился не осенью. Второй тоже не годится: разность дней рождения составляет не 69, а 70 дней сверх 58 лет (здесь как раз «влезли» июль с августом, и $31+31+8=70$). Поэтому остается единственная возможность: Сергей Сергеевич родился в августе (а племянник в октябре).

То, что такой ответ корректен, подтверждает пример: Сергей Сергеевич родился 2 августа 1897 года, а его племянник — 10 октября 1955 года. У обоих получается вполне жизнеспособный возраст (хотя у дяди весьма и весьма почтенный), а разность их возрастов, как легко проверить, составляет ровно 21252 дня.

Какой год?

Для решения этой задачи необходимо иметь некоторые минимальные сведения об Олимпийских играх, известные, впрочем, практически каждому школьнику.

Итак, в некотором году сумма цифр этого года равна возрасту Петра Петровича. Следовательно, если от номера этого года отнять эту сумму цифр, то получится год его рождения. Но если от любого числа отнять сумму его цифр, то получится число, делящееся на 9. Поэтому год рождения Петра Петровича делится на 9.

Олимпийские игры, как известно, проводятся в годы, делящиеся на 4. Поэтому год рождения делится и на 9, и на 4, а следовательно — на 36.

С начала Олимпийских игр (а начались они в конце прошлого века, точнее — в 1896 году) было лишь три года, делящихся на 36: 1908, 1944 и 1980.

Но в 1944 году Олимпийские игры не проводились — шла вторая мировая война.

1980 год надо отбросить по другой причине: с тех пор не было ни одного года, сумма цифр которого равнялась бы возрасту. В этом легко убедиться, просто перебрав все годы с 1981-го по нынешний. Но можно и по-другому: допустим, что такой год был. Тогда его первая цифра — это 1, вторая — 9, третья — 8 или 9, т. е. не менее 8. Поэтому возраст был не меньше $1+9+8=18$, что произойдет не раньше $1980+18=1998$ года, до которого еще ой как далеко! Итак, 1980 год тоже отпадает.

Остается один вариант: Петр Петрович родился в 1908 году. В этом году действительно проводились Олимпийские игры (в Лондоне). Вторая часть условия тоже выполняется: в любой год с 1920-го по 1929-й включительно сумма цифр года как раз равнялась возрасту.

Задача о киоске

Упоминание о весне 1991 года существенно, порядки в нашей торговле меняются так быстро, что в другое время задача вполне могла бы иметь другое решение.

Петя наверняка заметил, что цена марок и резинки делится на 3, и, кроме того, количество листов бумаги и конвертов также делится на 3. Следовательно, общая сумма также должна делиться на 3. Но она не делится! Понятно, что Петя заподозрил ошибку. Но его подвело... как вы думаете, что? Ну, конечно же, знаменитый пятипроцентный налог, взимаемый с общей стоимости покупки и округляемый до целого числа копеек. Если общая стоимость купленных вещей равна s копеек, то с налогом это составит $1{,}05s$. Это значение с округлением до целых равно 202 копейки. Следовательно, можно утверждать, что $201{,}5<1{,}05s<202{,}5$, откуда $191{,}9...<s<192{,}8...$ и потому $s=192$ копейки (делится на 3, как и должно быть!). Пусть лист бумаги стоил x копеек, а конверт — y копеек. Тогда $51+120+12x+3y=192$, откуда $12x+3y=21$, и $4x+y=7$. Единственное решение этого уравнения в натуральных числах — это $x=1$ и $y=3$ т. е. лист бумаги стоил одну копейку, а конверт — 3 копейки.

Задача о мармеладе

Разумеется, бессмысленно отвешивать 25 г порциями по 4 г — такая точность для торговых весов заведомо недостижима. С другой стороны, из слов буфетчицы следует, что будь у нее гиря в 25 г — и она смогла бы взвесить требуемое. Поэтому надо найти какие-то предметы общим весом 25 г. Для этого можно, например, использовать медную мелочь, имеющуюся у буфетчицы — у нее-то наверняка наберется 25 копеек медью! В крайнем случае школьник добавил бы свои 4 копейки.

Другой способ основан на словах буфетчицы о том, что у нее имеется гиря весом 50 г. Пусть она взвесит 50 г мармелада, а затем разложит их на две чашки весов, чтобы они уравновесились. Тогда на каждой чашке будет как раз 25 г мармелада.

По-видимому, возможны и другие способы.

Теперь насчет несоответствия условия сегодняшнему дню. Во-первых, чашечные весы без стрелок в школьных буфетах практически не встречаются, во-вторых, если 25 г мармелада стоят 4 копейки, то 1 кг — всего лишь 1 рубль 60 копеек. Теперь такой дешевый мармелад можно встретить только в старых кинофильмах.

Кроссворд «КВАНТ»

Наверное, никого из вас не миновали ошибки на уроках. Порой они, помимо неприятных эмоций вам, доставляли много радости братьям по классу. Уж очень забавные оговорки встречаются! Попробуйте решить кроссворд, составленный из ответов моих учеников на уроках физики. Я назвал его «КВАНТ» — «Кроссворд, Включающий Абсолютно Новую Терминологию». Жаль только, кривоватый получился.

Итак, только цитаты. На месте многоточий — существительные в единственном числе именительного падежа.

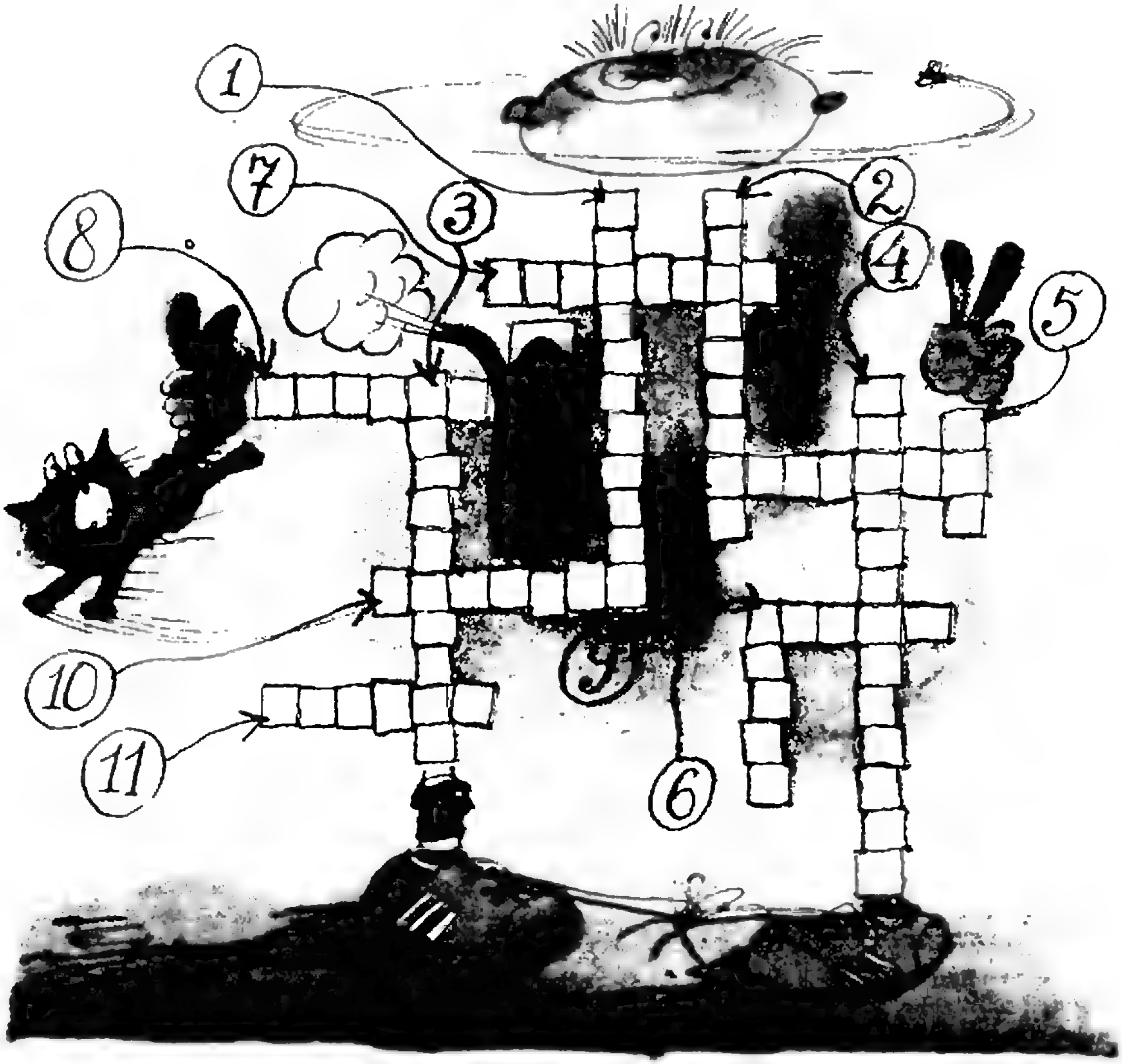
По вертикали:

1. «...— явление, когда луч искривляется по прямой». 2. «...— движение, при котором тело имеет максимальную скорость там, где оно остановится». 3. «... имеет 3 контакта: для тока, напряжения и усилительный». 4. «...— прибор, преобразующий силу тока в напряжение». 5. «...— это воздух, в котором очень много воды». 6. «...— это место, где параллельные лучи останавливаются».

По горизонтали:

6. «...— часть света, окруженная воздухом». 7. «...— это маленький организм, живущий в воде». 8. «Спутник не падает на Землю, потому что его держит ...». 9. «...— кривая, по которой будет подниматься поршень, если газ нагревать». 10. «...— явление, когда вода испаряется не наружу, а внутрь». 11. «...— это единица измерения ядерных сил».

Б. Корсунский



Варианты вступительных экзаменов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{4\cos 2x-2\sin 2x}=2\cos x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(1-3x/2)}{\log_2(2x)}\geqslant 1.$$

3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенствами

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4x-4y-6,\\ x\geqslant 1.\end{cases}$$

4. Из вершины тупого угла A треугольника ABC опущена высота AD. Из точки D радиусом, равным AD, описана окружность, пересекающая стороны треугольника AB и AC в точках M и N соответственно. Вычислите длину стороны AC, если заданы длины отрезков $AB=c$, $AM=n$ и $AN=m$.

5. Найдите все пары чисел p и q, при которых неравенство

$$|x^2+px+q|>2$$

не имеет решений на отрезке $[1;\ 5]$.

6. В основании призмы лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $\sqrt{3}$. Боковые ребра AD, BE, CF перпендикулярны основанию. Сфера радиуса $7/2$ касается плоскости ABC и продолжений отрезков AE, BF, CD за точки A, B и C соответственно. Найдите длину боковых ребер призмы.

Вариант 2
(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x+4}+x-2=0.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right)=1.$$

3. Решите неравенство

$$49^{\log_x 5}-7^{\log_x 5}-2\geqslant 0.$$

4. Три круга с центрами в точках P, Q и R попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Известно, что величина угла PQR равна $2\arcsin\frac{1}{3}$, а сумма радиусов всех трех кругов равна $12\sqrt{2}$. Какую наибольшую длину может иметь окружность, проходящая через точки A, B и C?

5. Проверьте справедливость неравенства $y\leqslant 3{,}17$, где y — наименьшее на интервале $(0;\ 1)$ значение функции

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+0{,}003)^{0.45}}+\frac{3}{(1-x)^{0.45}}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\left|\frac{1}{(x+0{,}003)^{0.45}}-\frac{3}{(1-x)^{0.45}}\right|.$$

6. Сфера радиуса R касается всех граней восьмигранника. Две грани — основания — расположены в плоскостях α и β, а остальные шесть граней — боковые грани — представляют собой или равные между собой трапеции, или равные между собой равнобедренные треугольники. Боковые грани таковы, что каждая боковая сторона треугольника является одновременно боковой стороной трапеции, а каждая боковая сторона трапеции является одновременно либо боковой стороной другой трапеции, либо боковой стороной одного из треугольников. Основания всех трапеций, имеющие длину $\sqrt{13}$, расположены в плоскости β и образуют многоугольник площади 12, а все другие основания трапеций и все основания треугольников расположены в плоскости α. Площадь поверхности сферы относится к суммарной площади боковых граней как π относится к 5. Известно, что $3<R<4$. Найдите R.

Вариант 3
(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$8-7\sin 2x=12\sin^2 x.$$

2. В конус вписан шар. Площадь поверхности шара равна площади основания конуса. Найдите угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

3. Решите неравенство

$$\log_{49}(x+3)-\log_7(x+2)<0.$$

4. В треугольнике ABC угол C — тупой, D — точка пересечения прямой DB, перпендикулярной к AB, и прямой DC, перпендикулярной к AC. Высота треугольника ADC, проведенная из вершины C, пересекает AB в точке M. Известно, что $AM=a$, $MB=b$. Найдите AC.

5. При каких значениях a все корни уравнения

$$3ax^2+(3a^3-12a^2-1)x-a(a-4)=0$$

удовлетворяют условию $|x|<1$?

6. В основании пирамиды $TABCD$ лежит трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AD/BC=2$). Через вершину T пирамиды проведена плоскость, параллельная прямой BC и пересекающая отрезок AB в точке M такой, что $AM/MB=2$. Площадь получившегося сечения равна S, а расстояние от ребра BC до плоскости сечения равно d. Найдите

1) в каком отношении плоскость сечения делит объем пирамиды,

2) объем пирамиды.

Вариант 4
(химический факультет)

1. Найдите максимум и минимум функции

$$f(x)=\frac{3x+1}{(3x+1)^2+1}.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}>\left(\frac{1}{4}\right)^{|x+1|}.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{2x-1}+\sqrt{y+3}=3,\\ 2xy-y+6x-3=4.\end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$\cos^4 x=\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos^2 x\cos 8x.$$

5. Две окружности разных радиусов касаются в точке A одной и той же прямой и расположены по разные стороны от нее. Отрезок AB — диаметр меньшей окружности. Из точки B проведены две прямые, касающиеся большей окружности в точках M и N. Прямая, проходящая через точки M и A, пересекает меньшую окружность в точке K. Известно, что длина отрезка MK равна $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, а угол BMA равен 15°. Найдите площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных BM, BN и той дугой MN большей окружности, которая не содержит точку A.

Вариант 5
(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$4^{\sqrt{x}+1,5}-13\cdot 2^{\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}}+20=0.$$

2. Решите уравнение

$$\sin 2x+\sin 3x+\cos 5x=1.$$

3. Время, затрачиваемое велосипедистом на прохождение каждого очередного километра пути, на одну и ту же величину больше, чем время, затраченное им на прохождение предыдущего километра. Известно, что на прохождение второго и четвертого километров после старта он затратил в сумме 3 мин 20 с. За какое время велосипедист проехал первые 5 км после старта?

4. Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны соответственно 8 и 6. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении $AO:OC=3:2$. Найдите площадь треугольника OEC.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}z\cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0,\\ x^2+(y-1)^2+z^2=a+2x,\\ (x+y+a\sin^2 z)\left((1-a)\ln(1-xy)+1\right)=0\end{cases}$$

имеет единстсвенное решение.

Вариант 6
(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$25^x+24\cdot 5^{x-1}-1=0.$$

2. Три сенокосилки имеют разную производительность. Первая и вторая сенокосилки, работая вместе, скашивают некоторое поле за 10 часов, а вторая и третья, работая вместе, скашивают это же поле за 8 часов. Если бы работали три сенокосилки, то они скосили бы это поле за 5 часов. За какое время скосит это поле каждая из сенокосилок?

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\sin x=|\cos x|.$$

4. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 4, длина основания BC равна 3, длины сторон AB и CD равны. Точки M и N лежат на диагонали BD, причем точка M расположена между точками B и N, а отрезки AM и CN перпендикулярны диагонали BD. Найдите длину отрезка CN, если $BM/DN=2/3$.

5. Для каждого отрицательного числа a найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{1}{3}(x-a)^3-\frac{1}{2}(x-a)^2$$

на промежутке $0\leqslant x\leqslant 1$.

Вариант 7
(геологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin 7x\cos x=\sin 6x.$$

2. Решите уравнение

$$|x^2-2x-1|-x+1=0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2}\geqslant\frac{2}{4-\sqrt{x}}.$$

4. Решите уравнение

$$3^{2(\log_3 x)^2}+1=4\cdot 3^{(\log_3 x)^2}.$$

5. Четыре точки окружности следуют в порядке A, B, C, D. Продолжения хорды AB за точку B и хорды CD за точку C пересекаются в точке E, причем угол AED равен 60°. Угол ABD в три раза больше угла BAC. Докажите, что AD — диаметр окружности.

6. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$|x+2|+a|x-4|=6.$$

Вариант 8
(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\cos^2 x-7\cos x=2\sin^2 x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{4}\log_2(x-2)-\frac{1}{2}\leqslant\log_{1/4}\sqrt{x-5}.$$

3. Числа a_1, a_2, a_3 образуют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел (в том же порядке) составляют геометрическую прогрессию. Найдите a_1, a_2, a_3, если известно, что $a_1+a_2+a_3=21$.

4. В параллелограмме $ABCD$ на диагонали AC взята точка E, где расстояние AE составляет треть длины AC, а на стороне AD взята точка F, где расстояние AF составляет четверть длины AD. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь четырехугольника $ABGE$, где G — точка пересечения прямой FE со стороной BC, равна 8.

5. Найдите все действительные значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}8xy-25=0,\\ x^2=y+2x\end{cases}$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $x^2+y^2\leqslant a^2$.

Вариант 9
(экономический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sin(3\pi\cdot 2^x)=\cos(\pi\cdot 2^x)-\sin(\pi\cdot 2^x).$$

2. Решите неравенство

$$\log_{1/7}\log_3\frac{|-x+1|+|x+1|}{2x+1}\geqslant 0.$$

3. Окружность, диаметр которой равен $\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины A и B прямоугольника $ABCD$. Длина касательной, проведенной из точки C к окружности, равна 3, $AB=1$. Найдите все возможные значения, которые может принимать длина стороны BC.

4. Определите наименьшее значение функции

$$F(r)=(r-2)(4+(r-1)(r-4))(r-3),\ r\in\mathbf{R}.$$

5. Найдите площадь плоской фигуры, состоящей из точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$(x^2+y^2-x-y)(x^2+y^2-1)\leqslant 0.$$

6. Найдите все значения параметра q, при которых уравнение

$$\sin^2 x+(q-2)^2\sin x+q(q-2)(q-3)=0$$

имеет на отрезке $[0;\ 2\pi]$ ровно три корня.

Вариант 10
(факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$\lg(x+4)>-2\lg\frac{1}{2-x}.$$

2. Решите уравнение

$$(\cos x-1)(\sin x-\frac{1}{2}\cos 2x-1)=\sin^2 x.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases}\log_3 x-2^y+y=3,\\ y\cdot 2^y+2^y\cdot\log_3 x=4.\end{cases}$$

4. Точки K, L, M делят стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ в отношении: $AK:BK=CL:BL=CM:DM=1:2$. Радиус окружности, описанной около треугольника KLM, равен $5/2$, $KL=4$, $LM=3$. Какова площадь $ABCD$, если известно, что $KM<KL$?

5. При каждом значении параметра

$a \geqslant \frac{1}{2\pi}$ найдите все корни уравнения

$$\cos\left(\frac{2x+a}{2x^2+2ax+5a^2/2}\right)=\cos\left(\frac{2x-a}{2x^2-2ax+5a^2/2}\right).$$

Вариант 11

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3x-5}-\sqrt{4-x}=1.$$

2. В равнобедренную трапецию с боковой стороной, равной 9, вписана окружность радиусом 4. Найдите площадь трапеции.

3. Решите уравнение

$$\cos^2(45^\circ+x)=\cos^2(45^\circ-x)+\sqrt{5}\cos x.$$

4. При перемножении двух натуральных чисел, разность которых равна 10, была допущена ошибка: цифра сотен в произведении была увеличена на 2. При делении полученного (неверного) произведения на меньший из множителей получилось в частном 50 и в остатке 25. Найдите множители.

5. Решите неравенство

$$\log_{\log_{1/2}x}(\log_{1/7}x)>0.$$

6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=1,\\ y-|x|=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Вариант 12

(филологический факультет)

1. Представьте число 1991 в виде произведения простых чисел.

2. Решите уравнение

$$\log_2(5\cdot 2^x+3)=2x+1.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{|x+1|+|x-2|}{x+199}<1.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{2}{\pi}\sin x+\cos 19\pi=\cos x.$$

5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD=4$, а $BC=3$.

6. Найдите все значения p, при которых неравенство

$$\log_{(x-p)}x^2<2$$

выполняется хотя бы для одного числа x, такого что $|x|<0{,}01$.

Физика

Задачи устного экзамена

Механико-математический факультет

1. На нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок, подвешены два груза, массы которых $m_1=100$ г и $m_2=50$ г (рис. 1). В заторможенном состоянии (когда грузы неподвижны) блок уравновешен на рычажных весах. На какую величину нужно изменить массу гирь на чашке, чтобы при освобождении блока (когда грузы придут в движение) сохранить равновесие весов?

2. Начальное положение кабины лифта $Л$ и противовеса $П$ изображено на рисунке 2. На какую величину изменится потенциальная энергия системы при перемещении кабины вверх на расстояние $h=10$ м, если начальная разность уровней противовеса и кабины $H=15$ м, масса кабины $M=1$ т, масса противовеса $m=0{,}5$ т, а масса единицы длины троса, соединяющего кабину с противовесом, $\mu=10$ кг/м?

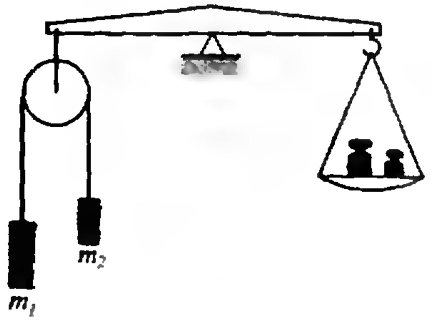


Рис. 1.

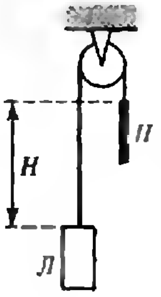


Рис. 2.

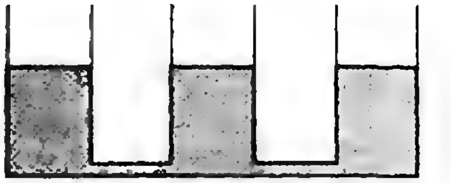


Рис. 3.

Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.

3. В трех одинаковых сообщающихся сосудах находится ртуть (рис. 3). В левый сосуд налили слой воды высотой $h_1=180$ мм, а в правый — высотой $h_3=228$ мм. На сколько сместится уровень ртути в среднем сосуде, если известно, что ртуть из левого и правого сосудов не вытесняется водой полностью? Плотность ртути $\rho=13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3.

4. Вертикально расположенный замкнутый цилиндрический сосуд высотой $H=50$ см разделен подвижным поршнем весом $P=110$ Н на две части, в каждой из которых содержится по $\nu=0{,}0255$ моля идеального газа. При какой температуре расстояние между поршнем и дном сосуда будет равно $h=20$ см? При расчетах толщиной поршня пренебречь, универсальную газовую постоянную принять равной $R=8\,{}^1/_3$ Дж/(моль · К).

5. В баллоне объемом $V=10$ л содержится водород при температуре $t=20$ °С под давлением $p=10^7$ Па. Какая масса водорода была выпущена из баллона, если при полном сгорании оставшегося газа образовалось $m=50$ г воды? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К), молярная масса водорода $M_{H_2}=2$ г/моль, воды $M_{H_2O}=18$ г/моль.

6. Тепловая машина с максимально возможным КПД имеет в качестве нагревателя резервуар с кипящей водой при температуре $t_1=100$ °С, а в качестве холодильника — сосуд со льдом при $t_2=0$ °С. Какая масса льда растает при совершении машиной работы $A=10^6$ Дж? Удельная теплота плавления льда $\lambda=334$ кДж/кг.

7. В схеме, показанной на рисунке 4, емкости конденсаторов равны $C_1=1$ мкФ, $C_2=2$ мкФ, $C_3=3$ мкФ, $C_4=4$ мкФ. Напряжение между точками A и B составляет $U=100$ В. Найдите напряжение на конденсаторе емкостью C_4, если до подключения напряжения U конденсаторы были не заряжены.

8. Параллельные проводящие шины, расположенные в горизонтальной плоскости, замкнуты на резистор сопротивлением R и помещены в постоянное однородное магнитное поле, вектор индукции которого направлен вертикально вниз (рис. 5). По шинам без трения может перемещаться проводник AD, сохраняя постоянно контакт с шинами. Найдите величину и направление силы, которую нужно приложить к проводнику, чтобы он двигался вдоль шин поступательно с постоянной скоростью v. Сопротивлением шин и проводника можно пренебречь. При расчетах положить $R=100$ Ом, $B=2$ Тл, $v=0{,}1$ м/с, $l=20$ см.

9. Отрезок AB, параллельный главной оптической оси собирающей линзы, расположен на расстоянии d от оси так, что его концы удалены от плоскости линзы на расстояния a и b соответственно (рис. 6). Найдите длину изображения отрезка, если фокусное расстояние линзы F и $b>a>F$.

10. Две одинаковые собирающие линзы с фокусными расстояниями F расположены на расстоянии $l=2F$ друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. На главной оптической оси перед первой линзой помещена некоторая точка A так, что луч света, вышедший из нее и прошедший обе линзы, пересекает эту ось в точке B, находящейся за второй линзой. Определите расстояние между точками A и B.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Однородный стержень лежит горизонтально на двух опорах. Расстояние от центра стержня до ближайшей опоры $s=0{,}3$ м. Найдите расстояние между опорами, если известно, что силы, действующие на стержень со стороны опор, отличаются друг от друга на величину, равную $\alpha=1/5$ веса стержня.

2. Деревянная линейка выдвинута за край стола на $\alpha={}^1/_4$ часть своей длины. При этом она не опрокидывается, если на ее свешивающийся конец положить груз массой не более $m_1=250$ г. На какую часть длины можно выдвинуть за край стола эту линейку, если на ее свешивающийся конец положен груз массой $m_2=125$ г?

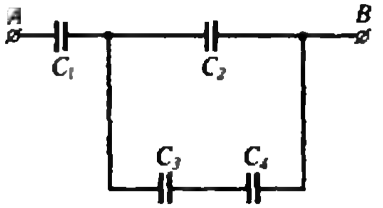


Рис. 4.

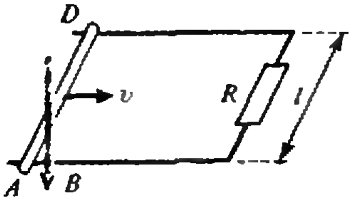


Рис. 5.

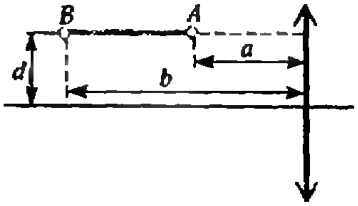


Рис. 6.

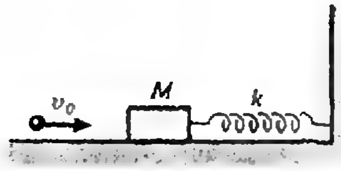


Рис. 7.

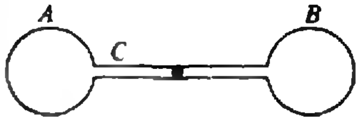


Рис. 8.

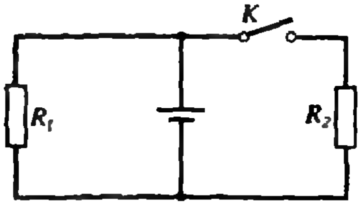


Рис. 9.

3. На горизонтальной плоскости лежит куб массой $M=2{,}5$ кг. В куб попадает горизонтально летящая пуля массой $m=10$ г и застревает в нем. Определите начальную скорость пули, если известно, что после попадания пули куб переместился поступательно на расстояние $l=1$ м. Коэффициент трения куба о плоскость $\mu=0{,}2$. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.

4. На гладком столе покоится брусок массой $M=20$ г, прикрепленный пружиной жесткостью $k=50$ Н/м к стене (рис. 7). В брусок ударяется шарик массой $m=10$ г, движущийся по столу со скоростью, равной $v_0=30$ м/с и направленной вдоль пружины. Считая соударение шарика и бруска упругим, найдите амплитуду колебаний бруска после удара.

5. Цилиндрическая пробирка с грузиком, имеющая площадь поперечного сечения $S=1$ см^2, плавает в воде вертикально, причем из воды высовывается часть пробирки высотой $h=5$ см. Какова минимальная плотность жидкости, в которой пробирка с грузиком не утонет, если суммарная масса пробирки и грузика $M=20$ г? Плотность воды $\rho_0=10^3$ кг/м^3.

6. На горизонтальном участке пути длиной $L=3$ км скорость поезда увеличилась от $v_1=36$ км/ч до $v_2=72$ км/ч. Какое количество топлива израсходовал двигатель локомотива на этом участке, если суммарная масса поезда и локомотива $M=1000$ т, коэффициент трения $\mu=0{,}005$, удельная теплота сгорания топлива $q=42$ МДж/кг, коэффициент полезного действия двигателя $\eta=30\ \%$. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.

7. Два одинаковых сосуда A и B соединены горизонтальной трубкой C, в которой находится капелька ртути (рис. 8). При температуре $T=300$ К капелька находится посередине трубки, причем объем воздуха в каждом сосуде и части трубки до капельки ртути равен $V=200$ см^3. На какое расстояние переместится капелька, если воздух с одной стороны от нее нагреть на $\Delta T=3$ К, а с другой — на столько же охладить? Площадь поперечного сечения трубки $S=20$ мм^2. Расширением стенок сосудов и трубки можно пренебречь.

8. В замкнутом сосуде к верхней стенке на пружине жесткостью $k=4$ Н/м подвешена сфера объемом $V=2$ л. На какую высоту поднимется сфера, если при постоянной температуре $t=17$ °С давление воздуха в сосуде повысить от $p_1=100$ кПа до $p_2=500$ кПа? Молярная масса воздуха $\mathrm{M}=29$ г/моль. Универсальную газовую постоянную принять равной $R=8\,{}^1/_3$ Дж/(моль · К), ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

9. Сосуд содержит $m=1{,}28$ г гелия при температуре $t=27$ °С. Во сколько раз изменится средняя квадратичная скорость молекул гелия, если его адиабатически сжать, совершив работу $A=252$ Дж? Молярная масса гелия $\mathrm{M}=4$ г/моль. Универсальную газовую постоянную принять равной $R=8\,{}^1/_3$ Дж/(моль · К).

10. В схеме, показанной на рисунке 9, резисторы имеют сопротивления $R_1=1$ Ом и $R_2=2$ Ом. Определите внутреннее сопротивление батареи, если известно, что при разомкнутом ключе K через резистор сопротивлением R_1 протекает ток $I_1=2{,}8$ А, а при замкнутом ключе K через резистор сопротивлением R_2 протекает ток $I_2=1$ А.

Химический факультет

1. Тонкая однородная доска лежит, касаясь средней точкой поверхности полусферы радиусом $R=2$ м с коэффициентом трения $\mu=\sqrt{3}$ (рис. 10). При какой наименьшей высоте h центра тяжести доски (от горизонтального основания полусферы) доска не будет соскальзывать с полусферы?

2. На тележке закреплен кронштейн, к которому на невесомой и нерастяжимой нити подвешен маленький шарик массой $m=0{,}02$ кг (рис. 11). Тележка, двигавшаяся горизонтально с постоянной скоростью $v=0{,}7$ м/с, внезапно останавливается, наткнувшись на препятствие. Найдите натяжение нити при прохождении маятником положения равновесия. Период малых колебаний $T=1{,}2$ с. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. Железный шарик, двигающийся со скоростью $v=40$ м/с, ударяется об абсолютно гладкую плоскость, налетая на нее

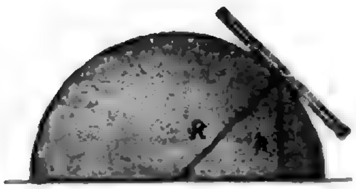


Рис. 10.

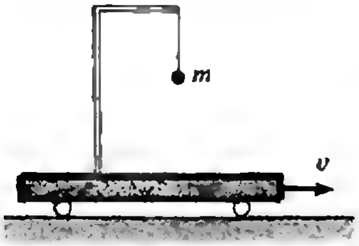


Рис. 11.

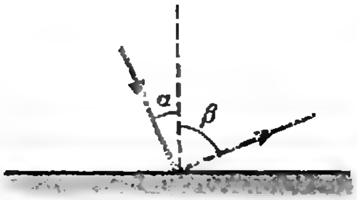


Рис. 12.

под углом $\alpha=30°$ (рис. 12). Найдите угол β, под которым шарик отразится от плоскости, если при ударе он нагрелся на $\Delta T=0{,}85$ К. Удельная теплоемкость железа $c=0{,}46\cdot10^3$ Дж/(кг · К). Считайте, что выделяющееся тепло пошло только на нагревание шарика.

4. В теплоизолированный сосуд, содержащий $m_1=500$ г воды при температуре $t_1=10$ °С, помещено $m_2=100$ г льда, охлажденного до $t_2=-10$ °С. Какая температура установится в сосуде? Удельная теплоемкость воды $c_1=4200$ Дж/(кг · К), удельная теплоемкость льда $c_2=2100$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг. Потерями тепла можно пренебречь.

5. Результатом работы тепловой машины был подъем груза массой $m=10$ кг на высоту $h=20$ м. Отношение количества теплоты, полученного за один цикл от нагревателя, к температуре нагревателя $Q_н/T_н=200$ Дж/К, разность температур нагревателя и холодильника $T_н-T_х=125$ К. Сколько циклов было совершено за время подъема груза? Считайте, что вся механическая работа машины затрачена на подъем груза, а тепловая машина — идеальная.

6. Электроны влетают со скоростью $v=4\cdot10^6$ м/с в однородное электрическое поле между обкладками плоского конденсатора (рис. 13). Длина обкладок конденсатора $L=18{,}2$ см, расстояние между ними $d=1$ см, напряжение на конденсаторе $U=0{,}1$ В. При каком угле α между вектором скорости электронов и плоскостями обкладок кинетическая энергия электронов в результате пролета через конденсатор не изменяется? Величина заряда электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

7. Какой должна быть величина сопротивления R_2, чтобы разность потенциалов между точками A и B была равна нулю (рис. 14)? Величины остальных сопротивлений равны: $R_1=10$ Ом, $R_3=20$ Ом, $R_4=40$ Ом, $R_5=50$ Ом.

8. В однородном магнитном поле находится замкнутая обмотка, состоящая из $N=1000$ витков квадратной формы. Направление линий поля перпендикулярно плоскости витков. Индукция магнитного поля изменяется на $\Delta B=2\cdot10^{-2}$ Тл за время $\Delta t=0{,}1$ с, в результате чего в обмотке выделяется количество теплоты $Q=0{,}1$ Дж. Поперечное сечение провода обмотки $S=1\cdot10^{-6}$ м^2, удельное сопротивление $\rho=10^{-7}$ Ом · м. Найдите размер витка (сторону квадрата).

9. В непрозрачном экране вырезано небольшое круглое отверстие (рис. 15). Против центра отверстия на расстоянии $l=0{,}4$ м от него помещен точечный источник света S. По другую сторону экрана находится плоское зеркало, причем плоскости зеркала и экрана параллельны. На каком расстоянии x от экрана расположено зеркало, если лучи, отраженные от зеркала, освещают на экране вокруг отверстия кольцо, площадь которого равна площади отверстия?

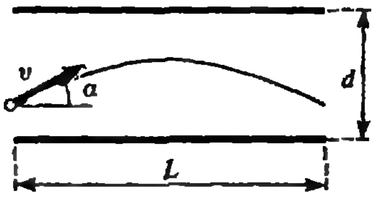


Рис. 13.

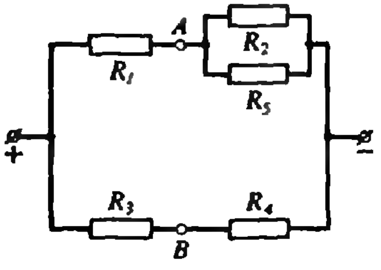


Рис. 14.

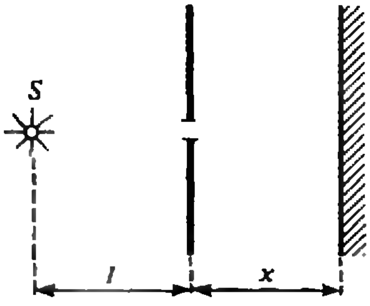


Рис. 15.

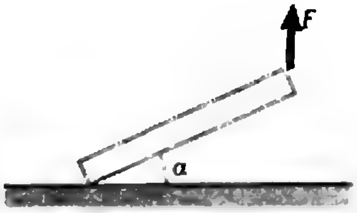


Рис. 16.

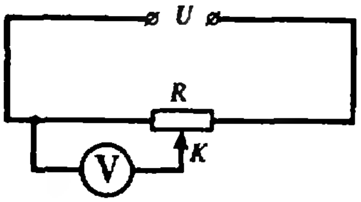


Рис. 17.

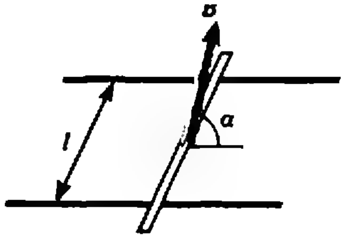


Рис. 18.

10. Действительное изображение светящейся точки получается на расстоянии $f=8$ см от линзы и на $h=2$ см ниже ее главной оптической оси. На каком наименьшем расстоянии перед линзой нужно поставить экран, имеющий форму верхней половины линзы, чтобы изображение точки исчезло? Фокусное расстояние линзы $F=5$ см, ее радиус $R=5$ см.

Географический факультет

1. Тело брошено с поверхности Земли с начальной скоростью $v_0=20$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонтали. Определите перемещение тела за вторую секунду движения. Считайте $g=10$ м/с^2, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

2. Трубу массой $m=300$ кг, диаметром $d=1$ м и длиной $l=2\sqrt{3}$ м, лежащую в горизонтальном положении на поверхности Земли, приподнимают тросом, прикрепленным к одному из концов трубы, причем другой конец трубы в процессе подъема не проскальзывает по поверхности (рис. 16). Какую минимальную работу необходимо совершить для перевода трубы в положение, когда она образует угол $\alpha=60°$ с горизонталью? Считайте $g=10$ м/с^2.

3. Под чашкой рычажных весов подвешен на тонкой нити шарик. Масса уравновешивающих гирек $m_1=50$ г. Когда шарик поместили в воду, масса уравновешивающих гирек стала равной $m_2=30$ г. Определите плотность вещества, из которого сделан шарик, если плотность воды $\rho_0=10^3$ кг/м^3.

4. К потенциометру сопротивлением $R=4$ кОм приложено напряжение $U=110$ В (рис. 17). Каково будет показание вольтметра сопротивлением $R_V=10$ кОм, если подвижный контакт K установить в среднее положение?

5. Электродвигатель, рассчитанный на напряжение $U=120$ В и ток $I=20$ А, установлен на расстоянии $l=150$ м от источника напряжения $U_и=127$ В. Найдите нужное сечение проводов линии «источник — электродвигатель», если провода медные. Удельное сопротивление меди $\rho=0{,}017$ Ом · мм^2/м.

6. Горизонтальные рельсы находятся на расстоянии $l=1$ м друг от друга, на рельсах перпендикулярно к ним лежит перемычка, которая может двигаться вдоль рельсов (рис. 18). Индукция магнитного поля Земли равна $B=5\cdot10^{-5}$ Тл и направлена под углом $\alpha=60°$ к горизонту. Какой минимальный ток необходимо пропустить по перемычке массой $m=0{,}1$ кг, чтобы она начала двигаться по рельсам? Коэффициент трения $\mu=0{,}1$.

7. При подключении первичной обмотки трансформатора к источнику переменного синусоидального напряжения во вторичной обмотке возникает ЭДС $\mathcal{E}_1=16$ В. Если к тому же источнику подключить вторичную обмотку, то в первичной возникает ЭДС $\mathcal{E}_2=4$ В. Найдите напряжение источника. Потери энергии в трансформаторе можно не учитывать.

8. Горизонтальное плоское зеркало движется вертикально вверх с постоянной скоростью $v_1=2$ см/с. Муха ползет по потолку комнаты со скоростью $v_2=3$ см/с. Найдите скорость движения изображения мухи в зеркале.

9. Точечный источник света расположен на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии $d=30$ см от линзы. На экране, расположенном перпендикулярно главной оптической оси на расстоянии $l_1=10$ см от линзы, наблюдается светлое пятно. Размеры пятна не изменяются, если экран располагается на расстоянии $l_2=20$ см от линзы. Найдите фокусное расстояние линзы.

10. Источник света излучает ежесекундно $n=10^{19}$ фотонов. Длина волны излучения $\lambda=4{,}95\cdot10^{-5}$ см. Какую мощность потребляет этот источник, если в энергию света переходит $\eta=10\,\%$ потребляемой энергии? Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с.

Публикацию подготовили
А. Боголюбов, И. Ломов, В. Прошкин,
А. Склянкин, А. Соколихин, С. Чесноков

Живой компьютер?

На обложке — фотография культуры нейронов. До самого последнего времени получить такую культуру не удавалось. И вот — прорыв. Чтобы была понятна суть этого удивительного достижения науки, необходимы некоторые пояснения.

В 1912 году Нобелевскую премию по медицине получил француз А. Каррель, разработавший (в США) технику выращивания тканевых культур. Некоторые его культуры жили в стеклянных чашках по тридцать и более лет. Как ему это удавалось, до сих пор остается загадкой. И вот почему.

Культуры клеток вошли в арсенал научных исследований только после второй мировой войны, когда ученые получили в свое распоряжение «мощные» и дешевые антибиотики, позволяющие бороться с бактериальным заражением («нагноением» культур), которое приводило к гибели клеток. Первыми были получены культуры раковых клеток, которые растут, делятся и размножаются практически в чистом питательном растворе. Обычные же здоровые клетки вывести из состояния «неделения» трудно — для этого требуются специальные добавки к питательной среде. Первой такой добавкой оказалась сыворотка крови теленка. В ней существуют особые белки, получившие название ростовых факторов, которые стимулируют размножение и деление клеток. Со временем ростовых факторов было выделено великое множество — чуть ли не для каждого типа клеток нашего организма обнаружен свой фактор, а то и несколько.

Довольно скоро удалось вырастить культуру эмбриональных нейронов, т. е. «предков» нервных клеток (их получают от зародышей, а также от клеток опухолей нервной системы). Но у этих культур имеется существенный недостаток: они не прошли так называемой дифференцировки, т. е. «созревания» клеток.

Нормальные нервные клетки наотрез «отказывались» делиться и размножаться. Наконец, проблема решена. Основы этому заложили работы итальянки Р. Леви-Монтальчини и ее американского ученика С. Коэна, открывших так называемый нервный ростовой фактор — белок, который резко стимулирует размножение и деление нейронов в культуре. За это достижение в 1986 году исследователи были удостоены Нобелевской премии по медицине.

Через четыре года в журнале «Science» появилось сообщение о получении культуры нейронов, взятых во время нейрохирургической операции у полуторагодовалой девочки. На нейроны подействовали нервным ростовым фактором, в результате чего была получена их дифференцировка. Нейроны разрослись, выпустили многочисленные отростки, которые стали соединяться друг с другом, образуя самую настоящую нейронную сеть, где пульсирует электрический ток.

Ну и что, скажет критически настроенный читатель. Получили еще одну культуру, пусть и весьма «экзотическую» сегодня, о которой мечтали поколения нейробиологов. Что же дальше?

А дальше — новые исследования. Уже через год с помощью этой культуры удалось открыть новый вид нейромедиатора — вещества, которое осуществляет связь между отдельными нейронами. Уникальность заключается в том, что новый «передатчик» нервных сигналов представляет собой молекулу всем знакомой окиси азота. До сих пор наука имела дело с гораздо более сложными молекулами нейромедиаторов.

Получение культуры нейронов, конечно же, имеет огромное значение для науки, исследующей работу нашего мозга. Но не только для нее. Нейронные культуры сулят уже в недалеком будущем огромные выгоды в такой области современной «High technology», как электроника и системы обработки информации.

Современные микросхемы — чипы — имеют один весьма существенный недостаток: они негибки и не обладают творческим потенциалом, они способны работать только по строго заданным программам. К тому же технология производства чипов экологически «агрессивна». Совсем другое дело — нейрональные «чипы», которые смогут приспосабливаться к самым разнообразным требованиям среды. И тогда настанет эра... «живой» электроники?!

И. Лалаянц

Библиотечка фантастики «Кванта»

Мешок

(фантастический рассказ)

У. МОРРИСОН

Сначала они даже и не подозревали о существовании Мешка. Если они и заметили его, когда опустились на астероид, то, вероятно, подумали, что это просто скалистый выступ на голой кремнистой поверхности эллипсоидальной планетки, наибольший диаметр которой, по определению капитана Ганко, составлял около трех миль, а наименьший — около двух. Никому бы не пришло в голову, что скромный предмет, так неожиданно попавший в их руки, вскоре будет признан самой драгоценной находкой в солнечной системе.

Остановка была случайной. Правительственный патрульный корабль потерпел аварию и был вынужден искать места для ремонта, на который требовалось по крайней мере семьдесят часов. К счастью, они располагали запасом воздуха, и рециркуляционная система на корабле работала безукоризненно. Запасы пищи были ограничены, но это мало беспокоило экипаж, так как все знали, что можно затянуть пояса потуже и несколько дней прожить на урезанном пайке. Гораздо хуже обстояло дело с водой: большая часть ее пропала из-за течи в цистернах. В течение последующих пятидесяти часов вода была главной темой их разговоров.

Наконец капитан Ганко сказал:

— Что там говорить, воды не хватит. И нигде поблизости нет ни одной станции снабжения. Остается только радировать и надеяться, что нам навстречу вышлют спасательный корабль с аварийным запасом.

Шлемофон его помощника отозвался уныло:

Перепечатывается по изданию «Библиотека современной фантастики. Том 10» (М.: Молодая гвардия, 1967).

— Будет очень скверно, если мы не найдем друг друга в пространстве, капитан.

Капитан Ганко невесело рассмеялся.

— Конечно, скверно. Нам тогда представится случай выяснить, долго ли мы сможем выдержать без воды.

Некоторое время все молчали. Затем второй помощник сказал:

— Возможно, вода есть где-нибудь здесь, на астероиде, сэр.

— Здесь? Да как она может удержаться здесь при силе тяжести, которой едва хватает, чтобы не улетели скалы? И где она, черт подери?

— Отвечаю на первый вопрос,— отозвался мягкий жидкий голос, казалось, проникавший сквозь ткань скафандров откуда-то сзади.— Она может сохраниться в кристаллическом состоянии. Отвечаю на второй вопрос. Она находится на глубине шести футов, и добыть ее нетрудно.

При первых же словах все обернулись. Но там, откуда, как им казалось, доносился голос, никого не было. Капитан Ганко нахмурился, глаза его угрожающе сузились.

— Полагаю, среди нас нет неумных шутников,— кротко проговорил он.

— Нет,— ответил голос.

— Кто это говорит?

— Я, Изрл.

Тут один из членов экипажа заметил какое-то движение на поверхности огромной скалы. Когда голос смолк, движение прекратилось, но люди уже не спускали глаз с этого места. Так они узнали об Изрле, или Мешке Мудрости, как его чаще называли.

Если бы экипаж не состоял на государственной службе и если бы корабль не принадлежал правительству, капитан Ганко мог бы объявить Мешок своей собственностью или собственностью своих хозяев и вышел бы в отставку сказочно богатым человеком. Но при данных обстоятельствах Мешок перешел в собственность правительства. Его огромное значение было осознано почти сразу же, и Джейк Зиблинг имел основание гордиться, когда кандидатуры более важных и более влиятельных персон были отклонены, и Стражем Мешка назначили его. Зиблинг был коротеньким, плотным человечком, обладавшим чрезмерной склонностью к самокритике. Он выполнил несколько трудных заданий и позволил другим людям присвоить лавры своих успехов. Должность Стража была не для хвастуна, и те, от кого зависело назначение, знали об этом. На сей раз они игнорировали официальные чины и поверхностную репутацию и выбрали человека, которого несколько недолюбливали, но на которого полностью полагались. И это была величайшая дань из когда-либо приносившихся на алтарь честности и способностей.

Мешок, как выяснил Зиблинг, наблюдая его ежедневно, редко изменял форму, в которой люди увидели его впервые — твердый сероватый ком, напоминающий мешок с картошкой. Таким он оставался всегда, и, пока ему не задавали вопросов, в нем не было заметно никаких признаков жизни. Питался он редко: по его словам — раз в тысячелетие, если оставался в покое, и раз в неделю — в периоды напряженной деятельности. Он ел и двигался, вытягивая ложноножку, после чего ложноножка убиралась обратно, и Мешок вновь становился мешком с картошкой.

Вскоре оказалось, что имя «Мешок» было удачным и с другой точки зрения. Ибо Мешок был набит сведениями и — еще больше — мудростью. Вначале многие сомневались в этом: кое-кто так и не уверовал до самого конца, точно так же, как некоторые люди уже через столетия после Колумба продолжали считать, что Земля плоская. Но у тех, кто видел и слышал Мешок, не оставалось никаких сомнений. Они даже были склонны полагать, будто Мешок знает все. Это, конечно, было не так.

Официальная функция Мешка, узаконенная Сенатской комиссией по Межпланетным сообщениям, состояла в том, что он отвечал на вопросы. Первые вопросы, как мы видели, были заданы случайно капитаном Ганко.

Позже вопросы задавались намеренно, но цели их были сами по себе беспорядочны и случайны, и кое-кому из политиков удалось основательно обогатиться, прежде чем правительство положило конец утечке информации и упорядочило процесс задавания вопросов и получения ответов.

Время бесед с Мешком распределили на месяцы вперед и распродали неслыханно дешево, если принять во внимание прибыльность дел, ради которых эти беседы велись — всего по сто тысяч за минуту. Именно эта торговля временем привела к первой крупной склоке в правительстве.

Внезапно Мешок оказался не в состоянии ответить на вопрос, который для мозга его мощности должен был бы казаться весьма простым, и это вызвало второй взрыв такой силы, что его можно было бы назвать кризисом. Сто двадцать вопрошающих, каждый из которых уже уплатил свои сто тысяч, подняли вой, слышный на всех планетах. Началось официальное расследование, на котором Зиблинга подвергли допросу и которое обнажило перед публикой все склоки и противоречия внутри правительства.

Зиблинг оставил Мешок на попечение своего помощника, и теперь на заседании Сенатской комиссии он неловко поеживался перед наведенными на него кинокамерами. Допрос вел сенатор Хорриган — грубый, напыщенный, крикливый политикан.

— Вашей обязанностью является поддержание Мешка в состоянии, позволяющем получать ответы на вопросы, не так ли, мистер Зиблинг? — осведомился сенатор Хорриган.

— Да, сэр.

— Тогда почему Мешок оказался неспособным ответить на вопросы, заданные ему клиентами? Эти джентльмены честно заплатили свои деньги — по сто тысяч каждый. Насколько я понимаю, пришлось возместить им эту сумму. Это означает, что правительство потеряло... э, одну минуту... сто двадцать на сто тысяч... Сто двадцать миллионов! — раскатисто провозгласил он.

— Двенадцать миллионов, сенатор,— торопливо прошептал секретарь. Поправка принята не была, и число сто двадцать миллионов в должное время украсило газетные заголовки.

Зиблинг сказал:

— Как мы установили, сенатор, Мешок оказался неспособным отвечать на вопросы потому, что он не машина, а живое существо. Он выдохся. Ведь ему задавали вопросы двадцать четыре часа в сутки.

— Кто дал разрешение на такой идиотский порядок?! — загремел сенатор Хорриган.

— Вы сами, сенатор,— быстро сказал Зиблинг.— Порядок был установлен законом, внесенным вами и одобренным вашим комитетом.

Поскольку сенатор Хорриган не имел ни малейшего представления об этом законе, хотя и подписался под ним, его нельзя было, конечно, считать ответственным за те или иные положения указанного документа. Но в глазах общественного мнения такая ситуация подрывала его реноме. С этого момента он стал заклятым врагом Зиблинга.

— Следовательно, Мешок не отвечал на вопросы в течение целых двух часов?

— Да, сэр. Он возобновил ответы только после отдыха.

— И отвечал уже без каких-либо затруднений?

— Нет, сэр. Его ответы замедлились. Последующие клиенты жаловались, что у них мошеннически вымогают деньги. Но, поскольку ответы все же давались, мы не считались с этими жалобами, и финансовое управление отказало клиентам в возмещении убытков.

— Считаете ли вы, что обман клиентов, уплативших за свое время, честное дело?

— Это меня не касается, сенатор,— ответил Зиблинг, справившийся к этому моменту со своими нервами.— Я просто слежу за выполнением законов. Вопрос о честности я предоставлю разрешать вам. Полагаю, что в этом отношении вы безукоризненны.

Присутствующие рассмеялись, а

сенатор Хорриган вспыхнул. Он был непопулярен настолько, насколько может быть непопулярен политик, пока он еще остается политиком. Его не любили даже члены его партии, и среди смеявшихся были некоторые из его лучших политических друзей. Он решил изменить ход допроса.

— Правда ли, мистер Зиблинг, что вы часто не допускали клиентов, предъявлявших вам расписки в уплате необходимой суммы?

— Это так, сэр. Но...

— Вы признаете это?

— Дело здесь вовсе не в том, признаю я это или нет, сенатор. Я только хочу сказать...

— Не важно, что вы хотите сказать. Важно то, что вы уже сказали. Вы обманывали людей, уплативших деньги!

— Это неправда, сэр. Им давалось время позже. Причиной моего отказа дать им разрешение на немедленную консультацию с Мешком было то, что это время уже заранее было зарезервировано Управлением вооруженных сил. У них ведутся важные исследования и возникли кое-какие вопросы. Вы же знаете, что относительно порядка очередности в этом случае мнения разделились. Поэтому, когда возникает вопрос о том, кому идти первым, я никогда не беру ответственности на себя. Я всегда консультируюсь с правительственным советником.

— Таким образом, вы отказываетесь выносить собственное решение?

— Моя обязанность, сенатор, состоит в том, чтобы следить за самочувствием Мешка. Я не касаюсь политических вопросов. За три дня до того, как я покинул астероид, у нас было немного свободного времени — один из клиентов, уже уплативший деньги, задержался из-за аварии,— и тогда я задал Мешку вопрос...

— И вы, конечно, использовали это время в своих собственных интересах?

— Нет, сэр. Я спросил Мешок о наиболее эффективном режиме его работы. Из осторожности — я знал, что моему слову могут и не поверить,— я произвел звукозапись. Если желаете, сенатор, я могу продемонстрировать здесь эту звукозапись.

Сенатор Хорриган хрюкнул и махнул рукой.

— Продолжайте.

— Мешок ответил, что ему требуется два часа полного отдыха из каждых двадцати плюс добавочный час на то, что он называет развлечением. Под этим он подразумевает беседу с кем-нибудь, кто будет задавать, как он выражается, разумные вопросы и не станет торопить с ответами.

— И вы предлагаете, чтобы правительство тратило три часа из каждых двадцати — сто восемьдесят миллионов наличными?!

— Восемнадцать миллионов,— прошептал секретарь.

— Это время тратится не зря. Если Мешок переутомится, он преждевременно погибнет.

— Это вы так полагаете?

— Нет, сэр, это сказал Мешок.

Тут сенатор Хорриган пустился в разговоры о необходимости разоблачения преступных планов, и Зиблинга освободили от дальнейшего допроса. Были вызваны другие свидетели, но в конце концов Сенатская комиссия так и не смогла прийти к сколько-нибудь определенному решению, и было внесено предложение привлечь к расследованию сам Мешок.

Поскольку, однако, Мешок не мог явиться в Сенат, Сенату пришлось явиться к Мешку. Комитет семи не мог скрыть некоторого беспокойства, когда корабль затормозил и протянул причальные крючья к поверхности астероида. Каждому из членов Комитета уже приходилось путешествовать в пространстве, но раньше пунктами назначения были цивилизованные центры, и сенаторам, по-видимому, не улыбалась перспектива высадки на этой лишенной воздуха и света скалистой глыбе.

Представители телевизионных компаний были тут как тут. Они высадились и установили свои аппараты еще до того, как сенаторы сделали первые робкие шаги из безопасных кабин корабля.

Зиблинг отметил с усмешкой, что в

этой несколько пугающей обстановке, вдали от родины, сенаторы были гораздо менее самоуверенны. Ему предстояло играть роль доброжелательного экскурсовода, и он с удовольствием принялся за это дело.

— Видите ли, джентльмены,— сказал он почтительно,— по совету Мешка было решено обезопасить его от возможной угрозы со стороны метеоритов. Именно метеориты уничтожили целиком эту странную расу, и только по счастливой случайности последний ее представитель избег этой участи. Поэтому мы построили непробиваемый купол-укрытие, и теперь Мешок живет под его защитой. Клиенты консультируются с ним, используя телевизионную и телефонную связь, что почти так же удобно, как и личная беседа.

Сенатор Хорриган поспешил вцепиться в самый существенный пункт этого сообщения.

— Вы имеете в виду, что Мешок находится в безопасности, а мы подставлены под удары метеоритов?

— Разумеется, сенатор. Мешок — единственный в своем роде. Людей, даже сенаторов, много. Их всегда можно заменить путем выборов.

Сенатор позеленел от страха.

— Я думаю, это оскорбление — считать, что правительство не заботится о безопасности и здоровье своих служащих.

— Я тоже так думаю. Я живу здесь круглый год.— И Зиблинг добавил мягко: — Не желаете ли вы, джентльмены, взглянуть на Мешок?

Джентльмены уставились на телевизионный экран и увидели Мешок, который покоился на своем сиденье, похожий на дерюжный мешок с картофелем, сунутый на трон и забытый там. Он выглядел до такой степени неживым, что всем казалось странным, почему он остается в вертикальном положении и не валится набок. Тем не менее некоторое время сенаторы не могли сдержать чувства благоговейного ужаса, охватившего их. Даже сенатор Хорриган молчал.

Впрочем, это скоро прошло, и он заявил:

— Сэр, мы официальная следственная комиссия межпланетного Сената, и мы прибыли сюда, чтобы задать вам несколько вопросов.

Мешок не обнаружил никаких признаков желания ответить, и сенатор Хорриган, откашлявшись, продолжал:

— Правда ли, сэр, что вы требуете два часа полного отдыха из каждых двадцати часов и один час на развлечения, или — я, пожалуй, выражусь более точно — на успокоение?

— Это правда.

Хорриган ждал продолжения, но Мешок не в пример сенаторам не стал вдаваться в подробности. Один из членов Комитета спросил:

— Где же вы найдете индивидуума, способного вести разумную беседу со столь мудрым существом, как вы?

— Здесь,— ответил Мешок.

— Необходимо задавать конкретные вопросы, сенатор,— заметил Зиблинг.— Мешок обычно не говорит о том, о чем его не спрашивают специально.

Сенатор Хорриган поспешно сказал:

— Я полагаю, сэр, что когда вы говорите о подыскании интеллекта, достойного беседы с вами, вы имеете в виду одного из членов нашего Комитета, и я уверен, что из всех моих коллег нет ни одного, кто бы не был годен для этой цели. Но все мы не можем растрачивать наше время, необходимое для выполнения множества других обязанностей, и я хотел бы спросить вас, сэр, кто из нас, по вашему мнению, в особенности располагает мудростью, требуемой для этой огромной задачи?

— Никто,— сказал Мешок.

Сенатор Хорриган был смущен. Другой сенатор покраснел и спросил:

— Тогда кто же?

— Зиблинг.

Хорриган забыл о своем благоговении перед Мешком и вскричал:

— Это подстроено заранее!

Второй сенатор осведомился:

— А почему здесь нет других клиентов? Разве время Мешка не продано далеко вперед?

Зиблинг кивнул.

— Мне приказали аннулировать все заранее заказанные консультации, сэр.

— Какой болван это приказал?

— Сенатор Хорриган, сэр.

На том расследование, собственно, и закончилось. Прежде чем комиссия повернулась к выходу, сенатор Хорриган успел задать Мешку отчаянный вопрос:

— Сэр, буду ли я переизбран?

Крики возмущения, вырвавшиеся у его коллег, заглушили ответ Мешка, и только вопрос был услышан отчетливо и разнесен радиостанциями по межпланетному пространству.

Эффект этого происшествия был таков, что сам по себе явился ответом на вопрос сенатора Хорригана. Он не был переизбран. Но еще перед выборами он успел проголосовать против назначения Зиблинга на пост собеседника Мешка. Зиблинг все-таки был назначен четырьмя голосами против трех, и решение комиссии утвердил Сенат. А сенатор Хорриган исчез на время как из жизни Мешка, так и из жизни Зиблинга.

(Окончание следует)

Перевод с английского С. Бережкова

Ответы, указания, решения

анный четырехугольник

Указания к упражнениям

1. Воспользуйтесь теоремой 1.
2. Воспользуйтесь свойством серединного перпендикуляра.

4. Примените формулу $S=\frac{abc}{4R}$ к двум треугольникам на рисунке 2 в статье, сделайте то же самое для другой пары треугольников. Полученные выражения для площади четырехугольника перемножьте и используйте теорему Птолемея.
5. Для доказательства свойства 2 проведите диаметр окружности, концом которого является одна из вершин стороны, расстояние до которой рассматривается в условии.

Указания к задачам

1. Докажите, что биссектрисы углов AED и AKB перпендикулярны.
2. Пусть радиус окружности равен R, а расстояния от точек P, Q и M до точки O (центра окружности) — a, b, c. Докажите, что $QP^2=a^2+b^2-2R^7$, $QM^2=b^2+c^2-2R^2$ и $PM^2=c^2+a^2-2R^2$. Проверьте теперь, что выполняется условие перпендикулярности OQ и PM (аналогично для остальных отрезков): $QP^2-QM^2=OP^2-OM^2$.
3. Докажите, что $\angle ABD=\angle DBM$ и $\angle AKB=\angle ABK$.
4. Докажите, что если L и P — точки пересечения прямых AM и AN с окружностью, то прямые BL, DP и MN пересекаются в одной точке. Заметьте теперь, что BL и DP — диаметры.
5. Воспользуйтесь тем, что произведение длин двух сторон треугольника равно произведению длины диаметра описанной окружности на длину высоты, опущенной на третью сторону.

покажет динамометр?

1. $3F/5$ и $F/5$.
2. 2,8 м.
3. 10 Н.
4. 74,1 м.
5. $1+3{,}6\cdot10^{-7}$ м.

сворд «КВАНТ»

По вертикали: 1. Преломление. 2. Колебание. 3. Транзистор. 4. Трансформатор. 5. Пар. 6. Фокус.

По горизонтали: 6. Фотон. 7. Молекула. 8. Орбита. 9. Изобара. 10. Кипение. 11. Нуклон.

овский государственный ерситет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $2\pi k$; $\pi(8k-1)/4$, $k\in Z$.

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4\cos 2x - 2\sin 2x = 4\cos^2 x, \\ \cos x \geqslant 0. \end{cases}$$

2. $[2/9;\ 1/2)$. Указание. Рассмотрите 2 случая: $0 < 2x < 1$ и $2x > 1$.

3. $1 + 3\pi/2$. Указание. Фигуры представляют собой часть круга с центром в точке $(2;\ -2)$ и радиусом $\sqrt{2}$, расположенную правее прямой $x=1$ (эта прямая пересекает круг в точках $(1;\ -3)$ и $(1;\ -1)$).

4. mc/n. Указание. Продолжим AD до пересечения с окружностью в точке E (рис. 1). Треугольники ABC и ANM подобны. (У них угол A общий, а углы ANM и ABC равны, т. к. $\angle ANM = \angle AEM$ и $\angle AEM = \angle ABD$ как углы в подобных прямоугольных треугольниках BAD и EAM).

5. $p=-6$; $q=7$. Мы наметим 2 решения этой задачи. Прежде всего заметим, что мы должны найти все значения p и q, для которых неравенство $|x^2+px+q| \leqslant 2$ выполняется при всех $x \in [1;\ 5]$.

Указание к первому решению. Пусть $f(x) = x^2+px+q$, $x_b = -p/2$. Пользуясь свойствами монотонности функции f, получаем, что пара $(p;\ q)$ удовлетворяет условию задачи тогда и только тогда, когда она является решением совокупности из трех систем неравенств:

$$\begin{cases} x_b < 1, \\ f(1) \geqslant -2, \\ f(5) \leqslant 2; \end{cases} \begin{cases} x_b > 5, \\ f(1) \leqslant 2, \\ f(5) \geqslant -2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \leqslant x_b \leqslant 5, \\ f(1) \leqslant 2, \\ f(5) \leqslant 2, \\ f(x_b) \geqslant -2. \end{cases}$$

Первые две из этих систем несовместны. Третья имеет единственное решение $p=-6$; $q=7$.

Указание к второму решению. Пусть точки x_1 и x_2 расположены правее (левее) x_b и таковы, что $|x_1-x_2| \geqslant 2$. Тогда $|f(x_1)-f(x_2)| \geqslant 4$, причем равенство здесь возможно, только когда $|x_1-x_2|=2$ и одна из точек x_1 или x_2 совпадает с x_b. Докажем это. Пусть, для определенности, $x_1-x_2 \geqslant 2$ и $x_2 \geqslant x_b = -p/2$. Тогда $f(x_1)-f(x_2) = (x_1-x_2)(x_1+x_2+p) \geqslant 2(2+2x_2+p) \geqslant 4$. Аналогично рассматривается случай, когда точки x_1 и x_2 лежат левее x_b.

Из сказанного следует, что если x_b не совпадает с серединой отрезка $[1;\ 5]$ — точкой $x=3$, на отрезке $[1;\ 5]$ найдутся точки x_1 и x_2, лежащие по одну сторону от x_b и такие, что $|x_1-x_2| \geqslant 2$, т. е. такие, что $|f(x_1)-f(x_2)| > 4$. С другой стороны, должно быть $|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant |f(x_1)| + |f(x_2)| \leqslant 4$.

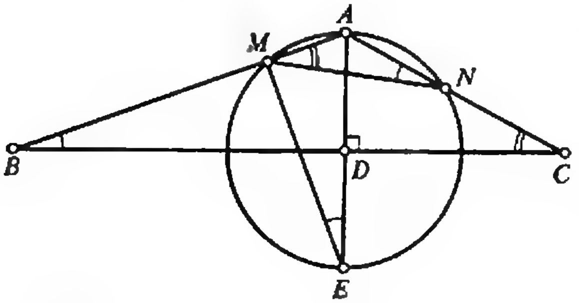


Рис. 1.

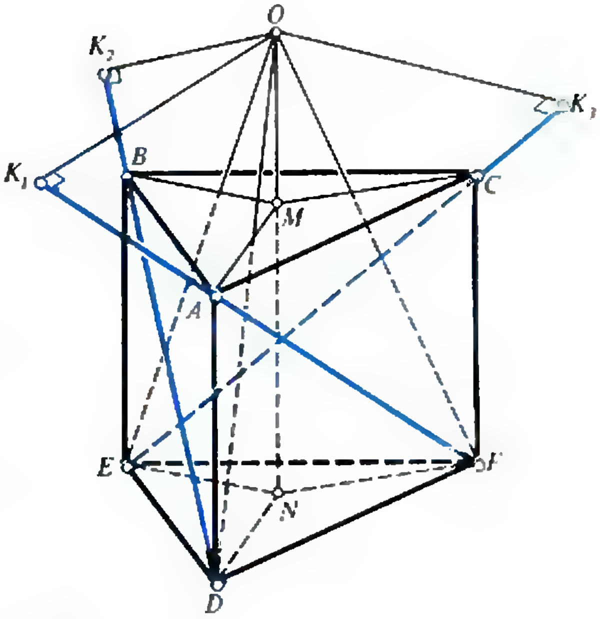


Рис. 2.

Противоречие. Итак, $x_b=3$, т. е. $p=-6$, аналогично получаем, что $f(3)=-2$, т. е. $q=7$.

6. 1. Пусть O — центр сферы, M, K_1, K_2, K_3 — точки касания сферы с плоскостью ABC и с продолжениями диагоналей FA, DB, EC соответственно (рис. 2). Пусть $AM=AK_1=b_1$, $BM=BK_2=b_2$, $CM=CK_3=b_3$. Соединим центр сферы с вершинами D, E и F и обозначим $OD=c_1$, $EO=c_2$, $FO=c_3$ Пусть также диагональ боковой грани равна d, а радиус сферы — R.

Докажем, что M — центр окружности, описанной около треугольника ABC, т. е. что $b_1=b_2=b_3$. Из прямоугольных треугольников OK_1F, OK_2D, OK_3E получаем:

$$\begin{cases} (d+b_1)^2+R^2=c_3^2, \\ (d+b_2)^2+R^2=c_1^2, \\ (d+b_3)^2+R^2=c_2^2. \end{cases}$$

Предположим, что $b_1 < b_2$, тогда из полученной системы следует, что $c_3 < c_1$, но тогда по свойству проекций $b_3 < b_1$ и вновь из системы — $c_2 < c_3$, а по свойству проекций $b_2 < b_3$, т. е. $b_1 < b_2 < b_3 < b_1$, что невозможно. Следовательно, $b_1 \geqslant b_2$, но совершенно аналогично доказывается, что невозможно и неравенство $b_1 > b_2$, поэтому $b_1 = b_2$. Таким образом, $b_1=b_2=b_3$, описанная в условии сфера единственна и $c_1=c_2=c_3$.

Продолжим OM до пересечения в точке N с плоскостью DEF и обозначим через x длину бокового ребра. Имеем: $d=\sqrt{3+x^2}$, $b_1=b_2=b_3=1$. $OF^2=OK_1^2+K_1F^2=(7/2)^2+(1+\sqrt{3+x^2})^2=ON^2+NF^2=(x+7/2)^2+1$. После упрощений получим уравнение $2\sqrt{3+x^2}=7x-3$, откуда $x=1$.

Вариант 2

1. 0.

2. $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in Z$.

3. $(1;\ 5^{\log_2 7}]$.

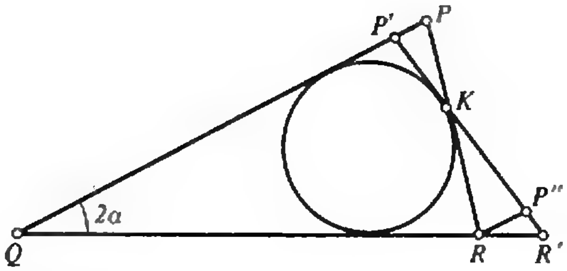


Рис. 3.

4. 6л. **Указание.** Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABC, является вписанной в треугольник PQR. После этого исходная задача сводится к отысканию окружности наибольшего радиуса, вписанной в треугольник с данным углом $2\alpha=2\arcsin{}^1/_3$ и данным полупериметром $p=12\sqrt{2}$. Докажем, что при таких условиях наибольший радиус r будет иметь окружность, вписанная в равнобедренный треугольник PQR, у которого $\angle PQR=2\alpha$, периметр равен $2l$ и $PQ=QR$.

Рассмотрим другой треугольник $P'QR'$ с той же вписанной окружностью. Пусть (для определенности) $R'P'$ пересекает RP в такой точке K, что $RK>PK$ (рис. 3). Проведем $RP''\|QP$. Тогда $\triangle P''RK\sim\triangle KPP'$, причем коэффициент подобия больше 1. Это значит, что $S_{RKR'}>S_{RKP''}>S_{P'PK}$. Поэтому $S_{QP'R'}>S_{PQR}$. Отсюда следует, что периметр треугольника $QP'R'$ больше периметра треугольника PQR ($p=S/r$). В свою очередь, это означает, что радиус окружности, вписанной в треугольник, подобный треугольнику $QP'R'$ и имеющий тот же периметр $2l$, будет меньше, чем r.

Итак, осталось вычислить радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с данным периметром и углом при вершине.

5. **Указание.** Прежде всего заметим, что $f(x)=\max(h(x);\ g(x))$, где $h(x)=(x+0{,}003)^{-0{,}45}$, $g(x)=3(1-x)^{-0{,}48}$.

Рассмотрим функции $h_1(x)=1/\sqrt{x}$, $g_1(x)=3/\sqrt{1-x}$ и $f_1(x)=\max(h_1(x);\ g_1(x))$.

Очевидно, что $f(x)\leqslant f_1(x)$, так что $\min f(x)\leqslant\min f_1(x)$. Но $\min f_1(x)$ достигается в такой точке x_0, что $\dfrac{1}{\sqrt{x_0}}=\dfrac{3}{\sqrt{1-x_0}}$, т. е. при $x_0=0{,}1$.

Это значит, что $\min f(x)\leqslant\min f_1(x)=\sqrt{10}<3{,}17$

6. $3\sqrt{\dfrac{17+\sqrt{201}}{22}}$. Из условия следует, что плоскости α и β параллельны, а среди боковых граней многогранника не меньше трех трапеций. Заметим, что трех или шести трапеций среди них быть не может (площади правильных треугольника и шестиугольника со сторонами $\sqrt{13}$ не равны 12). Аналогично исключается случай, когда к одной трапеции примыкают 2 треугольника: площадь квадрата со стороной $\sqrt{13}$ не равна 12. Невозможен и случай пяти трапеций: шестая боковая грань должна быть равнобедренным треугольником, поэтому все пять трапеций — равнобочные и продолжения всех их боковых сторон пересекаются в одной точке, чего быть не может, так как эта точка не совпадает с вершиной треугольника.

Итак, среди боковых граней восьмигранника 4 трапеции и 2 треугольника, и к каждой трапеции примыкает ровно один треугольник (рис. 4).

Высоты всех боковых граней равны, треугольники равнобедренные, и точки касания треугольных граней со сферой лежат на их высотах. Рассмотрим сечение сферы плоскостью CAH (рис. 5). Угол AOH — прямой, а треугольники OAE и HOE_1 подобны и потому

$$\frac{AE}{OE}=\frac{OE_1}{HE_1},\ \text{т. е.}\quad HE_1=R^2/AE.$$

Следовательно, $AH=AE+R^2/AE$.

Аналогично, $P_1E_1=R^2/PE$ и $P_1P=PE+R^2/PE$.

Четырехугольник $ABCD$ — ромб. Продолжим B_1M и D_1N, B_1L и D_1K до пересечения в точках C_1 и A_1. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — тоже ромб. Ребра A_1A, B_1B, C_1C, D_1D либо пересекаются в одной точке, либо параллельны. Из подобия получаем

$$A_1D_1=AD\cdot\frac{R^2}{PE^2};\ A_1E_1=AE\cdot\frac{R^2}{PE^2};\ B_1D_1=BD\cdot\frac{R^2}{PE^2}.$$

Аналогично, $D_1K=AD\cdot\dfrac{R^2}{AE^2}$, $KL=\dfrac{R^2}{PE^2}BD\times\left(1-\dfrac{PE^2}{AE^2}\right)$. Вычисляя суммарную площадь треугольников и трапеций и пользуясь отношением площадей сферы и боковой поверхности многогранника, получаем (в зависимости от того, как «устроен» ромб $ABCD$), что либо (если $BD=4$, $AE=3$):

$$11R^4-153R^2+162=0,$$

либо (если $BD=6$, $AE=2$):

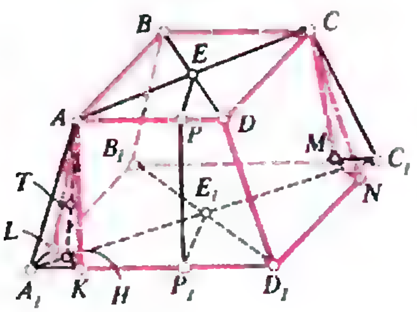


Рис. 4.

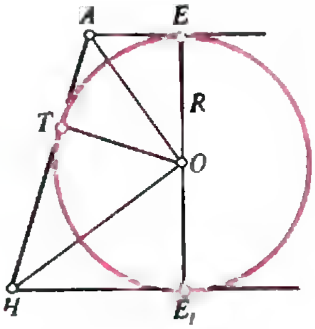


Рис. 5.

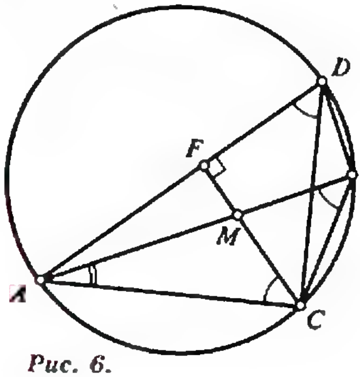


Рис. 6.

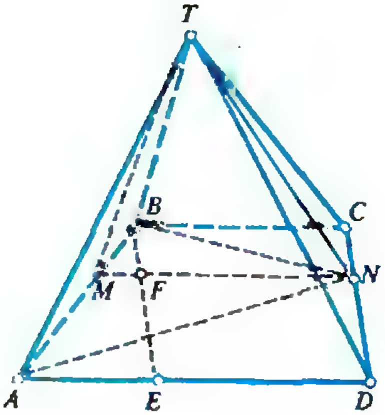


Рис. 7.

$$17R^4-136R^2+144=0.$$

Из четырех положительных корней полученных уравнений интервалу (3; 4) принадлежит лишь один.

Вариант 3

1. $\operatorname{arctg}(-4)+\pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$, $k\in Z$.

2. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 3. $((-3+\sqrt{5})/2;\ +\infty)$.

4. $\sqrt{a(a+b)}$. Указание. Треугольники ACD и ABD прямоугольные, и AD является диаметром окружности, описанной около этих треугольников (рис. 6). Далее $\angle ACF=\angle ADC$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами), а $\angle ADC=\angle ABC$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу AC. Отсюда следует, что $\triangle ACM\infty\triangle ABC$. Из подобия следует, что

$$\frac{AM}{AC}=\frac{AC}{AB},$$

т. е. $AC^2=AM\cdot AB=a(a+b)$.

5. $\{0\}\cup(2+\sqrt{3};\ 2+\sqrt{5})$. При $a=0$ единственный корень $x=0$ принадлежит интервалу $|x|<1$. При $a\neq 0$ уравнение имеет корни

$$x_1=\frac{1}{3a},\ x_2=-a(a-4),$$

удовлетворяющие условию $|x|<1$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}\left|\dfrac{1}{3a}\right|<1,\\ -1<-a^2+4a<1.\end{cases}$$

6. $7/20$; $9dS/4$. Пусть $a=BC$, $b=AD$, $l=MB$, $c=MN$. По условию $AM=2l$. Проведем через точку B прямую, параллельную отрезку CD до пересечения с AD в точке E (рис. 7). Пусть F — точка пересечения отрезков MN и BE. Обозначим $u=MF$. Из подобия треугольников MBF и ABE следует соотношение

$$MF/AE=BM/BA,$$

откуда $u=(b-a)/3$ и, поскольку $MN=MF+FN$,

$$c=u+a=(b+2a)/3.$$

Отношение объемов V_a и V_b пирамид $TMBCN$ и $TAMND$ равно отношению площадей оснований:

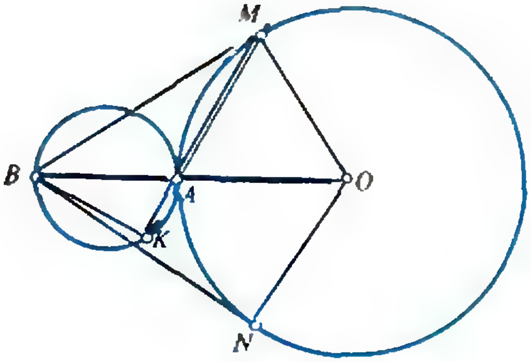


Рис. 8.

$$\frac{V_a}{V_b}=\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}}.$$

Проведя отрезки AN и BN, разделим трапеции $MBCN$ и $AMND$ на треугольники. Пусть $S_1=S_{\Delta MBN}$, $S_2=S_{\Delta BCN}$, $S_3=S_{\Delta AND}$. Так как по условию $\frac{BM}{MA}=\frac{1}{2}$, то $S_4=S_{\Delta AMN}=2S_1$.

Следовательно,

$$\frac{V_a}{V_b}=\frac{S_1+S_2}{2S_1+S_3}.$$

Поскольку

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{a}{c},\ \frac{S_3}{2S_1}=\frac{b}{c},$$

то

$$\frac{S_1+S_2}{S_1}=\frac{a+c}{c},\ \frac{2S_1+S_3}{S_1}=2\,\frac{b+c}{c}$$

и

$$\frac{S_1+S_2}{2S_1+S_3}=\frac{a+c}{2(b+c)}=\frac{5a+b}{2(4b+2a)}=$$

$$=\frac{5+b/a}{2(4b/a+2)}=\frac{7}{20}.$$

Итак, ответ на первый вопрос: $\frac{V_a}{V_b}=\frac{S_{MBCN}}{S_{AMND}}$.

Выразим объемы V_2, V_3, V_4 соответственно пирамид $TBCN$, $TAND$, $TAMN$ через объем пирамиды $TMBN$.

Имеем

$$S_2+S_3=\frac{a+2b}{c}\ S_1=\frac{a+2b}{b+2a}3S_1=$$

$$=\frac{1+2b/a}{b/a+2}\,3S_1=\frac{5}{4}\,3S_1+\frac{15}{4}\,S_1.$$

По условию $V_1=\frac{1}{3}\,dS$.

Следовательно, объем V исходной пирамиды $TABCD$ равен

$$V=V_1+V_2+V_3+V_4=3V_1+V_2+V_3=$$

$$=V_1\left(3+\frac{V_2+V_3}{V_1}\right)=V_1\left(3+\frac{S_2+S_3}{S_1}\right)=$$

$$=\frac{27}{4}\,V_1=\frac{9}{4}\,dS.$$

Вариант 4

1. $\max f(x)=f(0)=1/2$, $\min f(x)=f(-2/3)=-1/2$.
2. $(-\infty;\ -3)\cup(-1/3;\ \infty)$.
3. $(1;\ 1)$; $(5/2;\ -2)$. Указание. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} u+v=3, \\ uv=2, \end{cases}$$

где $u=\sqrt{2x-1}$, $v=\sqrt{y+3}$.
4. $\pi/4+\pi k/2$, $k\in Z$. Указание. Уравнение приводится к виду $\cos^2 2x=(1+\cos 2x)(\cos 8x-1)$, откуда получаем равносильную ему систему

$$\begin{cases} \cos 2x=0, \\ \cos 8x=1. \end{cases}$$

5. $4\sqrt{3}+10\pi$. Из прямоугольного треугольника MKB (рис. 8) найдем $MB=MK/\cos 15^\circ=2$. В равнобедренном треугольнике AOM имеем: $\angle AOM=180^\circ-2\angle AMO=180^\circ-2\cdot 75^\circ=30^\circ$, следовательно, $OM=MB/\operatorname{tg} 30^\circ=2\sqrt{3}$. Искомая площадь равна сумме $S_{BMON}+5S/6$, где $S_{BMON}=2\cdot S_{BMO}=4\sqrt{3}$, S — площадь круга радиусом OM, т. е. $S=12\pi$.

Вариант 5

1. $(\log_2 5-2)^2$.
2. $2\pi k/5$, $\pi/4+\pi k$, $\pi/6+2\pi k/3$; $k\in Z$.
3. 8 мин 20 с. Промежутки времени, за которые велосипедист проходит километровые отрезки, образуют арифметическую прогрессию (t_k), поэтому $t_1+t_5=t_2+t_4=2t_3$. Отсюда $t_1+\ldots$ $\ldots+t_5=\frac{5}{2}(t_2+t_4)=500$ с.
4. $48/5$. Пусть ON и EP перпендикулярны BC и AD (рис. 9). Из подобных треугольников OBC и OMA находим: $AM=BC(AO/OC)=9$, $ON/(7-ON)=BC/AM=2/3$, откуда $ON=14/5$. Далее, $DM=AM-AD=1$, из подобных треугольников ECB и EDM имеем $EP/(7-EP)=BC/DM=6$, откуда $EP=6$. Наконец, $S_{OEC}=S_{BEC}-S_{BOC}=(EP-ON)BC/2$.
5. 1. Второе уравнение системы приводится к виду

$$(x-1)^2+(y-1)^2+z=a+1.$$

Отсюда и из вида остальных уравнений системы следует, что если $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ — решение системы, то и $x=y_0$, $y=x_0$, $z=z_0$ — тоже ее решение. Поэтому единственным может быть только решение, в котором $x=y$. Положив в системе $y=x$, преобразуем ее к виду

$$\begin{cases} (2+x^2)\sin 2x=0, \\ 2(x-1)^2+z^2=a+1, \\ (2x+a\cdot \sin^2 z)((1-a)\ln(1-x^2)+1)=0. \end{cases}$$

Поскольку из последнего уравнения системы следует, что $|x|<1$, то из первого уравнения получаем $x=0$. При этом два последних уравнения принимают вид

$$\begin{cases} z^2=a-1, \\ a\cdot \sin^2 z=0. \end{cases}$$

Из четности функций z^2 и $\sin^2 z$ следует, что единственным решением этой системы может быть только решение $z=0$, т. е. должно быть $a=1$. Итак, единственным решением исходной системы может быть только решение $x=0$, $y=0$, $z=0$ и для этого необходимо, чтобы было $a=1$.

Положив $a=1$ в исходной системе, получим

$$\begin{cases} z\cdot \cos(x-y)+(2+xy)\sin(x+y)-z=0, \\ x^2+(y-1)^2+z^2=1+2x, \\ x+y+\sin^2 z=0. \end{cases}$$

Из двух последних уравнений получим уравнение

$$x^2+y^2+z^2+\sin^2 z=0,$$

имеющее единственное решение $x=y=z=0$, которое удовлетворяет остальным уравнениям системы.

Вариант 6

1. -1.
2. 1 час 20 мин, 40 часов, 10 часов. Пусть площадь поля равна S и пусть x, y, z — искомые времена для первой, второй и третьей сенокосилок соответственно; они находятся из системы

$$\begin{cases} 10(S/x+S/y)=S, \\ 8(S/y+S/z)=S, \\ 5(S/x+S/y+S/z)=S. \end{cases}$$

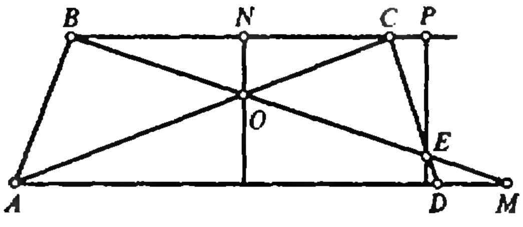


Рис. 9.

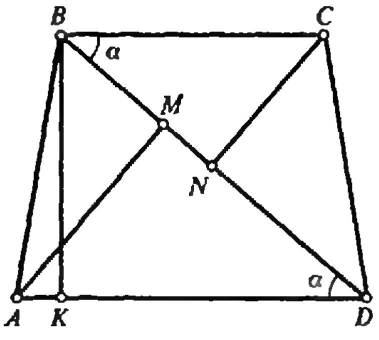


Рис. 10.

3. $2\pi k$, $-3\pi/4+2\pi k$, $k\in Z$.

4. $\sqrt{15}/2$. Пусть $\angle CBD=\angle BDA=\alpha$, KB — высота трапеции (рис. 10). Выразим через α отрезки BM и DN. Поскольку

$$BN=BC\cos\alpha=3\cos\alpha,\ BD=KD/\cos\alpha=$$
$$=7/(2\cos\alpha),\ DM=AD\cos\alpha=4\cos\alpha,$$

имеем

$$BM=BD-DM=7/(2\cos\alpha)-4\cos\alpha,$$
$$DN=BD-BN=7/(2\cos\alpha)-3\cos\alpha.$$

Тогда

$$BM/DN=(7-8\cos^2\alpha)/(7-6\cos^2\alpha).$$

Получаем уравнение

$$(7-8\cos^2\alpha)/(7-6\cos^2\alpha)=2/3,$$

откуда

$$\cos^2\alpha=7/12$$

и

$$CN=BC\cdot\sin\alpha=\sqrt{15}/2.$$

5. $-a^3/3-a^2/2$ при $a<-1$, $-1/6$ при $-1\leqslant a<0$. Пусть $z=x-a$ и $-a=n$. Требуется найти наименьшее значение функции $y=z^3/3-z^2/2$ на отрезке $[n;\ n+1]$ для каждого $n>0$. Так как $y'=z^2-z$ и $y'=0$ при $z=0$ и при $z=1$, то при $n>1$ отрезку $[n;\ n+1]$ ни одна критическая точка функции $y(z)$ не принадлежит, а при $0<n\leqslant 1$ ему принадлежит только $z=1$. При $0<z<1$ функция $y(z)$ убывает (т. к. $y'<0$), а при $z>1$ возрастает ($y'>0$). Поэтому при $n\geqslant 1$ наименьшее значение $y(z)$ принимает в левом конце отрезка $[n;\ n+1]$: $y_{\min}=y(n)=n^3/3-n^2/2$, а при $0<n\leqslant 1$ — в критической точке $z=1$: $y_{\min}=y(1)=-1/6$.

Вариант 7

1. $\dfrac{\pi}{14}(2k+1)$, πk; $k\in Z$.

2. 2; 3. 3. $\{0\}\cup(16;\ \infty)$. 4. $5^{\pm\sqrt{\log_3(2+\sqrt{3})}}$

5. **Указание.** Докажите, что $\angle AED=\angle ABD-\angle BAC$.

6. $x=4$ при $a<-1$; $x\geqslant 4$ при $a=-1$; $x_1=4$, $x_2=(4a-8)/(a+1)$ при $-1<a<1$; $-2\leqslant x\leqslant 4$ при $a=1$; $x=4$ при $a>1$.

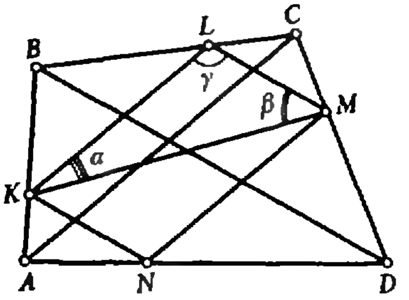


Рис. 11.

Вариант 8

1. $\pm\arccos(-1/4)+2\pi k$; $k\in Z$.
2. $(5;\ 6]$.
3. $a_1=a_2=a_3=7$; $a_1=7(1-\sqrt{2})$, $a_2=7$, $a_3=7(1+\sqrt{2})$; $a_1=7(1+\sqrt{2})$, $a_2=7$, $a_3=7(1-\sqrt{2})$.

4. 24. **Указание.** Площадь треугольника EGC равна 1/3 площади треугольника ABC.

5. $|a|\geqslant 5\sqrt{5}/4$. **Указание.** Выражая y из второго уравнения и подставляя в первое, приходим к уравнению $8x^3-16x^2-25=0$. Оно преобразуется к виду $(2x-5)(4x^2+2x+5)=0$, откуда $x=5/2$; $y=5/4$.

Вариант 9

1. $\log_2\left(\dfrac{1}{2}+n\right)$, $\log_2\left(\dfrac{1}{12}+n\right)$, $\log_2\left(\dfrac{5}{12}+n\right)$, $n=0, 1, 2, \ldots$
2. $[-1/6;\ 1/2)$.
3. $3(\sqrt{5}\pm 1)/2$. **Указание.** Необходимо рассмотреть 2 случая: когда центр окружности лежит вне прямоугольника и когда он лежит внутри прямоугольника.
4. $\min F(r)=F(5/2)=-7/16$. **Указание.** Выполнив замену $x=r^2-5r+6$, исследуйте полученную квадратичную функцию при $x\geqslant -1/4$.

5. $\dfrac{\pi}{2}+1$. **Указание.** Переписав неравенство в виде

$$\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2-1)\leqslant 0,$$

убедитесь, что данная фигура есть объединение двух кругов без их общей части.

6. 0; 2; $(3+\sqrt{5})/2$. **Указание.** Выполнив замену $y=\sin x$, приведем данное уравнение к квадратному. Пусть его корни y_1 и y_2. 3 корня на отрезке $[0;\ 2\pi]$ исходное уравнение может иметь лишь в следующих случаях:

а) когда оно сводится к уравнению $\sin x=0$,
б) когда $\sin x=1$ и есть еще два корня уравнения $\sin x=y_2$,
в) когда $\sin x=-1$ и есть еще два корня уравнения $\sin x=y_2$.

Вариант 10

1. $(0;\ 2)$.
2. $2\pi k$, $-\pi/4+\pi k$; $k\in Z$.

3. $(81;\ 0)$. **Указание.** Из первого уравнения получаем $\log_3 x+y=3+2^y$ и затем из второго уравнения находим, что $(3+2^y)\cdot 2^y=4$, откуда $y=0$.

4. 189/25.

Проведем $MN\parallel AC$ (рис. 11), тогда $KLMN$ — параллелограмм. Из подобия треугольников ABC и KBL, BCD и LCM, CDA и MDN, DAB и NAK и известных отношений их сходственных сторон получим, что сумма $S_{AKN}+S_{KBL}+S_{LCM}+S_{MDN}$ равна $(5/9)\,S_{ABCD}$. С другой стороны, эта же сумма равна $S_{ABCD}-S_{KLMN}$. Отсюда $S_{ABCD}=(9/4)\cdot S_{KLMN}$.

В треугольнике KLM выполняются равенства: $2R=LM/\sin\alpha=KL/\sin\beta=KM/\sin\gamma$, $R=5/2$ — радиус описанной окружности. Отсюда $\sin\alpha=3/5$, $\sin\beta=4/5$. Тогда либо $\sin\gamma=\sin(\alpha+$

$+\beta)=1$, но при этом $KM=5>4=KL$, что противоречит условию, либо $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)=$ $=7/25$, тогда $KM=7/5<4=KL$.
Следовательно,

$$S_{KLMN}=2S_{KLM}=KL\cdot LM\sin\gamma=84/25.$$

5. $0,\ \pm(\sqrt{5}/2)a$.
Перепишем уравнение в виде

$$\cos(f(x+a/2))=\cos(f(x-a/2)),$$

где $f(z)=z/(z^2+a^2)$. Оно равносильно совокупности уравнений

$$f(x+a/2)\pm f(x-a/2)=2\pi k,\ k\in Z.$$

Функция f всюду определена, непрерывна, имеет производную $f'=(a^2-z^2)/(z^2+a^2)^2$, равную нулю при $z=\pm a$, причем $z=-a$ — точка минимума, а $z=a$ — максимума, и

$$f_{\min}=f(-a)=-1/(2a)\geqslant-\pi,$$
$$f_{\max}=f(a)=1/(2a)\leqslant\pi$$

при $a\geqslant1/(2\pi)$. Так как точки $z_1=x+a/2$ и $z_2=x-a/2$ ни при каких x не могут быть одновременно точками экстремума, то

$$|f(z_1)\pm f(z_2)|\leqslant|f(z_1)|+|f(z_2)|<2\pi,$$

поэтому возможен только случай $k=0$. Следовательно, при $a\geqslant1/(2\pi)$ исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x+a/2)+f(x-a/2)=0,\\ f(x+a/2)-f(x-a/2)=0, \end{array}\right.$$

в свою очередь равносильной совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 2x(3a^2/4+x^2)=0,\\ a(5a^2/4-x^2)=0. \end{array}\right.$$

Отсюда $x_1=0$, $x_2=a\sqrt{5}/2$, $x_3=-a\sqrt{5}/2$.

Вариант 11

1. 3. **2.** 72. **3.** $90°+180°n,\ n\in Z$. **4.** 35; 45. **5.** $(0;\ 1/7)\ \ (1/2;\ 1)$. **6.** $\{-\sqrt{2}\}\ \ (-1;\ 1)$.

Вариант 12

1. $11\cdot181$. **2.** $\log_2 3$. **3.** $(-\infty;\ -199)\cup(-66;\ 200)$. **4.** $\pi+2\pi k,\ 2\,\mathrm{arctg}(\pi/2)+2\pi k,\ k\in Z$.
5. $2\sqrt{3}$. Через две данные точки C и D могут проходить две окружности, касающиеся данной прямой AB. Обозначим точки касания буквами E_1 и E_2 (рис. 12). Продолжим DC до пересечения в точке G с прямой AB. Докажем, что расстояния от точек E_1 и E_2 до прямой CD одинаковы. Для этого достаточно доказать, что $E_1G=E_2G$. Так как треугольник GCE_1 подобен треугольнику GE_1D, а треугольник GCE_2 — треугольнику GE_2D (это следует из равенств углов GCE_1 и GE_1D, GCE_2 и GE_2D, измеряемых половинами дуг E_1CD и E_2CD соответственно), то $GC/GE_1=$ $=GE_1/GD$, $GC/GE_2=GE_2/GD$, откуда $GE_1^2=$ $=GE_2^2=GC\cdot GD$, что и требовалось доказать. Пусть E_1F перпендикулярно CD. Тогда $E_1F=$ $=GE_1\cos\angle GE_1F$, но $\angle GE_1F=\angle GDA$, поэтому $E_1F=GE_1\cdot AD/GD=\sqrt{GC\cdot GD}\cdot AD/GD=$ $=AD\sqrt{GC/GD}=AD\sqrt{BC/AD}=2\sqrt{3}$, т. к.

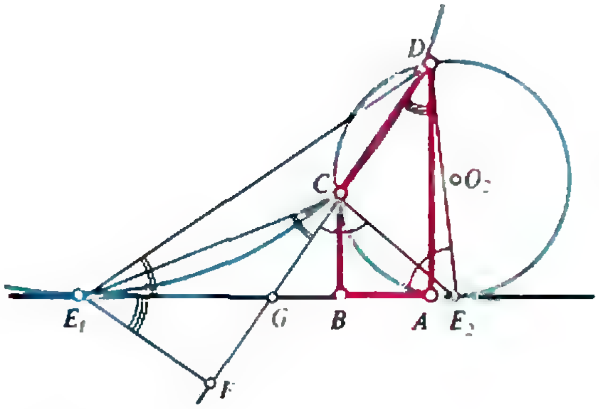


Рис. 12.

$GC/GD=BC/AD$ вследствие подобия треугольников GCB и GDA.
6. $(-\infty;\ -0{,}99)\cup(-0{,}02;\ 0)\cup(0;\ 0{,}01)$.
Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} 0<x-p<1,\\ x^3>(x-p)^2 \end{array}\right. \text{ и } \left\{\begin{array}{l} x-p>1,\\ 0<x^2<(x-p)^2, \end{array}\right.$$

в свою очередь равносильной совокупности двух систем:

$$\left\{\begin{array}{l} 0<x-p<1,\\ |x|>x-p \end{array}\right. \text{ и } \left\{\begin{array}{l} x-p>1,\\ 0<|x|<x-p. \end{array}\right.$$

При $|x|<0{,}01$ она равносильна совокупности двух систем неравенств:

$$\left\{\begin{array}{l} |x|<0{,}01,\\ 0<x-p<|x| \end{array}\right. \text{ и } \left\{\begin{array}{l} |x|<0{,}01,\\ x-p>1. \end{array}\right.$$

Если при каком-то значении p система

$$\left\{\begin{array}{l} 0<x-p<|x|,\\ |x|<0{,}01 \end{array}\right.$$

имеет решение, то $-0{,}02<x-|x|<p<x<0{,}01$; наоборот, если число p принадлежит интервалу $(-0{,}02;\ 0{,}01)$, то система имеет решение при всех таких p, кроме $p=0$. Аналогично система

$$\left\{\begin{array}{l} x-p>1,\\ |x|<0{,}01 \end{array}\right.$$

имеет решение тогда и только тогда, когда $p<x-1<-0{,}99$.

Физика

Механико-математический факультет

1. $\Delta m=(m_1-m_2)^2/(m_1+m_2)\approx16{,}7$ г.
2. $\Delta E_p=(M-m)gh+\mu gh(H-h)=55$ кДж.
3. $h_2=\varrho_в(h_1+h_3)/(3\varrho)=10$ мм, где $\varrho_в=$ $=10^3$ кг/м^3 — плотность воды.
4. $T=Ph(H-h)/(\nu R(H-2h))=352$ К, $t=79$ °C.
5. $\Delta m=pVM_{H_2}/(RT)-mM_{H_2}/M_{H_2O}\approx77$ г.
6. $m=AT_2/(\lambda(T_1-T_2))\approx8{,}2$ кг.
7. $U_4=\dfrac{C_1C_3U}{C_3C_4+(C_1+C_2)(C_3+C_4)}\approx9{,}1$ В.
8. Сила направлена вдоль скорости проводника и равна $F=B^2l^2v/R=1{,}6\cdot10^{-4}$ Н.
9. $l=F\sqrt{F^2+d^2}(1/(a-F)-1/(b-F))$.
10. $L=4F$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $l=2s/(1-\alpha)=0{,}76$ м.
2. $\beta=\alpha m_1/(m_2+2\alpha(m_1-m_2))=1,/3$.
3. $v=(1+M/m)\sqrt{2\mu gl}=502$ м/с.
4. $x_m\overset{2}{=}\dfrac{2v_0}{1+M/m}\sqrt{\dfrac{M}{k}}=0{,}4$ м.
5. $\rho_{\min}=\rho_0 M/(M+\rho_0 Sh)=0{,}8$ г/см^3.
6. $m=M((v_2^2-v_1^2)/2+\mu gL)/(\eta g)\approx 23{,}8$ кг (здесь $\eta=0{,}3$).
7. $l=V\Delta T/(ST)=10$ см.
8. $h=MVg(p_2-p_1)/(RTk)=2{,}4$ см.
9. $\alpha=\sqrt{1+2MA/(3mRT)}=1{,}1$.
10. $r=\dfrac{I_1R_1-I_2R_2}{I_2(1+R_2/R_1)-I_1}=4$ Ом.

Химический факультет

1. $h=R/\sqrt{1+\mu^2}=1$ м.
2. $F=mg(1+(2\pi v)^2/(gT)^2)\approx 0{,}23$ Н.
3. $\beta=\arcsin(v\sin\alpha/\sqrt{v^2-2c\Delta T})\approx 45°$.
4. $t=0$ °С, при этом растает $m=(c_1m_1t_1-c_2m_2t_2)/\lambda=57$ г льда.
5. $n=mgh/((Q_н/T_н)(T_н-T_х))=80$.
6. $\alpha=1/2\arcsin(eLU/(mdv^2))\approx 10^{-2}$ рад.
7. $R_2=R_1R_4R_5/(R_3R_5-R_1R_4)\approx 33{,}3$ Ом.
8. $a=(4\rho Q/(NS(\Delta B/\Delta t)^2))^{1/3}=0{,}1$ м.
9. $x=l(\sqrt{2}-1)/2\approx 0{,}09$ м.
10. $x=fFR/(hF+fR-RF)=0{,}08$ м.

Географический факультет

1. $s=(v_0^2\cos^2\alpha(t_2-t_1)^2+(v_0\sin\alpha(t_2-t_1)+g(t_1^2-t_2^2)/2)^2)^{1/2}\approx 18$ м (здесь $t_1=1$ с, $t_2=2$ с).
2. $A_{\min}=mg(l\sin\alpha+d\cos\alpha-d)/2=3750$ Дж.
3. $\rho=\rho_0 m_1/(m_1-m_2)=2{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3.
4. $U_V=2UR_V/(R+4R_V)=50$ В.
5. $S=2\rho lI/(U_к-U)\approx 14{,}5$ мм^2.
6. $I_{\min}=\mu mg/(Bl(\sin\alpha+\mu\cos\alpha))\approx 2{,}2$ кА.
7. $U=\sqrt{\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2}=8$ В.
8. $v=\sqrt{(2v_1)^2+v_2^2}=5$ см/с.
9. $F=d(l_1+l_2)/(2d+l_1+l_2)=0{,}1$ м.
10. $P=nhc/(\eta\lambda)=40$ Вт (здесь $\eta=0{,}1$).

нт» для младших школьников
«Квант» № 1)

1. Обозначим количество проданных персиков через n, а стоимость (в копейках) персиков, проданных ранее, через A. Тогда $A+230=245n$ и $A+158n=242n$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $72=3n$. Следовательно, было продано 24 персика.
2. См. рис. 13.
3. $3\times 29+13=100$.
4. Так как углы NAD и MBA равны (рис. 14), а также углы MCD и NBC равны, то сумма углов при вершинах A, B и C равна углу ABC, т. е. 90°.
5. Обозначим через x время (в часах), прошедшее с начала суток. Тогда ответ Пифагора запишется следующим образом: $24-x=0{,}8x$. Отсюда $x=40/3$ часа, т. е. 13 часов 20 минут.

Т	А	Б	У	Н
У	Н	Т	А	Б
А	Б	У	Н	Т
Н	Т	А	Б	У
Б	У	Н	Т	А

Рис. 13.

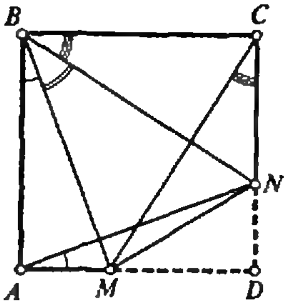


Рис. 14.

урс «Математика 6—8»
«Квант» № 10 за 1991 г.)

4. Заметим, что для любой расстановки скобок, при представлении полученного числа в виде дроби, число 1 окажется в числителе, а число 2 — в знаменателе. Отсюда получаем три возможных выражения числа 7:

$$7=\frac{1\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot4\cdot9\cdot10}=$$

$$=\frac{1\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot10}{2\cdot5\cdot8\cdot9}.$$

Этим выражениям соответствуют следующие расстановки скобок:

$$7=((((1:2):3):4):5):((((6:7):8):9):10)=$$
$$=1:((2:(3:(((4:5):6):7))):((8:9):10))=$$
$$=1:((2:3):((4:((5:6):(7:8))):(9:10))).$$

5. Такая укладка возможна. Пример укладки показан на рисунке 15.

6. Примем сторону равностороннего треугольника равной 2 и обозначим длины отрезков AC_1, BA_1 и CB_1 через $1+a$, $1+b$ и $1+c$, соответственно. Тогда длины отрезков C_1B,

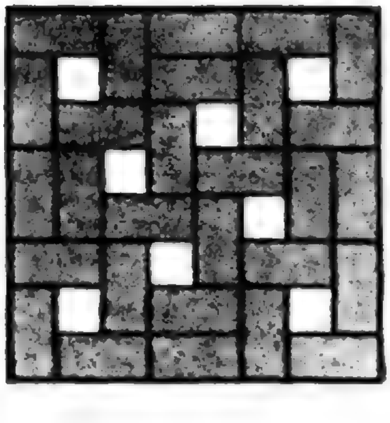


Рис. 15.

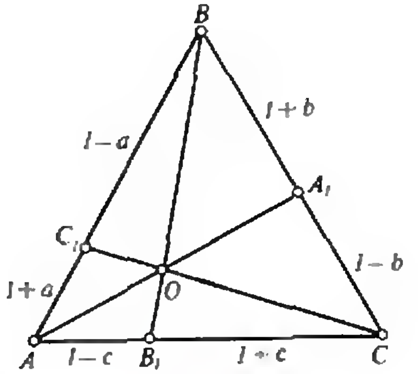


Рис. 16.

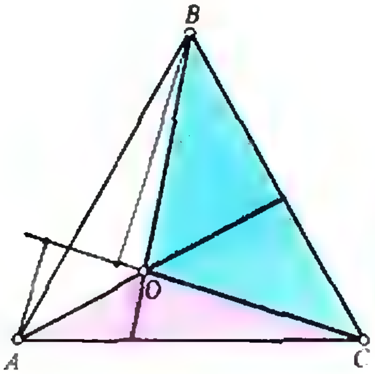


Рис. 17.

A_1C и B_1A равны $1-a$, $1-b$, $1-c$ (рис. 16). Заметим, что сумма площадей треугольников ABB_1, BCC_1 и CAA_1 равна полутора площадям треугольника ABC. Если обозначить высоту треугольника ABC через h, то это равенство можно переписать следующим образом:

$$0{,}5h(1+a)+0{,}5h(1+b)+0{,}5h(1+c)=1{,}5h,$$

или $a+b+c=0$.

С другой стороны, отношение площадей треугольников AOC и BOC равно $(1+a):(1-a)$, так как у этих треугольников общее основание OC, а высоты относятся, как $(1+a):(1-a)$ (рис. 17). Аналогично, отношение площадей треугольников BOA и AOC равно $(1+b):(1-b)$, а отношение площадей треугольников BOC и AOB равно $(1+c):(1-c)$. Перемножим эти отношения и заметим, что площадь каждого из трех треугольников AOB, AOC и BOC по одному разу встречается в числителе и в знаменателе, т. е. это произведение равно 1. Отсюда $(1+a)(1+b)(1+c)=(1-a)(1-b)(1-c)$. Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим $(a+b+c)+abc=0$. Но $a+b+c=0$, следовательно, $abc=0$. Это означает, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно нулю, т. е. точка O лежит на одной из медиан.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко,
С. Табачников, В. Тихомирова, В. Уроев,
А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Сербров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, Л. Кардасевич,
С. Коновалов, Е. Коршунова, А. Котова,
А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, С. Лухин, Э. Назаров,
П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Н. Дорохова

103006, Москва К-6, ул. Тверская, 32/1. «Квант»,
тел. 250-33-54, факс 251-55-57

Сдано в набор 25.11.91. Подписано к печати 21.02.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт 27,09. Уч.-изд. л. 7,59.
Тираж 88 500 экз. Заказ 1005 Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

ПАРТИИ ЧЕМПИОНОВ

В прошлый раз мы рассказали об XI чемпионате мира среди шахматных микрокомпьютеров. Он определил сразу нескольких чемпионов (в разных «весовых» категориях), но по-прежнему на высоте положения оказался многократный чемпион «Мефисто». Приведем теперь наиболее интересные партии турнира в Ванкувере.

«М-Чесс» — «Мефисто»
Принятый ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. c4 dc 3. Кf3 Кf6 4. e3 e6 5. С:c4 c5 6. 0—0 a6 7. a4 Кc6 8. Фe2 cd 9. Лd1 Сe7 10. ed 0—0 11. Кc3 Кd5 12. Кe5 Кcb4 13. Сb3 Сf6 14. Сd2 b6 15. К:d5 К:d5 16. Сc2 Сb7 17. Фe4 g6 18. Сh6 Лe8 19. Лac1 Лc8 20. Лe1 Фe7 21. Сb3 Лed8 22. Л:c8 Л:c8 23. Кg4 a5 24. К:f6+ К:f6? 25. Фe5 Кe8 26. d5! Классический прорыв в центре, решающий партию. 26...Фb4 27. Фe3! Сa6 (27...ed 28. Ф:e8+) 28. de f6 29. e7+ Сc4 30. С:c4+ Ф:c4 31. Ф:b6 Фd5 32. h3 Крf7 33. b4 ab 34. Ф:b4 Лc7 35. Сd2 Фa2 36. Фh4 h5 37. Фd4 Лc2 (37...Л:e7 38. Л:e7+ Кр:e7 39. Сb4+ Крf7 40. Фd7+) 38. Сc3 Фb3 39. Лe3 Фb1+ 40. Сe1 Фb7 41. a5 Лc7 42. Фd8 Л:e7 43. a6 Л:e3 44. ab Л:e1+ 45. Крh2 Лb1 46. b8Ф. Черные сдались.

«Мефисто» — «Гидеон»
Защита Каро-Канн

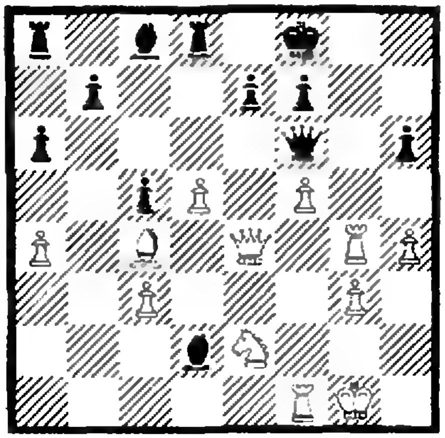
1. e4 c6 2. d4 d5 3. Кc3 de 4. К:e4 Сf5 5. Кg3 Сg6 6. Сc4 e6 7. К1e2 Кf6 8. Кf4 Сd6 9. Сb3 Фc7 10. Фf3 Кbd7 11. 0—0 a5 12. c3 c5 (надежнее 12...0—0) 13. С:e6!? fe 14. К:e6 Фb6 15. К:g7+ Крf7 16. К7f5 cd 17. cd С:g3 18. Кh6+ Крg7 19. Ф:g3 Лhe8 20. Лd1 Крh8 21. b3 Лac8? Плохо и 21...Ф:d4 из-за 22. Сe3 Фe5 23. Фh4 Фh5 24. Ф:h5 С:h5 25. g4 Сg6 26. Сd4. Но, блокируя пешку «d» путем 26...Кd5!, черные держали позицию.

22.d5! Вновь маневр d4—d5 ведет к цели, но на сей раз «Гидеон» выступает в роли пострадавшей стороны.

22...Лe2 23. Сe3 Фb5 24. Сd4 Лce8 25. Сc3 Фb6 26. d6 Фd8 27. Фg5 b6 28. f4! Лf8 29. f5 Сe8 30. Лe1 Сh5 (30...Л:e1+ 31. Л:e1 с угрозой Лe7) 31. Ф:h5. Черные сдались.

«Гидеон» — «М-Чесс»
Защита Грюнфельда

1. d4 Кf6 2. c4 g6 3. Кc3 d5 4. cd К:d5 5. e4 К:c3 6. bc Сg7 7. Сc4 c5 8. Кe2 0—0 9. 0—0 Кc6 10. Сe3 Фc7 11. Лc1 Лd8 12. Сf4 Фd7 13. d5 Кe5 (лучше 13...Кa5) 14. С:e5 С:e5 15. f4 Сg7 16. Лb1 Фc7 17. f5 gf 18. ef a6 19. a4 Сe5 20. g3 Сf6? 21. Лf4 Сg5 22. Лg4 h6 23. Фc2 Фe5 24. Лf1 Крf8 25. Фe4!? Фf6? Черные кое-как выдержали давление неприятельских фигур и, разменяв ферзей, могли получить вполне приемлемую позицию. Теперь же «Гидеон» эффектной атакой завершает борьбу. 26. h4 Сd2.



27. Лg6! Фh8 28. d6! ed 29. С:f7! Кр:f7 30. Фd5+ Крf8 31. Ф:d2 Крe8 32. Лe1 Крf7 33. Фd5+ Крf8 34. Кf4. Черные сдались.

Итак, «М-Чесс» обыграл «Мефисто», тот взял верх над «Гидеоном», который в свою очередь одолел «М-Чесс». А расположение компьютеров в турнирной таблице решили их схватки с другими соперниками. В заключение приведем еще одну интересную партию победителя турнира.

«Кинг» — «Гидеон»
Дебют Берда

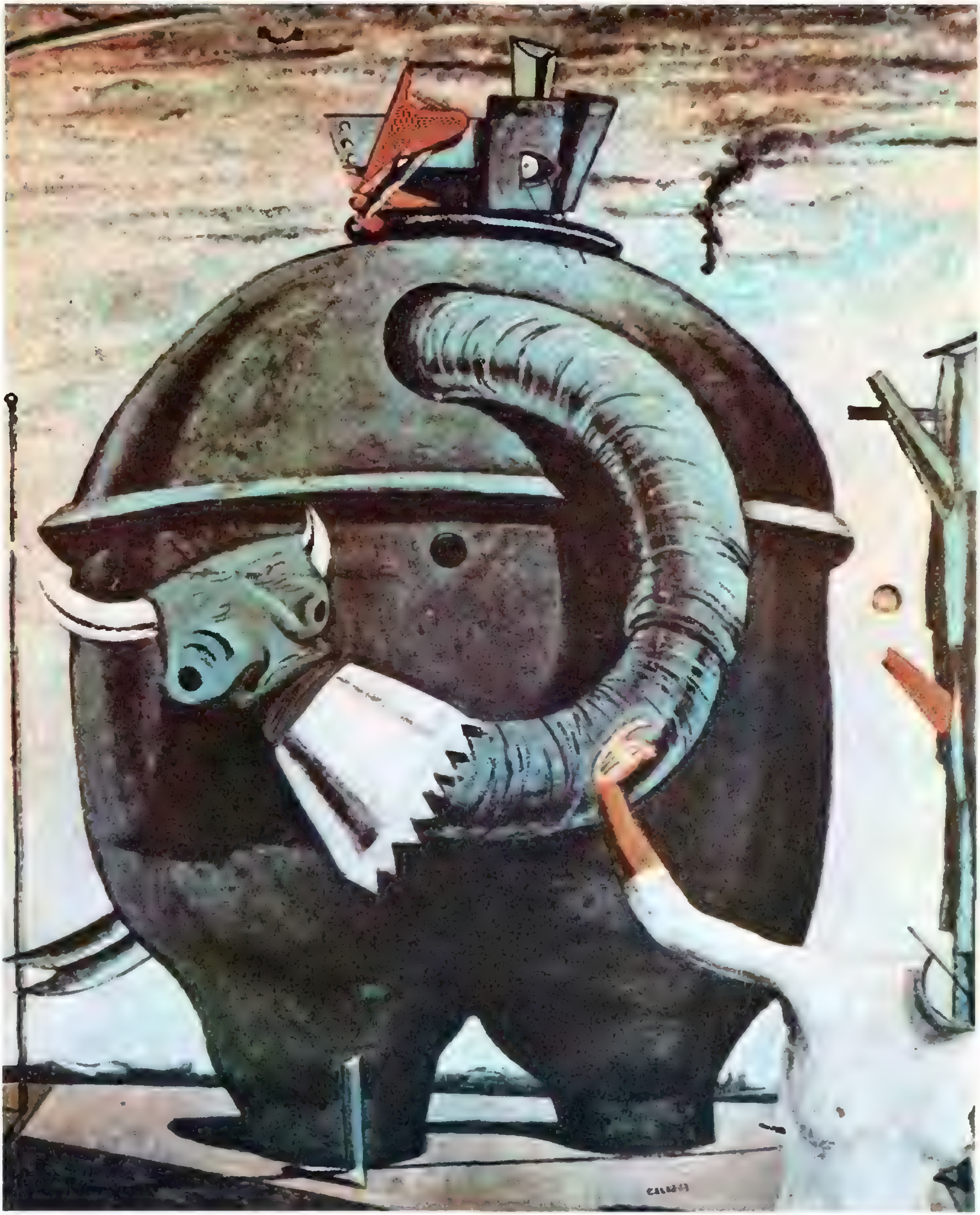
1. b3 c6 2. a4 d5 3. Сb2 Сf5 4. f4 Кf6 5. Кf3 e6 6. e3 Сb4 7. Сe2 0—0 8. Кh4 Сe4 9. 0—0 Сc5 10. Кc3? d4! Белые несколько вычурно разыграли дебют, и «Гидеон» захватывает инициативу. 11. К:e4 К:e4 12. Кf3 de 13. d4 Сd6 14. Фd3 Кf6 15. Кe5. После 15. Ф:e3 Кd5 теряется пешка f4.

15...Кd5 16. c4 Кb4 17. Фc3 (а сейчас нельзя бить на e3 из-за ответа Кc2) 17...Фc7 18. Кg4 f5! Черные не попадаются в ловушку: 18...С:f4 19. d5! f5 20. Л:f4.

19. Кe5. Вновь пешка неуязвима: 19. К:e3 С:f4 20. К:f5 ef 21. Ф:b4 С:h2+. Кажется, что теперь пешке «e» никуда не деться (грозит, например, Лf1—f3:e3), но «Гидеон» все предвидел! 19...c5! 20. dc С:c5 21. Лfd1 К4c6 22. b4! Наконец-то белые уничтожают прорвавшуюся пешку «e», но восстановить материальное равенство так и не удается. 22...С:b4. После 22...К:b4 черные неожиданно терпят фиаско: 23. Кd7! Лf7 24. К:c5 Ф:c5 25. Лd8+.

23. Ф:e3 Фe7 24. Кd3 Кd7 25. К:b4 К:b4 26. Лab1 a5 27. Сc3 Кc5 28. С:b4 ab 29. Л:b4 Л:a4 30. Л:a4 К:a4. Итак, позиция упростилась, но у черных осталась лишняя пешка. 31. g3 Кc5 32. Сf3 Лa8 33. Лd2 Крf7 34. Крg2 h6 35. Лb2 Лa6 36. Лb5 b6 37. Лb2 Фf6 38. Фd2 g5! 39. Лb1 gf 40. gf Фh4 41. h3 Лa3! 42. Фf2 (последняя ловушка — 42...Ф:f4 43. Сh5+) 42...Ф:f2+ 43. Кр:f2 Кd3+ 44. Крg3 Крf6 45. h4 Лc3 46. Лa1 Лb3 47. Лf1 e5 48. fe+ К:e5 49. Крf4 Л:f3+ 50. Л:f3 К:f3. Белые сдались.

Е. Гик



Цена 1 р. 10 к.

Индекс 70465

Английское слово «fold» означает «складывать». В последние годы весьма популярными стали так называемые «folding puzzles» — складные головоломки из плоских листочков бумаги или пластмассы. За рубежом их можно встретить в офисе и на пароходе, на стадионе, пляже и в ресторане, словом, везде, где у человека появляется несколько минут свободного времени.

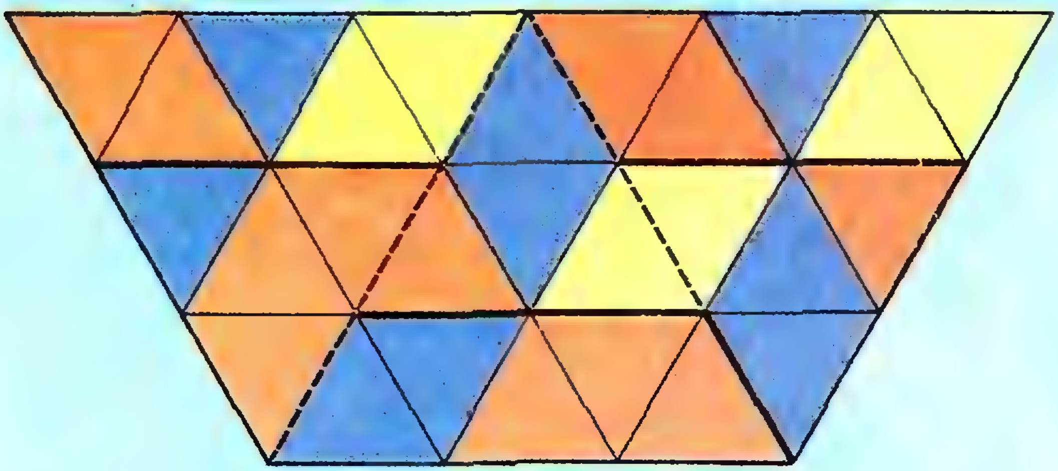
На нашей обложке показана одна из этих головоломок. На картинках изображены ее лицевая и оборотная стороны. Вы можете перерисовать головоломку на лист бумаги или вырезать ее из журнала. В последнем случае нижний рисунок разрежьте на части по линиям сгиба и приклейте отдельные кусочки на оборотную сторону верхнего рисунка.

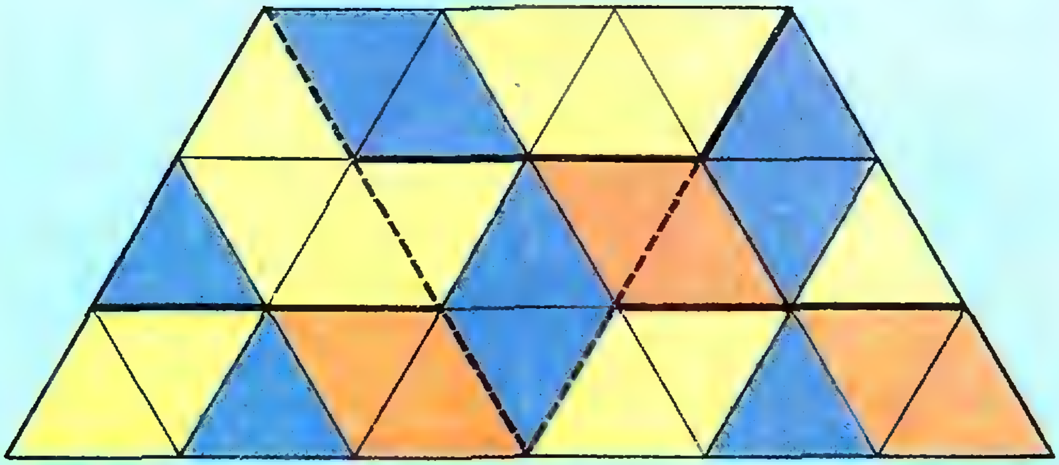
А теперь попробуйте сложить:

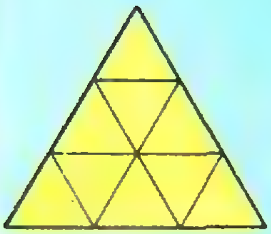
- *треугольник, желтый с обеих сторон;*
- *треугольник, розовый с обеих сторон;*
- *двухцветный треугольник, лицевая и оборотная стороны которого показаны внизу на двух последних рисунках.*

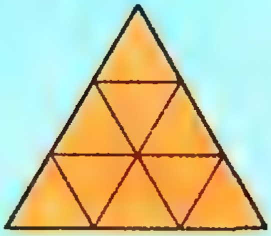
Если вам самим удастся придумать подобные головоломки, присылайте их к нам в редакцию.

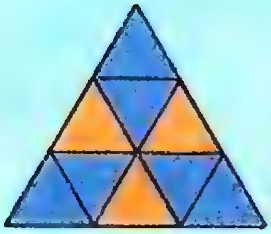
А. К.

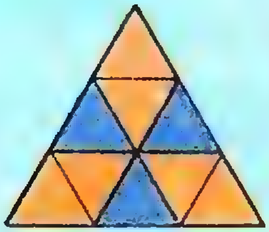












НОМЕР
3

Квант

3 1992

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Российской академии наук, Президиум Академии педагогических наук и коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *Ш. Глэшоу.* Элементарные частицы
6 *Г. Радемахер, О. Теплиц.* Об одном свойстве числа 30
12 *А. Минеев.* О высоких деревьях

Задачник «Кванта»

18 Задачи М1331 — М1335, Ф1338 — Ф1342
19 Решения задач М1301 — М1305, Ф1318 — Ф1322
28 Победители конкурса «Задачник «Кванта»

«Квант» для младших школьников

29 Задачи
30 *С. Дворянинов, А. Коржуев.* Вездесущий рычаг
35 Конкурс «Математика 6—8»

Школа в «Кванте»

Физика 9—11:

36 Закон сохранения импульса и маневры космического корабля
37 Откуда берется магнетизм?
42 Избранные школьные задачи по физике

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Математический кружок

44 *Р. Смаллиан.* Остров Ваал

Практикум абитуриента

48 *В. Затакавай.* Решаем системы уравнений

Фантастика

54 *У. Моррисон.* Мешок

59 **Варианты вступительных экзаменов 1991 г.**

Информация

70 Конференция клуба «Глюон»

Олимпиады

71 Математическая олимпиада тихоокеанских стран

Игры и головоломки

11 Из куба — тетраэдр
58 Кроссворд

71 **Ответы, указания, решения**

Нам пишут *(5)*

Наша обложка

1 *Ковер, «сплетенный» нашим читателем — А. Жуковым из подмосковного города Софрино,— односторонний, как и листы Мёбиуса, из которых он состоит. Вы можете в этом убедиться, проследив за путешествием красной точки. В одном из ближайших номеров вас ждет встреча с другими коврами А. Жукова.*

2 *Картина М. Эрнста «Снежные цветы». Идея симметрии, видимо, лежит глубоко в подсознании. Симметрии посвящен «Калейдоскоп» в этом номере.*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Весенний подарок нашим читателям — улыбка английской королевы.*

© «Квант», 1992

Шелдон Ли Глэшоу — известный американский физик-теоретик, лауреат Нобелевской премии 1979 года за создание (совместно с С. Вайнбергом и А. Саламом) теории, объединяющей слабое и электромагнитное взаимодействия. Ш. Глэшоу — один из инициаторов появления советско-американского журнала «Quantum», созданного на базе журнала «Квант» и выходящего в США с начала 1990 года. И один из организаторов и лекторов летних советско-американских школ, в которых принимали участие и наши читатели — победители конкурсов «Кванта». Статья «Элементарные частицы» написана Ш. Глэшоу для американских школьников — читателей журнала «Quantum». Публикуя перевод этой статьи, мы надеемся, что она будет интересна и советским школьникам.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

(Ловля рыбки Хиггса, охота на топ-кварка...)

Ш. ГЛЭШОУ

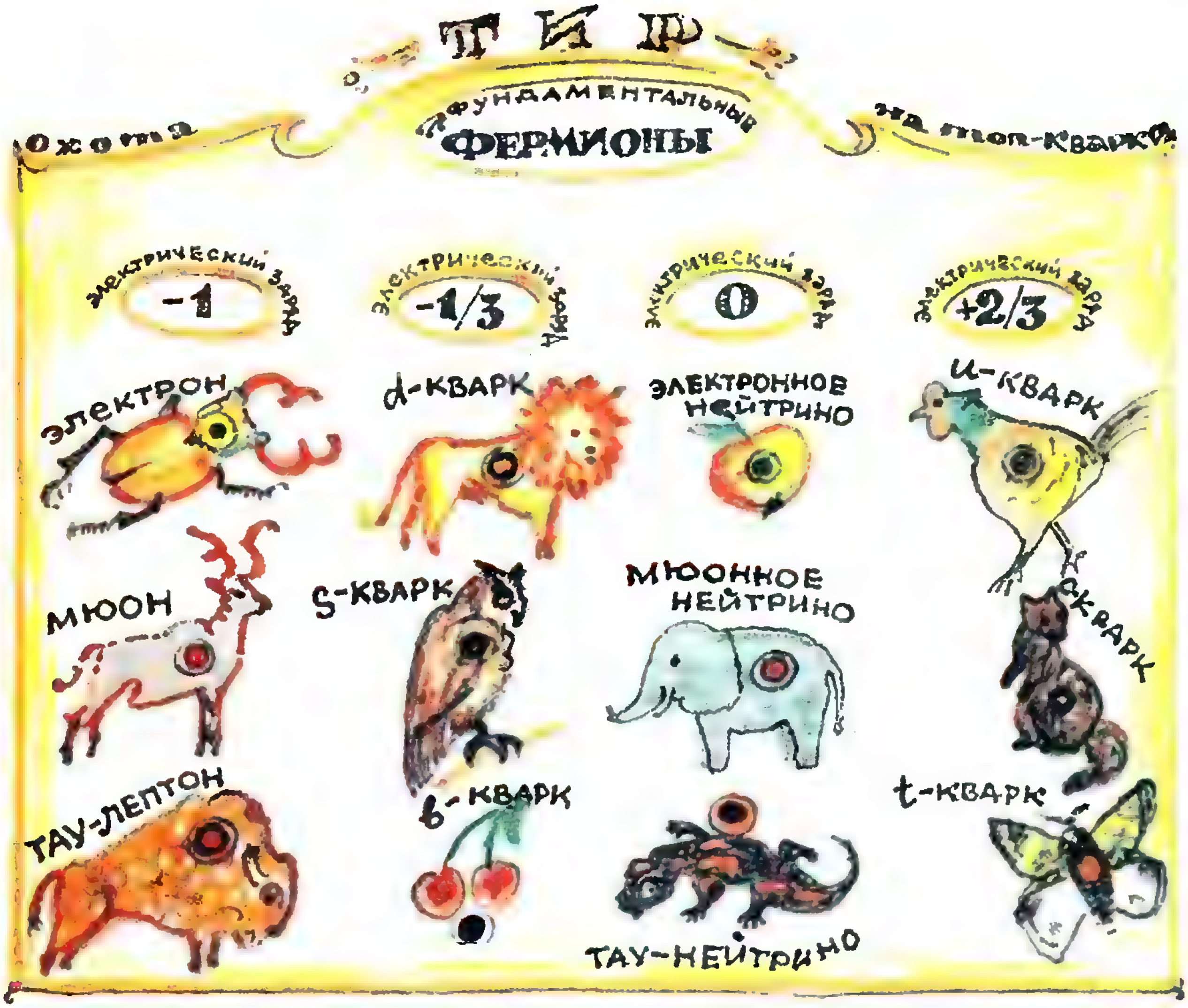
Масса, спин и античастица. Квантовая механика и теория относительности утверждают, что каждая элементарная частица характеризуется неотрицательной массой и неотрицательным целым или полуцелым *спином* и что для каждой частицы существует *античастица* с такими же массой и спином, но с противоположным электрическим зарядом. Частицы, масса которых отлична от нуля, движутся медленнее света, и их можно затормозить, в то время как частицы с нулевой массой (такие, как фотон и гравитон) движутся со скоростью света по отношению ко всем наблюдателям. Спин есть мера собственного момента импульса частицы. Если частица с массой имеет спин s, то она может находиться в любом из $(2s+1)$ квантовых состояний, отличающихся проекцией спина. Античастица электрона, называемая *позитроном*, впервые была обнаружена в 1932 году в космических лучах. *Антипротоны* были впервые получены и зарегистрированы на бэватроне в Беркли в 1955 году. Фотоны совпадают со своими собственными античастицами.

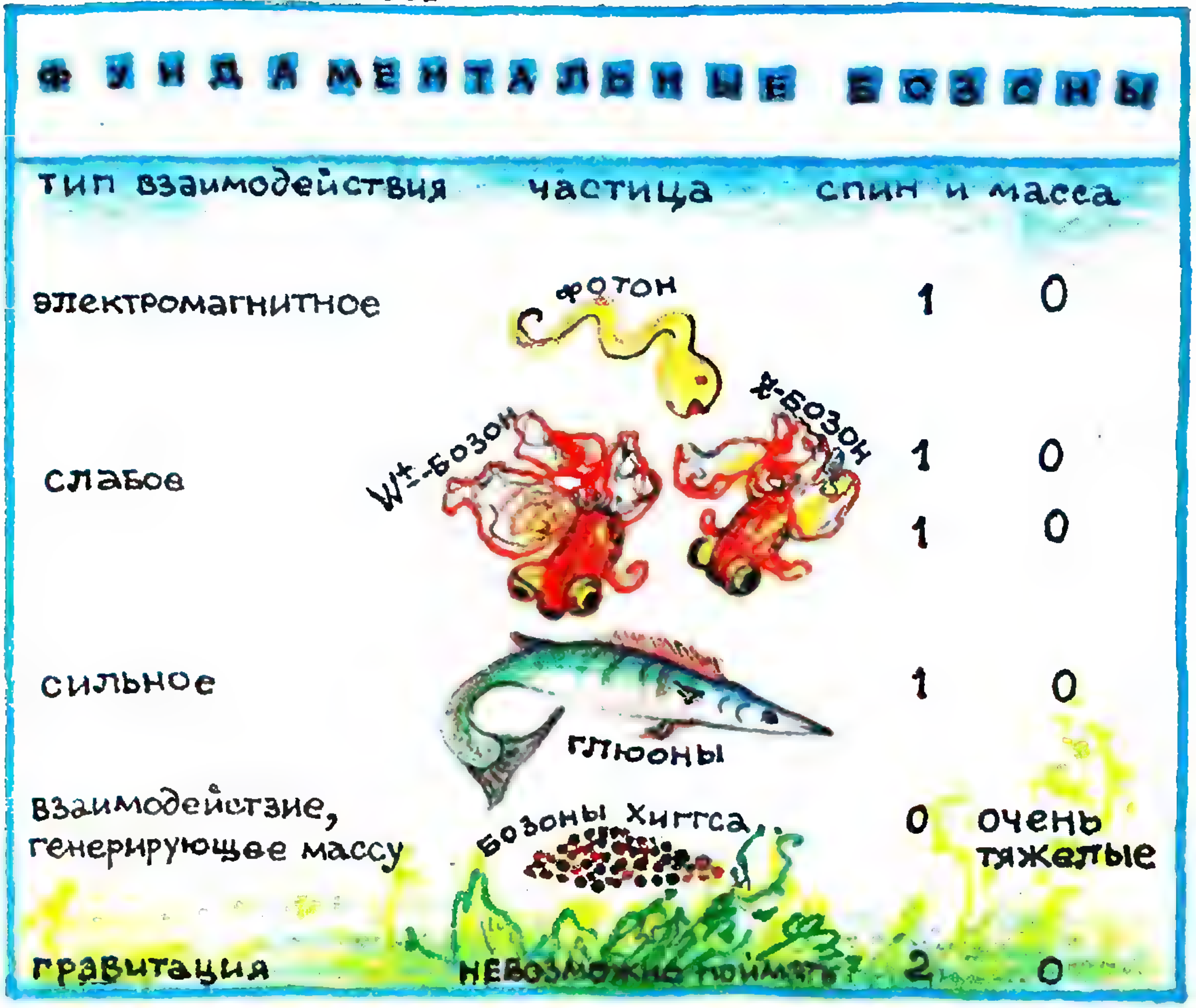
При контакте частицы со своей античастицей они аннигилируют. Все вещество на Земле (и почти все вещество во Вселенной) состоит из частиц, а не античастиц. В противном случае не было бы ни нас с вами, ни этого рассказа.

Фермионы и бозоны. Частицы с полуцелым спином (например, электрон со спином 1/2) подчиняются статистике Ферми — Дирака и называются *фермионами.* Два одинаковых фермиона не могут одновременно находиться в одном и том же квантовом состоянии (принцип запрета Паули). Частицы с целым спином (например, фотон) подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Многие из *бозонов* могут (и, в известном смысле, «любят») собираться в одном и том же квантовом состоянии, что является принципиальной основой работы лазеров.

Фундаментальные фермионы — кварки и лептоны. Наш перечень таких частиц содержит двенадцать частиц со спином 1/2: шесть *кварков* и шесть *лептонов.* Кварки были придуманы М. Гелл-Манном и Г. Цвейном в 1963 году. u-, c-, t-кварки (от слов «up» — вверх, «charmed» — очарованный, «top» — верхний) несут электрический заряд, равный 2/3, в то время как d-, s-, b-кварки (от слов «down» — вниз, «strange» — странный, «botton» — нижний) несут заряд, равный —1/3. Отдельный кварк не может быть изолирован от *адрона* [см. ниже.— *Ред.*], частью которого он является. Таким образом, кварки нельзя рассматривать как полноправные частицы. Слово лептон происходит от греческого «лептос», означающего «маленький» или «легкий», и было введено в 1948 году Л. Розенфельдом для обозначения любого фермиона небольшой массы, подобного электрону или нейтрино. В настоящее время лептоны включают все шесть известных фермионов, на которые не распространяется сильное ядерное взаимодействие. Три из них имеют электрический заряд: электрон, мюон (примерно в 200 раз тяжелее) и тау-лептон (еще в 17 раз тяжелее). Каждому из них соответствует свой сорт нейтрино, всего получается шесть лептонов. Нейтрино очень легкие; возможно, они имеют нулевую массу. Недавние эксперименты позволяют предположить, что существует не больше трех разновидностей нейтрино. Это означало бы, что наш список фундаментальных ферминов является полным. Так ли это на самом деле, увидим!

Фундаментальные бозоны. Эти частицы осуществляют связь между фундаментальными фермионами. Электромагнитное взаимодействие является результатом того, что заряженные частицы обмениваются *фотонами* — частицами света, имеющими нулевую массу. Сильное ядерное взаимодействие возникает, когда кварки обмениваются *глюонами* с нулевой массой. Слабое взаимодействие — это результат обмена тяжелыми W- или Z-бозонами между фундаментальными фермионами. Можно думать, что гравитация обусловлена


ТИР
Охота на топ-кварк
Фундаментальные фермионы
электрический заряд -1
электрический заряд -1/3
электрический заряд 0
электрический заряд +2/3
электрон
d-кварк
электронное нейтрино
u-кварк
мюон
s-кварк
мюонное нейтрино
c-кварк
тау-лептон
b-кварк
тау-нейтрино
t-кварк



ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ БОЗОНЫ

тип взаимодействия	частица	спин и масса	
электромагнитное	фотон	1	0
слабое	$W^{\pm}$-бозон	1	0
	Z-бозон	1	0
сильное	глюоны	1	0
взаимодействие, генерирующее массу	бозоны Хиггса	0	очень тяжелые
гравитация	невозможно поймать?	2	0

обменом *гравитонами* с нулевой массой. Глюоны, подобно кваркам, оказываются «запертыми»: их нельзя наблюдать в свободном состоянии. Заряженные *W*- и нейтральные *Z*-бозоны были открыты в 1983 году в Европейском центре ядерных исследований (ЦЕРНе). Последний из фундаментальных бозонов в нашем «зоопарке» — это бозон Хиггса — ускользающая и все еще гипотетическая частица, ответственная за возникновение массы у элементарных частиц. Мы надеемся обнаружить ее на суперускорителе на встречных пучках, строящемся в Техасе.

Адроны. В 1962 году советский физик Л. Окунь воспользовался греческим словом «адрос», означающим «толстый и тяжелый», выбирая название для всякой внешне элементарной частицы, которая подобно протону (но не электрону) принимает участие в сильном ядерном взаимодействии. Сейчас адроном называют любую частицу, составленную из кварков. Три кварка, соединенные вместе, образуют *барион*, кварк, связанный с антикварком, образует *мезон*, а три антикварка образуют *антибарион*. Мы перечислили все известные способы, с помощью которых кварки, соединяясь, образуют адроны. Барионы и антибарионы, поскольку они состоят из нечетного числа фермионов, сами являются фермионами. Напротив, мезоны — это бозоны.

Нуклоны. Это слово применяется с 1941 года для обозначения и нейтронов, и протонов. Атомное ядро с атомным номером *Z* содержит *A* нуклонов, из них *Z* протонов. Ядра с одинаковыми Z, но разными A называют *изотопами.* Нуклоны — это фермионы. Они — самые легкие барионы, состоящие исключительно из u- и d-кварков: два u- и один d-кварк образуют протон, а два d-кварка и один u-кварк — нейтрон. Около 99,98 % массы обычного вещества состоит из нуклонов. Остальное — это электроны.

Пионы и мюоны. В начале 1930-х годов Хидеки Юкава предположил, что ядерные силы возникают в результате того, что нуклоны обмениваются гипотетическими элементарными частицами. Он дал своим частицам имя «мезотроны» (вскоре укоротившееся до «мезоны»), поскольку они были по массе промежуточными между электронами и нуклонами. Частицы с такими массами были найдены в конце 30-х годов, но оказались мюонами. Частицы Юкавы были, наконец, открыты в 1947 году. Как и мюоны, они впервые наблюдались в космических лучах. Много других видов мезонов было открыто с тех пор. Мезоны Юкавы стали известны как π-мезоны, или пионы. Они не являются элементарными частицами: как и все мезоны, они состоят из кварка и антикварка.

Топ-кварк. Наша теория требует, чтобы такая частица существовала и «весила» не более двухсот протонов. Экспериментаторы еще не нашли ее. Они уверены, что она должна быть тяжелее, чем сто протонов, иначе бы ее уже открыли. Эта щель медленно сужается: я предсказываю, что «топ» (последний из кварков!) будет найден в течение двух лет физиками, работающими в Ферми-лаборатории на протон-антипротонном ускорителе на встречных пучках.

Нейтрино. Нейтрино, полученные в ядерном реакторе, впервые наблюдались в 1953 году. С тех пор физики наблюдали нейтрино, полученные на ускорителях, в космических лучах, в ядерной печи Солнца и при взрыве последней «соседней» сверхновой в 1987 году (она взорвалась «всего лишь» на расстоянии 160 тысяч световых лет). Некоторые ученые полагают, что нейтрино имеют массу и что загадочное черное вещество Вселенной состоит из сгустков нейтрино, оставшихся от Большого Взрыва.

Перевод с английского И. Вахуриной

Нам пишут

Почему нить все-таки будет двигаться?

Наверное, многие знают, как иногда бывает непросто в хорошо известном явлении заметить что-то новое. Рассмотрим с этой точки зрения одну задачу из школьного курса физики (см. «Физику-9», с. 106).

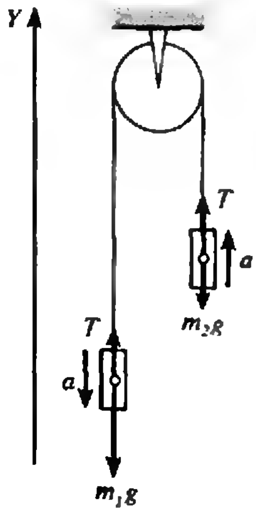
Задача. *Через неподвижный блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены грузы массами m_1 и m_2, причем $m_1 > m_2$. Считая, что массы нити и блока малы сравнительно с массами m_1 и m_2, найдите ускорение грузов.*

Решение этой задачи общеизвестно. Направим ось Y вертикально вверх и обозначим через m_1g, m_2g и $\vec{T}$ силы тяжести грузов и натяжение нити (см. рисунок). Так как $m_1 > m_2$, система грузов движется в направлении против часовой стрелки с ускорением a. В соответствии со вторым законом Ньютона, запишем уравнения движения каждого груза в проекциях на выбранную ось:

$$-m_1a = -m_1g + T,$$
$$m_2a = -m_2g + T.$$

Вычитая почленно из второго уравнения первое, получаем

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g.$$



И окончательно находим

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g.$$

(Окончание см. на с. 43)

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЧИСЛА 30

Г. РАДЕМАХЕР,
О. ТЕПЛИЦ

Эта статья представляет собой незначительно переработанную главу из замечательной книги известных немецких математиков Ганса Радемахера и Отто Теплица «Числа и фигуры», вышедшей в свет в 1930 году.

В нашей стране она была переведена, вышла тремя изданиями в 1936, 1938 и 1962 годах и сейчас является библиографической редкостью.

В свое время эта книга, состоящая из 27 популярных очерков, посвященных различным вопросам математики, оказала большое влияние на несколько поколений школьников, увлеченных математикой, и помогла многим из них стать профессиональными математиками.

Постановка задачи

Как 10, так и 21 — числа не простые, но среди множителей, на которые разлагаются эти числа, нет ни одного такого, который содержался бы одновременно в обоих этих числах. Поэтому числа 10 и 21 называют взаимно простыми. Числа 6 и 10 нельзя назвать взаимно простыми, так как у них есть общий множитель 2.

Число 10 — взаимно простое со следующими меньшими его числами в пределах от 1 до 9: 3, 7, 9; из них 9 — число не простое, хотя оно и взаимно простое с 10. Иначе обстоит дело с числом 12. Здесь из ряда чисел в пределах от 1 до 11 взаимно простыми с 12 являются: 5, 7, 11, т. е. только простые числа.

Кроме числа 12, тем же самым свойством, как это легко обнаружить путем несложной проверки, обладают и числа 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30.

Путем проб никаких других чисел этого типа обнаружить не удается. Возникает вопрос: является ли 30 последним числом, обладающим тем свойством, что все взаимно простые с ним и меньшие его числа являются простыми? Докажем, что это именно так.

Начнем с одного чрезвычайно простого замечания. Начиная с 4, любое число N рассматриваемого вида должно делиться на 2, ибо если бы оно было нечетным, оно было бы взаимно простым с числом 4, не являющимся простым. Точно так же число N, большее 9, должно делиться по тем же самым соображениям на 3, а так как оно, сверх того, делится на 2, значит, оно делится и на $2 \cdot 3 = 6$. Продолжая рассуждения дальше, получим такую таблицу:

Начиная с 4, число N должно делиться на	$2 = 2$
Начиная с 9, число N должно делиться на	$2 \cdot 3 = 6$
Начиная с 25, число N должно делиться на	$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$
Начиная с 49, число N должно делиться на	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$
Начиная с 121, число N должно делиться на	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310.$

Между 4 и 9 остается исследовать только 4, 6, 8, между 9 и 25 — лишь 12, 18, 24, между 25 и 49 — только 30 (60 — ближайшее следующее число, делящееся на 30, уже превышает 49), между 49 и 121 — ни одного числа, так как 210 уже больше 121 (30 было еще меньше 49). Подобным же образом можно было бы продолжить наши рассуждения дальше, и мы немедленно доказали бы высказанное выше утверждение, если бы знали, что обнаруженная нами закономерность останется в силе и в дальнейшем, т. е. если 13^2 будет меньше произведения $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, если 17^2 будет меньше произведения $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, и вообще, если при $n > 4$

$$p_{n+1}^2 < p_1 p_2 p_3 \dots p_n, \qquad (1)$$

где через p_1, p_2, p_3, ... обозначены последовательные простые числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

Бесконечность количества простых чисел

Идею доказательства неравенства (1) нам подскажет замечательное рассуждение Евклида, позволяющее доказать, что *существует бесконечно много простых чисел.*

Очевидно, достаточно убедиться в том, что для любых первых n простых чисел $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, ..., p_n существует простое число p, большее каждого из них.

Рассмотрим число $M = p_1 p_2 \dots p_n - 1$. Это число больше любого из чисел p_i и не делится ни на одно из них. Поэтому либо M — само просто, либо делится на некоторое простое число p, не совпадающее ни с одним из чисел p_i и, следовательно, большее каждого из них. Пусть p_{n+1} — наименьшее из всех простых чисел, больших p_1, p_2, ..., p_n.

Из сказанного выше вытекает, что число p_{n+1} удовлетворяет неравенству

$$p_{n+1} \leqslant M < p_1 p_2 \dots p_n.$$

Это неравенство, конечно, значительно слабее того, что нам нужно доказать.

Упражнение 1. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел вида а) $4n+3$; б) $6n+5$.

Применение теоремы Чебышёва

Доказывая неравенство (1), мы тем самым решаем поставленную нами проблему. Поэтому мы и займемся сейчас лишь доказательством соотношения (1), которое и само по себе достаточно интересно.

В действительности удовлетворяется гораздо большее, чем требует неравенство (1): ближайшее простое число, следующее за $p_5=11$, не только меньше чем

$$\sqrt{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11}=\sqrt{2310}=48{,}06\ldots,$$

оно равно всего-навсего 13, и т. д., но при чрезвычайных неправильностях ряда простых чисел необычайно трудно высказать что-либо общее для всего ряда.

Чтобы вы могли себе представить, насколько нерегулярно расположены простые числа в натуральном ряду чисел, отметим, что, с одной стороны, бывают простые числа, такие как 3 и 5, 11 и 13, 17 и 19 ..., разность которых равна двум. Такие пары называются простыми близнецами. Кстати, до сих пор неизвестно, конечно или бесконечно количество этих пар. С другой стороны, имеются сколь угодно длинные участки натурального ряда, вообще не содержащие простых чисел.

Упражнение 2. Докажите, что для любого натурального числа N существуют N последовательных составных чисел. Указание. Рассмотрите числа $(N+1)!+2$, $(N+1)!+3$, ..., $(N+1)!+N+1$.

Весьма сложными вспомогательными средствами П. Л. Чебышёв доказал, что следующее за p_n простое число $p_{n+1}<2p_n$. Это, конечно, значительно сильнее того, что утверждается соотношением (1). Но возникает вопрос, нельзя ли значительно более слабое неравенство (1) доказать просто и притом элементарными средствами.

Упражнения

3. Докажите неравенство (1), пользуясь теоремой Чебышёва.

4. Докажите, что $p_n>3n$ при $n\geqslant 9$.

Предварительный результат

Одному студенту из Мюнстера, Бонзе, в 1907 г. удалось под руководством своего учителя М. Дена*) прийти к чрезвычайно остроумному выводу, который не только не нуждается в тех вспомогательных средствах, которыми пользуется Чебышёв, но и вообще не требует почти никаких математических познаний.

Основная идея доказательства непосредственно связана с доказанной нами теоремой Евклида. Только вместо того, чтобы из n первых простых чисел составлять выражение

$$M=p_1p_2\ldots p_n-1,$$

мы возьмем из всего ряда этих чисел $p_1p_2\ldots p_n$ лишь i членов и вместо одного выражения M образуем из них нижеследующие p_i выражений:

$$\begin{aligned}
M_1&=p_1p_2\ldots p_{i-1}\cdot 1-1,\\
M_2&=p_1p_2\ldots p_{i-1}\cdot 2-1,\\
M_3&=p_1p_2\ldots p_{i-1}\cdot 3-1,\\
M_4&=p_1p_2\ldots p_{i-1}\cdot 4-1,\\
&\ldots\\
M_{p_i}&=p_1p_2\ldots p_{i-1}\cdot p_i-1.
\end{aligned}$$

Относительно этих выражений так же, как и относительно выражений, рассмотренных Евклидом, можно высказать такие утверждения:

а) *ни одно из этих выражений не делится ни на одно из чисел* $p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}$;

б) *из всех этих выражений не больше, чем одно, может делиться на* p_i. Действительно, если бы какие-либо два из этих выражений, например $p_1\ldots p_{i-1}x-1$ и $p_1\ldots p_{i-1}y-1$, делились на p_i, то делилась бы на p_i и разность этих выражений $p_1\ldots p_{i-1}(x-y)$, а так как ни один из первых $i-1$ множителей на p_i не делится, на него должна была бы делиться разность $x-y$. Но x и y суть какие-то из чисел ряда 1, 2, 3, 4, ..., p_i, и разность двух таких чисел, даже когда меньшее из них равно 1, а большее p_i, равна всего лишь p_i-1 и, следовательно, во всяком случае меньше p_i. Таким образом, поскольку меньшее число не может иметь множителем большее число, разность $x-y$ не делится на p_i;

в) точно так же *только одно из этих выражений может делиться на* p_{i+1}, *только одно из них может делиться на* p_{i+2} *и т. д., только одно из них может делиться на* p_n.

---

*) Макс Ден (1878—1952 гг.) — немецкий математик, работал в области геометрии, алгебры, топологии.

Мы приходим к первому важному заключению: если количество чисел $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n$ меньше, чем число выражений $M_1, \ldots, M_{p_i}$, т. е., иными словами, если

$$n-i+1<p_i, \qquad (2)$$

то среди выражений M имеется по крайней мере одно, *не делящееся ни на одно из чисел* $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n$, так как каждое из простых чисел $p_i, p_{i+1}, \ldots, p_n$ входит множителем, самое бо́льшее, лишь в одно из выражений $M_i, \ldots, M_{p_i}$.

В силу утверждения а), в это выражение не может также входить множителем ни одно из чисел $p_1, \ldots, p_{i-1}$, и мы приходим к выводу, что оно *не делится* вообще *ни на одно из первых n простых чисел*. Пусть это будет выражение M_k. Теперь доказательство в точности следует образцу евклидовой методики. Выражение M_k или само должно быть простым числом, и в таком случае оно обязательно должно быть больше p_n, или оно разлагается на несколько простых множителей, среди которых, однако, не может встретиться ни одного множителя из ряда $p_i, \ldots, p_n$ и которые все, следовательно, должны быть больше p_n. Но как бы то ни было, должно существовать некоторое простое число, бо́льшее p_n, входящее множителем в M_k или равное ему, и следовательно, не бо́льшее M_k. Так как из всех выражений M наибольшим является M_{p_i}, то очевидно, что наше число во всяком случае не превышает M_{p_i}. Мы не утверждаем при этом, что определенное таким образом число есть как раз ближайшее, следующее за p_n, т. е. p_{n+1}. Но если это и не так, то оно во всяком случае еще больше чем p_{n+1}, и потому p_{n+1} тем более не может превышать M_{p_i}:

$$p_{n+1} \leqslant p_1 \ldots p_{i-1} p_i - 1 < p_1 \ldots p_i.$$

Предварительный результат исследования сводится, таким образом, к следующему: *если имеет место соотношение (2), то справедливо неравенство:*

$$p_{n+1} < p_1 \ldots p_i. \qquad (3)$$

Уточнение оценки

Нами получено, очевидно, усиление того, что дает доказательство Евклида:

$$p_{n+1} < p_1 \ldots p_n,$$

Так как i меньше n, то правая часть неравенства (3) уменьшена по сравнению с неравенством Евклида. Спрашивается лишь, как велико это уменьшение. Действительно, условие (2) не позволяет нам брать для i произвольно малые значения, i должно быть настолько велико, чтобы количество чисел $p_i, \ldots, p_n$, равное $n-i+1$, было меньше p_i, т. е. первого из них. Постараемся получить представление о значении этого условия на одном простом примере.

Пусть $n=5$: это значит, что мы будем иметь дело только с 5 первыми простыми числами 2, 3, 5, 7, 11. Выберем для i значение 2, тогда $p_i=3$, и группа чисел $p_i, \ldots, p_n$ будет состоять из чисел 3, 5, 7, 11, причем число их $n-i+1=5-2+1=4$ будет больше $p_i=3$, т. е. первого из них. Оказалось, таким образом, что мы выбрали для i чересчур низкое значение. Возьмем для i значение на 1 большее: $i=3$, тогда $p_i=5$ и чисел $p_i, \ldots, p_n$ будет у нас уже только 3, именно 5, 7, 11, и это количество 3 действительно меньше первого из этих трех чисел, именно 5. То, что всякое бо́льшее значение i тем более должно удовлетворять требованию (2), не нуждается ни в каких пояснениях.

Положение, которое мы хотим теперь доказать, формулируется следующим образом: *если выбрать для i возможно меньшее значение, удовлетворяющее условию* (2), *то имеет место соотношение:*

$$p_1 \ldots p_i < p_{i+1} \ldots p_n. \qquad (4)$$

Завершение доказательства

Неравенство (4) верно при $n=5$, ибо, как это видно из непосредственного вычисления, $2 \cdot 3 \cdot 5 < 7 \cdot 11$. Чтобы выяснить, остается ли оно справедливым и дальше, нам нужно представить себе яснее, каким образом происходит выбор наилучшего i при возрастающем n.

Если от $n=5$ мы перейдем к $n=6$, т. е. будем рассматривать первые 6 простых чисел, то очевидно, что для p_i мы можем сохранить прежнее значение 5. Действительно, $n-i+1$ было меньше чем 5 на 2 единицы. Если теперь к числам группы присоединить еще число 13, величина $n-i+1$ возрастает до 4, но все же останется меньше чем $p_i=5$. Только когда мы перейдем к $n=7$ и наша группа будет заключать в себе 5 чисел (присоединится число 17), это число окажется не меньше $p_i=5$. Здесь, следовательно, значение i должно быть увеличено на 1, и тогда $p_i=7$. При этом группа может заключать до 6 чисел, т. е. числа $7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$. Выбор $p_i=7$ достаточен, следовательно, для ближайших следующих трех шагов, т. е. для $k=7, 8, 9$; далее мы должны взять $p_i=11$ и, так как на этот раз ближайшее следующее за 7 простое число больше его не на 2, а на 4 единицы, этот выбор будет достаточен не для 3 ближайших следующих шагов, а уже для 5. Лучше всего понять эти соотношения из нижеприведенной таблицы, в которой p_i выделены жирным шрифтом:

$n=$ 5: 2, 3, **5**, 7, 11
$n=$ 6: 2, 3, **5**, 7, 11, 13
$n=$ 7: 2, 3, 5, **7**, 11, 13, 17
$n=$ 8: 2, 3, 5, **7**, 11, 13, 17, 19
$n=$9: 2, 3, 5, **7**, 11, 13, 17, 19, 23
$n=$10: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29
$n=$11: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31
$n=$12: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37
$n=$13: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41
$n=$14: 2, 3, 5, 7, **11**, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43
$n=$15: 2, 3, 5, 7, 11, **13**, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

. . . .

Выяснив, каким образом происходит выбор наилучшего i при возрастающем n, проверим теперь справедливость высказанного выше положения (4). То, что оно остается верным и для $n=6$, не вызывает сомнений, ибо если

$$2 \cdot 3 \cdot 5 < 7 \cdot 11, \tag{5}$$

то и

$$2 \cdot 3 \cdot 5 < 7 \cdot 11 \cdot 13, \tag{6}$$

так как при переходе от $n=5$ к $n=6$ i осталось прежним.

При переходе от $n=6$ к $n=7$ положение вещей меняется. В левой части здесь появляется множитель 7, в правой — 17. Необходимо выяснить, справедливо ли неравенство

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 < 11 \cdot 13 \cdot 17. \tag{7}$$

Решить это непосредственно на основании неравенства (6) без вычислений мы не можем. Неравенство (6) останется, однако, верным, если слева присоединить к нему множитель 7, а справа 17; мы получаем тогда неравенство

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 < 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17,$$

в котором справа имеется нежелательный множитель 7. Если мы примем за основу не (6), а (5), то неравенство (7) сможем получить из него без всяких вычислений. Для этого в левую часть неравенства (5) внесем множители $7 \cdot 7$, а в правую — $13 \cdot 17$; тогда получим $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 < 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$. Сократив на 7, находим искомое неравенство (7).

Эти рассуждения были связаны с переходом от $n=6$ к $n=7$, но так как на всех этапах нашего доказательства мы обошлись без каких бы то ни было вычислительных операций, то ясно, что это доказательство пригодно в равной мере и для всякого последующего перехода. Основывается оно на том простом факте, что при возрастании n число i, как это ясно видно из нашей таблицы, никогда не подвергается увеличению два раза последовательно в двух соседних переходах,— всякий раз при этом происходит «передышка», охватывающая в действительности не только два, но и три (а часто и больше) перехода. Соотношение, аналогичное (7), имеет место и при всяком i.

Упражнение 5. Проведите соответствующее рассуждение.

Умножив обе части неравенства (4) на $p_1 \ldots p_l$, получим

$$(p_1 \ldots p_l)^2 < p_1 \ldots p_n, \text{ или } p_1 \ldots p_l < \sqrt{p_1 \ldots p_n}.$$

Сопоставив этот результат с неравенством (3), получим соотношение (1), которое нам и требовалось доказать.

Нужно еще добавить, что этот же метод позволяет доказать, что для $n > 5$ имеет место более сильное неравенство: $p_{n+1} < \sqrt[3]{p_1 \ldots p_n}$. Мы надеемся, что читатели выведут его, пользуясь тем, что «передышка», на которой было основано наше доказательство, охватывает всегда по крайней мере три перехода вместо использованных двух, что позволяет распространить наш вывод и на кубический корень. В то же время абсолютно ясно, что распространять его непосредственно таким же образом дальше нельзя.

Читатель согласится, конечно, с тем, что все это доказательство требует совсем небольших познаний из обычной школьной математики и апеллирует лишь к голому рассудку. Тем яснее оно показывает, сколь внутренне богатой, сколь трудной может быть математика не только в силу многообразия отдельных областей, сочетаемых и надстраиваемых ею для достижения единой цели, но и в тех случаях, когда, отрекаясь порой от этого многообразия, исходя из самых простых данных (как в разобранном случае — из понятия простого числа), она создает построения, поражающие своей глубиной.

Публикацию подготовил А. Егоров

Игры и головоломки

Из куба — тетраэдр

Участники международной конференции по синергетике, проходившей в 1990 году в Будапеште, уже успели утомиться от докладов. И тут на кафедру поднялся молодой японский ученый Ясуги Каякава. Зал оживился, когда он принялся вытаскивать из портфеля изящные конструкции, изготовленные из пластмассовых трубочек, которые в его руках начали трансформироваться в другие занятные формы.

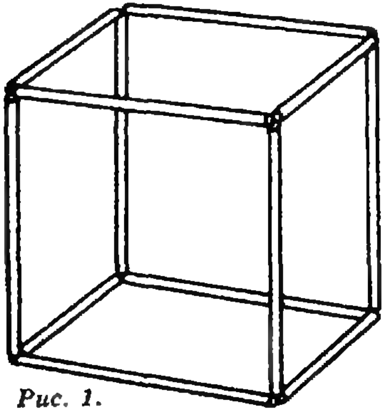


Рис. 1.

Предлагаем одну из задач Каякавы, которую вполне можно считать новой головоломкой. Составьте из соломинок для коктейля и лески остов куба, пропуская леску через соломинки (рис. 1). (Мне для изготовления этой конструкции понадобилось всего три минуты.) А теперь попробуйте преобразовать полученную модель в остов тетраэдра, причем так, чтобы на каждом его ребре оказалось по две соломинки (рис. 2).

Я. Каякаве удалось доказать, что остов всякого полуправильного многогранника (что это такое, описано, например, в первом номере нашего журнала за 1978 г. в статье «Модели многогранников») можно преобразовать либо в остов тетраэдра, либо в остов октаэдра. Попробуйте сами доказать, что остов октаэдра нельзя преобразовать в остов тетраэдра (хотя октаэдр, как и куб, имеет 12 ребер).

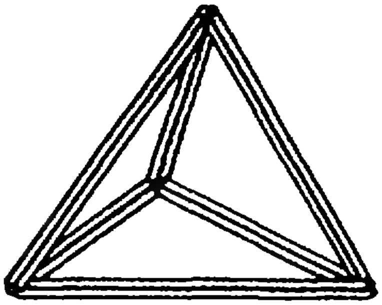
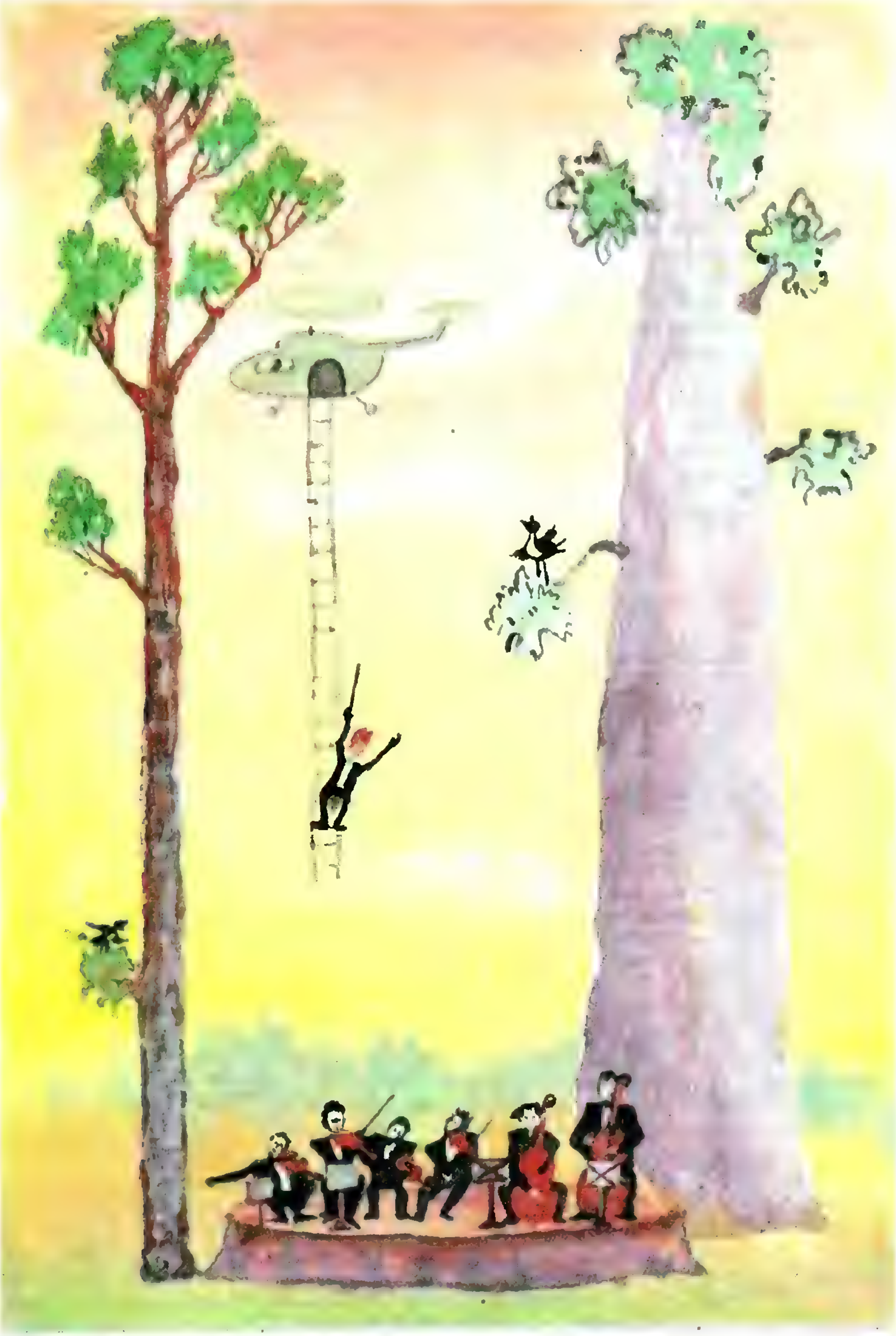


Рис. 2.

А. Савин



О ВЫСОКИХ ДЕРЕВЬЯХ

(статистика и простые оценки)

Кандидат физико-математических наук

А. МИНЕЕВ

Как мы знаем, деревьев высотой, например, в 1 км не существует. Трудно представить себе очень высокое, но тонкое дерево, или маленькое и очень толстое. От чего зависит высота дерева? Существуют ли какие-нибудь количественные закономерности, связывающие толщину и высоту дерева? И если существуют, можно ли их понять и объяснить с помощью простых физических оценок?

Обратимся к книгам, в которых можно найти сведения о высотах (h) и диаметрах (d) у основания ствола различных деревьев. Такая информация есть, например, в книгах Б. Д. Алексеева «Гиганты и карлики растительного мира» (М., 1987) и «Древесные растения главного ботанического сада АН СССР» (М., 1975).

А теперь изобразим эти данные на графике в координатах d^{-1} и h/d (рис. 1). Проведем также несколько прямых, ограничивающих нашу статистику: горизонтальную $h/d=50$ и наклонные вида $h/d \sim d^{-1}$, т. е. линии постоянной высоты.

Видно, что все многообразие земных древесных растений подчиняется некой закономерности. Чтобы разобраться в этом, сформулируем несколько очевидных вопросов. Итак, почему:

— для достаточно толстых деревьев с диаметром у основания $d>0{,}4$—$0{,}5$ м (слева от точки *Б*) отношение h/d ограничено

$$(h/d)_{\max}=50?$$

— для более тонких деревьев, $d<0{,}2$ м, значение h/d может превышать 50, но только до определенной высоты дерева ~ 10—20 м?

— максимальная высота деревьев на Земле

$$h_{\max}<100—150 \text{ м?}$$

1. Механика (прочность и упругость)

Начнем с середины и займемся горизонтальной линией *АБ* на рисунке 1: $(h/d)_{\max}=50$. В чем причина этого ограничения?

Естественно предположить, что слишком стройные деревья с большим значением отношения h/d не выдерживают нагрузок и ломаются. Действительно, одним из основных параметров, определяющим максимальное значение h/d, является прочность дерева.

Рассмотрим ограничения, связанные с прочностью, в идеальном случае — вертикально стоящее дерево (а) и в двух вариантах приближения к реальной картине — дерево, наклоненное под углом к вертикали, (б) и дерево под действием ветра (в).

Чтобы упростить оценки, примем, что дерево представляет собой сплошной цилиндр диаметром d и высотой h. Для плотности дерева и предельных допускаемых напряжений в нем возьмем справочные значения

$$\rho\approx 500 \text{ кг/м}^3 \text{ и } \sigma_{\text{доп}}\sim 10^7 \text{ Н/м}^2.$$

а) Строго вертикальное дерево. Для вертикально стоящего дерева максимальные напряжения совпадают с давлением у его основания:

$$\sigma=\rho g h,$$

где $g=10$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Подставляя указанные выше значения $\sigma_{\text{доп}}$ и ρ, получим оценку сверху для высоты строго вертикального дерева

$$h_{\max}=2 \text{ км!}$$

Многовато! По-видимому, случай высоких вертикальных деревьев не реализуется в природе.

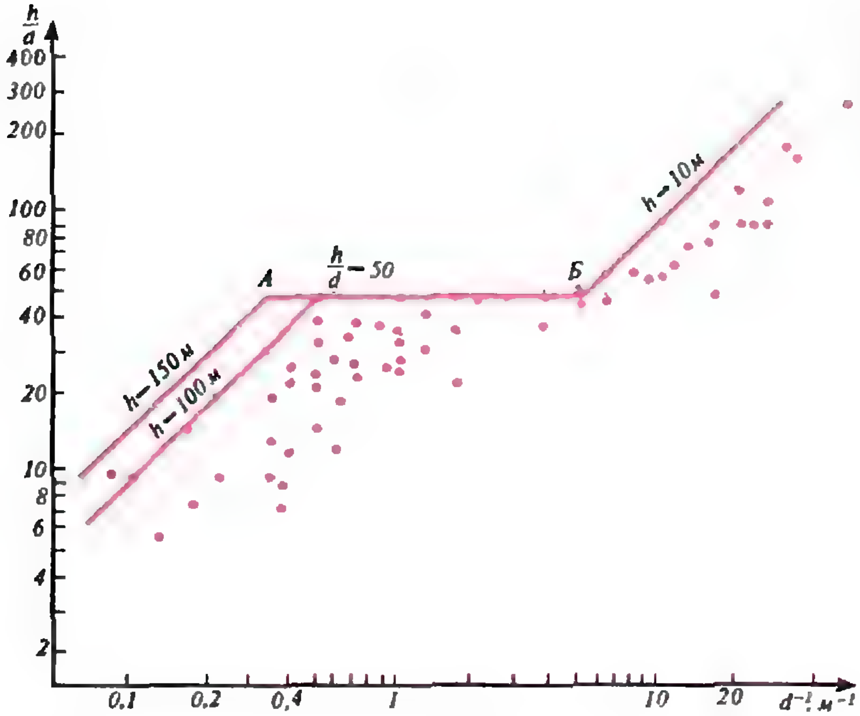


Рис. 1. Зависимость относительной высоты дерева h/d от его диаметра d. Слева на графике — самые толстые деревья, справа — самые тонкие.

б) Дерево, наклоненное к земле. Сделаем шаг к реальности — наклоним дерево. Это приведет к появлению момента сил тяжести, действующих на основание (рис. 2):

$$M_1 = mg\frac{h}{2}\sin\alpha,$$

где $m = \varrho h\pi d^2/4$ — масса ствола дерева, α — угол наклона дерева к вертикали.

В равновесии M_1 компенсируется моментом сил упругости в дереве M_2, который для оценки запишем в виде

$$M_2 = l_2 F_2,$$

где l_2 и F_2 — характерные плечо и сила. Как видно из рисунка 2, плечо l_2 порядка радиуса дерева у основания ($r = d/2$), а силу оценим в виде произведения среднего напряжения σ у основания на площадь основания дерева:

$$F_2 \sim \sigma r^2,$$

откуда

$$M_2 \sim \sigma r^3.$$

Точное выражение для момента M_2 близко к этой оценке и составляет

$$M_2 = \frac{\pi}{4}\sigma r^3 = \frac{\pi}{32}\sigma d^3.$$

Приравняв M_1 и M_2, получим

$$\frac{h}{d} = \frac{\sigma}{4\varrho gh\sin\alpha}.$$

Подставим значение плотности и предельно допускаемого напряжения, тогда

$$\left(\frac{h}{d}\right)_{\max} \approx \frac{500}{h\sin\alpha} \text{ или } \left(\frac{h}{d}\right)_{\max} \approx \frac{22}{\sqrt{d\sin\alpha}}.$$

Видно, что большие углы наклона допустимы только для невысоких деревьев. Так, при $h/d \sim 50$ и $h \sim 30$ м (среднее дерево) допустимое

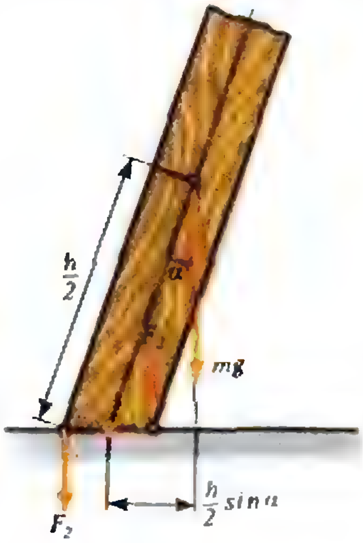


Рис. 2. Моменты сил, действующие на наклоненное дерево.

отклонение от вертикали $\sim 20°$ ($\sin\alpha < 0{,}3$), а для самых больших деревьев высотой ~ 100 м — только $3°$ ($\sin\alpha < 0{,}1$). Поэтому дерево, выросшее высоким, обязано быть либо почти строго вертикальным, либо достаточно толстым. Если в силу каких-то причин отклонение приблизится к допустимому, дерево или сломается, или будет «вынуждено» утолщать ствол, уменьшая тем самым отношение h/d.

Из полученного соотношения следует, что отклонение дерева от вертикали уже приводит к некоторым ограничениям величины h/d. Однако при малых отклонениях величина $(h/d)_{\max}$ может быть очень большой. При больших же значениях $\sin\alpha$ (кустарник или дерево с хорошо развитой кроной) ограничено не только отношение h/d, но и сама высота дерева h. Так, если положить $\sin\alpha \sim 0{,}3$—$0{,}5$, то получим

$$h_{\max} \approx (30—40)d^{1/2}.$$

Эта зависимость изображена на рисунке 3. Видно, что даже для очень толстых деревьев (дуб, баобаб с толщиной у основания $d \sim 2$—3 м) высота дерева не должна превышать 40—50 м.

в) Дерево и ветер. Ветер также приводит к появлению опрокидывающего момента и напряжений в дереве.

Примем для скорости сильного ветра значение $v \sim 30$ м/с (~ 100 км/ч). Для таких больших скоростей сила воздействия потока воздуха на ствол дерева может быть записана в виде произведения давления потока набегающего воздуха на характерную площадь:

$$F_{в} \sim p_{в} S_{x}.$$

Давление $p_{в}$ может зависеть только от параметров воздушного потока: плотности $\varrho_{в}$ и скорости движения v. Из соображений размерности

$$p_{в} \approx \varrho_{в} v^2.$$

Характерную площадь дерева S_x представим в виде

$$S_x = S k_{ф},$$

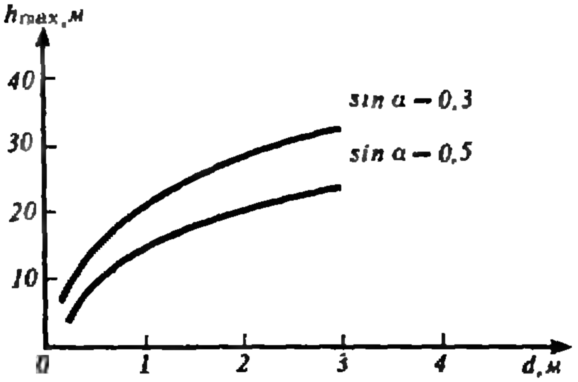


Рис. 3. Зависимость максимальной высоты дерева, наклоненного под углом α, от диаметра ствола.

где $S = dh$ — площадь сечения, перпендикулярного потоку воздуха, $k_{ф}$ — коэффициент формы, характеризующий отклонение S_x от S. Для деревьев с небольшой кроной $0{,}5 < k_{ф} < 1$, при большой и густой кроне $k_{ф} > 1$.

Теперь для силы воздействия ветра можно записать

$$F_{в} \approx \varrho_{в} v^2 d h k_{ф}.$$

Возникающий опрокидывающий момент оценим как

$$M_{в} = F_{в} \frac{h}{2}.$$

Воспользовавшись связью между опрокидывающим моментом и возникшими в дереве напряжениями, получим ограничение

$$\left(\frac{h}{d}\right)_{\max} \approx \sqrt{\frac{\pi}{16 k_{ф}}} \sqrt{\frac{\sigma_{доп}}{\varrho_{в} v^2}}.$$

После подстановки значений параметров $\sigma_{доп} \sim 10^7$ Н/м^2, $\varrho_{в} \sim 1{,}3$ кг/м^3, $v \sim 30$ м/с найдем

$$\left(\frac{h}{d}\right)_{\max} \approx \frac{40}{\sqrt{k_{ф}}}.$$

Таким образом, сильный ветер может объяснить природу плато *АБ* на рисунке 1. Отметим, что из параметров дерева в правую часть выражения для $(h/d)_{\max}$ входит только отношение $\sigma_{доп}/k_{ф}$, да и то зависимость от него не сильная.

Посмотрим теперь на наиболее «стройную», правую часть рисунка 1, соответствующую молодым деревьям

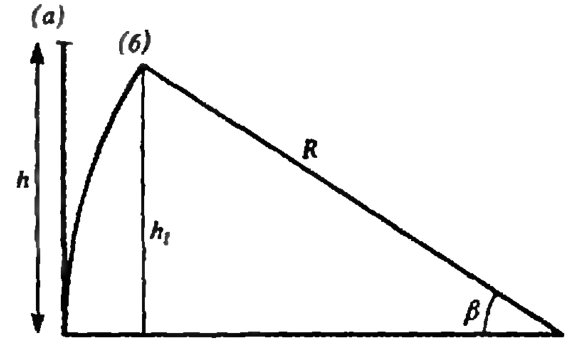


Рис. 4. Вертикальное (а) и изогнутое (б) деревья.

с небольшим диаметром основания. Почему для них возможно увеличение отношения h/d до 100, 200 и даже 300?

Приглядимся к формуле $(h/d)_{\max}\sim\sim\sqrt{\sigma_{\text{доп}}/(k_{\text{ф}}v^2)}$. Первое, что приходит на ум,— эти деревья частично защищены от сильного ветра более высокими деревьями, а $(h/d)\sim v^{-1}$. Кроме того, у молодых деревьев часто относительная площадь кроны небольшая, т. е. величина $k_{\text{ф}}\sim 0{,}5—1$. Все вместе это может объяснить увеличение $(h/d)_{\max}$ при небольших значениях диаметра ствола.

Но почему излом зависимости $h/d=f(d)$ (точка *Б* на рисунке 1) происходит при значении высоты дерева $h\sim 10—20$ м? По-видимому, это характерное значение высоты, при которой дерево еще может сильно изгибаться или отклоняться по вертикали. Действительно, допустим, что ветер наклонил дерево так, что $\sin\alpha\sim 0{,}3—0{,}5$. Тогда получим, что отношение h/d становится равным 50 как раз при высоте дерева $h\sim 10—20$ м.

Устойчивость формы. Приведем несколько оценок по устойчивости формы ствола, основание которого закреплено в земле. Допустим, что под действием внешних сил ствол дерева слегка изогнулся. Это, во-первых, приведет к запасанию энергии в виде упругой деформации ствола $U_{\text{д}}$ а во-вторых — к уменьшению потенциальной энергии $\Delta U_{\text{п}}$ за счет понижения центра тяжести.

Понятно, что должно выполняться условие

$$\Delta U_{\text{п}}\leqslant U_{\text{д}}$$

Иначе изгиб будет нарастать, и ствол сломается. Сформулируем ограничение, следующее из этого условия. Для этого изогнем постоянный по сечению ствол дерева. Интуитивно кажется, что при малом изгибе он примет форму дуги окружности.

Найдем изменение потенциальной энергии стержня: $\Delta U_{\text{п}}=mg(h-h_1)$. Здесь mg — масса дерева, h — высота вертикального ствола, h_1 — изогнутого. Величины h и h_1 изображены на рисунке 4, из которого виден и способ их вычисления:

$h=R\beta$, $h_1=R\sin\beta$ (β — в радианах).

Таким образом,

$$\Delta U_{\text{п}}=mgR(\beta-\sin\beta).$$

В случае малых изгибов ($\beta\ll 1$) можно показать, что $\sin\beta\approx\beta-\beta^3/6$. Это дает

$$\Delta U_{\text{п}}\approx\frac{mgR\beta^3}{6}\approx\frac{mgh^3}{6R^2}.$$

Оценим теперь потенциальную энергию, запасаемую в стержне (стволе) при малом изгибе. Заметим, что изгиб тонкого стержня ($d\ll h$) сводится к простым деформациям поперечного сечения: сжатию и растяжению. Такие напряжения σ в поперечном сечении можно определить по формуле Гука

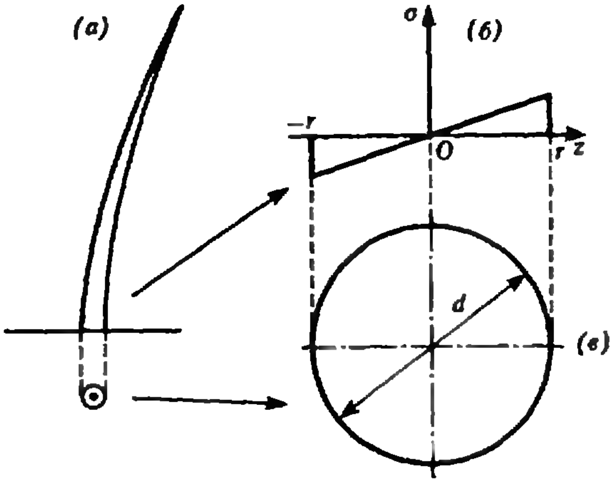
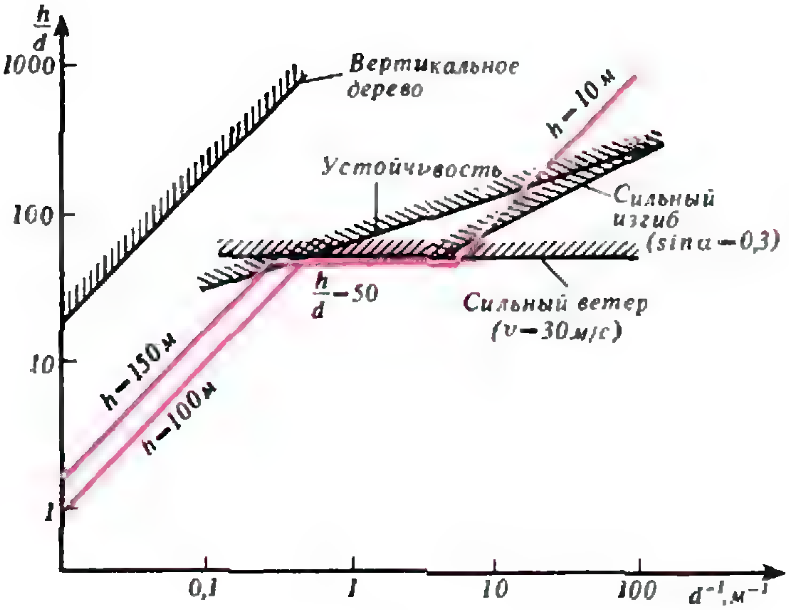


Рис. 5. Изогнутое дерево (а). Зависимость напряжения σ в дереве от радиуса r (б). Сечение ствола, вид сверху (в).

Рис. 6. Ограничения, связанные с механическими параметрами дерева



$$\sigma = \varepsilon E,$$

где E — модуль упругости, ε — относительная деформация — удлинение или сжатие. В нашем случае

$$\varepsilon = Z/R,$$

где Z — величина абсолютной деформации. Слои дерева, располагающиеся справа от точки O (рис. 5), испытывают сжатие, слева — растяжение. Положение точки O («нейтральной») в тонких стержнях — посередине поперечного сечения.

Энергия деформации в единице объема может быть оценена как произведение удельной силы на удельное перемещение:

$$F\frac{\Delta l}{V} = \frac{F}{S}\frac{\Delta l}{l} = \sigma\varepsilon.$$

Во всем объеме ствола дерева V энергия упругой деформации $U_д \approx \sigma_м \varepsilon_м V$, где $\sigma_м$ и $\varepsilon_м$ — напряжение и относительная деформация на середине радиуса. Поскольку

$\sigma_м = \varepsilon_м E$, $\varepsilon_м = r/(2R)$, $V = \pi r^2 h$, $r = d/2$,

получим

$$U_д \approx \frac{d^2}{16R^2} EV = \frac{\pi}{64}\frac{d^4 hE}{R^2}.$$

Таким образом, приходим к следующему ограничению:

$$\frac{h}{d} \leqslant \left(\frac{3}{8}\frac{E}{\rho g h}\right)^{1/2} \text{ или } \frac{h}{d} \leqslant \left(\frac{3}{8}\frac{E}{\rho g d}\right)^{1/3}.$$

При значении модуля упругости, характерном для деревьев, $E \approx 5 \cdot 10^9$ Па и $\rho \sim 500$ кг/м^3 имеем

$$\frac{h}{d} \leqslant \frac{700}{\sqrt{h}} \text{ или } \frac{h}{d} \leqslant \frac{60}{\sqrt[3]{d}}.$$

Предварительные итоги. Что же позволили понять «механические» параметры дерева: прочность и упругость? Не так мало: центральную и правую части на рисунке 1.

На рисунке 6 красным цветом показана исходная кривая, штриховкой — ограничения, связанные с:

- — прочностью вертикально стоящего дерева;
- — сильным изгибом;
- — действием сильного ветра;
- — устойчивостью под действием собственного веса.

Видно, что идеальный случай — вертикально стоящее дерево — фактически не реализуется. Сильный ветер объясняет плато $h/d \approx \text{const}$. Устойчивость формы ствола под действием собственного веса для очень толстых деревьев (d больше нескольких метров) приводит к более жесткому ограничению отношения h/d, чем сильный ветер.

Но природу максимальной высоты деревьев механика не прояснила...

(Окончание следует)

Задачник „Кванта"

Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1331» или «Ф1338». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задача Ф1342 предлагалась на Всероссийской физической олимпиаде 1991 года.

М1331 — М1335, Ф1338 — Ф1342

М1331. Отрезки AK, BM, CN, DL делят квадрат $ABCD$ со стороной 1 на четыре треугольника с площадями S_1, S_2, S_3, S_4 и пять четырехугольников (рис. 1); площадь центрального четырехугольника равна S_0, причем $S_0=S_1+S_2+S_3+S_4$. Докажите равенство

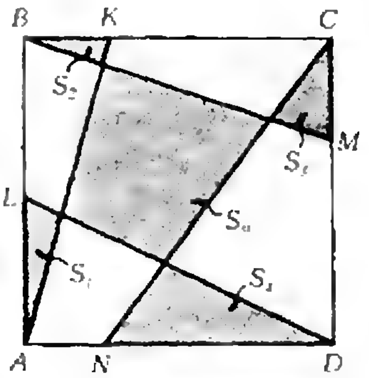


Рис. 1.

$$AL+BK+CM+DN=2.$$

С. Сефибеков

М1332. Из бумаги склеены два одинаковых правильных тетраэдра. Какое наименьшее число ребер этих тетраэдров придется разрезать, чтобы затем склеить их по разрезанным ребрам в один правильный октаэдр?

Б. Бегун

М1333. Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то выполнено неравенство

$$a^2(2b+2c-a)+b^2(2c+2a-b)+c^2(2a+2b-c)\geqslant 9abc.$$

Г. Алиханов

М1334. Можно ли числа 1, 2,..., 10 разбить на два подмножества так, чтобы разность произведений чисел этих подмножеств делилась на 11?

И. Вайнштейн

М1335. n школьников хотят разделить поровну m одинаковых шоколадок, при этом каждую шоколадку можно разломить не более одного раза.

а) При каких n это возможно, если $m=9$?

б) При каких n и m это возможно?

Ю. Чеканов

Задачник «Кванта»

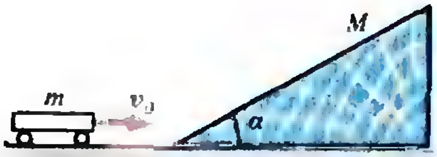


Рис. 2.

Ф1338. На горизонтальной поверхности стола покоится клин массой M с углом наклона α к горизонту (рис. 2). Со скоростью v_0 на него наезжает маленькая тележка массой m. Через какое время тележка съедет с клина? Какое расстояние проедет за это время клин? Въезд на клин сделан так, что тележка движется плавно, без толчков.

З. Рафаилов

Ф1339. Внутри большого мыльного пузыря находится маленький, радиус которого в 10 раз меньше. Воздух снаружи откачивают, после чего радиус большого пузыря увеличивается в 2 раза. Во сколько раз увеличится радиус внутреннего пузыря? Температуру считайте постоянной, влиянием силы тяжести можно пренебречь.

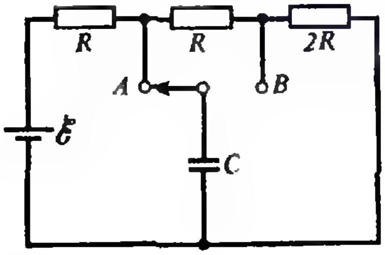


Рис. 3.

Ф1340. В схеме, изображенной на рисунке 3, ключ очень быстро перебрасывают из положения A в положение B и обратно. Найдите среднее значение тока через резистор сопротивлением $2R$. Какой ток течет через батарею? В каждом положении ключ находится одинаковое время.

А. Зильберман

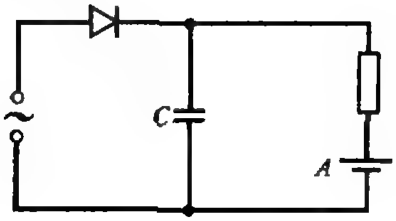


Рис. 4.

Ф1341. В однополупериодном выпрямителе для зарядки аккумулятора A (рис. 4) «высох» электролитический конденсатор большой емкости — его емкость упала во много раз. Во сколько раз увеличится время, необходимое для зарядки аккумулятора? Действующее значение напряжения источника переменного напряжения $U = 15$ В, напряжение аккумулятора $\mathcal{E} = 12$ В. Диод считайте идеальным.

Р. Александров

Ф1342. Если объектив фотоаппарата, имеющий фокусное расстояние $F = 58$ мм и наведенный на бесконечность, направить на Солнце, то при диаметре входного отверстия (диафрагмы) объектива больше, чем $d = 11$ мм, прожигается шторка затвора фотоаппарата. На какое расстояние нужно навести объектив, чтобы даже при существенно большем диаметре входного отверстия его можно было без опаски направлять на Солнце? Видимый с Земли угловой размер Солнца $\alpha = 9{,}3\cdot10^{-3}$ рад. Считайте, что при наведении на бесконечность шторка затвора находится в фокальной плоскости объектива.

М. Гаврилов

Решения задач

М1301 — М1305, Ф1318 — Ф1322

***М1301.* Обязательно ли тетраэдр правильный, если у него:**
а) пять двугранных углов равны друг другу;

Ответ на все три вопроса — отрицательный. Приведем примеры.

а) Легко построить тетраэдр, грани которого — четыре равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами, два из которых имеют угол α при вершине, *б) восемь плоских углов равны друг другу?*

в) Обязательно ли треугольная пирамида ABCD — правильная, если ее основание ABC — правильный треугольник и три плоских угла при вершине D равны друг другу?

два других — углы α при основании. При α, отличном от 60°, этот тетраэдр неправильный, но имеет 5 равных двугранных углов (рис. 1, *а*): ведь два его трехгранных угла с равными α плоскими углами равны и имеют равные двугранные углы (один из них — общий).

б) Из четырех равных равнобедренных (но не равносторонних) треугольников можно склеить «полуправильный» тетраэдр, имеющий 8 равных плоских углов (рис. 1, *б*).

в) Пусть плоские углы при вершине D правильной треугольной пирамиды $BCED$ меньше 60° (рис. 1, *в*).

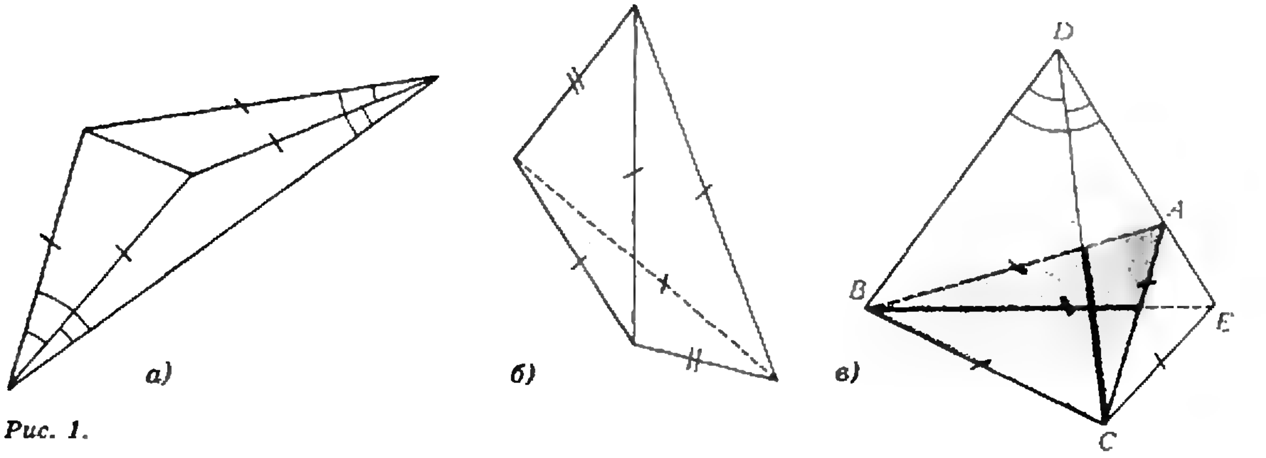


Рис. 1.

На ее ребре DE можно выбрать точку A такую, что $AB=EB$. (В плоскости BDE окружность с центром B и радиусом BE пересекает прямую DE, кроме E, еще в одной точке A, лежащей на отрезке DE). Пирамида $ABCD$ — неправильная, но основание ABC — правильный треугольник: $AB=AC=EB=EC=BC$, а все углы при вершине D равны.

Н. Васильев, В. Сендеров

М1302. *Докажите, что произведение многочлена $(x+1)^{n-1}$ на любой многочлен (отличный от нуля) имеет не менее n отличных от нуля коэффициентов.*

Докажем это по индукции. Для $n=1$ утверждение очевидно. Рассмотрим некоторый многочлен $P(x)$, отличный от нуля, и докажем, что $P(x)(x+1)^n$ имеет не менее $n+1$ отличных от нуля коэффициентов, если это утверждение уже доказано для меньших n. Мы можем, очевидно, считать, что свободный член, т. е. число $P(0)$, отличен от нуля (при умножении на x^k число ненулевых коэффициентов не изменится).

Возьмем производную:

$$(P(x)(x+1)^n)'=(x+1)^{n-1}(P'(x)(x+1)+nP(x)).$$

Второй сомножитель отличен от 0. Тем самым, у производной многочлена $P(x)(x+1)^n$ не менее n ненулевых коэффициентов по предположению индукции. Значит, у этого многочлена не менее $n+1$ ненулевых коэффициентов: свободный член $P(0)$ и еще n.

В. Сендеров

M1303. Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ такие, что (при всех $n>3$)

$$q_n=(q_{n-3}+q_{n-1})/q_{n-2}.$$

Все возможные ответы указаны на полях.

По условию,

$$q_nq_{n-2}=q_{n-3}+q_{n-1}. \qquad (*)$$

Выберем из всех сумм $q_{n-3}+q_{n-1}$ наименьшую. Тогда

$$q_{n-3}+q_{n-1}=q_nq_{n-2}\leqslant q_{n-2}+q_n,$$

что возможно лишь в двух случаях. Либо все числа $q_{n-3}, q_{n-2}, q_{n-1}$ и q_n равны 2, либо среди них встречается 1 (для натуральных чисел $a>1$ и $b>1$ верно неравенство $ab\geqslant a+b$, ибо $(a-1)(b-1)\geqslant 1$).

В первом случае все члены последовательности равны 2 (по данным трем подряд идущим членам последовательности вся последовательность однозначно восстанавливается по формуле (*)).

2, 2, 2, 2, ...
1, 2, 5, 3, 1, 2, ...
1, 3, 5, 2, 1, 3, ...

Эти три последовательности дают ответ (всего девять различных последовательностей).

Во втором случае, т. е. когда $q_m=1$ для некоторого m, докажем, что $q_{m+4}=1$.

Пусть следующие за q_m три числа больше 1. Из соотношений

$$q_{m+3}q_{m+1}=q_m+q_{m+2}=1+q_{m+2}$$

и

$$q_{m+4}q_{m+2}=q_{m+1}+q_{m+3}\leqslant q_{m+3}q_{m+1}=1+q_{m+2}$$

получаем

$$q_{m+2}(q_{m+4}-1)\leqslant 1.$$

1, 1, a, $a+1$, ...
1, a, 1, $2/a$, ...
1, $a+1$, a, 1, ...

Во всех этих случаях $a=2$ или $a=1$.

Это возможно лишь при $q_{m+4}=1$, причем $q_{m+3}q_{m+1}-1=q_{m+3}+q_{m+1}$, откуда $(q_{m+3}-1)(q_{m+1}-1)=2$, т. е. одно из чисел q_{m+3}, q_{m+1} равно 2, а другое — 3. Так мы получим еще два ответа, приведенные на полях (разумеется, возможны любые последовательности, получаемые из них сдвигом).

Остается рассмотреть случаи, когда одно из трех следующих за $q_m=1$ чисел равно 1 и убедиться в том, что при этом последовательность, удовлетворяющая уравнению (*), будет содержать нецелые числа (на полях в возникающих при этом последовательностях число a должно быть делителем двух, что возможно лишь при $a=2$ и $a=1$).

Итак, ответом к этой задаче служат девять последовательностей, указанных на полях.

Второе решение. Мы докажем, что последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая уравнению (*), периодична с периодом 4, т. е. что $q_{n+4}=q_n$ для любого $n\geqslant 1$.

Из (*) при $i\geqslant 4$ следует, что

$$q_{i-3}+q_{i-1}=q_iq_{i-2}$$

и

$$q_{i-1}+q_{i+1}=q_{i+2}q_i.$$

Вычитая из нижнего равенства верхнее, получаем

$$q_{i+1}-q_{i-3}=q_i(q_{i+2}-q_{i-2}).$$

Запишем теперь такие равенства при $i=4, 5, \ldots, n+2$:

$$\begin{aligned} q_5-q_1&=q_4(q_6-q_2),\\ q_6-q_2&=q_5(q_7-q_3), \qquad (**)\\ &\ldots\\ q_{n+3}-q_{n-1}&=q_{n-2}(q_{n+4}-q_n). \end{aligned}$$

Из (**) последовательно получаем:

$$q_5-q_1=q_4q_5(q_7-q_3),$$
$$q_5-q_1=q_4q_5q_6(q_8-q_4),$$
$$\ldots$$
$$q_5-q_1=q_4q_5q_6\ldots q_{n-2}(q_{n+4}-q_n).$$

Поскольку среди любой четверки чисел q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, q_{k+3} обязательно встретится число, не равное 1, все эти равенства возможны лишь при $q_{n+4}=q_n$ при любом $n\geq 4$. Итак, последовательность $\{q_n\}$ обязательно периодична.

Дальнейшее напоминает то, что делалось в первом решении. Ясно, что достаточно найти q_1, q_2, q_3. Имеем

$$q_2+q_4=q_5q_3=q_1q_3,$$
$$q_1+q_3=q_2q_4.$$

Если все числа q_1, q_2, q_3, q_4 не меньше двух, то

$$q_2+q_4=q_5q_3=q_1q_3$$

и

$$q_1+q_3=q_2q_4\geq q_2+q_4=q_1q_3,$$

т. е.

$$q_1+q_3\geq q_1q_3,$$

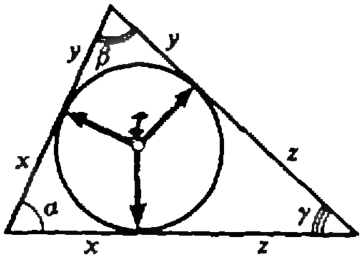
но это возможно лишь тогда, когда все эти числа равны 2. Отсюда получается первое решение — последовательность 2, 2, 2, 2, ...

Осталось последовательно рассмотреть случаи, когда одно из q_i ($i=1$, 2, 3, 4) равно 1, и воспользоваться периодичностью.

О. Алиев, С. Елисеев, У. Нуриев

M1304. *Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC, R — радиус описанной окружности. Докажите, что*

$$R^3\geq IA\cdot IB\cdot IC.$$



Пусть α, β, γ — углы треугольника, x, y, z — отрезки, на которые точки касания с вписанной окружностью разбивают его стороны. Поскольку радиус R равен половине отношения стороны к синусу противоположного угла (теорема синусов), а отрезки IA, IB, IC выражаются через x, y, z и углы из прямоугольных треугольников, требуемое неравенство можно переписать так:

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}\geq\frac{xyz}{\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)},$$

или

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geq 64\,xyz\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2). \qquad (*)$$

С другой стороны, пользуясь теоремой косинусов, получаем

$$\sin^2(\alpha/2)=\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=$$
$$=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}=\frac{yz}{(x+y)(x+z)}.$$

Аналогично,

$$\sin^2(\beta/2)=\frac{xz}{(x+y)(y+z)},$$

$$\sin^2(\gamma/2)=\frac{xy}{(x+z)(y+z)},$$

так что

$$\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2)=\frac{xyz}{(x+y)(x+z)(y+z)}$$

и неравенство (*) превращается в неравенство

$$(x+y)(y+z)(z+x)\geqslant 8xyz,$$

для доказательства которого достаточно перемножить три очевидных неравенства

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy},\ y+z\geqslant 2\sqrt{yz},\ x+z\geqslant \sqrt{xz}.$$

Еще одно решение задачи можно получить, используя равенства

$$IA=r/\sin(\alpha/2),\ IB=r/\sin(\beta/2),\ IC=r/\sin(\gamma/2),$$

$$r=4R\sin(\alpha/2)\sin(\beta/2)\sin(\gamma/2).$$

Имеем:

$$R^2\geqslant 4r^2,\ \text{т. е. } R\geqslant 2r.$$

Это хорошо известное неравенство можно доказать чисто геометрически (например, опираясь на то, что радиус окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC, равный $R/2$, не меньше r).

Н. Васильев, В. Сендеров, А. Соловьев

М1305. *Даны $2n$ различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Таблица $n\times n$ заполнена по следующему правилу: в клетке, расположенной на пересечении i-й строки и j-го столбца, стоит число a_i+b_j. Докажите, что если во всех столбцах произведения одинаковы, то и во всех строках — тоже.*

Степень многочлена

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-(x+b_1)(x+b_2)\ldots(x+b_n)=f(x)$$

меньше n. При каждом j значение $f(-b_j)$ — с точностью до знака $(-1)^n$ это произведение по столбцу — будет одно и то же. Таким образом, многочлен степени меньше n принимает равные значения в n разных точках. Значит, он тождественно равен константе. Но тогда и его значения $f(a_i)$ при каждом i равны той же константе. А это и значит, что произведения по строкам одинаковы (и при этом отличаются от произведений по строкам разве лишь множителем $(-1)^n$).

Д. Фомин

Ф1318. *Велосипедное колесо, отпущенное с высоты $H=1$ м (рис. 1), подпрыгивает на высоту $h=0{,}8$ м. Закрутим теперь колесо до скорости $n=2$ об/с и отпустим с той же высоты. Под каким углом к верти-*

Обозначим скорость падения колеса непосредственно перед ударом о поверхность через v, а скорость сразу после отскока — через u. Изменение импульса колеса по вертикали связано с действием силы нормальной реакции опоры N (рис. 2). По горизонтали на колесо действует сила трения $F_{\text{тр}}$ — она разгоняет центр масс колеса и уменьшает его угловую скорость. Необходимо исследование — прекратится ли *кали оно отскочит от пола? А если увеличить скорость вращения в 2 раза? Еще в 2 раза? Коэффициент трения о горизонтальную поверхность $\mu=0{,}7$, радиус колеса $R=0{,}5$ м.*

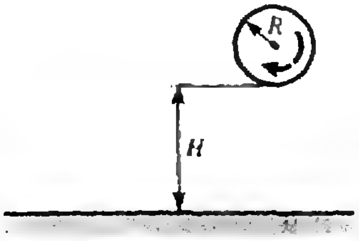


Рис. 1.

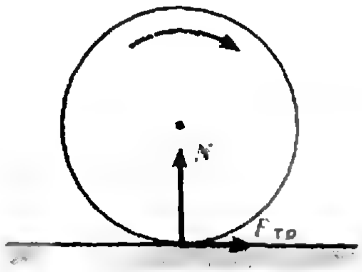


Рис. 2.

проскальзывание нижней точки колеса относительно поверхности до окончания соударения или нет.

Найдем такое значение начальной угловой скорости вращения колеса ω_0, при котором проскальзывание прекратится как раз к окончанию соударения, т. е. величина приобретенной горизонтальной скорости V будет связана с окончательным значением угловой скорости ω соотношением $\omega R=V$. Для этого запишем следующие соотношения:

$$\sum N_i\Delta t_i=M(v+u),$$
$$\sum \mu N_i\Delta t_i=MV,$$
$$\sum R\mu N_i\Delta t_i=I(\omega_0-\omega),$$

где M — масса колеса, $I=MR^2$ — его момент инерции; здесь учтено также, что до окончания проскальзывания $F_{тр}=\mu N$. Отсюда найдем «критическое» значение угловой скорости:

$$\omega_0=2\mu\frac{v+u}{R}=2\mu\frac{\sqrt{2gH}+\sqrt{2gh}}{R}\approx 23{,}7 \text{ рад/с},$$

$$n_0\approx 3{,}8 \text{ об/с}.$$

Видно, что при $n=2$ об/с проскальзывание успеет прекратиться (а при двух других значениях скорости вращения — нет). После прекращения проскальзывания сила трения обращается в ноль, и приобретенная горизонтальная скорость V дальше не меняется. В этом случае угол отскока определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha_1=V/u=\mu(v+u)/u=\mu(\sqrt{H/h}+1),\ \alpha_1\approx 56^\circ.$$

При $\omega>\omega_0$ угол отскока перестает зависеть от величины ω_0:

$$\operatorname{tg}\alpha_2=2u/(\omega R),\ \alpha_2\approx 52^\circ.$$

Примечание. Эта задача — упрощенный вариант одной из задач Международной физической олимпиады 1991 года.

А. Зильберман

Ф1319. *Стальную струну диаметром $d=1$ мм и длиной $l=1$ м натянули и закрепили ее концы на одной высоте. К середине струны прикрепили груз массой $M=1$ кг. Найдите «провис» струны. Каким он станет, если уменьшить температуру на $\Delta T=1$ К? Модуль Юнга для стали $E=2\cdot 10^{11}$ Н/м^2, коэффициент линейного расширения $\alpha=1{,}2\cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$. Расстояние между точками подвеса не меняется.*

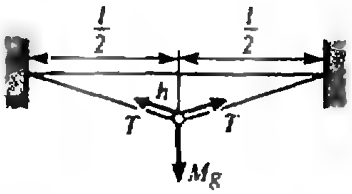
Зная размеры струны ($l=1$ м, $S=\pi d^2/4\approx 1$ мм^2) и плотность стали ($\rho=7{,}8$ г/см^3), легко определить ее массу — она оказывается меньше 10 г. Тогда можно считать, что начальное натяжение струны пренебрежимо мало́ по сравнению с ее натяжением под действием груза. Из простых геометрических соображений, учитывая малость «провиса» h, получаем выражение для абсолютного удлинения струны (см. рисунок):

$$\Delta l=2\sqrt{(l/2)^2+h^2}-l\approx 2h^2/l.$$

Из условия равновесия груза находим силу натяжения струны:

$$T=SE\Delta l/l=Mg/(2\sin\varphi)\approx Mgl/(4h).$$

Подставив сюда значение Δl, получим соотношение



для определения h:

$$\frac{SE}{l}\,\frac{2h^2}{l}=\frac{Mgl}{4h}\Rightarrow h^3=l^3\frac{Mg}{8ES}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow h=\frac{l}{2}\sqrt[3]{\frac{Mg}{ES}}=0{,}02l=2\text{ см}.$$

Угол φ при этом составляет примерно 0,02 рад и сила натяжения $T\approx500$ Н.

При охлаждении на 1 К относительное укорочение струны составит

$$\Delta l_1/l=1{,}2\cdot10^{-5},$$

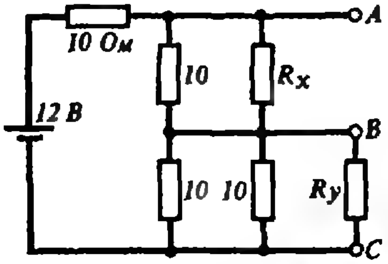
а сила натяжения струны без груза будет равна

$$T_1=SE\Delta l_1/l\approx2H,$$

что намного меньше найденной силы при наличии груза. Значит, «провис» останется практически таким же.

Э. Рафаилов

***Ф1320.** В схеме, изображенной на рисунке, батарея идеальная, а резисторы — кроме R_x и R_y — имеют сопротивления по 10 Ом. Напряжение между точками A и B составляет 4 В, а между B и C — 2 В. Найдите величины R_x и R_y.*



Это совсем простая задача.

Сравнивая напряжение между точками B и C (2 В) и напряжение на резисторе сопротивлением 10 Ом, подключенном непосредственно к батарее (6 В), можно заметить, что последнее ровно в 3 раза больше первого. Из этого следует, что сопротивление между точками B и C равно 10/3 Ом, а значит, $R_y=10$ Ом. Ясно также, что сопротивление между A и B составляет 20/3 Ом, откуда сразу находим $R_x=20$ Ом.

Итак,

$$R_x=20\text{ Ом},\ R_y=10\text{ Ом}.$$

А. Зильберман

***Ф1321.** В «черном ящике» с тремя выводами (рис. 1) находится схема, состоящая из резистора сопротивлением $R=100$ Ом, катушки индуктивности и конденсатора. При измерениях на переменном токе ($\omega=1000\text{ с}^{-1}$) были определены значения сопротивлений $R_{AB}=75$ Ом и $R_{BC}=125$ Ом. Может ли индуктивность катушки быть равной 1 Гн? Ответ обо-*

Условие задачи позволяет предполагать наличие в «ящике» одной из многочленных схем (их можно нарисовать несколько десятков), поэтому нужно схемы классифицировать по какой-нибудь системе — чтобы ничего не упустить.

Все схемы похожи либо на «звезду» (рис. 2), либо на «треугольник» (рис. 3). Попробуем такой вариант классификации. Вначале рассмотрим «звезды», где в каждом плече ровно один элемент. Одну из них мы уже нарисовали (см. рис. 2), еще их будет ровно 5: катушка наверху, а R и C поменялись местами, две схемы, где наверху конденсатор, и две — где наверху резистор. Аналогично — для «треугольников». Итак, у нас уже есть 12 схем.

снуйте схемами и расчетом. На данной частоте катушку и конденсатор считайте идеальными.

Рассмотрим дальше «звезды», где в одном из плеч два элемента включены сначала параллельно, потом последовательно; затем — такие же «треугольники» Получим 72 схемы. Правда, некоторые из них при

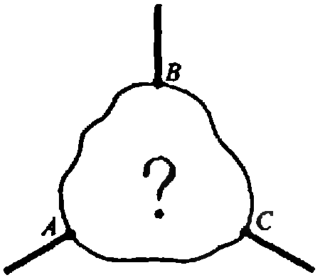


Рис. 1.

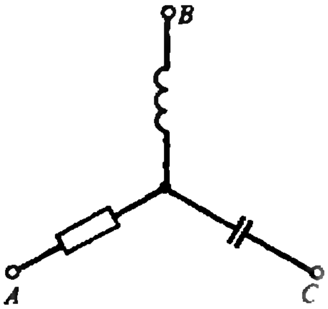


Рис. 2.

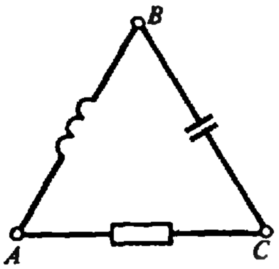


Рис. 3.

этом будут нарисованы дважды — например, «треугольник» на рисунке 4 и «звезда» на рисунке 5 получились одинаковыми. Есть еще несколько схем, где в одном плече находятся все три элемента. Одним словом, возможных схем очень много.

Если теперь каждую из них подробно рассчитать, а потом проверить выполнение условий задачи, то это займет очень много времени (а его и так не хватает). Однако для некоторой части схем сразу видно,

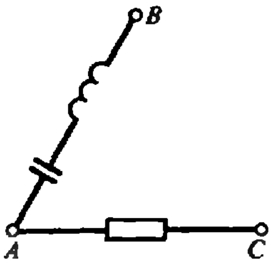


Рис. 4.

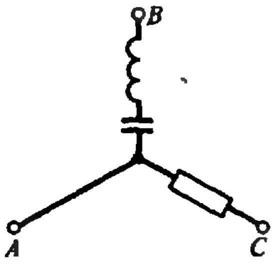


Рис. 5.

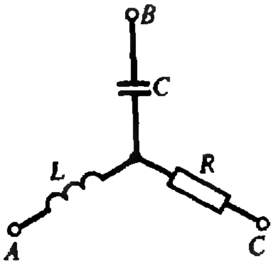


Рис. 6.

что они не подходят. Например, в схеме на рисунке 2 сопротивление между точками A и B явно больше 100 Ом, что противоречит условию. В других схемах все не так очевидно, однако расчет тоже не очень сложен. Рассмотрим для примера схему на рисунке 6. Для нее

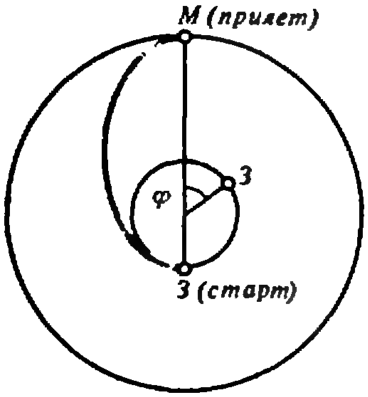
$$R_{AB}=\omega L-\frac{1}{\omega C},\ R_{BC}=\sqrt{R^2+\frac{1}{(\omega C)^2}}\ .$$

Получается интересный результат — каждого из этих соотношений достаточно, чтобы определить емкость конденсатора C (ведь L и R заданы в условии), поэтому совместность этих уравнений может иметь место только в том случае, когда числа в условии задачи специально подобраны. В нашем же случае из равенства $R_{AB}=\omega L-1/(\omega C)=75$ Ом следует, что емкостное сопротивление $1/(\omega C)$ порядка 1000 Ом, а значит, условие $R_{BC}=125$ Ом выполнить не удастся. Это же относится и к остальным схемам.

Итак, ответ в задаче такой: судя по результатам измерений R_{AB} и R_{BC}, катушки индуктивностью 1 Гн в «ящике» нет.

А. Зильберман

Ф1322. *Космический корабль совершает перелет от Земли к Марсу по орбите Гоманна — Цандера (перигелий этой орбиты находится на орбите Земли, а афелий — на орбите Марса). Найдите время этого перелета, а также минимальное время, в течение которого космонавтам придется ожидать на Марсе момента отправления в обратный путь по той же орбите. Период обращения Земли вокруг Солнца равен $T_З=365{,}25$ суток, Марса — $T_М=687$ суток. Орбиты планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости.*



Большая полуось a орбиты, по которой космический корабль совершает перелет, очевидно, будет равна полусумме радиусов орбит Земли и Марса (см. рисунок):

$$a=(a_З+a_М)/2.$$

По третьему закону Кеплера квадраты периодов обращения небесных тел вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их орбит, т. е. $a_З \sim T_З^{2/3}$ и $a_М \sim T_М^{2/3}$. Аналогично связаны между собой большая полуось a орбиты корабля и период его обращения T: $a \sim T^{2/3}$. Тогда получаем

$$T^{2/3}=(T_З^{2/3}+T_М^{2/3})/2,$$

откуда

$$T=(T_З^{2/3}+T_М^{2/3})^{3/2}/2^{3/2}.$$

Время перелета корабля τ от Земли до Марса равно половине периода обращения по орбите, следовательно,

$$\tau=T/2=(T_З^{2/3}+T_М^{2/3})^{3/2}/2^{5/2}\approx 259 \text{ сут.}$$

Для вычисления времени, в течение которого космонавтам придется ожидать на Марсе момента отправления в обратный путь по той же орбите, заметим, что в момент прилета Земля опережает Марс на угол

$$\varphi=\omega_З\tau-\pi=2\pi\tau/T_З-\pi,$$

где $\omega_З$ — угловая скорость движения Земли по орбите вокруг Солнца. В момент же отправления в обратный путь Земля, очевидно, должна отставать от Марса на такой же угол φ, или, другими словами, опережать на угол $2\pi k-\varphi$ (k — целое число). В нашем случае минимальному времени ожидания соответствует $k=1$. Тогда время, за которое угловое опережение Земли увеличится с φ до $2\pi-\varphi$, будет равно

$$t=(2\pi-2\varphi)/(\omega_З-\omega_М),$$

где $\omega_З-\omega_М$ — относительная угловая скорость движения Земли и Марса. Но

$$\omega_З-\omega_М=2\pi/T_З-2\pi/T_М,$$

поэтому окончательно

$$t=(1-\varphi/\pi)/(1/T_З-1/T_М)=$$
$$=(2-2\tau/T_З)/(1/T_З-1/T_М)\approx 457 \text{ сут.}$$

М. Гаврилов

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из «Задачника «Кванта». Поздравляем победителей этого конкурса за 1991 год.

Получили право участвовать в республиканских олимпиадах школьников 1992 года:

По математике

Алексеенко Ю.— Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Ахмедов А.— Баку, с. ш. № 58, 10 кл.
Белоус Ю.— Нижний Тагил, школа-лицей № 51, 11 кл.
Бородин А.— Донецк, с. ш. № 17, 11 кл.
Вайнер Б.— Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Воронецкая М.— Ижевск, с. ш. № 41, 11 кл.
Гетун С.— Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
Дудко Д.— Киев, с. ш. № 61, 10 кл.
Иоффе С.— п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 11 кл.
Когабаев Н.— Усть-Каменогорск, с. ш. № 25, 11 кл.
Лавренюк Я.— Киев, с. ш. № 179, 11 кл.
Лисицын Н.— Ижевск, ИЕГЛ, 11 кл.
Мамедов Н.— Баку, с. ш. № 204, 10 кл.
Насыпанный Б.— Гайворон, с. ш. № 5, 10 кл.
Петросян А.— Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 11 кл.
Солодушкин А.— Степногорск, с. ш. № 5, 10 кл.
Таратин А.— Северодвинск, с. ш. № 5, 11 кл.
Турешбаев В.— Кзыл-Орда, с. ш. № 233, 11 кл.
Хайкис Д.— Ижевск, с. ш. № 30, 11 кл.
Хвенкин К.— Минск, МССШ при БГУ, 11 кл.
Шамрук А.— Новодворская с. ш. Гродненской обл., 11 кл.
Яновский В.— Харьков, ФМЛ № 27, 11 кл.

По физике

Воскобойник И.— Киев, с. ш. № 206, 11 кл.
Гайдунько Д.— Алма-Ата, РСФМШИ, 10 кл.
Галанин А.— Сергиев Посад, с. ш. № 5, 11 кл.
Глазков В.— Коломна, с. ш. № 16, 11 кл.
Гребенев П.— Кузнецовск, с. ш. № 1, 11 кл.
Григорян Т.— Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
Гройсман Ю.— Ташкент, с. ш. № 260, 11 кл.
Гулгазарян Р.— Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 11 кл.
Ельников А.— Донецк, школа-лицей, 11 кл.
Жак С.— Тернополь, с. ш. № 1, 10 кл.
Занкович С.— Николаев, с. ш. № 42, 11 кл.
Кулик Ю.— Канев, с. ш. № 4, 9 кл.
Махмудов М.— Исфара, гимназия, 11 кл.
Мелентьев П.— Старый Оскол, с. ш. № 16, 10 кл.
Нежуренко А.— Киев, с. ш. № 206, 11 кл.
Ордабаев А.— Алма-Ата, РСФМШИ, 11 кл.
Пастухов Д.— Витебск, с. ш. № 39, 11 кл.
Петрайтис Д.— Вольск, с. ш. № 13, 11 кл.
Плетюхов М.— Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Терентьев А.— Канаш, с. ш. № 63, 11 кл.
Третьяков В.— Алма-Ата, РСФМШИ, 11 кл.
Файзуллаев А.— Шават, ФМШ № 120, 11 кл.
Чистый А.— Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Чичкан Д.— Барановичи, с. ш. № 9, 11 кл.
Шпагин А.— Мариуполь, с. ш. № 27, 11 кл.
Юдин Д.— Самара, с. ш. № 63, 11 кл.

Высоких результатов в решении задач «Задачника «Кванта» также добились следующие школьники (в этот список вошли победители конкурса, имеющие право участвовать в республиканских олимпиадах как победители прошлогодних олимпиад, учащиеся школ городов и интернатов, выставляющих свои команды сразу на Межреспубликанскую олимпиаду, а также те, кто не вошел в первый список из-за ограниченности числа предоставленных нам мест):

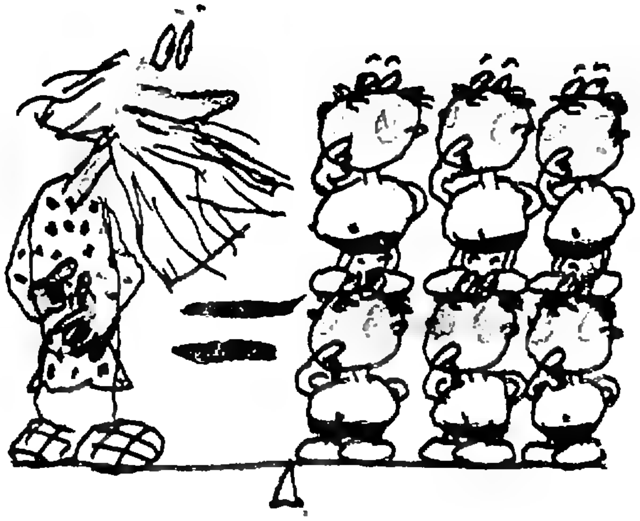
По математике

Бринюк В.— Донецк, Технический колледж, 10 кл.
Гайдай О.— Львов, с. ш. № 52, 11 кл.
Горенбургов Ю.— Санкт-Петербург, с. ш. № 242, 11 кл.
Зиновьев С.— Харьков, с. ш. № 122, 11 кл.
Изместьев И.— п. Суна Кировской обл., с. ш. № 2, 11 кл.
Исмаилов Р.— Санкт-Петербург, с. ш. № 239, 11 кл.
Карнаух Т.— Киев, с. ш. № 61, 11 кл.
Климов С.— Ижевск, с. ш. № 30, 11 кл.
Кожевников П.— Калуга, с. ш. № 24, 11 кл.
Корниенко А.— Днепропетровск, с. ш. № 36, 11 кл.
Кузьмич С.— Минск, МССШ при БГУ, 11 кл.

(Окончание см. на с. 35)

„Квант" для младших школьников

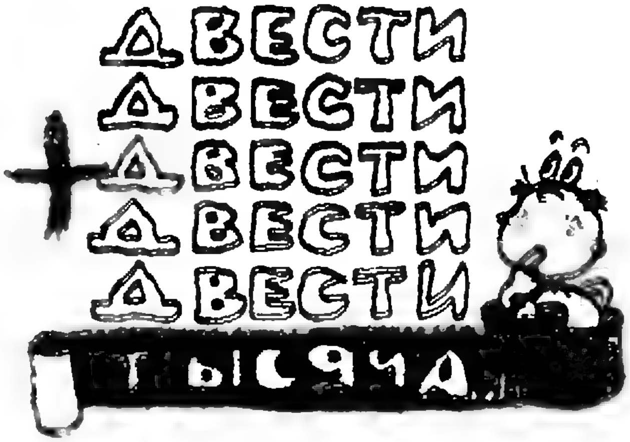
Задачи



1. Дед старше внука в 6 раз. Сумма цифр его возраста также в 6 раз больше суммы цифр возраста внука, а разности этих цифр равны. Сколько лет деду и сколько внуку?

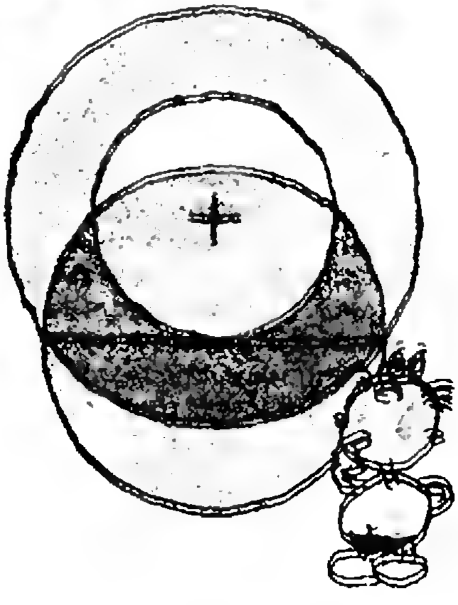
2. Месяц назад я купил на базаре килограмм картошки, литр молока и десяток яиц. В прошлое воскресенье картошка стала дороже в три раза, молоко — в четыре, яйца — в пять раз, и мне пришлось заплатить за ту же покупку 60 рублей. Сегодня картошка уже стоит в шесть раз дороже, чем месяц назад, молоко — в пять раз, а яйца лишь в четыре раза, и я заплатил за ту же покупку 66 рублей. Сколько денег я уплатил в первый раз?

3. Решите числовой ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.



4. На каждую клетку шахматной доски положили по нескольку монет так, что суммы на каждых двух клетках, имеющих общую сторону, отличаются на одну копейку. Известно также, что на одной из клеток лежит 3 копейки, а на другой — 17 копеек. Какую сумму образуют монеты, лежащие на обеих диагоналях?

5. Даны две концентрические окружности. Проведена хорда большей окружности, касающаяся меньшей. На ней, как на диаметре, построена третья окружность. Докажите, что ограниченная ею площадь равняется площади кольца между первоначальными окружностями.



Эти задачи нам предложили Д. Ракчеев, Н. Антонович, М. Сафаралиев, В. Произволов и А. Судачин.

ВЕЗДЕСУЩИЙ РЫЧАГ

Кандидат физико-математических наук
С. ДВОРЯНИНОВ,
А. КОРЖУЕВ

Когда мы были помоложе,
Качались часто на качелях.
Теперь качаться любим тоже,
Не просто так — в научных целях

Итак, простейшие качели:
Доска и ось посерединке;
Вот на концы доски мы сели,
Как это видно из картинки.

Тут обнаружилось, к досаде,
Различье в весе между нами:
Один из нас (солидный дядя!)
Болтает в воздухе ногами...

Холодновато показалось
Сидеть второму на песочке,
Заерзал он на пятой точке
И сдвинулся повыше малость.

И центр тяжести системы
Сместился, и пошли качели!..
Вот так заметки этой тему
Мы в гуще жизни подглядели.

Как видите, нам удалось уравновесить друг друга, пересадив более тяжелого из авторов ближе к оси качелей. Нисколько не сомневаемся, что вы на собственном опыте не раз убеждались в безотказности этого способа. Описанный эффект объясняется тем, что наши качели — не что иное, как рычаг.

С рычагом вы сталкиваетесь буквально на каждом шагу. Представьте себе, что вам понадобилось приподнять тяжеленный шкаф. Нет проблем: подсуньте под него дощечку покрепче и попробуйте поднять ее свободный конец. Шкаф довольно легко приподнимется. Вам захотелось полакомиться грецкими орехами, а скорлупа у них слишком прочна? Ничего нет проще: находим плоскогубцы (если у вас нет специальных щипцов для орехов), «крак!» — и это хитроумное приспособление, состоящее из пары рычагов, легко раскусывает твердый панцирь ореха... Ножницы по металлу (тоже пара рычагов) режут жесть почти так же легко, как обычные ножницы режут бумагу... Лопата выворачивает здоровенный ком земли, но попытайтесь-ка копнуть одним ее лезвием!..

Что же это такое — рычаг? Из приведенных примеров можно сделать вывод о его основном свойстве: он обладает способностью безо всяких устройств, развивающих дополнительную силу, увеличить ту силу, что приложена к одному из его концов!

Чтобы понять, в чем тут дело, представим себе «идеальный рычаг» в виде невесомого стержня, закрепленного на оси O так, что он может свободно вращаться вокруг этой оси в вертикальной плоскости. Пусть к концам стержня приложены некоторые силы, действующие также в вертикальной плоскости, например подвешены два

Стихи А. Котовой.

груза: один весом P_1, другой весом P_2. Давайте разберемся, как уравновесить такой рычаг.

Если $P_1=P_2$, совершенно ясно, что для равновесия такой системы достаточно, чтобы ось нашего рычага совпадала с серединой стержня (это следует из симметрии).

Теперь пусть $P_1\neq P_2$. Для начала разберем такой пример. Пусть стержень имеет длину 5 см, а грузы на его концах — массы 4 г и 6 г. Пусть эти грузы — однородные палочки, первая длиной 4 см, а вторая — 6 см (это значит, что каждый сантиметр длины такого груза имеет массу 1 г), причем каждая из них подвешена к стержню за свою середину (рис. 1). В таком случае, если рычаг был уравновешен, как бы мы ни поворачивали палочки относительно стержня, равновесие не нарушится. Теперь повернем наши грузы так, чтобы они оказались горизонтальны (т. е. вытянулись вдоль стержня). Их длина удачно оказалась такой, что наши палочки сомкнулись, образовав однородную палку длиной 10 см (рис. 2). Ее уравновесить ничего не стоит — достаточно найти середину и там установить ось. Посмотрим, на каком расстоянии от концов стержня AB оказалась точка O. Видно, что $AO=3$ см, $BO=2$ см и

$$AO:BO=P_1:P_2.$$

Нетрудно догадаться, что дело тут не в том, что рычаг и грузы были специально подобраны. При длине рычага l и весах грузов P_1 и P_2 всегда можно проделать такой мысленный эксперимент, «вытянув» грузы до нужной длины (так, чтобы их длины в сумме составляли $2l$).

Итак, мы получили основной закон равновесия рычага: *рычаг находится в равновесии тогда, когда силы, действующие на него, обратно пропорциональны плечам.* Для тех, кто не знает, что такое плечо силы, сообщаем, что это — кратчайшее расстояние между точкой опоры и прямой, вдоль которой сила действует на рычаг.

Метод, при помощи которого мы добились равновесия, имеет весьма почтенный возраст — более двух тысячелетий. Им пользовался сам Архимед (287—212 годы до нашей эры), один из величайших ученых древности — механик, математик и философ. (Знаменитый математик Лейбниц сказал о нем: «Изучая труды Архимеда, перестаешь удивляться успехам современной математики».) Рассказывают, что Архимед, открыв правило рычага, воскликнул на радостях: «Дайте мне точку опоры — и я переверну Землю!»

Теоретически такое заявление нисколько не противоречит тому, что мы узнали о рычагах, но осуществить на практике его довольно затруднительно. Сейчас вы поймете, почему.

Давайте посчитаем, какой наименьшей длины рычаг потребуется Архимеду, чтобы выполнить свое обещание. Предположим, что на Архимеда и Землю действуют силы, пропорциональные их массам. Тогда на Архимеда действует сила $F_А=m\cdot k$, где m — масса Архимеда, k — коэффициент пропорциональности, а на Землю действует сила $F_З=M\cdot k$ (с тем же коэффициентом пропорциональности), где M — масса Земли (рис. 3). По закону рычага отношение расстояний от точки опоры до Земли и до Архимеда равно

$$\frac{F_З}{F_А}=\frac{M\cdot k}{m\cdot k}=\frac{M}{m}=\frac{6\cdot 10^{24}\ кг}{70\ кг}\approx 10^{23}\ (!).$$

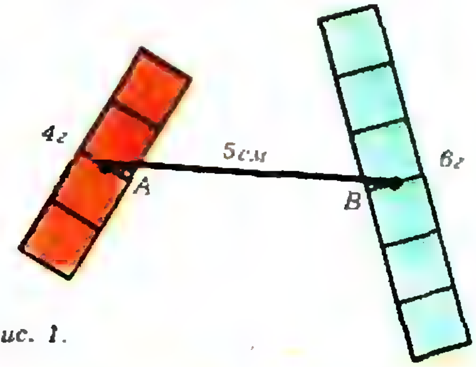


Рис. 1.

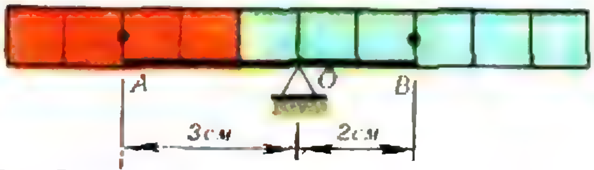


Рис. 2.

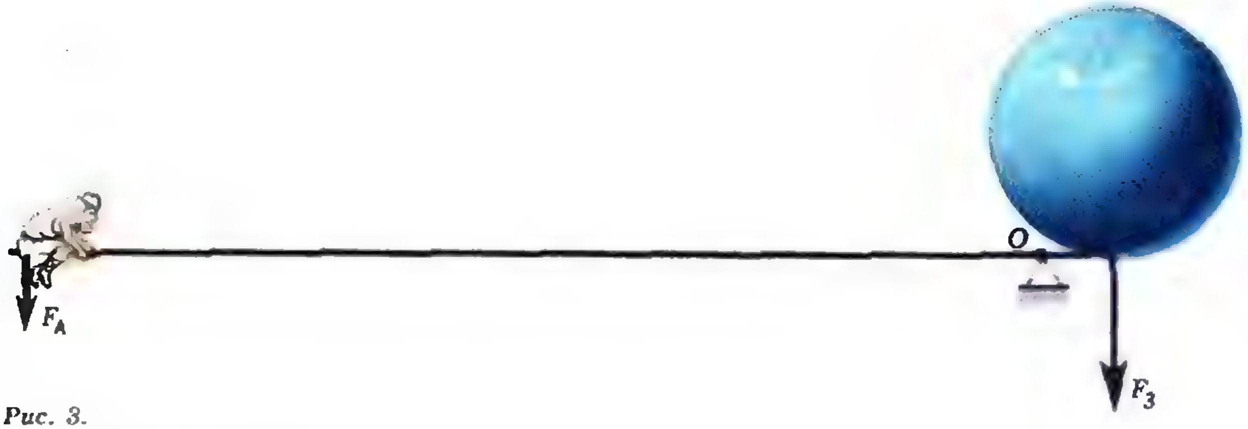


Рис. 3.

Значит, если Архимеду удастся укрепить нашу планету на расстоянии 1 м от точки опоры, то ему самому придется сесть в космический корабль и отправиться в дальнее путешествие на расстояние 10^{23} м. Такое расстояние даже свет, быстрее которого ничто не движется в нашем мире, пролетел бы лишь за $3 \cdot 10^{14}$ с, т. е. за 10 миллионов лет! Но и это еще не самое страшное,— чтобы сдвинуть нашу планету хотя бы на 1 мм, он должен будет сместить свой конец рычага на расстояние, в 10^{23} раз большее, т. е. на 100 000 000 000 000 000 км!

Опрометчиво, оказывается, давать такие обещания!

Опустимся теперь с небес на Землю. Мы предлагаем вам разобраться, как работает устройство, более древнее, чем закон, на котором основано его действие. Речь идет о колодезном «журавле», известном еще египтянам во времена фараонов. Конструкция оказалась столь удачной, что дожила до наших дней и до сих пор трудится, «не покладая своего рычага», в некоторых деревнях. Почему такой колодец называли на Руси журавлем? Он и вправду похож на громадную птицу с длинной шеей и коротким хвостом, которая стоит на одной ноге, опустив клюв к земле.

«Шея» и «хвост» этой птицы — два плеча рычага, закрепленного на столбе-«ноге». К «хвосту» подвешен груз-противовес (обычно старый стертый мельничный жернов), на конце «шеи» — длинный шест-«клюв» с ведром (рис. 4). Пусть, для определенности, длины плеч этого рычага относятся как 1:6, а вес жернова 600 Н (т. е. масса его около 60 кг). Чтобы опустить ведро в воду, приходится тянуть шест вниз с силой 100 Н. Это совсем не тяжело, надо лишь чуть подтянуться на шесте, и он будет опускаться. Когда же ведро наполнится водой (объем обычного ведра — 10 литров, поэтому его вес будет примерно 100 Н), система окажется в состоянии безразличного равновесия, и даже маленький ребенок сможет достать воду из колодца. Надо лишь, перебирая руками, подталкивать шест вверх.

Продолжая двигаться вглубь истории рычага, приведем еще один пример, гораздо более древний, чем «журавль». Это... ваша рука! В самом деле, роль рычага играет здесь кость предплечья (часть руки между кистью и локтем), точка опоры — локоть. Когда вы берете в руку какой-нибудь груз (кирпич, например), на рычаг действуют вес груза в точке B и сила упругости мышцы в точке A (рис. 5).

Всем известно из личного опыта, что легче удержать груз в согнутой руке, чем в вытянутой горизонтально. Правило рычага поможет понять,

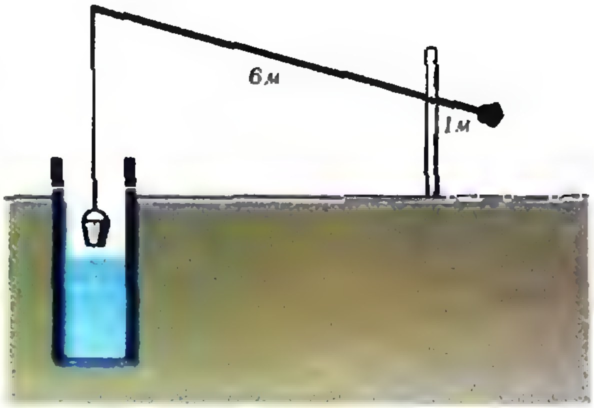


Рис. 4.

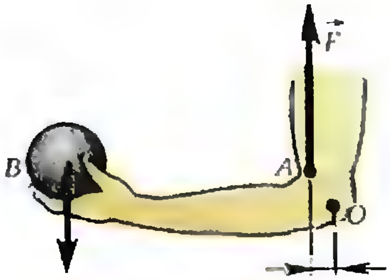


Рис. 5.

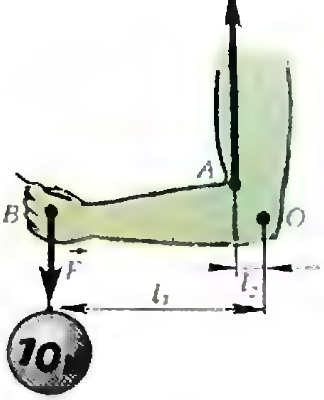


Рис. 7.

почему. Посмотрите на рисунок 6: сила $\vec{F}$, с которой мышца действует на «рычаг», направлена не перпендикулярно к кости (как это было бы в случае на рисунке 5), а составляет с продольной осью рычага очень малый угол. Поэтому плечо силы $\vec{F}$ оказывается заметно меньше, чем раньше, когда рука была согнута. Теперь, чтобы уравновесить тот же самый груз, мышце придется развить большую силу.

Но не это самое интересное. Давайте выясним, какое усилие развивает мышца, чтобы поднять груз массой 10 кг. Расстояние l_1 от точки опоры до груза примерно в 8 раз больше, чем расстояние l_2 от конца мышцы до опоры (рис. 7). Значит, мускул действует на рычаг с силой, в 8 раз большей веса груза, т. е. около 800 Н. Выходит, рука-рычаг уменьшает мышечную силу?! Зачем?

Вспомните задачу об обещании Архимеда: колоссальный выигрыш в силе приводит к не меньшему проигрышу в расстоянии и, следовательно, во времени. Но, обратно, проигрывая в силе, мы во времени выиграем! Благодаря устройству руки она движется в 8 раз быстрее, чем управляющие ею мышцы. И это замечательно,— в противном случае наших медлительных предков давно бы съели конкуренты в борьбе за место под солнцем. Кто бы тогда написал эту статью и кто бы прочитал ее?..

Мы уже достигли столь далеких времен, что можем встретить лишь рычаги типа «рука» у ископаемых динозавров. Поэтому вернемся в более близкую к нам эпоху — к тем временам, когда человечество изобрело весло. Вы, конечно, уже поняли, что это тоже рычаг, осью которого служит уключина. Часть весла с рукояткой короче, чем та, что с лопастью, следовательно, перед нами рычаг, рассчитанный на выигрыш в расстоянии. Например, весло длиной 2 м, закрепленное на расстоянии 40 см от точки приложения силы со стороны руки, увеличивает скорость, с которой движется его верхний конец, в 4 раза. Перемещая рукоять весла со скоростью 0,5 м/с, гребец посылает лодку вперед со скоростью 2 м/с.

Еще один пример весьма древнего

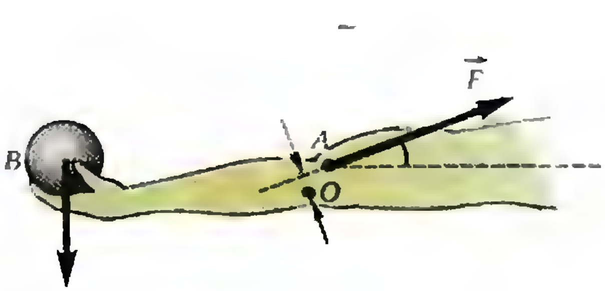


Рис. 6.

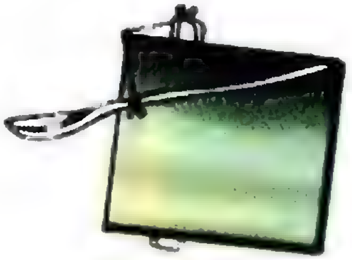


Рис. 8.

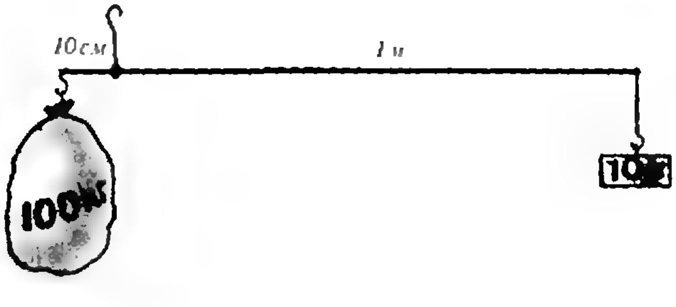


Рис. 9.

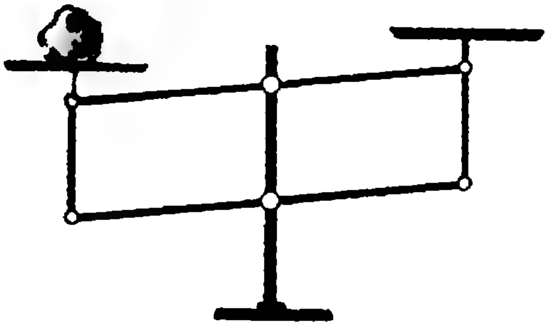


Рис. 10.

использования нашего героя, рычага,— грозное метательное оружие, спалившее за свою историю немало городов и кораблей. Это катапульта, принцип действия которой основан на инерции и все на том же правиле рычага. Вы можете сделать ее модель из... кастрюли, деревянной ложки и резинки. Резинку привязывают одним концом к ручке кастрюли, а другим — к середине ложки. Ручку ложки упирают в угол между дном и стенкой кастрюли (рис. 8). Теперь положим кастрюлю на стол так, чтобы она опиралась на него свободной ручкой и краем дна. Катапульта готова. Заложите в ложку снаряд (например, небольшую картофелину), оттяните ее вниз и отпустите. Ложка, притягиваемая резинкой, подскочит вверх и ударится о край кастрюли, а снаряд полетит, описывая в воздухе красивую дугу.

У этой конструкции есть два очевидных достоинства. Во-первых, для того, чтобы натянуть резинку, не требуется больших усилий: ведь мы тянем за более длинное плечо рычага. Во-вторых, расстояние, которое проходит «заряженный» конец ложки, вдвое больше длины растянутой резинки. Поэтому и скорость его вдвое выше, чем та, с какой резинка заставляет двигаться середину ложки. Таким образом, катапульту не так уж сложно «насторожить», а стреляет она довольно далеко.

Настоящая катапульта, не сильно отличавшаяся от этой игрушки, была когда-то крупнейшим достижением военной техники. Ее заряжали бочонком со смолой и непосредственно перед выстрелом поджигали «снаряд». Гигантская «ложка», подброшенная пружиной, взлетала, ударялась о специальную перекладину и останавливалась, а бочонок летел, роняя огненные струи горящей смолы и наводя панику в рядах противника...

Оставим, однако, дела военные и расскажем об одном из древнейших применений рычага в мирных целях. Речь пойдет о взвешивании товаров. Простейшие рычажные весы, равноплечные, по свидетельствам археологов, использовались уже в древнем Египте. Они верно служат человечеству и в наше время, но большие тяжести на них взвешивать неудобно. Не так-то просто подобрать гири, чтобы уравновесить несколько центнеров зерна! Поэтому были изобретены неравноплечные весы, например такие, как десятичный безмен, изображенный на рисунке 9. Вы уже столько знаете о рычаге, что легко поймете преимущества такой конструкции.

Ну вот, кажется, мы сказали все, что хотели... Нет, подождите минутку!

Нам жаль, что мы рассказ прервали
О том, как взвешивают грузы,
Не помянув про Роберваля*),
Средневекового француза.

Ведь показаний не меняют
Его весы (рисунок десять),
Будь в центре чашки или с краю
Тот груз, который надо взвесить.

Сам Роберваль не знал причины
Столь удивительного свойства
И вплоть до собственной кончины
Не понял, в чем же соль устройства...

Мы оба будем очень рады
Узнать, что вы нашли ответ.
Не обещаем вам награды,
Но скажем: верный или нет.

---

*) Jille Personne de Roberval (1602—1675). Свои весы выставил в Парижской академии наук в 1669 году. Лишь в начале XIX века удалось объяснить, почему расположение грузов на чашках не влияет на показания весов.

Конкурс «Математика 6—8»

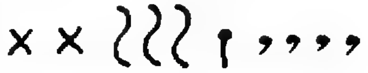
Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач, по 3 в каждом номере журнала, начиная с девятого. Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 мая 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

19. В футбольном турнире участвовали 15 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. Могло ли случиться, что число побед у каждой команды оказалось равным числу ее ничьих? Какой будет ответ, если в турнире участвовали 16 команд? 17 команд?

С. Токарев

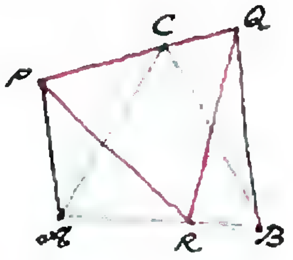
20. Ивашка Кудряшкин из рассказа Аркадия Гайдара «Горячий камень» обнаружил на камне загадочную печать — два креста, три хвоста, дырка с палочкой и четыре запятые:



Допустим, что это — зашифрованная запись десятизначного числа, являющегося полным квадратом. Какую цифру означает дырка с палочкой?

И. Акулич

21. Равносторонние треугольники ABC и PQR расположены так, что вершина C лежит на стороне



PQ, а вершина R — на стороне AB. Докажите, что четырехугольник $ABQP$ — трапеция.

В. Произволов

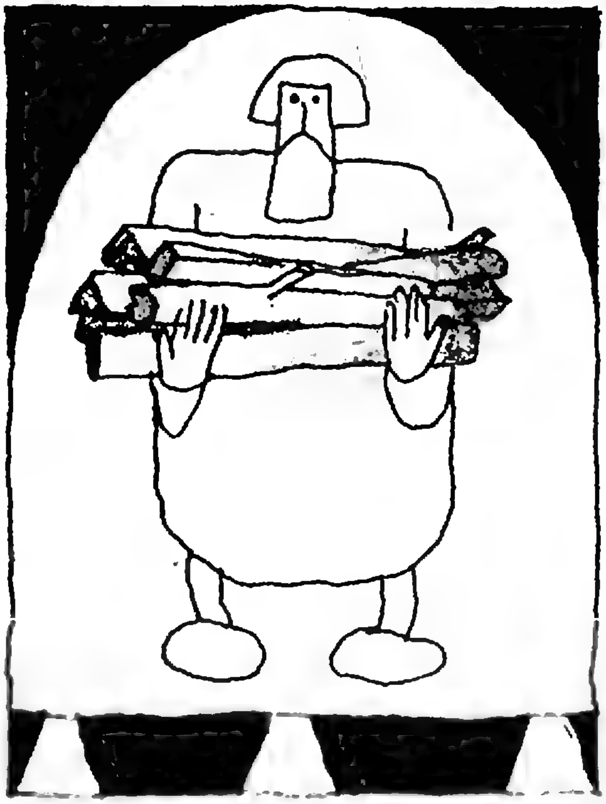
Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 28)

Кукушкин А.— Москва, с. ш. № 54, 10 кл.
Мокляк М.— Киев, ФМШИ, 10 кл.
Павличков С.— Евпатория, с. ш. № 6, 11 кл.
Панов Д.— Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
Перельман Е.— Санкт-Петербург, с. ш. № 239, 10 кл.
Пиковский В.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Сарсембаев А.— Аркалык, гимназия, 11 кл.
Турчин Е.— Днепропетровск, с. ш. № 23, 10 кл.
Фельдман К.— п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 11 кл.
Хасин М.— Донецк, с. ш. № 17, 11 кл.
Ходзинский Ю.— Киев, с. ш. № 145, 10 кл.

По физике

Антипов Д.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Горгадзе В.— Нальчик, с. ш. № 19, 11 кл.
Гревцев А.— Москва, СУНЦ МГУ, 11 кл.
Гуляев Н.— Нижний Новгород, с. ш. № 82, 11 кл.
Дибров С.— Киев, с. ш. № 206, 11 кл.
Дудий С.— п. Комсомольский Харьковской обл., с. ш. № 2, 10 кл.
Егоров Ю.— Киев, ФМШ № 2, 11 кл.
Зозуля И.— Одесса, с. ш. № 36, 11 кл.
Ивченко Н.— Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
Клембовский М.— Николаев, с. ш. № 42, 11 кл.
Козлов В.— Старый Оскол, с. ш. № 16, 11 кл.
Маравин Ю.— Евпатория, с. ш. № 6, 11 кл.
Мотрунич А.— Ужгород, с. ш. № 1, 11 кл.
Ольховец А.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Островский Д.— Санкт-Петербург, с. ш. № 566, 11 кл.
Потипко Д.— Харьков, ФМШ № 27, 10 кл.
Сокланов А.— Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Тимощук С.— Ровенская обл., Крыловская с. ш., 11 кл.
Толпекин В.— Одесса, с. ш. № 36, 11 кл.
Шпырко О.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Шутенко Т.— Мариуполь, с. ш. № 41, 11 кл.
Якупов Р.— Кузнецовск, с. ш. № 1, 10 кл.
Янченко Р.— Кузнецовск, с. ш. № 1, 10 кл.



Школа в „Кванте"

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Закон сохранения импульса и маневры космического корабля» предназначена девятиклассникам, заметка «Откуда берется магнетизм?» — десяти- и одиннадцатиклассникам. Мы публикуем также «Избранные школьные задачи по физике».

Закон сохранения импульса и маневры космического корабля

Космический корабль приближался к планете, и его необходимо было перевести на околопланетную орбиту. Топлива у космонавтов оставалось немного, и использовать его следовало наиболее эффективно. Корабль снабжен тремя одинаковыми двигателями. Можно включить все три двигателя одновременно (чтобы каждый из них израсходовал одну треть массы топлива), а можно вводить двигатели в работу последовательно — один за другим. Как же поступить?

Пока остается немного времени до включения системы торможения, порассуждаем и мы вместе с командиром корабля и постараемся найти оптимальный способ торможения. Воспользуемся для этого одним из фундаментальных законов механики — законом сохранения импульса*).

Согласно определению, импульс частицы массой m, движущейся со скоростью $\vec{v}$, равен $\vec{p}=m\vec{v}$. Если мы имеем дело с системой частиц, то импульс системы есть сумма импульсов отдельных частиц: $\vec{p}=\sum\limits_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$. Рассмотрим систему двух взаимодействующих частиц (их массы m_1 и m_2, скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$), в которой внешние силы отсутствуют. Такая система называется замкнутой. Обозначим через $\vec{F}_{12}$ силу, с которой частица *1* действует на частицу *2*, а через $\vec{F}_{21}$ — силу, с которой частица *2* действует на частицу *1*. Тогда, в силу третьего закона Ньютона,

$$\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0.$$

Запишем теперь второй закон Ньютона для каждой из частиц:

$$m_1\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t}=\vec{F}_{21},$$

$$m_2\frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t}=\vec{F}_{12}.$$

Умножим оба уравнения на Δt и сложим почленно. Получаем

$$m_1\Delta\vec{v}_1+m_2\Delta\vec{v}_2=0,$$

или

$$\Delta(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)=0,$$

т. е. изменение импульса системы взаимодействующих частиц равно нулю. Следовательно, для замкнутой системы частиц полный импульс сохраняется:

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=\vec{p}=\text{const}.$$

Заметим, что если бы частицы находились в каком-либо внешнем поле,

---

*) О «судьбе» импульса и некоторых других понятий механики подробно рассказывалось в «Кванте» № 5 за 1986 года (*Прим. ред.*).

то силы, действующие на частицы, не были бы скомпенсированы и импульс перестал бы быть сохраняющейся величиной.

Вернемся теперь к нашей ракете. Пусть масса топлива, которое космонавты могут потратить на торможение, равна m, а скорость истечения газов из сопел двигателей равна v.

Рассмотрим первый вариант торможения, когда двигатели включаются одновременно. Чтобы проще было наблюдать за событиями, присоединимся к космонавтам, т. е. перейдем в систему отсчета, связанную с ракетой. В этой системе собственная начальная скорость ракеты вместе с топливом равна нулю. Обозначим скорость, которую приобретет корабль после сжигания всего топлива, через $\vec{v}_1$, а массу корабля — через M. Из закона сохранения импульса имеем

$$M\vec{v}_1 + m\vec{v} = 0.$$

Предположим, что корабль движется вдоль оси X декартовой системы координат. Спроектировав все векторы на эту ось, получаем

$$Mv_1 - mv = 0.$$

Отсюда находим скорость, которую приобретет корабль после того, как двигатели отработают все топливо:

$$v_1 = \frac{m}{M} v.$$

Во втором варианте торможения необходимо рассмотреть три последовательных процесса, в каждом из которых расходуется масса топлива, равная $m/3$. Когда сгорит первая треть топлива, корабль приобретет скорость

$$v_2' = \frac{m}{3(M+2m/3)} v = \frac{m}{3M+2m} v$$

и импульс корабля станет равным $(M+2m/3)v_2'$. Запишем теперь закон сохранения импульса для этого момента и для момента, когда будет израсходована вторая треть топлива:

$$\left(M + \frac{2}{3}m\right) v_2' = \left(M + \frac{1}{3}m\right) v_2'' - \frac{m}{3}(v - v_2').$$

Поясним это равенство. Мы задали скорость истечения газов v относительно неподвижной ракеты. После первого этапа торможения ракета приобрела скорость v_2', и, следовательно, скорость истечения газов относительно выбранной системы отсчета будет не v, а $v - v_2'$, что и отражено в последнем члене нашего уравнения. После прохождения второго участка торможения скорость корабля будет равна

$$v_2'' = v_2' + \frac{m}{3M+m} v.$$

Запишем закон сохранения импульса в третий раз:

$$\left(M + \frac{m}{3}\right)v_2'' = Mv_2 - \frac{m}{3}(v - v_2'').$$

Для окончательной скорости корабля в результате трех последовательных этапов торможения получаем

$$v_2 = \frac{m}{3M+2m} v + \frac{m}{3M+m} v + \frac{m}{3M} v.$$

Взглянув на результат, т. е. на выражения для скоростей v_1 и v_2, мы видим, что при последовательном включении двигателей дополнительная скорость, приобретаемая ракетой, меньше, чем при одновременном. Дело в том, что при последовательном включении часть топлива расходуется на сообщение скорости (v_2', v_2'') оставшемуся топливу.

Теперь нетрудно понять, какое решение должен принять командир космического корабля.

М. Анфимов

Откуда берется магнетизм?

Как вы знаете, каждый электрический заряд (заряженное тело, заряженная частица) окружен электрическим полем. Если в этом поле находится другой заряд, на него действует электрическая сила. Вокруг всякого движущегося электрического заряда существует, кроме того, магнитное поле. Оно действует на любой другой движущийся заряд (например, на проводник с током) магнитной силой.

Мы не можем ответить на вопрос, почему между зарядами действуют электрические силы притяжения и отталкивания, хотя физика и стремится выяснить не только как происходит то или иное явление, но и почему оно происходит и почему оно происходит так, а не иначе. На поставленный же вопрос можно, пожалуй, дать только такой ответ: так устроен мир!

Уместно, конечно, спросить: а почему электрический заряд, стоит только ему начать двигаться, тут же «обзаводится» еще одним силовым полем — магнитным? Вот на это «почему» можно, оказывается, дать ответ, что мы и попытаемся сделать в этой заметке.

Если для возникновения магнитного поля нужно, чтобы электрический заряд двигался, то важную роль здесь должна играть скорость его движения. А она, скорость, различна относительно разных систем отсчета. Но может ли физическое явление (в нашем случае существование магнитного поля и его действие на движущиеся в нем заряды) зависеть от того, какую систему отсчета выбрал наблюдатель? Ясно, что не может.

О принципе относительности. Из курса физики девятого класса вам известно, что законы механики одинаковы для всех инерциальных систем отсчета. В этом состоит принцип относительности Галилея, установленный им в XVII веке. В начале XX века Эйнштейн предложил новую, обобщенную формулировку этого принципа: не только законы механики, но и все законы природы, в том числе и законы электродинамики, одинаковы относительно любых инерциальных систем отсчета. Это — один из постулатов так называемой специальной теории относительности, или, как ее еще называют, релятивистской теории. Она-то и позволит нам понять, откуда берется магнетизм.

Представим себе, что параллельно металлической проволоке, по которой течет постоянный электрический ток I, движется со скоростью v некоторый отрицательный заряд q (рис. 1). Для простоты рассуждений примем, что скорости заряда и электронов в проводнике с током одинаковы и по модулю, и по направлению ($v_- = v$). Понятно, что речь идет о скоростях относительно системы отсчета, связанной с проволокой (как это и показано на рисунке 1). Обозначим эту систему отсчета K.

Электрическая сила на заряд q не действует, потому что проволока с током электрически нейтральна. Ведь в проволоке помимо движущихся отрицательно заряженных электронов есть и положительно заряженные ионы, образующие кристаллическую решетку, так что заряды ионов и электронов компенсируют друг друга. Относительно системы K ионы можно считать покоящимися ($v_+ = 0$).

Но на заряд q действует магнитная сила $\vec{F}_м$, модуль которой определяется формулой Лоренца

$$F_м = qvB,$$

где B — магнитная индукция поля в том месте, где находится заряд q. Эта сила перпендикулярна векторам $\vec{B}$ и $\vec{v}$, причем по правилу левой руки легко установить, что направлена она в сторону проволоки. В нашем случае достаточно очевидно, что величина магнитной индукции пропорциональна току I в проводнике и обратно пропорциональна расстоянию r от проводника до заряда:

$$B \sim \frac{I}{r}.$$

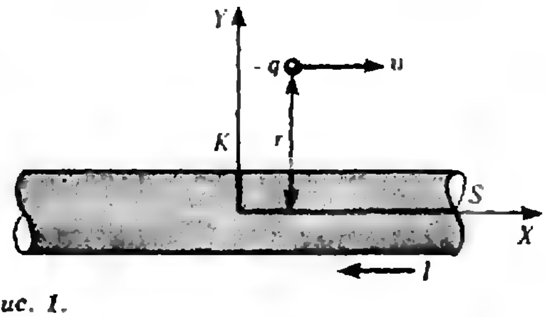


Рис. 1.

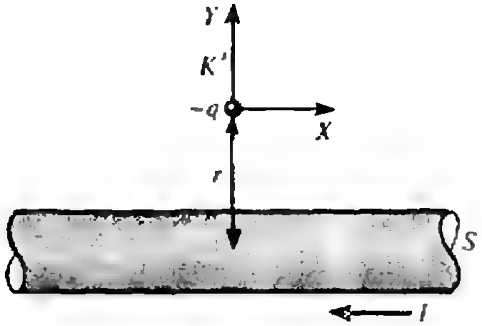


Рис. 2.

Сила тока в свою очередь пропорциональна концентрации n и скорости свободных носителей заряда, т. е. скорости электронов v:

$$I \sim nv.$$

Таким образом, магнитная сила

$$F_{м} \sim \frac{qnv^2}{r}.$$

А теперь рассмотрим то же явление, выбрав другую систему отсчета. Свяжем систему координат не с проволокой, а с зарядом q, и обозначим ее K' (рис. 2). Относительно этой системы заряд q покоится, покоятся и электроны в проводнике ($v_- = 0$). Зато движется — со скоростью, равной v, но направленной влево, вся проволока, а значит, и положительные ионы ($v_+ = -v$).

Поскольку относительно нашей новой системы отсчета K' заряд q покоится, магнитная сила на него действовать не может. Что же случилось с силой $\vec{F}_м$, которая действовала на заряд, когда мы пользовались системой отсчета K? Могла ли исчезнуть сила только из-за того, что мы перешли к другой системе отсчета? Конечно, нет. Значит, сила, заставляющая заряд q приближаться к проволоке, должна все-таки существовать. И она, разумеется, существует. Но что это за сила? За ответом на этот вопрос обратимся к одному из результатов специальной теории относительности.

Удивительное свойство пространства, открытое Эйнштейном. До того как появилась теория относительности, считалось очевидным, что расстояние между двумя точками в пространстве (например, длина тела) величина вполне определенная. В том смысле определенная, что оно, это расстояние, не может измениться при переходе от одной системы отсчета к другой. Это казалось настолько очевидным, что никому и в голову не приходило усомниться в этом. Эйнштейн был первым, кто подверг сомнению это никем и никогда не доказанное утверждение.

Оказалось, что в действительности длина тела в направлении его движения (но не в направлении, перпендикулярном ему) может быть... любой — от некоторой максимальной до нулевой. Длина тела максимальна, когда оно покоится относительно выбранной системы отсчета; обозначим эту длину l_0. Если же тело движется со скоростью v, то длина l тела уже другая, меньшая. И связаны l и l_0 таким соотношением:

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

где c — константа, равная скорости света, одна из так называемых мировых констант. Заметим, кстати, что второй постулат теории относительности состоит в том, что скорость света одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Следует также добавить, что скорость c — предельная для любого тела: нет такой системы отсчета, относительно которой какое-либо тело могло бы двигаться не только со скоростью, превышающей c, но даже и равной ей. Отношение v/c (и, конечно, v^2/c^2) всегда меньше единицы.

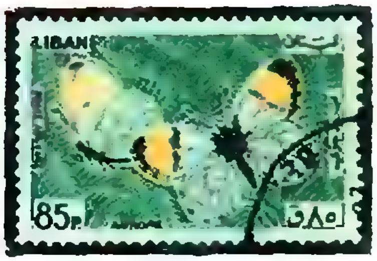
Уравнение для l показывает, что тело, движущееся относительно некоторой системы отсчета, короче того же тела, когда оно покоится относительно нее. Вот это-то обстоятельство и позволяет понять, чтó за сила действует на заряд q в системе отсчета K'.

Два облика одного явления. При переходе из системы отсчета K в систему K' длина проволоки оказывается

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Зеркальная симметрия



Вот по поляне порхает яркая бабочка. Ее крылышки кажутся совершенно одинаковыми. И, как бы для того, чтобы это подтвердить, она садится на цветок, складывает их, прикладывая одно к другому, и мы воочию видим, что форма одного крыла в точности повторяет форму другого.

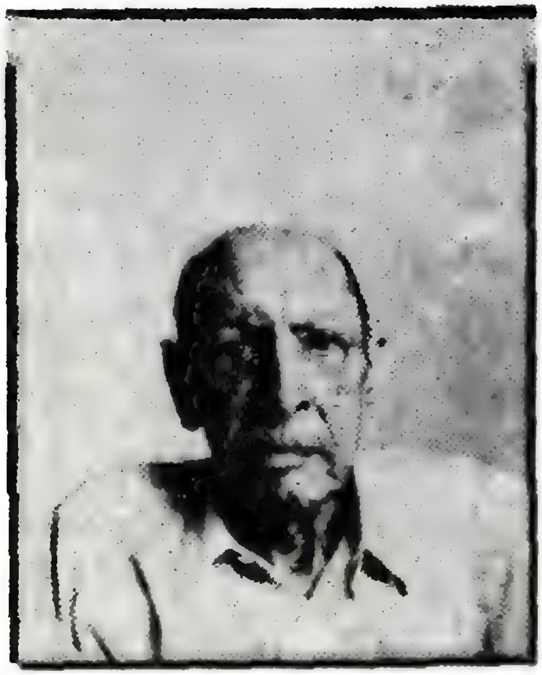
Значит, крылья у бабочки действительно одинаковы? Нет. Возьмите точную копию правого крыла и поставьте его на место левого — у вас ничего хорошего не получится: либо яркая раскраска окажется не с той стороны, либо при складывании крылья не будут совпадать.

Точно так же различаются наши левая и правая рука, левое и правое ухо.

А теперь возьмите зеркало (лучше без оправы) и поставьте его вертикально на рисунок бабочки так, чтобы край зеркала прошел ровно посередине. И тут окажется, что половинка рисунка вместе с ее отражением в зеркале составляют прежний рисунок. Предметы, одна половина которых может быть получена как зеркальное отражение другой, называются зеркально симметричными, а само изображение — зеркальной симметрией.

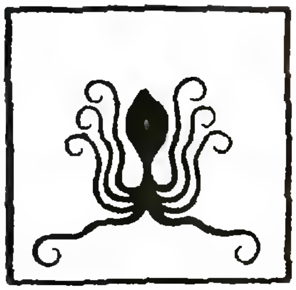
Симметричны и творения природы: животные, листья деревьев, кристаллы, насекомые,— и творения человеческих рук: дома, автомобили, самолеты, столы, стулья, ложки, вилки...

Вернемся к прибору, осуществляющему симметрию,— к зеркалу. Можно получить много интересных и неожиданных изображений, если прикладывать его к разным предметам и рисункам. Наверное, самой большой неожиданностью станет эксперимент с вашей фотографией. Мы абсолютно уверены в том, что наше лицо совершенно симметрично. Зеркало же покажет, что это не так: полностью симметричное изображение, полученное с помощью зеркала, не очень похоже на вас. В природе вообще не встречается абсолютная симметрия. Сколь симметричными ни казались бы те же листья, кристаллы и бабочки, внимательный наблюдатель заметит мелкие отличия (форму жилок, трещинки, цветовые пятна)... Может быть, это обстоятельство стало причиной следующего канона построения католических храмов: они должны быть симметричны в главных деталях, но в мелких деталях должны быть различия между левой и правой частями.



Последняя фотография композитора И. Стравинского

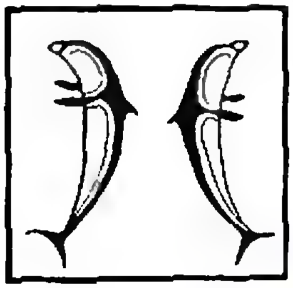
Понятие симметрии является одним из главных в таких науках, как физика и кристаллография.



Зеркальная симметрия может помочь в решении некоторых геометрических задач, например такой. Путешественник хочет пройти из пункта A в пункт B, находящийся на том же берегу прямолинейного канала, набрав при этом воды из канала. Какой путь является кратчайшим?

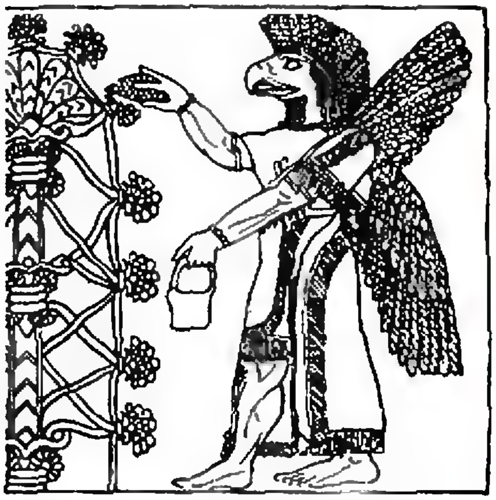
Чтобы решить задачу, достаточно зеркально отразить пункт B относительно берега канала и провести отрезок, соединяющий полученную точку B_1 с точкой A. Точка пересечения этого от-

резка с берегом и укажет то место, где следует набрать воды из канала и откуда затем нужно направиться к пункту B. Зеркало подтверждает справедливость такого выбора, поскольку такой путь соответствует прямолинейному пути из точки A в точку B_1, а любой другой — движению по ломаной.

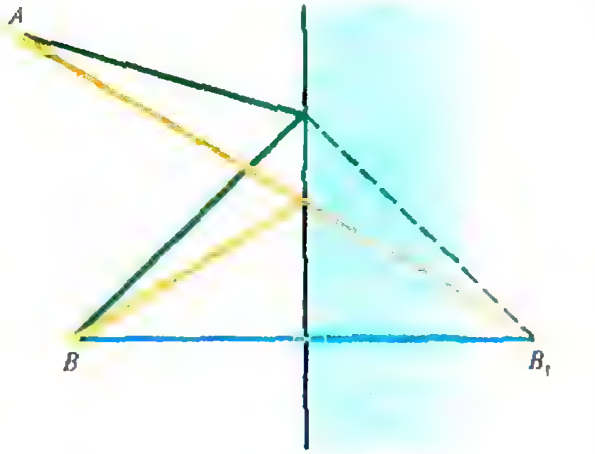


Симметрия проявляется и в алгебре, особенно ярко в так называемых симметрических многочленах. Это многочлены от нескольких переменных, которые не изменяются, если некоторые переменные поменять местами. Например, симметрическими многочленами от двух переменных являются многочлены: $x+y$, xy, x^2+y^2, $x^3+2x^2y+2xy^2+y^3$. Первые два многочлена, самые простые, называют элементарными симметрическими многочленами и обозначают так: $\sigma_1=x+y$ и $\sigma_2=xy$. Оказывается, что любой симметрический многочлен от двух переменных может быть выражен через них. Так,

$$x^2+y^2=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$
$$x^3+2x^2y+2xy^2+y^3=\sigma_1^3-\sigma_1\sigma_2.$$



Любопытно наблюдать симметрию в буквах и словах. Например, буквы М, П, Т, Ш имеют вертикальную ось симметрии, В, З, К, С, Э — горизонтальную. А буквы Ж, Н, О, Ф, Х имеют по две оси симметрии! Симметрию можно увидеть и в целых словах, таких как КАЗАК, ШАЛАШ, которые читаются одинаково, как слева направо, так и справа налево; слово же ПОТОП не только читается одинаково с любого конца, но и имеет настоящую вертикальную ось симметрии. А вот и целые фразы с таким свойством (если не учитывать пробелы между словами): «Искать такси», «Аргентина манит негра», «Ценит негра аргентинец», «Леша на полке клопа нашел». Такие слова называются палиндромами. В поисках совершенной красоты стиха палиндромами увлекались многие поэты. Некоторые композиторы, в том числе и великий Бах, писали мелодии, которые звучали одинаково при чтении их слева направо и справа налево, т. е. музыкальные палиндромы. Но самые впечатляющие результаты дает симметрия в изобразительном искусстве. Об этом художники догадались давным-давно. Подтверждением тому — эта шумерская фреска и эта древнегреческая мозаика — произведения неизвестных великих мастеров...



Материал подготовил А. Савин

меньшей, но неизменной остается площадь ее поперечного сечения S. Поэтому уменьшается объем проволоки, равный lS, и стало быть, увеличивается концентрация частиц, т. е. положительных ионов, в проволоке. Если концентрацию ионов в системе отсчета K обозначить n_+, а в системе K' — n'_+, то связь между ними выразится формулой

$$n'_+ = \frac{n_+}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Но в нашей проволоке есть и отрицательно заряженные частицы — электроны. Обозначим их концентрации соответственно n_- и n'_-. В системе отсчета K' электроны покоятся, а в системе K движутся со скоростью v, поэтому можно записать

$$n_- = \frac{n'_-}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

откуда

$$n'_- = n_-\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Итак, мы видим, что в системе K' концентрация электронов стала меньше, а концентрация ионов — больше. А это означает, что в движущейся системе отсчета наша проволока «выглядит» положительно заряженной и на отрицательный заряд q она действует с электрической силой, направленной к проволоке, т. е. так же, как магнитная сила в системе K.

Сокращение длины тела — не единственный результат теории относительности. При переходе от системы K к системе K' изменяется еще и течение времени — оно замедляется. Преобразуется и выражение для силы. Если учесть все это, то можно показать (но не в нашей маленькой заметке), что не только по направлению, но и по модулю сила, теперь уже электрическая, не отличается от предыдущей магнитной силы. Значит, само физическое явление не изменилось при переходе от одной системы отсчета к другой, как это и должно быть, но магнитная сила (в системе K) приобрела (в системе K') электрическое обличье.

Этот не очень простой анализ показывает, что природу магнетизма нельзя понять, если не обратиться к теории относительности. Магнетизм — это, как говорят, релятивистское явление.

И еще один важный вывод. Мы видели, что в системе отсчета K сила, приложенная к заряду q, имеет чисто магнитный характер, а в системе K' — чисто электрический. Соответственно этому мы говорим о магнитном поле (система K) или об электрическом (система K'). В этом находит отражение замечательный факт: электрические и магнитные силы — это две части одного физического явления — электромагнитного взаимодействия зарядов. Если, в отличие от рассмотренного нами примера, заряды движутся с переменной скоростью (ускоряются, замедляются, совершают колебания) или по проводникам текут переменные токи, электрическое и магнитное поля уже не проявляются раздельно, а образуют единое электромагнитное поле. Существуют уравнения, их называют уравнениями Максвелла, которые дают полное электромагнитное описание электрических и магнитных явлений. Оно уже не зависит от выбора системы отсчета.

А. Кикоин

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Во сколько раз изменится полезная мощность вентилятора при увеличении скорости его вращения в два раза?

2. Тонкая пластинка массой $m=10$ кг лежит на горизонтальном столе. В центре пластинки укреплена легкая пружина жесткостью $k=100$ Н/м. Какую работу нужно совершить, чтобы на пружине поднять пластинку на высоту $h=1$ м от поверхности стола?

3. На легкой нерастяжимой нити подвешен тяжелый шар. На какой угол надо отвести нить от положения равновесия, чтобы при последующих качаниях максимальная сила натяжения нити была в 4 раза больше минимальной?

4. Два одинаковых по размеру шара висят на тонких нитях, касаясь друг друга. Первый шар отводят в сторону и отпускают. После упругого соударения шары поднимаются на одну и ту же высоту. Найдите массу первого шара, если масса второго $m_2=0{,}6$ кг.

5. Тележка массой $m_1=50$ кг движется со скоростью $v=2$ м/с по гладкой горизонтальной поверхности. На тележку с высоты $h=20$ см падает груз массой $m_2=50$ кг и остается на тележке. Найдите выделившееся при этом количество теплоты.

10 класс

6. Две электрические лампочки, на которых указаны их мощности $P_1=100$ Вт и $P_2=150$ Вт, включены последовательно в сеть с постоянным напряжением, соответствующим номинальному напряжению лампочек. Какая мощность будет выделяться на обеих лампочках?

7. В плоском конденсаторе диэлектрик между пластинами промок и стал пропускать ток. В результате при плотности тока $j=0{,}02$ А/см^2 в единице объема диэлектрика ежесекундно стало выделяться количество теплоты $q=10^6$ Дж/м^3. Чему равна напряженность электрического поля в конденсаторе?

8. Батарея состоит из параллельно соединенных между собой одинаковых элементов с внутренним сопротивлением $r=1{,}4$ Ом и ЭДС $\mathcal{E}=3{,}5$ В каждый. При токе во внешней цепи $I=1$ А полезная мощность батареи равна $P=3{,}3$ Вт. Сколько элементов в батарее?

9. Электродвигатель трамвайного вагона работает при токе $I=100$ А и напряжении $U=500$ В. При силе тяги двигателя $F=4$ кН вагон имеет скорость $v=18$ км/ч. Чему равно сопротивление обмотки двигателя?

10. Сколько меди выделится на катоде за время $t=200$ с при электролизе сернокислой меди, если в течение первых 100 с сила тока равномерно возрастает от 0 до $I_1=6$ А, а в течение последующих 100 с она равномерно уменьшается до $I_2=2$ А? Электрохимический эквивалент меди $k=3{,}3\times\times10^{-7}$ кг/Кл.

11 класс

11. Чему равна скорость протона, если он в течение $t=1$ с разгоняется однородным электрическим полем напряженностью $E=10$ В/м? Каким был бы ответ в рамках классической (нерелятивистской) механики?

12. С поверхности Солнца ежесекундно излучается энергия $\Delta E=3{,}8\cdot10^{26}$ Дж. Масса Солнца $M=2{,}0\cdot10^{30}$ кг. Через сколько лет масса Солнца уменьшится на один процент?

13. Какова энергия атома водорода в возбужденном состоянии, в которое он переходит из основного состояния при поглощении фотона с энергией, равной 8/9 энергии ионизации атома водорода?

14. В реакции взаимодействия алюминия $^{27}_{13}\mathrm{Al}$ с углеродом $^{12}_{6}\mathrm{C}$ образуется альфа-частица, нейтрон и ядро некоторого изотопа. Определите количество нейтронов в этом ядре.

15. В цепочке радиоактивных превращений урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ в свинец $^{207}_{82}\mathrm{Pb}$ содержится несколько альфа- и бета-распадов. Сколько всего распадов в этой цепочке?

Публикацию подготовил А. Черноуцан

Почему нить все-таки будет двигаться?

(Начало см. на с. 5)

Такое решение задачи, казалось бы, не должно вызывать никаких сомнений. Однако предлагаем читателям еще раз внимательно посмотреть на рисунок (см. с. 5) и попытаться разобраться в следующем парадоксе.

Если нить действует на первое тело с силой $\vec{T}$, то, по третьему закону Ньютона, это тело действует на нить с силой $-\vec{T}$. Аналогично рассуждая, приходим к выводу, что и второе тело действует на нить с силой $-\vec{T}$. Но если перекинуть веревку через неподвижный блок и тянуть ее с двух сторон с одинаковыми силами, то веревка (а значит, и связанная с ней система грузов!) не должна двигаться с ускорением. Что же упущено в приведенном выше решении и почему нить все-таки будет двигаться?

Для ответа на этот вопрос попробуем чуть глубже вникнуть в физическую суть явления. Заметим, что любая реальная нить обладает массой и для того, чтобы нить двигалась с ускорением, силы, действующие на нее со стороны грузов, не должны быть одинаковыми. Обозначим массу нити через $m_н$, а силы натяжения нити слева и справа — через $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ соответственно. Теперь запишем уравнения движения для каждого груза и нити в проекциях на ось Y:

$$-m_1a=-m_1g+T_1,$$

$$m_2a=-m_2g+T_2,$$

$$m_нa=T_1-T_2.$$

Из этих уравнений легко получаем

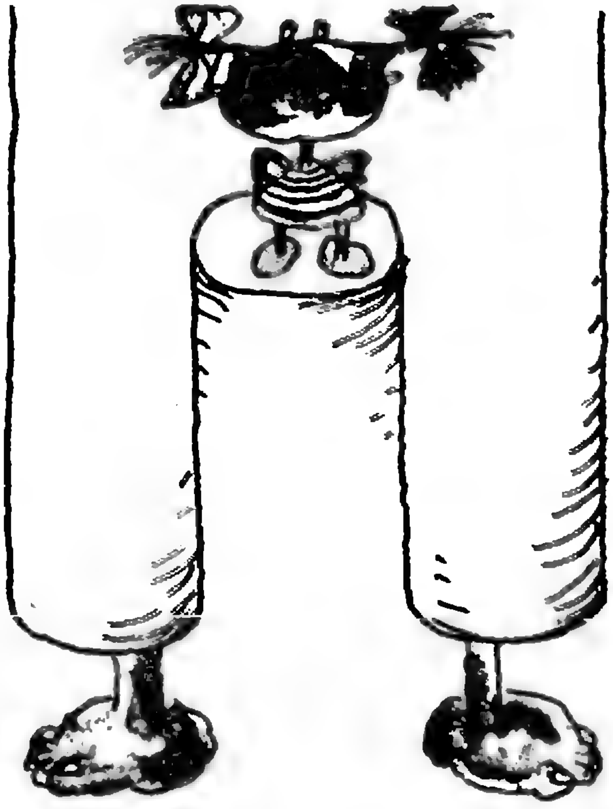
$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+m_н}g.$$

Так как масса нити, согласно условию задачи, мала по сравнению с массами грузов, величиной $m_н$ в знаменателе мы можем пренебречь. И тогда с большой точностью ускорение грузов оказывается равным

$$a=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g,$$

что полностью согласуется с первоначальным решением.

А. Свердлов



Математический кружок

Знаете ли вы, кто такой Реймонд М. Смаллиан? Американский профессор, специалист по математической логике, автор нескольких увлекательнейших популярных книжек, которые не менее занимательны, чем детективы, и столь же смешны, как шедевры Ильфа и Петрова.

Недавно мы перечитали одну из книг Смаллиана... Оставим пока трудный вопрос о ее названии,— легче объяснить, о чем она.

Вам не раз приходилось доказывать различные теоремы, леммы и следствия. Но задумывались ли вы, что означают слова: «утверждение доказано»? Вы скажете — доказано, если следует из некоторых правильных утверждений, которые, в свою очередь, вытекают из некоего набора принятых на веру аксиом. Хорошо, а что значит — «следует»?

Существуют определенные правила установления истинности высказывания на основе заведомо верных или заведомо ложных утверждений. Так, если верно, что все тигры полосаты и ваш зверь — тигр, вы можете заключить, что ваш зверь также полосат. Но, с другой стороны, если верно, что все тигры полосаты и ваш зверь тоже полосат, нельзя сделать вывод, что ваш зверь — тигр. Он может с тем же успехом быть зеброй, енотом или обыкновенным домашним котом...

С таких задачек, которые могут показаться забавными пустяками, начинается огромная наука — математическая логика, занятая глубинными проблемами оснований математики. В начале нашего столетия логики привели в замешательство весь математический мир: хорошенько покопавшись в основах, они обнаружили, что все многовековое здание математики стоит на песке!.. Чтобы спасти это чудо архитектуры, пришлось срочно подводить под него новый фундамент — иначе пришлось бы признать, что начиная с Евклида все математики занимались неизвестно чем... Оказалось, что такая привычная всем «математическая строгость» иллюзорна, ибо в любой аксиоматической системе есть истинные утверждения, которые невозможно доказать внутри этой системы, и есть ложные утверждения, которые невозможно опровергнуть,— и с этим приходится мириться. На этот счет существует теорема Гёделя о неполноте — сложная теорема, одна из вершин логической науки... И что же? Профессор Смаллиан (недаром он в начале своей ученой карьеры зарабатывал на пропитание, будучи фокусником на профессиональной эстраде!), вытаскивая из шляпы кролика за кроликом... простите, задачу за задачей, к концу своей книги приводит читателя к теореме Гёделя и вполне доступно объясняет, о чем она и как доказывается.

Мы настоятельно рекомендуем вам разыскать эту книгу*) (о ее названии — чуть ниже) и прочитать ее целиком, от начала до конца,— вы получите *истинное* удовольствие! А сейчас предлагаем вам одну главу из нее, снабдив небольшими комментариями (они даны мелким шрифтом). Каждая задача имеет подробное решение, но советуем вам заглядывать в него, лишь убедившись, что это вам действительно необходимо.

В заключение слово автору, профессору Смаллиану:

«И последнее, о чем я хочу сказать вам, пока не забыл. Как же называется эта книга? Эта книга так и называется — «Как же называется эта книга?»

Остров Ваал

Р. СМАЛЛИАН

Часть первая

В поисках абсолюта

В какой-то книге по философии мое внимание привлекли следующие строки: «Истинным философом с полным основанием можно назвать девочку лет девяти, которая долго смотрела в окно, а потом, обернувшись, спросила у матери:

---

*) М., Мир, 1981.

— Мамочка, отчего существует не́что, а не ничто́?»

Над решением этой великой проблемы ломали голову многие мудрецы. Некоторые из них придавали ей первостепенное значение и формулировали несколько иначе, чем их юная коллега: «Почему существует не́что, а не ничто́?»

Если задуматься, то вопрос этот действительно не так прост. Действительно, почему существует не́что, а не ничто́?

Давным-давно жил на свете один философ, который решил во что бы то ни стало выяснить, почему существует нечто, а не ничто. Он перечитал все книги по философии, которые когда-либо были написаны, но ни в одной из них не нашел убедительного ответа на мучивший его вопрос. Тогда он принялся за теологию. С кем он только ни беседовал: и со священнослужителями, и с учеными теологами, но никто из них не смог вразумительно объяснить, почему существует нечто, а не ничто. Разочаровавшись в мудрости Запада, наш философ с надеждой обратил свой взор на Восток. Около двенадцати лет провел он в странствиях по Индии и Тибету, беседовал со множеством гуру, но и те не знали, почему существует нечто, а не ничто. Нашему философу не оставалось ничего другого, как отправиться в Китай и в Японию и провести еще долгих двенадцать лет в попытках постичь мудрость Дао и дзен-буддизма. Наконец, после долгих и безуспешных поисков ему удалось набрести на одного дряхлого старца, возлежавшего на смертном одре, который перед самой кончиной сказал:

— Сын мой! Мне неведомо, почему существует нечто, а не ничто. Единственное место на свете, где знают ответ на твой несомненно важный вопрос — остров Ваал. Один из высших жрецов храма Ваала посвящен в эту великую тайну.

— А где находится остров Ваал? — спросил, сгорая от нетерпения, философ.

— Увы,— последовал ответ,— этого я тоже не знаю. Более того, за всю свою долгую жизнь я не встретил ни одного человека, который побывал бы на острове Ваал. Мне известно лишь то место в океане, где находится целый архипелаг островов, не отмеченный даже и в самой подробной лоции. На одном из этих островов хранится вычерченная кем-то от руки карта, на которой проложен курс к острову Ваал. К сожалению, не могу тебе сказать, на каком острове хранится карта. Знаю только, что называется тот остров Майя. Еще мне доподлинно известно, что архипелаг тот населен рыцарями, говорящими только правду, и лжецами, которые всегда лгут. Задавая вопрос жителям любого острова из числа входящих в архипелаг, следует держать ухо востро!

Таков был наиболее существенный результат более чем двадцатичетырехлетних непрестанных поисков! Но наш философ не впал в уныние. Пользуясь наставлениями мудрого старца, он добрался до архипелага, затерянного в бескрайних просторах океана, и принялся систематически обследовать остров за островом в надежде, что ему удастся найти остров Майя.

В следующих пяти задачах философу постоянно приходится решать проблему истинности или ложности высказываний вида «верно *A* и *B*». Обратите внимание на то, что подобное утверждение верно лишь тогда, когда одновременно истинны высказывания *A* и *B*. Если же хоть одно из них ложно, то ложно и все высказывание «верно *A* и *B*» (т. е. неверно, что *A* и *B* истинны).

Первый остров

На первом острове нашему философу повстречались два коренных жителя *A* и *B*, заявивших:

A: B — рыцарь, и этот остров называется Майя.

B: A — лжец, и этот остров называется Майя.

Можно ли утверждать, что первый остров действительно называется Майя?

Второй остров

Два коренных жителя *A* и *B* этого острова заявили:

A: Мы оба лжецы, и этот остров называется Майя.

B: Что правда, то правда.

Можно ли утверждать, что второй остров действительно называется Майя?

Начитавшись досыта Смаллиана, мы вдруг заметили небольшую оплошность, происшедшую, вероятно, при переводе условия этой задачи. Какую?

Пусть *B* сказал: «Все это правда». Можно ли в этом случае утверждать, что второй остров действительно называется Майя?

Третий остров

Коренные жители этого острова *A* и *B* заявили:

A: По крайней мере один из нас лжец, и этот остров называется Майя.

B: Совершенно верно!

Можно ли утверждать, что третий остров действительно называется Майя?

Четвертый остров

Два коренных жителя *A* и *B* этого острова заявили:

A: Мы оба лжецы, и этот остров называется Майя.

B: По крайней мере один из нас лжец, и этот остров не Майя.

Можно ли утверждать, что четвертый остров действительно называется Майя?

Пятый остров

Коренные жители *A* и *B* этого острова заявили:

A: Мы оба лжецы, и этот остров называется Майя.

B: По крайней мере один из нас рыцарь, и этот остров не Майя.

Можно ли утверждать, что пятый остров действительно называется Майя?

Шестой остров

Два обитателя *A* и *B* этого острова заявили:

A: Либо B — рыцарь, либо этот остров называется Майя.

B: Либо A — лжец, либо этот остров называется Майя.

Можно ли утверждать, что шестой остров действительно называется Майя?

На шестом острове аборигены задают философу задачку иного типа, чем раньше: теперь требуется сделать вывод об истинности или ложности высказывания вида «верно *A* или *B*». Заметьте, что такое утверждение верно, если истинно хотя бы одно из утверждений *A* и *B* (если *A* — истинно, *B* — ложно, то *A* или *B* истинно). Оно ложно лишь в том случае, когда неверны оба высказывания *A* и *B* одновременно.

Как добраться до острова Ваал?

Долго ли, коротко ли, но наш философ сумел-таки разыскать остров Майя. Впрочем, радость его была преждевременной: найти карту с прокладкой курса на остров Ваал оказалось не так просто, как он ожидал. Пришлось обратиться к верховному жрецу острова Майя. Выслушав философа, жрец ввел его в обширную комнату, посреди которой на столе были разложены три карты *X*, *Y* и *Z*. Жрец пояснил, что только одна карта позволяет найти остров Ваал, на двух остальных проложенные курсы ведут к островам демонов и что всякий, кто ступит на остров демонов, тотчас обращается в ничто. Философу предстояло выбрать одну из трех карт.

В комнате, куда жрец ввел философа, находились пятеро колдунов: *A*, *B*, *C*, *D* и *E*. Каждый из колдунов был либо рыцарем, либо лжецом, и каждый дал философу совет:

A: X — правильная карта.

B: Y — правильная карта.

C: Неверно, что A и B — оба лжецы.

D: Либо A — лжец, либо B — рыцарь.

E: Либо я лжец, либо C и D однотипны (т. е. либо оба рыцари, либо оба лжецы).

Какая из карт *X*, *Y* и *Z* правильная?

За эту многоходовую задачу лучше всего взяться с конца. Вы решили уже полдюжины логических задач и понимаете, какие неизбежные выводы следуют из заявления одного из аборигенов: «Я лжец...»

Решения

Первый остров

Предположим, что *B* — рыцарь. Тогда оба его утверждения истинны, т. е. *A* — лжец и первый остров называется Майя. Но тогда *A* высказал истинное утверждение, и, следовательно, *A* — рыцарь; но он одновременно и лжец, что невозможно. Следовательно, *B* — лжец.

Поскольку *B* лжец, то одно из его

утверждений ложно. Предположим, он солгал в том, что *A* является лжецом, т. е. *A* — рыцарь. Но в этом случае верно заявление *A* о том, что *B* — рыцарь, что невозможно.

Итак, *A* и *B* оба лжецы, и первое из утверждений *B* истинно; значит, ложно второе из них. Таким образом, первый остров — не Майя.

Второй остров

Помните замечание об оплошности, возникшей при переводе? Если *B* говорит: «Что правда, то правда»,— тем самым он изрекает абсолютную истину! Ведь то, что истинно — истинно, не так ли? Но в этом случае *B* — заведомый рыцарь. Что касается *A*, он заведомый лжец, ибо рыцарь не мог бы сказать: «мы оба лжецы». Но поскольку *A* — лжец, а *B* — рыцарь, первое утверждение *A* ложно, и все его высказывание оказывается ложным независимо от того, называется ли второй остров Майя или нет. Итак, в такой постановке задачи нельзя утверждать, что второй остров — Майя, но нельзя утверждать и обратное.

Если же *B* говорит: «Все это правда», т. е. соглашается с *A*, то он такой же лжец, как и *A*. В таком случае первое из утверждений *A* истинно, следовательно, ложно второе. Поэтому второй остров — не Майя.

(Несомненно, Смаллиан имел в виду второй вариант задачи. Неприятность получилась потому, что в обыденной речи мы воспринимаем слова «что правда, то правда» как подтверждение сказанному. Таким образом, американский профессор невольно заставил нас вдуматься в привычный оборот русского языка и обнаружить, что он означает совсем не то, что мы предполагали!)

Третий остров

Предположим, что *A* — рыцарь. Так как *B* согласен с ним, то он также рыцарь. Но тогда неверно утверждение *A* о том, что по крайней мере один из них лжец. Следовательно, *A* — лжец.

Поскольку *A* — лжец, то первое из его заявлений — правда. Поэтому второе утверждение *A* — ложь (иначе бы все его высказывание оказалось истинным), и третий остров — не Майя.

Четвертый остров

Так как *A* сказал: «Мы оба лжецы», то он лжец (с этой ситуацией мы уже сталкивались на втором острове). Предположим, что *B* — тоже лжец. В этом случае первое высказывание *A* и первое высказывание *B* истинны, следовательно, должны быть ложными оба вторых утверждения. Это значит, что остров одновременно Майя и не Майя, чего быть не может. Поэтому *B* — рыцарь, и оба его заявления верны, т. е. и четвертый остров — не Майя.

Пятый остров

Как и в предыдущей задаче, островитянин *A* — заведомо лжец. Если *B* — рыцарь, то этот остров не Майя. Если же *B* — лжец, то первое из утверждений *A* истинно, значит, второе ложно, и этот остров опять-таки не Майя.

Шестой остров

Допустим, что *A* — лжец. Тогда оба его утверждения — вранье, т. е. *B* — лжец и этот остров — не Майя. Но поскольку *B* заявляет, что *A* — лжец, первое из его утверждений истинно, тогда правдиво и все высказывание *B*. Но *B* не может быть одновременно лжецом и не лжецом. Поэтому *A* — рыцарь.

Тогда верно одно из высказываний *A*. Если верно второе из них, то этот остров Майя. Если верно первое, то *B* — рыцарь и хотя бы одно из его высказываний правдиво. Поскольку *B* заявляет, что *A* — лжец, а это не так, то истинно второе из высказываний *B*, и этот остров — Майя.

Итак, остров Майя после долгих поисков наконец найден!

Как добраться до острова Ваал?

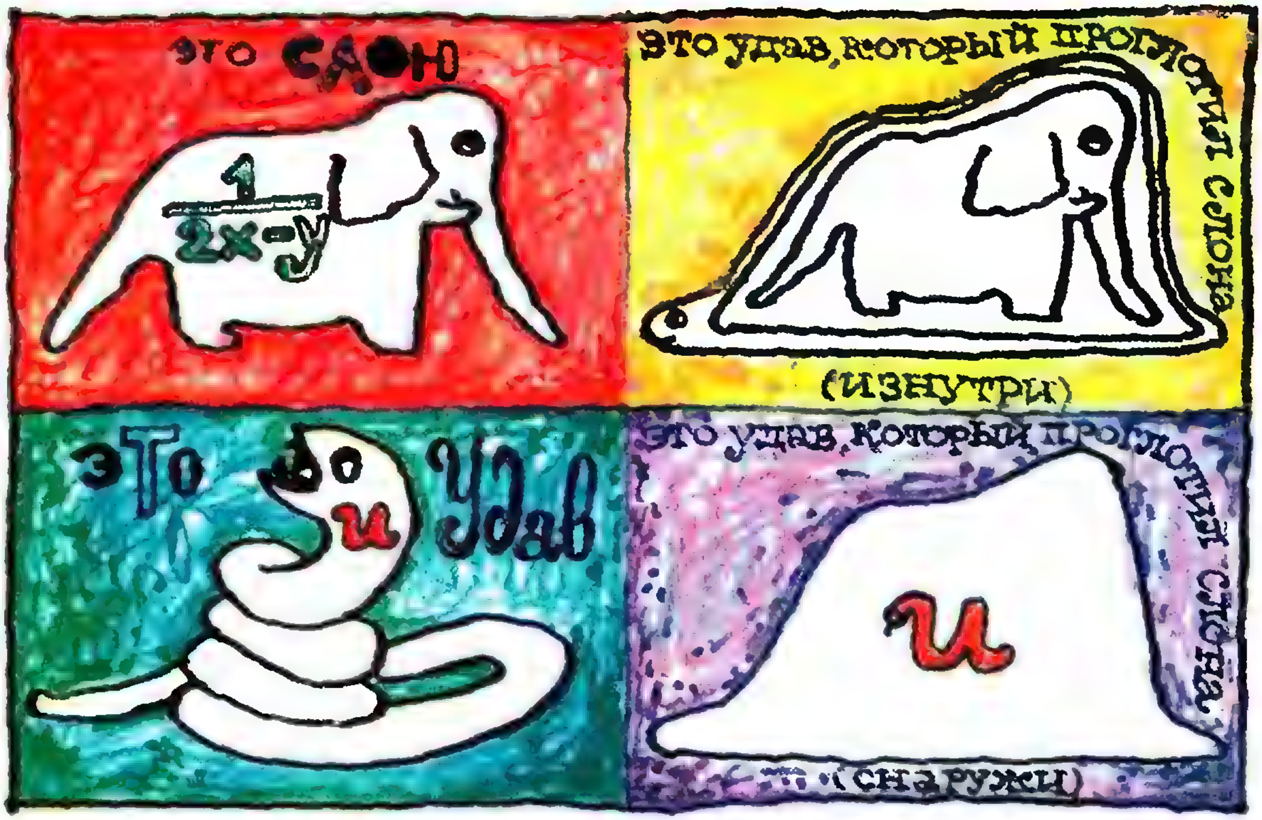
Колдун *E* говорит: «Либо я лжец, либо *C* и *D* однотипны». Если *E* — лжец, то первое из его утверждений истинно, значит, истинно и все высказывание. Но лжецы правды не говорят. Итак, *E* — рыцарь; поскольку в этом случае первое из его высказываний ложно, то второе — истинно, и *C* и *D* одновременно либо оба рыцари, либо оба лжецы.

Допустим, что *C* и *D* — лжецы. Тогда *A* и *B* оба лжецы, поскольку *C* утверждает обратное. Но в таком случае *D* говорит правду, так как *A* — действительно лжец; значит, *D* — рыцарь, что невозможно.

Выходит, *C* и *D* — рыцари. Тогда, во-первых, хотя бы один из колдунов *A* и *B* — рыцарь и, во-вторых, либо *A* — лжец, либо *B* — рыцарь. Если бы второе из утверждений *D* было ложным, то было бы правдой первое; но в таком случае *A* и *B* оба оказались бы лжецами в противоречие словам рацаря *C*. Таким образом, *B* — рыцарь, и *Y* — правильная карта.

(Окончание следует)

Перевод с английского Ю. Данилова


это слон
$\frac{1}{2x-y}$
это удав, который проглотил слона
(изнутри)
это удав
u
это удав, который проглотил слона
(снаружи)

Практикум абитуриента

Решаем системы уравнений

Кандидат педагогических наук
В. ЗАТАКАВАЙ

В этой статье мы постараемся помочь школьникам сориентироваться в многообразии систем уравнений, встречающихся в практике приемных экзаменов, и дать советы по их решению.

При решении системы главное — суметь свести ее к такой, которую наверняка удастся решить. При этом часто помогают некоторые стандартные приемы, облегчающие решение. Самый распространенный из них — замена переменных*).

Пример 1.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{2x-y}+\dfrac{3}{x-2y}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2}{2x-y}-\dfrac{1}{x-2y}=\dfrac{1}{18}. \end{cases}$$

При помощи замены $\frac{1}{2x-y}=u$, $\frac{1}{x-2y}=v$ данная система сводится к линейной:

$$\begin{cases} 2u+3v=\dfrac{1}{2}, \\ 2u-v=\dfrac{1}{18}. \end{cases}$$

Решив ее, получим

$$u=\frac{1}{12}, \quad v=\frac{1}{9}.$$

Возвращаясь к старым переменным и выполняя очевидные преобразования, придем к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x-y=12, \\ x-2y=9. \end{cases}$$

Ее решение не должно вызывать затруднений.

Ответ: (5; —2).

Пример 2.

$$\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=45, \\ (x-y)^2-2(x-y)=3. \end{cases}$$

---

*) Здесь мы будем опускать рассуждения о равносильности преобразований и переходов, подразумевая, что они выполняются.

Очевидно, что каждое из уравнений системы является квадратным: первое — относительно $(x+y)$, второе — относительно $(x-y)$. В данном случае на этом и основана замена переменных: $x+y=u$, $x-y=v$. Решая квадратные уравнения относительно u и v, получаем $u_1=-5$, $u_2=9$ и $v_1=-1$, $v_2=3$.

Теперь исходная система распадается на четыре линейные:

$$\begin{cases} x+y=-5, \\ x-y=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=-5, \\ x-y=3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=9, \\ x-y=-1, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=9, \\ x-y=3. \end{cases}$$

Дальнейшее решение осуществляется практически устно.

Ответ: (—3; —2); (—1; —4); (4; 5); (6; 3).

Искусство производить замену переменных заключается в том, чтобы увидеть, какая замена будет более рациональна и быстрее приведет к успеху. При этом рекомендуем придерживаться следующих правил: замену производить сразу, как появляется такая возможность; возвращаться к старым переменным только после проведения всех преобразований с новыми (т. е. после получения окончательного результата относительно новых переменных).

В примерах 1 и 2 замена была очевидной, она как бы напрашивалась сама собой. Столь же очевидна замена и в системах, когда одно из уравнений (или несколько) являются алгебраической суммой взаимообратных выражений.

Пример 3

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{10}{3}, \\ x^2-y^2=12. \end{cases}$$

Здесь удобно рассмотреть первое уравнение системы и сделать замену $\frac{x+y}{x-y}=z$. Уравнение примет вид

$$z+\frac{1}{z}=\frac{10}{3},$$

откуда $z_1=3$, $z_2=\frac{1}{3}$.

Теперь система распадается на следующие две:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=3, \\ x^2-y^2=12 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1}{3}, \\ x^2-y^2=12, \end{cases}$$

которые уже легко решить.

Ответ: (—4; —2); (—4; 2); (4; —2); (4; 2).

Однако во многих случаях удобная замена далеко не очевидна. Большую группу таких систем (часто встречающихся на приемных экзаменах) составляют так называемые *симметричные* (или *симметрические*) системы.

Напомним, что симметричными называются системы, если замена x на y, а y на x не меняет каждого из ее уравнений.

Для решения симметричных систем существует стандартная замена:

$$x+y=u,\ xy=v.$$

Пример 4.

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-y=102, \\ xy+x+y=69. \end{cases}$$

Пусть $x+y=u$, $xy=v$. Чтобы выразить x^2+y^2 через новые переменные, надо $x+y=u$ возвести в квадрат. Имеем $x^2+2xy+y^2=u^2$, откуда $x^2+y^2=u^2-2v$.

Получаем систему

$$\begin{cases} u^2-2v^2-u=102, \\ u+v=69. \end{cases}$$

Ее решение очевидно. Получаем

$$\begin{cases} u=15, \\ v=54 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} u=-16, \\ v=85. \end{cases}$$

Последняя пара чисел при возврате к старым переменным не приводит к действительному решению.

Ответ: (6; 9); (9; 6).

Есть еще одна распространенная группа систем уравнений, для решения которых требуется стандартный прием. Это системы вида

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1, \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2. \end{cases}$$

Многочлены второй степени в левых частях обоих уравнений *однородны*, т. е. содержат слагаемые лишь второй степени по x и y. Способ решения таких систем основан на сведении системы к уравнению с нулевой правой частью (его также называют однородным).

Пример 5.

$$\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6. \end{cases}$$

Умножив первое уравнение на 2 и вычтя второе уравнение из первого, получим однородное уравнение второй степени

$$3x^2-8xy+4y^2=0.$$

Разделив последнее на $y^2\neq 0$ (в том, что $y=0$ не является решением данной системы, легко убедиться самостоятельно), приходим к квадратному уравнению относительно $z=x/y$:

$$3z^2-8z+4=0,$$

откуда $z_1=\frac{2}{3}$, $z_2=2$.

Теперь нетрудно довести решение данной системы до конца.

Ответ: $(-2;\ -1)$; $(2;\ 1)$.

Как мы уже говорили, введение новых переменных — весьма распространенный прием. Однако умение свободно пользоваться им достигается не сразу и приходит с опытом. Часто замена переменных приводит к кажущемуся усложнению задачи, в частности к увеличению числа уравнений и неизвестных. В таких ситуациях теряться не следует, надо все же попробовать довести решение до конца.

Пример 6.

$$\begin{cases} \sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5, \\ \sqrt{2x+y}+x-y=1. \end{cases}$$

Обозначим

$$\sqrt{7x+y}=u,$$
$$\sqrt{2x+y}=v,$$
$$x-y=w,$$

тогда $u^2=7x+y$, $v^2=2x+y$.

Таким образом, для u, v и w получаем систему

$$\begin{cases} u+v=5, \\ v+w=1, \\ 3u^2-8v^2-5w=0. \end{cases}$$

Последнее уравнение системы получено из следующих соображений: так как

$$\begin{cases} u^2=7x+y, \\ v^2=2x+y; \\ w=x-y, \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} u^2+w=8x, \\ v^2+w=3x. \end{cases}$$

Исключим x из этой системы:

$$3u^2-8v^2-5w=0.$$

Несмотря на то что у нас получилась система из трех уравнений с тремя неизвестными, решить ее значительно проще, чем исходную.

Из первого и второго уравнений выразим u и w через v и подставим в третье. Имеем

$$u=5-v,$$
$$w=1-v,$$

откуда

$$3(5-v)^2-8v^2-5(1-v)=0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни 2 и -7; $v=-7$ не подходит, так как по обозначению $v\geqslant 0$. Значит, $v=2$, тогда $u=3$, $w=-1$, откуда $x=1$, $y=2$.

Ответ: $(1;\ 2)$.

Еще один весьма популярный способ решения систем — последовательное исключение неизвестных (или группы неизвестных). Это позволяет свести данную систему уравнений к системе с меньшим числом неизвестных (или к более простому уравнению, например квадратному, относительно группы неизвестных).

Пример 7.

$$\begin{cases} 3x^2y^2+x^2-3xy-7=0, \\ 10x^2y^2+3x^2-20xy-3=0. \end{cases}$$

Исключив из системы x^2 (для чего первое уравнение умножим на 3 и вычтем из второго), мы получим квадратное уравнение относительно произведения xy:

$$(xy)^2-11xy-18=0.$$

Его корнями являются числа 9 и 2.

В результате система распадается на две:

$$\begin{cases}xy=9,\\3x^2y^2+x^2-3xy-7=0\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}xy=2,\\3x^2y^2+x^2-3xy-7=0.\end{cases}$$

Первая из них оказывается несовместной, вторая — приводит к уравнению $x^2=1$.

Ответ: (—1; —2); (1; 2).

На примере решения этой системы мы лишь продемонстрировали прием исключения неизвестных. Справедливости ради надо сказать, что внимательный читатель и в этой системе увидит очевидную замену: $xy=u$, $x^2=v$, ну а каким способом решать — дело вкуса.

Пример 8.

$$\begin{cases}xy+24=\dfrac{x^3}{y},\\xy-6=\dfrac{y^2}{x}.\end{cases}$$

Естественное желание — исключить из системы группу xy — только усложнит решение. Здесь лучше почленно перемножить уравнения. Тогда получим, что $xy=8$, и система примет вид

$$\begin{cases}xy=8,\\\dfrac{y^3}{x}=2.\end{cases}$$

Ответ: (—4; —2); (4; 2).

Часто бывает целесообразно способ последовательного исключения неизвестных применить в ином, так сказать, «школьном» виде: какое-либо неизвестное из одного уравнения выразить через остальные неизвестные и подставить в другие уравнения системы.*)

Пример 9.

$$\begin{cases}4x^2+4x-y^2=-1,\\4x^2-3xy+y^2=1.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем

$$y^2=4x^2+4x+1,$$

т. е. $y^2=(2x+1)^2$, откуда

$$y=2x+1 \text{ или } y=-2x-1.$$

Дальнейшее решение очевидно.

Ответ: (—0,5; 0); (0; —1); (0; 1).

Пример 10.

$$\begin{cases}y^4+19=x+y,\\\sqrt{x}+\sqrt{x+2y}=\sqrt{2}.\end{cases}$$

Кажется, уж здесь-то никак нельзя воспользоваться обсуждаемым приемом, однако, возведя второе уравнение дважды в квадрат, мы получим $x=\frac{(1-y)^2}{2}$. Теперь возвратимся к первому уравнению. Имеем

$$y^4-10y^2+9=0.$$

Числа ±1, ±3 являются корнями полученного биквадратного уравнения, но корни ±3 не удовлетворяют начальному условию.

Ответ: (0; 1); (2; —1).

При решении системы уравнений нельзя забывать и о всевозможных алгебраических приемах, позволяющих при помощи тех или иных преобразований (группировка, вынесение общего множителя за скобки, применения формул сокращенного умножения и т. д.) упростить как саму данную систему, так и непосредственно процесс решения.

Так, в примерах 9 и 10 нам пришли на помощь формулы сокращенного умножения. Что же касается примера 9, то в его решении можно использовать и другой прием: сложив оба уравнения, получим

$$8x^2+4x-3xy=0.$$

Теперь вынесем общий множитель за скобки:

$$x(8x+4-3y)=0.$$

---

*) Термин «школьный» здесь употреблен в том смысле, что в школьной математике эта разновидность способа последовательного исключения переменных рассматривается как самостоятельный метод решения системы — способ подстановки.

В результате система распадается на две:

$$\begin{cases} x=0, \\ 4x^2+4x-y^2=-1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y=\dfrac{8x+4}{3}, \\ 4x^2+4x-y^2=-1. \end{cases}$$

Решить их нетрудно, ну а выбор способа решения системы 9 зависит от читателя.

Рассмотрим еще несколько примеров.

Пример 11.

$$\begin{cases} y^4+xy^2-2x^2=0, \\ x+y=6. \end{cases}$$

Очевидная подстановка (выражаем какую-либо переменную из второго уравнения и подставляем в первое) не приводит к хорошему результату, так как получается уравнение четвертой степени, успешное решение которого весьма проблематично.

Преобразуем первое уравнение:

$$(y^2-x)(y^2+2x)=0.$$

Тогда данная система распадается на две:

$$\begin{cases} y^2-x=0, \\ x+y=6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y^2+2x=0, \\ x+y=6. \end{cases}$$

Вторая система решения не имеет.

Складывая оба уравнения первой, получаем квадратное уравнение

$$y^2+y-6=0.$$

Ответ: (4; 2); (9; —3).

Пример 12.

$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0. \end{cases}$$

Решение этой системы требует мастерства и интуиции. Умножим второе уравнение на —2 и сложим с первым. Получаем

$$4x^2+9y^2-12xy-4x+6y+1=0,$$

или

$$(2x-3y)^2-2(2x-3y)+1=0.$$

Теперь и здесь легко увидеть полный квадрат разности. Имеем

$$(2x-3y-1)^2=0.$$

Система получается хотя и громоздкой, но простой по способу решения:

$$\begin{cases} 10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0, \\ 2x-3y-1=0. \end{cases}$$

Мы видим, что действительно потребовались «мастерство и интуиция»: нелегко догадаться, как преобразовать уравнения, чтобы произошло очевидное упрощение. Однако и для решения подобных систем существует стандартный прием: надо рассмотреть какое-либо из уравнений как квадратное относительно одного неизвестного. В данном случае рассмотрим первое уравнение как квадратное относительно x. Имеем

$$10x^2-2(y+19)x+5y^2-6y+41=0.$$

Вычислим его дискриминант:

$$\frac{D}{4}=-49(y-1)^2.$$

Квадратное уравнение имеет действительные корни при $D\geqslant 0$, значит, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $-49(y-1)^2\geqslant 0$, что возможно лишь при $y=1$. Подставив теперь это значение y в любое из данных уравнений, получим $x=2$.

Ответ: (2; 1).

Теперь применим этот способ в другой ситуации.

Пример 13.

$$\begin{cases} x^2-6y^2-xy-2x+11y=3, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x:

$$x^2-(y+2)x-6y^2+11y-3=0.$$

В этом случае $D=(5y-4)^2$, значит, $x_1=3y-1$, $x_2=3-2y$.

Система распадается на две:

$$\begin{cases} x=3y-1, \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=3-2y, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Ответ: (—2,2; —0,4); (—1; 2); (2; 1); (2,2; 0,4).

Мы постарались дать читателю широкий спектр приемов и методов решения всевозможных алгебраических систем. Правда, мы не касались таких систем уравнений, как тригонометрические, показательные и логарифмические, но принципы их решения остаются теми же, добавляется лишь специфика соответствующих функций.

Несмотря на то что ряд систем решается стандартными методами, бо́льшая часть их требует индивидуального подхода. Но даже в стандартных ситуациях надо думать и искать оптимальный путь решения.

Пример 14.

$$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$$

Система симметричная, и, конечно, ее можно решать при помощи стандартной замены. Однако замена $x\sqrt{y}=u$, $y\sqrt{x}=v$ позволяет прийти к верному результату значительно быстрее.

Ответ: (1; 4); (4; 1).

Пример 15.

$$\begin{cases} x^2-5xy+3y^2=17, \\ 2x^2-7xy+4y^2=26. \end{cases}$$

Система стандартная — она приводится к однородному уравнению (сравните с примером 5). Однако здесь легко увидеть, что если из второго уравнения вычесть первое, то мы получим полный квадрат разности:

$$x^2-2xy+y^2=9,$$

откуда

$$x-y=3 \text{ или } x-y=-3.$$

Доведите решение этой системы до конца самостоятельно.

Ответ: (—5; —8); (—2; 1); (2; —1); (5; 8).

В заключение хотелось бы дать один совет.

В решении систем, как в спорте, мастерство достигается упражнениями. Поэтому — решайте! Чем больше, тем лучше.

Задачи для самостоятельного решения

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 2x^2+y-z=-1, \\ 2x-y-z=-1, \\ x^4-y+zy=1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2}, \\ xy-x-y=0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} (x+y)^2+2x=35-2y, \\ (x-y)^2-2y=3-2x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=12, \\ x+y+\sqrt{xy}=6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ x+xy+y=5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ x^4+x^2y^2+y^4=133. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x-y=-1, \\ y-z=-1, \\ (x-1)^3+(y-2)^3+(z-3)^3=3. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2\sqrt{2x+3y}+\sqrt{5-x-y}=7, \\ 3\sqrt{5-x-y}-\sqrt{2x+y-3}=1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x^2+3xy-y^2=4, \\ 3x^2+2xy-2y^2=3; \end{cases}$

10. $\begin{cases} \sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3(x-y), \\ x^2-y^2=41; \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0, \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0; \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2+y^2-z=0, \\ x+y+z+\dfrac{1}{2}=0. \end{cases}$

Мешок

(фантастический рассказ)

У. МОРРИСОН

Зиблинг ожидал своего первого часового интервью с Мешком не без некоторого трепета. До сих пор его обязанности были ограничены несложными задачами, установленными в инструкции: присмотр за противометеоритным куполом-укрытием, обеспечение необходимых запасов пищи, а также забота о воинском подразделении и гвардейцах межпланетного флота. Ибо к тому времени огромная ценность Мешка уже была признана во всей солнечной системе, и каждому было ясно, что тысячи преступников попытаются выкрасть это беззащитное сокровище.

А теперь, думал Зиблинг, я должен буду разговаривать с ним. Он боялся потерять то доброе мнение, которое Мешок почему-то составил о нем. Он находился в положении, до странности напоминающем положение молоденькой девицы, которой хотелось бы больше всего болтать о нарядах и мальчиках с кем-нибудь, кто находится на ее уровне, и которая вынуждена вести блестящую и глубокомысленную беседу с человеком втрое старше ее.

Но при виде Мешка его благоговейный страх до некоторой степени испарился. Было бы абсурдом утверждать, что его успокоили манеры этого странного существа. Оно было лишено каких-либо манер, и даже когда часть его приходила в движение — обычно во время разговора,— это движение казалось совершенно безличным. И тем не менее что-то в Мешке смягчило страхи Зиблинга.

Некоторое время он стоял перед Мешком молча. Потом, к его изумлению, Мешок заговорил — впервые заговорил сам, не ожидая вопроса.

Продолжение. См. «Квант» № 2.

— Вы не разочаруете меня,— сказал он,— я ничего не жду.

Зиблинг улыбнулся. Мешок никогда еще не говорил так. Впервые он показался Зиблингу не столько механическим мозгом, сколько живым существом. Зиблинг спросил:

— Кто-нибудь спрашивал раньше о вас самих?

— Один человек. Это было еще до того, как мое время распределили по минутам. И даже этот человек прекратил свои расспросы, когда сообразил, что ему лучше попросить совета, как стать богатым. Он почти не обратил внимания на мой ответ.

— Сколько вам лет?

— Четыреста тысяч. Я могу указать свой возраст с точностью до долей секунды, но полагаю, что точные цифры интересуют вас меньше, чем моих обычных собеседников.

Мешок по-своему не лишен чувства юмора, подумал Зиблинг и спросил:

— И сколько лет вы провели в одиночестве?

— Более десяти тысяч лет.

— Однажды вы сказали кому-то, что ваши товарищи были убиты метеоритами. Вы не могли оградить себя от этой опасности?

Мешок проговорил медленно, почти устало:

— Это случилось уже после того, как мы потеряли интерес к жизни. Первый из нас умер триста тысяч лет назад.

— И с тех пор вы жили без желания жить?

— У меня нет и желания умереть. Жизнь стала привычкой.

— Почему вы потеряли интерес к жизни?

— Потому что мы потеряли будущее. Мы просчитались.

— Вы способны делать ошибки?

— Мы не утратили эту способность. Мы просчитались, и хотя те из нас, кто жил тогда, избежали гибели, нашему следующему поколению не повезло. После этого нам стало не для чего жить.

Зиблинг кивнул. Эту потерю интереса к жизни человек способен понять. Он спросил:

— Разве вы с вашими знаниями не могли устранить последствий своего просчета?

Мешок ответил:

— Чем больше вещей становятся для вас возможными, тем отчетливее вы осознаете, что ничего нельзя сделать, минуя законы природы. Мы не всесильны. Иногда кто-нибудь из особо глупых клиентов задает мне вопросы, на которые я не могу ответить, а потом сердится, потому что чувствует, что заплатил деньги напрасно. Другие просят меня предсказать будущее. Я могу предсказать только то, что могу рассчитать, но способность моя к расчетам тоже ограничена, и хотя мои возможности по сравнению с вашими огромны, они не позволяют предусмотреть всего.

— Как это случилось, что вы знаете так много? Знание рождается в вас?

— Рождается только возможность познания. Чтобы знать, мы должны учиться. Это мое несчастье, что я так мало забыл.

— Какие способности вашего организма или какие органы мышления позволяют вам так много знать?

Мешок заговорил, но слова его были непонятны Зиблингу, и тот признался в этом.

— Я мог бы сказать вам сразу, что вы не поймете,— промолвил Мешок,— но хотел, чтобы вы осознали это сами. Чтобы разъяснить все это, мне пришлось бы продиктовать вам с десяток томов, и тома эти вряд ли были бы поняты даже вашими специалистами по биологии, физике и тем наукам, которые вы еще только начинаете изучать.

Зиблинг не отвечал, и Мешок проговорил словно в раздумье:

— Ваша раса все еще не разумна. Уже много месяцев я в ваших руках, но ни один из вас еще не задавал мне важных вопросов. Те, кто желает разбогатеть, расспрашивают о минералах и о концессиях на участки, спрашивают, какой из их планов сколотить состояние будет наилучшим. Некоторые врачи спрашивали меня, как лечить смертельно больных богатых пациентов. Ваши ученые просят меня разрешить проблемы, на которые они без моей помощи затратили бы годы. А когда задают вопросы ваши правители, они оказываются самыми глупыми из всех, ибо хотят знать только одно: как удержаться у власти. Никто не спрашивает того, что надо.

— О судьбе человечества?

— Это предсказание отдаленного будущего. Это вне моих возможностей.

— Что же мы должны спрашивать?

— Вот вопрос, которого я ожидал. Вам трудно понять его важность, потому что каждый из вас занят только самим собой.

Мешок замолк, затем пробормотал:

— Я болтаю непозволительный вздор, когда разговариваю с этими тупицами. Но даже вздор может считаться информацией. Другие не понимают, что в больших делах прямота опасна. Они задают мне вопросы, требующие специальных ответов, а им следовало бы спросить о чем-нибудь общем.

— Вы не ответили мне.

— Это часть ответа — сказать, что вопрос важен. Ваши правители видят во мне ценную собственность. Им следовало бы спросить, так ли велика моя ценность, как это кажется. Им следовало бы спросить, что приносят мои ответы — пользу или вред.

— А что они приносят?

— Вред, огромный вред.

Зиблинг был поражен. Он сказал:

— Но если ваши ответы правдивы...

— Процесс достижения истины так же драгоценен, как и сама истина. Я лишил вас этого. Я даю вашим ученым истину, но не всю, ибо они не знают, как достигнуть ее без моей помощи. Было бы лучше, если б они познавали ее ценой многих ошибок.

— Я не согласен с вами.

— Ученый спрашивает меня, что происходит в живой клетке, и я говорю ему. Но если бы он исследовал клетку самостоятельно — пусть ценою затраты многих лет, он пришел бы к финишу не только с этим знанием, но и множеством других, со знанием вещей, о которых он сейчас даже не подозревает, а они тесно связаны с его наукой. Он получил бы много новых методов исследования.

— Но ведь в некоторых случаях знание полезно само по себе. Например, я слышал, что уже используется предложенный вами дешевый процесс производства урана на Марсе. Что в этом вредного?

— А вам известно, сколько имеется необходимого сырья? Ваши ученые не продумали этого вопроса, они растранжирят все сырье и слишком поздно поймут, что они наделали. У вас ведь уже было так на Земле. Вы узнали, каким образом можно дешево перерабатывать воду; вы тратили воду безрассудно, и вскоре вам перестало ее хватать.

— Что плохого в том, чтобы спасти жизнь умирающего пациента, как это делали некоторые врачи?

— Первый вопрос, который следовало бы задать, это — стоит ли спасать жизнь такого пациента.

— Но именно этого доктор не должен спрашивать. Он должен стараться спасти всех умирающих. Совершенно так же, как вы никогда не спрашиваете, в добро или зло обратят люди ваши знания. Вы просто отвечаете на их вопросы.

— Я отвечаю только потому, что мне все равно, меня не интересует, как они используют то, что я скажу. Разве докторам тоже все равно?

Зиблинг сказал:

— Подразумевается, что вы отвечаете на вопросы, а не задаете их. Кстати, почему вы вообще отвечаете?

— Некоторые представители человечества любят хвастаться, другие — делать так называемое добро, третьи — добывать деньги. То небольшое удовольствие, какое я могу еще получать от жизни, состоит в том, чтобы давать информацию.

— А вы не могли бы находить удовольствие во лжи?

— Я так же не способен лгать, как ваши птицы не способны покинуть Землю на собственных крыльях.

— Еще один вопрос. Почему вы потребовали, чтобы во время отдыха разговаривал с вами именно я? У нас есть блестящие ученые, великие люди всех сортов, из которых вы могли бы выбирать.

— Меня не интересуют великие представители вашей расы. Я избрал вас, потому что вы честны.

— Спасибо, но на Земле много других честных людей. И на Марсе и на других планетах. Почему я, а не они?

Мешок, казалось, колебался:

— Это доставило мне маленькое удовольствие. Возможно, потому, что я знал: мой выбор будет неприятен тем... семерым...

Зиблинг улыбнулся.

— Вы не так уж равнодушны, как вам кажется. Полагаю, очень трудно быть равнодушным к сенатору Хорригану.

Это был только первый из многих разговоров с Мешком. Сначала Зиблинга весьма обеспокоило предупреждение Мешка относительно опасности, грозящей человечеству, если его (Мешка) советами будут и впредь столь безрассудно пользоваться. Но было бы нелепостью стараться убедить правительственные органы, что Мешок, приносящий ежедневно многие миллионы, является бедствием, а не благословением человеческого рода, и Зиблинг даже не пытался этого сделать. Через некоторое время он постарался загнать все эти неприятные мысли как можно глубже.

Поскольку разговоры велись через каждые двадцать часов, Зиблингу пришлось реорганизовать свое расписание, что было не так уж просто для человека, привыкшего к суткам межпланетным, тридцатичасовым. Но он чувствовал себя с лихвой вознагражденным за это беспокойство регулярными беседами с Мешком. Он узнал множество нового о планетах, солнечной системе, галактиках, но все эти сведения получал случайно, не задавая специальных вопросов. Поскольку его познания в астрономии ограничивались школьным курсом, ему никогда и в голову не приходило, что существует целый ряд вопросов, которые следовало бы задать — главным образом относительно других галактик.

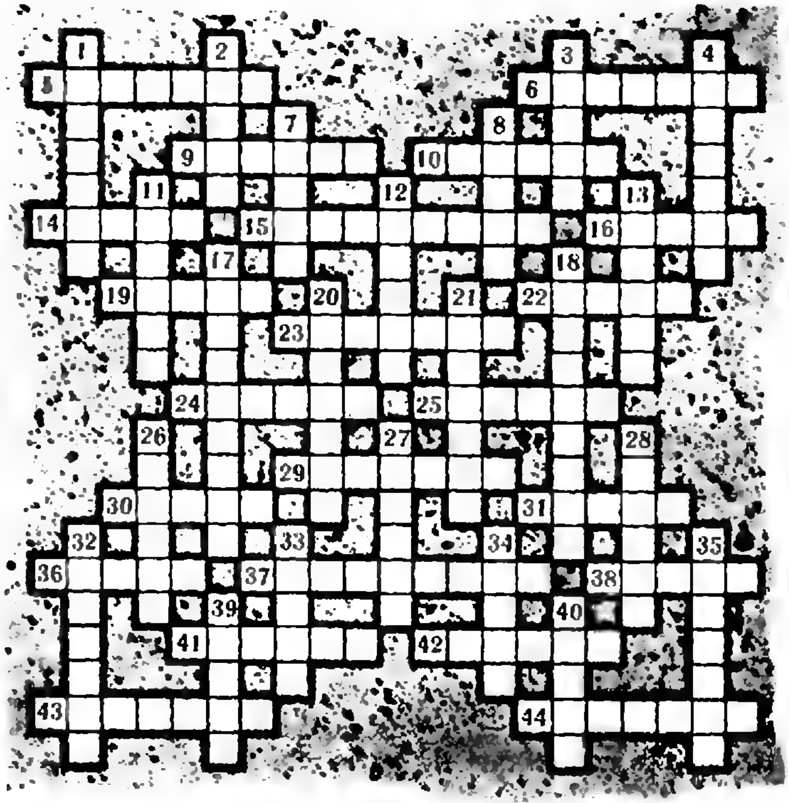
Впрочем, вероятно, ничего бы не изменилось, если бы он и задал эти вопросы, ибо некоторые ответы понять было слишком трудно. Он потратил три беседы подряд, стараясь уяснить, каким образом Мешок смог без всякого предварительного контакта с людьми понять земной язык капитана Ганко в тот исторический час, когда этот сверхразум впервые открыл себя людям, и как он смог ответить словами, практически лишенными всякого акцента. Но даже после трех бесед у Зиблинга осталось лишь весьма смутное представление о том, как это делалось.

Это не было телепатией, как он думал вначале. Это был чрезвычайно запутанный аналитический процесс, учитывающий не только слова, которые произносились, но и природу межпланетного корабля, скафандров, которые носили люди, манеру их разговора и множество других факторов, характеризующих как психологию говорящего, так и его язык. Это было похоже на рассуждения математика, старающегося объяснить человеку, не знающему даже арифметики, как он определяет уравнение сложной кривой по ее короткой дуге. Только Мешок не в пример математику мог проделать все это в собственной, так сказать, голове без помощи бумаги и карандаша.

(Окончание следует)

Перевод с английского С. Бережкова

Кроссворд



По горизонтали:

5. Итальянский астроном. **6.** Английский астроном, открывший планету Уран. **9.** Звезда в созвездии Большой Медведицы. **10.** Рассеянное звездное скопление в созвездии Тельца. **14.** Летчик-космонавт СССР. **15.** Фаза Луны. **16.** Нижняя точка пересечения отвесной линии с небесной сферой. **19.** Малая планета. **22.** Планета Солнечной системы. **23.** Зодиакальное созвездие. **24.** Серия советских космических кораблей. **25.** Ученый, открывший законы движения планет. **29.** Созвездие Северного полушария. **30.** Звездное скопление в созвездии Тельца. **31.** Яркий метеор. **36.** Двойная звезда в созвездии Большой Медведицы. **37.** Созвездие южного неба. **38.** Промежуток времени, через который в одной и той же последовательности повторяются солнечные и лунные затмения. **41.** Переменная звезда в созвездии Персея. **42.** Серия американских межпланетных станций. **43.** Главная звезда в созвездии Малого Пса. **44.** Самоходный космический аппарат.

По вертикали:

1. Первый космонавт Земли. **2.** Главная звезда в созвездии Лебедя. **3.** Звезда в созвездии Большой Медведицы. **4.** Главная звезда в созвездии Орла. **7.** Экваториальное созвездие, одно из самых красивых на небе. **8.** Верхняя точка пересечения отвесной линии с небесной сферой. **11.** Серия советских спутников связи. **12.** Планета Солнечной системы. **13.** Английский астроном, именем которого названа знаменитая комета. **17.** Созвездие Северного полушария. **18.** Тип телескопа. **20.** Советский ученый и конструктор в области ракетостроения, академик. **21.** Лунный кратер. **26.** Созвездие Южного полушария. **27.** Английский ученый, открывший закон всемирного тяготения. **28.** Команда космического корабля. **32.** Древнегреческий астроном. **33.** Оборот космического корабля вокруг Земли. **34.** Спутник Марса. **35.** Летчик-космонавт СССР. **39.** Звезда в созвездии Большой Медведицы. **40.** Главная звезда в созвездии Льва.

Н. Мунасыпов

(Ответы см. на с. 70)

Варианты вступительных экзаменов

Новосибирский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

*(механико-математический и экономический факультеты)**

1. Возвращаясь с рыбалки, Вася отдал Пете несколько рыб, чтобы уравнять улов. Если бы Петя отдал Васе столько же рыб, то у Васи оказалось бы в пять раз больше рыб, чем у Пети. Во сколько раз Васин улов больше Петиного?

2. В треугольнике ABC со сторонами $AB=10$, $AC=8$, $BC=6$ проведена медиана CM. Прямая, параллельная стороне AC, пересекает отрезки AB, CM, BC в точках P, Q, R соответственно. Найдите наименьшее возможное значение суммы площадей треугольника PMQ и CQR.

3. Решите неравенство

$$\log_{2-\sqrt{3}}((x-11)(x^2-4x-5)) \geqslant$$
$$\geqslant (\log_{2-\sqrt{3}}(\sqrt{2}-1))\log_{\sqrt{2}-1}(x-11)^2.$$

4. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\log_{a-2}\left(\frac{17}{8}+\cos x-\sin\frac{x}{2}\right)=3$$

имеет решения.

5. В основании правильной треугольной призмы $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 4. Найдите объем призмы, если известно, что прямые AB' и CA' перпендикулярны.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Какой наименьший угол могут образовать векторы $(1-5x;\ 1;\ 3)$, $(-1; 1+4x;\ 3-3x)$?

2. Решите уравнение

$$2\cos\left(\frac{5\pi}{3}-4\sin x\right)=1.$$

3. Окружность, проходящая через вершину C треугольника ABC, касается стороны AB в точке L и пересекает стороны AC и BC в точках P и Q соответственно. Найдите AC и BC, если известно, что $AP=3$, $AL=6$, $LB=8$ и прямая PQ параллельна AB.

4. Решите уравнение

$$2\cdot 4^{|x+2|}+3\cdot 9^{|x+2|}=7\ \ 6^{|x+2|}.$$

5. В правильной треугольной призме $ABCA'B'C'$ с основанием ABC и боковыми ребрами AA', BB', CC' все ребра равны 6. Точки P и Q' расположены на ребрах BC и $A'C'$ соответственно и так, что $BP:PC=A'Q':Q'C'=1:2$. Найдите радиус сферы с центром на отрезке PQ', которая касается плоскостей $ABB'A'$ и $ACC'A'$.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов.

После текста каждой задачи в скобках указан процент решивших ее.

Вариант 1

1. Две открытые с обоих концов трубы сечениями S_1 и S_2 состыкованы между собой (рис. 1). В них вставлены соединенные стержнем поршни, которые при комнатной температуре T_0 в положении равновесия находятся на одинаковом расстоянии от стыка труб. До какой величины надо понизить температуру воздуха между поршнями, чтобы правый поршень

---

*) Задачи 1, 3, 5 предлагались также на факультете естественных наук и на геолого-геофизическом факультете.

сместился влево до упора? Трением поршней о трубы пренебречь. (68 %).

2. Шарики массами m и M соединены легкой недеформированной пружиной. Шарику массой m сообщили скорость $\vec{v}$ в направлении второго шарика. В момент максимального растяжения пружина порвалась. Какое количество теплоты выделилось к этому моменту? (44 %).

3. Между двумя параллельными шинами включены конденсаторы, емкости которых C_1 и C_2 (рис. 2). Проводящая перемычка массой m касается шин, расстояние между которыми l, и может без трения скользить вдоль них. Перпендикулярно плоскости шин включается однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Какую силу F вдоль шин надо приложить к перемычке, чтобы она двигалась с постоянным ускорением a? Сопротивлением шин и перемычки можно пренебречь. (33 %).

4. Утром через маленькое отверстие в шторе, закрывающем окно, на противоположную стену падает луч солнечного света. Оцените, на какое расстояние за минуту переместится пятно света по стене. (57 %).

5. Однородная спираль подключена к источнику напряжения и разогрета до красного каления. Половину спирали растягивают. В результате растянутая половина заметно темнеет, а нерастянутая становится ярче. Объясните явление. (25 %).

Вариант 2

1. В стакан, наполовину заполненный жидкостью плотностью ϱ, опускают удерживаемый в вертикальном положении цилиндр, по высоте равный высоте стакана (рис. 3). Цилиндр оказывается в равновесии, когда от его нижнего края до дна остается четверть высоты стакана. Чему равна плотность материала цилиндра, если его сечение S, а сечение стакана S_0? Трения нет. (65 %).

2. На расстояниях d от левой и b от правой заземленных пластин параллельно им расположена незаряженная сетка (рис. 4). Через малые отверстия в пластинах пролетают частицы с зарядом q и массой m, скорость которых $\vec{v}_0$ перпендикулярна пластинам. На сколько изменится время пролета этих частиц, если на сетку подать потенциал $-\varphi$? (43 %).

3. Две одинаковые пружины жесткостью k и длиной l каждая в недеформированном состоянии соединены последовательно (рис. 5). Концы пружины, прикрепленной к стенке, связаны нитью длиной $L>l$, рвущейся при натяжении T. Какую наименьшую скорость надо сообщить телу массой m на конце второй пружины, чтобы нить порвалась? (45 %).

4. Оцените, во сколько раз увеличивается при использовании бинокля расстояние, с которого еще можно различить слабый источник света ночью. (34 %).

5. Термос заливают доверху кипятком и закрывают пробкой. Пробка держится.

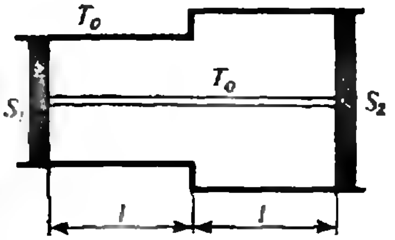


Рис. 1.

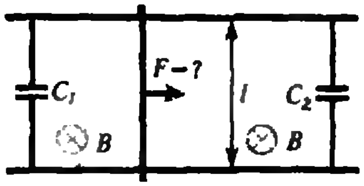


Рис. 2.

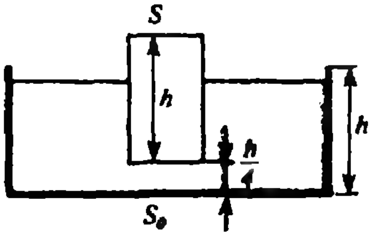


Рис. 3.

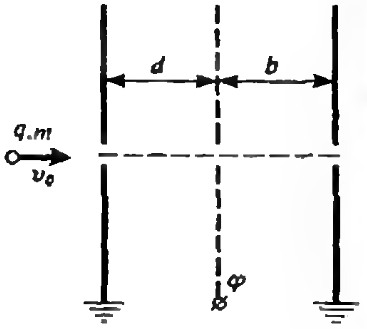


Рис. 4.

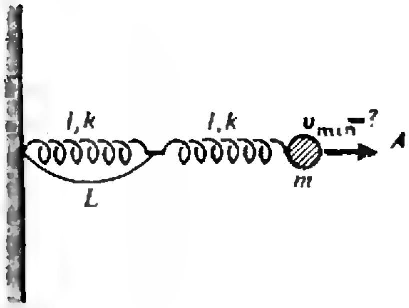


Рис. 5.

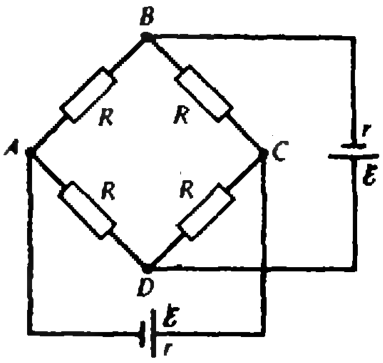


Рис. 6.

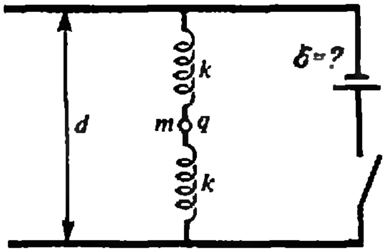


Рис. 7.

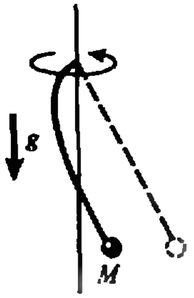


Рис. 8.

А если из термоса отлить половину горячей воды и снова закрыть пробкой, то через некоторое время она выскакивает. Объясните явление. (48 %).

Вариант 3

1. Цилиндр разделен на два равных отсека перегородкой с отверстием, закрытым пробкой. Пробка вылетает при перепаде давлений Δp. С одного конца цилиндр закрыт наглухо, с другого — поршнем. В обоих отсеках в начальный момент времени находится газ под давлением p. Поршень начинают медленно вытягивать, так что температура газа не меняется. После вылета пробки движение прекращают. Найдите установившееся давление в сосуде. (65 %).

2. На рисунке 6 изображена так называемая мостовая схема из четырех одинаковых резисторов сопротивлением R и двух одинаковых батареек с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r. Найдите величины токов, текущих через резисторы. (57 %).

3. Между двумя одинаковыми сжатыми на величину x_0 пружинами жесткостью k находится шарик, масса которого m и заряд q. Пружины прикреплены к двум параллельным проводящим пластинам, расстояние между которыми d (рис. 7). Пружина рвется, если растягивающая сила превысит величину T. Какую ЭДС должен иметь источник, чтобы при его подключении к пластинам одна из пружин порвалась? Силой тяжести можно пренебречь, пружины непроводящие. (26 %).

4. Оцените максимальное время лунного затмения (до Луны примерно $4 \cdot 10^5$ км). (42 %).

5. Один и тот же груз прикрепляют сначала к тонкой нити, а потом к толстому гибкому шнуру той же длины. При вращении вокруг вертикальной оси нить оказывается прямолинейной, а шнур — заметно изогнутым (рис. 8). Объясните явление. (43 %).

Публикацию подготовили А. Больбот, Г. Меледин

Московский авиационный институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, если разность пятого и первого членов прогрессии в пять раз больше разности третьего и первого ее членов.

2. Решите уравнение

$$2\cos^4 x - \cos 2x = \frac{3}{4}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 \log_{0,2}\frac{(x-2)(x-1)}{x+3} \geqslant$$
$$\geqslant \log_{0,2}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 \log_2\frac{(x-2)(x-1)}{11-x}.$$

4. На координатной плоскости отмечены точки A (1; 0), B (—1; 0), C (3; 0). Изобразите на координатной плоскости множество таких точек D, для которых величина угла ADC меньше 30°, а разность величин углов BDC и ADC больше 60°.

5. На станцию привезли несколько одинаковых контейнеров, полных телевизоров. Телевизоры перегрузили в вагоны одинаковой емкости. Получилось 7 полных вагонов, и еще осталось 5 телевизоров. Через неделю привезли другое количество таких же контейнеров. При перегрузке получилось 11 полных вагонов, а в 12-м не хватало 1 телевизора до полноты. Сколько телевизоров вмещает 1 контейнер (известно, что это число больше 1)?

6. Площадь основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $HABCD$ равна 33. Сфера проходит через точку B и пересекает боковое ребро HC в точках M и K так, что $CM:CK:CH=2:3:5$. Найдите объем пирамиды, если известно, что ребро CB перпендикулярно радиусу сферы, проходящему через точку B.

Вариант 2

1. Три числа a, b, c являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите

$$\frac{\log_b 3 \cdot (\log_a c - \log_c \sqrt{a})}{\log_a 9 - 2\log_c 3}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} x} = \cos x.$$

3. Решите неравенство

$$16|x^2-2(x+|x|)+1|<1.$$

4. В окружность радиусом 13 вписан четырехугольник, один из углов между диагоналями которого равен 120°. Длины диагоналей равны 10 и 24. Найдите длину наибольшей стороны четырехугольника.

5. Найдите все целые числа, каждое из которых является первым членом арифметической прогрессии с разностью, равной 7, и суммой первых нескольких членов, равной 2744.

6. Найдите объем параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, если известно, что объем пирамиды $AMKP$ равен V, здесь M — точка пересечения диагоналей параллелепипеда, K — точка пересечения диагоналей грани $A'B'C'D'$ и P — точка пересечения медиан треугольника $BC'C$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Наблюдатель стоит на платформе около передней площадки вагона электропоезда и замечает, что после начала равноускоренного движения первый вагон проходит мимо него за время $t=5$ с. Определите время, за которое пройдет мимо наблюдателя шестой вагон, если длина каждого вагона $L=15$ м, а расстояние между вагонами $l=1{,}5$ м.

2. Два одинаковых тела массой $m=15$ кг каждое связаны идеальной нитью и движутся по горизонтальной поверхности под действием силы, равной $F=118$ Н и направленной под углом $\alpha=45°$ к горизонту (рис. 1). Коэффициент трения тел о поверхность $\mu=0{,}02$. Определите ускорение тел и силу натяжения нити между ними.

3. Один моль одноатомного идеального газа расширяется по закону $pV^2=\text{const}$. Работа, совершаемая газом, подсчитывается при этом по формуле $A=p_1V_1-p_2V_2$, где p_1 и V_1 — давление и объем газа в начальном состоянии, а p_2 и V_2 — в конечном. Найдите молярную теплоемкость газа в данном процессе.

4. Две бесконечные одноименно и равномерно заряженные плоскости пересекаются под прямым углом друг другу (рис. 2). Найдите напряженность электростатического поля в точке A, расположенной вблизи линии пересечения. Поверхностная плотность заряда равна $\sigma=10^{-9}$ Кл/м^2 и одинакова для обеих плоскостей.

5. Для схемы, изображенной на рисунке 3, мощность, выделяемая на резисторе сопротивлением R_1, не меняется при изменении величины сопротивления R_2 второго резистора. Чему равно внутреннее сопротивление источника тока?

6. Фотоэффект у некоторого металла начинается при частоте падающего света $\nu_0=6\cdot10^{14}$ с$^{-1}$. Найдите длину волны света, при которой освобождаемые с поверхности этого металла электроны полностью задерживаются разностью потенциалов $U=3$ В. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Вариант 2

1. Снаряд вылетает из орудия со скоростью $v_0=10^3$ м/с под углом $\alpha_0=60°$ к горизонту. Найдите кратчайшее расстояние от орудия до точки, в которой снаряд разорвался, если известно, что в момент разрыва вектор его скорости составлял с горизонтом угол $\alpha=45°$. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

2. В сосуде объемом $V=0{,}5$ л находится идеальный газ при давлении $p=1$ атм и температуре $t=27$ °С. Сколько молекул газа нужно выпустить из сосуда, чтобы давление в нем уменьшилось в 2 раза? Температура газа не изменяется.

3. Узкую цилиндрическую запаянную с одного конца трубку длиной $L=45$ см погружают открытым концом в сосуд со ртутью на глубину $l=40$ см. Атмосферное давление равно $H=76$ см рт. ст. Какова будет высота столбика ртути в трубке?

4. Во сколько раз изменилось расстояние между пластинами плоского конденсатора, отключенного от источника, если для раздвижения пластин была затрачена работа $A=10^{-9}$ Дж? Заряд конденсатора $q=10^{-10}$ Кл, площадь пластин $S=10$ см^2, первоначальное расстояние между пластинами $d=0{,}885$ мм.

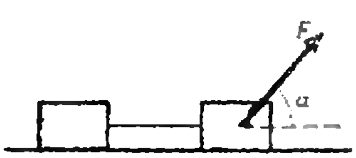


Рис. 1.

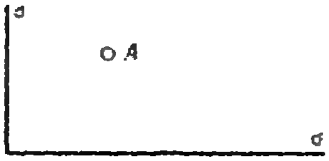


Рис. 2.

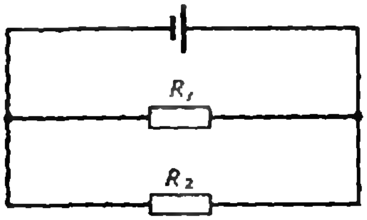


Рис. 3.

5. Плоский виток площадью $S=10$ см^2 помещен в однородное магнитное поле индукцией $B=0{,}1$ Тл, перпендикулярное к плоскости витка. Сопротивление витка $R=1$ Ом. Какой заряд протечет по витку, если поле будет исчезать с постоянной скоростью?

6. Электрон, движущийся со скоростью $v \ll c$, при соударении с атомом водорода, находившимся в невозбужденном состоянии, возбуждает его, отдавая всю свою энергию. Какую наименьшую скорость должен иметь налетающий электрон, чтобы атом водорода, переходя снова в невозбужденное состояние, излучил только одну линию спектра?

Публикацию подготовили
Г. Солохина, С. Станченко

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$4\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=3\cos 3x.$$

2. Разность между натуральным четырехзначным числом A и числом, записанным теми же цифрами, что и A, но в обратном порядке, равна 90. Из всех чисел A найдите наибольшее, если известно, что сумма его цифр сотен и единиц принимает наименьшее возможное значение.

3. Решите неравенство

$$(-x^2+\sqrt{5}x-6)\frac{x-a}{\log_3(x-2)}<0,\ a\in \mathbf{R}.$$

4. Верхним основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $A_1B_1=B_1C_1$, а угол между медианой B_1D и стороной A_1B_1 равен φ. Через центр описанной около треугольника ABC окружности и точку пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$ проведена плоскость, параллельная прямой AC. Найдите площадь сечения призмы этой плоскостью, если известно, что диагональ B_1C боковой грани BB_1C_1C имеет длину d, а $\angle BB_1A=\alpha$.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sin^3 x-\cos^3 x=-\sqrt{17}\,(\sin^4 x-\cos^4 x).$$

2. Нужно вспахать три поля одинаковой площади. Первое и третье поле первая и третья бригады начали пахать в 8 часов утра, а второе — вторая бригада двумя часами раньше. В некоторый момент времени оказалось, что участки, вспаханные на первом и втором полях, одинаковы по площади, а еще через 2 часа равными по площади оказались участки, вспаханные на втором и третьем полях. Известно, что первое поле было вспахано за 30 часов, а 50 % третьего поля — за 20 часов. За какое время вспахали второе поле, если скорость вспашки каждого поля была постоянной?

3. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x+c+63}-\sqrt[3]{x+c-1}=4$$

и найдите все значения $c\in \mathbf{R}$, при которых все корни этого уравнения положительны.

4. Длина высоты SO правильной четырехугольной пирамиды $SPQRT$ равна h, боковое ребро SP наклонено к плоскости основания $PQRT$ под углом γ. Сфера, касающаяся плоскости основания и всех боковых ребер пирамиды, пересекается плоскостью, равноудаленной от всех вершин этой пирамиды. Определите радиус окружности, по которой пересекаются эти сфера и плоскость.

Физика

Устный экзамен

Билет 1

1. Тело начинает двигаться по окружности радиусом R с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. Какова зависимость от времени полного ускорения тела?

2. Найдите среднюю энергию атома аргона, если $\nu=2$ кмоля этого газа в баллоне объемом $V=10$ л создают давление $p=10^6$ Па.

3. Металлический шарик, удаленный от других тел, облучают монохроматическим светом длиной волны $\lambda=2000$ Å. Шарик, теряя фотоэлектроны, заряжается до максимального потенциала $\varphi_{\max}=3{,}0$ В. Опре-

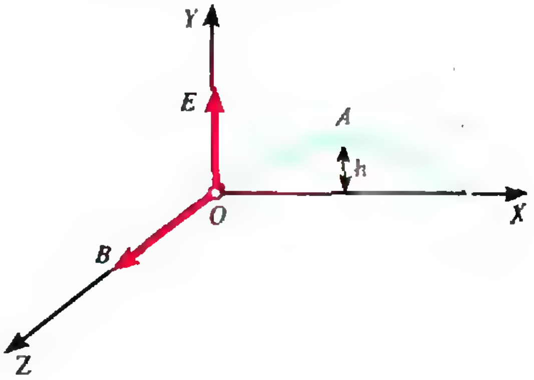


Рис. 1.

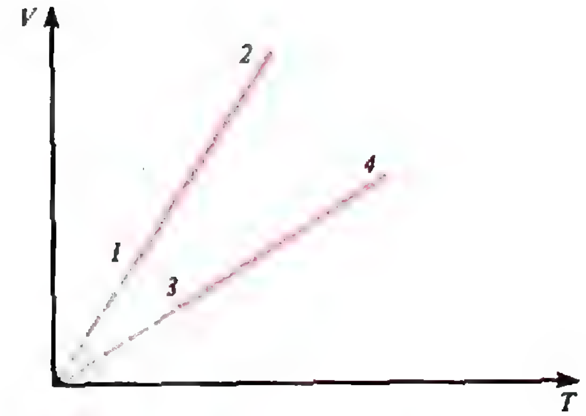


Рис. 2.

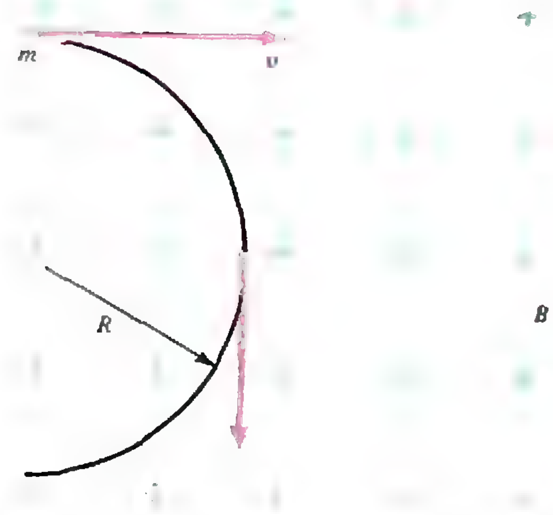


Рис. 3.

делите работу выхода электрона для шарика.

4. Протон, отношение заряда к массе которого $e/m=1\cdot10^8$ Кл/кг, движется без начальной скорости из точки *O* в области пространства, где созданы однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с напряженностью $E=10$ кВ/м и индукцией $B=0{,}02$ Тл (рис. 1). Найдите ускорение протона в вершине траектории — точке *A*, если $h=0{,}5$ м.

Билет 2

1. Процессы, изображенные на рисунке 2, происходят с одной и той же массой идеального газа. Какие это процессы? Как отличаются давления в состояниях *1* и *4*?

2. Заряженная частица массой *m* влетает в однородное магнитное поле со скоростью $\vec{v}$ (рис. 3). Вектор индукции $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рисунка и направлен за рисунок. Частица движется по окружности радиусом *R*. Определите величину и знак заряда частицы.

3. Найдите натяжения нити массой *m*, соединяющей тела *A* и *B*, в точках соединения с ними (рис. 4).

4. Сходящийся пучок света имеет вид конуса с вершиной в точке *S*. На пути пучка помещается собирающая линза так, что ось конуса совпадает с главной оптической осью линзы. Расстояние от оптического центра линзы до точки *S* равно $l=30$ см. В какой точке пересекутся лучи после преломления в линзе, если ее оптическая сила $D=4$ дптр?

Билет 3

1. Запишите уравнение движения тела, брошенного под углом к горизонту.

2. Чему равно давление одноатомного газа, занимающего объем $V=2$ л, если его внутренняя энергия $U=300$ Дж?

3. Тонкая линза с фокусным расстоянием $F=40$ см вплотную прилегает к плоскому зеркалу (рис. 5). На оптической оси линзы, на высоте $d=10$ см от нее, находится светящаяся точка *S*. Где находится изображение этой точки?

4. На гладкий стержень надеты две муфточки из изолирующего материала, соединенные пружиной и связанные нитью (рис. 6). Каждая из муфточек несет заряд $q=0{,}33\cdot10^{-7}$ Кл. К середине нити приложена некоторая сила $\vec{F}$, под действием которой система движется без трения по горизонтальной плоскости, при этом поло-

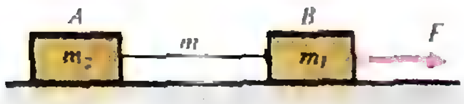


Рис. 4.

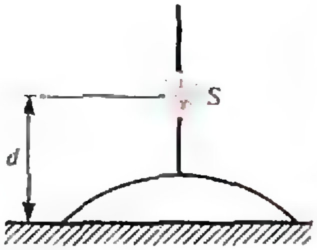


Рис. 5.

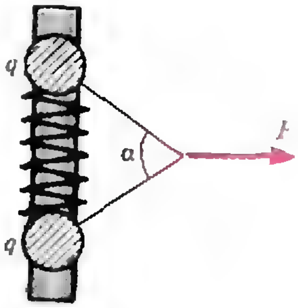


Рис. 6.

винки нити образуют угол $\alpha=60°$. Длина недеформированной пружины равна длине нити $l_0=0{,}2$ м. Определите ускорение системы, если ее масса $m=0{,}2$ кг, а жесткость пружины $k=0{,}1$ Н/м.

Публикацию подготовили А. Архипов, В. Грушин, Н. Мирошин, А. Руденко, Д. Храмченков

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тележка массой $M=100$ кг с находящимся на ней человеком массой $m=60$ кг движется со скоростью $v=0{,}5$ м/с. Человек начинает идти по тележке в направлении ее движения с постоянной скоростью $u=1{,}33$ м/с относительно тележки. Какой путь пройдет человек относительно земли за время $t=3$ с?

2. В ракете, взлетающей вертикально вверх с ускорением $a=5{,}2$ м/с^2, установлены часы с маятником. На какую высоту взлетит ракета за $t=10$ с по маятниковым часам в ракете?

3. В цилиндр с поршнем поместили тело массой $m=40$ г. Когда расстояние между поршнем и дном цилиндра составляло $l_1=5$ см, давление воздуха в цилиндре равнялось $p_1=4\cdot10^5$ Па. При увеличении этого расстояния до $l_2=7{,}5$ см давление упало до $p_2=2\cdot10^5$ Па. Определите по этим данным плотность материала, из которого сделано тело. Температура воздуха в цилиндре постоянна, сечение цилиндра $S=40$ см^2.

4. В сосуде объемом $V=100$ л при температуре $t=30$ °C находится воздух с относительной влажностью $f=30$ %. Какова будет относительная влажность при той же температуре, если в сосуд дополнительно испарить $m=1$ г воды? Давление насыщенных паров воды при 30 °C составляет $p_н=4{,}2$ кПа, молярная масса воды $M=18$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(К·моль).

5. Шарик массой $m=10$ г, несущий заряд $q=8\cdot10^{-7}$ Кл, бросают горизонтально в вакуумной камере на высоте $h=0{,}6$ м над полом. В камере создано вертикальное электрическое поле напряженностью $E=10^5$ В/м. При перемене направления этого поля на противоположное дальность полета (по горизонтали) возрастает на $\Delta x=0{,}6$ м. Определите скорость бросания шарика.

6. Металлический шарик массой $m=1$ г и зарядом $q=10^{-7}$ Кл подвешен на легкой диэлектрической нити в горизонтальном однородном электрическом поле напряженностью $E=10^5$ В/м. Шарик отводят в сторону, противоположную направлению электрического поля, так, что нить принимает горизонтальное положение, и отпускают. Определите натяжение нити в момент прохождения шариком наинизшего положения. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

7. Какую ЭДС развивает генератор постоянного тока, если при сопротивлении цепи $R=300$ Ом на вращение ротора затрачивается мощность $N=50$ Вт, а потери на трение составляют $k=4$ % от затраченной мощности? Какую мощность для поддержания того же числа оборотов необходимо затрачивать при сопротивлении цепи $R_1=60$ Ом?

8. Прямоугольная рамка размером $a\times b=10\times20$ см, изготовленная из стальной проволоки сечением $S=0{,}2$ мм^2, вращается в земном магнитном поле вокруг горизонтальной оси, проходящей через одну из сторон рамки перпендикулярно плоскости магнитного меридиана. Горизонтальная составляющая магнитного поля Земли $B_г=30$ мкТл, вертикальная $B_в=40$ мкТл. Определите заряд, протекающий в рамке при повороте ее из вертикального положения в горизонтальное, если рамка замкнута на резистор сопротивлением $R=1{,}7$ Ом. Удельное сопротивление стали $\rho=1{,}2\cdot10^{-7}$ Ом · м.

9. Луч отражается от плоского зеркала, падая на него под углом $\alpha=30°$. На какое расстояние сместится отраженный луч, если поверхность зеркала покрыть стеклом толщиной $d=3$ см? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

10. Одна из пластин плоского незаряженного конденсатора освещается ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda=100$ нм, причем выбитые электроны попадают на вторую пластину. Работа выхода электронов из металла, из которого изготовлены пластины конденсатора, $A=10^{-18}$ Дж, площадь пластин $S=48$ см^2, расстояние между пластинами $d=3$ мм. Определите максимальный заряд конденсатора. Постоянная Планка $h=6{,}63\times10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с, заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Публикацию подготовил А. Маковкин

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

специальность «Прикладная математика» факультета информатики и экономики)

1. Упростите и вычислите без таблиц

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}\cdot(3+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{2}).$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\log_3(3^x-8)}{2-x}=1.$$

В ответе запишите корень уравнения, а если корней несколько — их сумму.

3. Решите уравнение

$$9\cdot 4^{x+0,5}=19\cdot 6^x+4\cdot 9^{x+0,5}.$$

В ответе запишите корень уравнения, а если корней несколько — их сумму.

4. Решите неравенство

$$|x-3|^{2x^2-7x}\geqslant 1.$$

В ответе запишите количество целых чисел, удовлетворяющих неравенству и принадлежащих отрезку $[-6;\ 8]$.

5. Сумма первых трех членов убывающей геометрической прогрессии равна 14, а сумма их квадратов равна 84. Найдите первый член прогрессии.

6. Решите уравнение $f'(x)=0$, где

$$f(x)=4\sin 2x-3\cos 2x-10x.$$

В ответе запишите количество решений, принадлежащих отрезку $[0;\ 2\pi]$.

7. Две точки двигаются по окружности длиной 1,2 м с постоянными скоростями. Если они двигаются в разных направлениях, то встречаются каждые 15 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 60 с. Найдите скорость каждой точки, ответ дайте в м/мин. В ответе запишите произведение найденных скоростей.

8. В шар радиуса 3 вписан конус с наибольшей боковой поверхностью. Найдите высоту конуса.

9. Окружность с центром в точке O и радиусом $R=6+4\sqrt{2}$ касается прямой в точке A. На окружности взята точка B так, что угол AOB равен 45°. Найдите радиус окружности, касающейся данной окружности в точке B и данной прямой.

10. Упростите выражение и вычислите без таблиц

$$\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{13}{15}\pi+\sin\frac{23}{15}\pi+\sin\frac{\pi}{6}.$$

11. В правильную треугольную пирамиду вписан прямой конус и около нее описан прямой конус. Найдите разность объемов описанного и вписанного конусов, если высота пирамиды равна 4 и длина окружности основания описанного конуса равна $\sqrt{3}\pi$.

12. При каком наименьшем целом значении параметра a уравнение

$$(x^2-2x)^2-(a+2)\cdot(x^2-2x)+3a-3=0$$

имеет 4 различных корня?

Вариант 2

(факультет полупроводниковых материалов и приборов, физико-химический факультет, все специальности факультета информатики и экономики, за исключением «Прикладной математики»)

1. Найдите $\log_3 a^2$, если $2\log_a\sqrt{3}=5$.

2. Упростите и вычислите при $x=\sqrt{2}$

$$\left(\frac{x-x^{1/3}}{x^{2/3}-1}-2x^{1/3}+1\right)\frac{1+x^{1/3}}{1-x^{2/3}}+x^2.$$

3. Решите уравнение

$$\log_3 x+\log_9 x+\log_{27} x=\frac{11}{6}.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

4. Найдите целое значение m, при котором неравенство

$$x^2-mx>\frac{2}{m}$$

выполняется при любом x. В ответе запишите найденное значение m, а если таких значений несколько, то их сумму.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

6. Груз весом 30 Н производит давление на опору. Если вес груза уменьшить на 10 Н, а площадь опоры увеличить на 2 см^2, то давление груза уменьшится вдвое. Найдите исходную площадь опоры (в см^2).

7. Решите неравенство

$$(0,5)^{x^2}\cdot 4^{x+1}>64^{-1}.$$

В ответе запишите количество целых чисел x, удовлетворяющих неравенству.

8. Найдите наибольшее значение

функции

$$y=\frac{4-x^2}{4+x^2}$$

на отрезке $[-1;\ 3]$.

9. Упростите выражение при $\alpha=25^\circ$:

$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

10. Длина хорды окружности равна 10. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Определите радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12.

11. Решите уравнение

$$2\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)=\cos x.$$

В ответе укажите количество корней уравнения на отрезке $[0;\ \pi]$.

12. Высота конуса равна диаметру его основания. Найдите квадрат отношения площади его основания к площади боковой поверхности.

Вариант 3

(факультеты металлургии черных металлов и сплавов, металлургии цветных, редких металлов и сплавов и технологический)

1. Решите уравнение

$$4^{x+1,5}+7\cdot2^{x+1}=4.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

2. Вычислите $\cos\alpha$, если

$$\operatorname{tg}\alpha=-3\frac{3}{7},\ \text{и}\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$$

3. Вычислите без таблиц

$$\log_{\sqrt{6}}\log_7\sqrt[3]{\sqrt{7}}.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

5. Рабочему для выполнения работы был дан определенный срок. Проработав два дня, он придумал приспособление, увеличивающее производительность труда в 1,5 раза. В результате работа была закончена на два дня раньше срока. На несколько дней было рассчитано выполнение работы?

6. Решите неравенство

$$\frac{x}{x+2}\leqslant\frac{1}{1-x}.$$

В ответе запишите сумму целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

7. Решите неравенство

$$\log_x(2x-3)<1.$$

В ответе запишите целое значение x, удовлетворяющее неравенству, а если таких значений несколько, то их сумму.

8. Точка движется по закону

$$S(t)=\frac{t}{\pi}\sin\pi t.$$

Найдите скорость точки в момент времени $t=1$.

9. К материальной точке приложены две силы, угол между которыми 60°. Величина одной силы равна $\frac{4}{\sqrt{19}}$ Н, а другой силы равна $\frac{6}{\sqrt{19}}$ Н. Найдите величину равнодействующей этих двух сил (в ньютонах).

10. Решите уравнение

$$\sqrt{3}(\cos x-\sin 3x)=\cos 3x-\sin x.$$

В ответе запишите корень уравнения (в градусах), принадлежащий отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, в случае нескольких корней запишите их сумму.

11. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобочную трапецию, если периметр трапеции равен 2, а острый угол составляет 30°.

12. Основанием пирамиды является прямоугольник с длинами сторон 3 и 4. Боковая грань, проведенная к меньшей стороне прямоугольника, образует с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем пирамиды.

Рейтинговый экзамен по физике в МИСиСе

В 1990/91 учебном году в Московском институте стали и сплавов впервые проводились рейтинговые экзамены по физике и математике для всех желающих (а также для слушателей подготовительных курсов). В течение учебного года, с декабря по апрель, было проведено 3 экзамена (или тура) по физике и 3 экзамена (или тура) по математике. Экзамены были платными.

Каждый экзамен по физике включал 6 задач по математике — 10 задач различной сложности.

Задачи по физике оценивались по 20-балльной, по математике — по 72-балльной системе.

Абитуриенты, набравшие по итогам всех экзаменов 140 и более баллов (из 276 возможных), зачислялись в институт на любую специальность по выбору без вступительных экзаменов. (На специальности, конкурс на которые был невелик, зачисление проводилось при значительно меньшем количестве набранных баллов.)

Ниже приводится по одному варианту из всех трех туров рейтингового экзамена по физике. В каждом варианте задачи расположены в порядке возрастания сложности; они оценивались по следующей шкале: первая задача — 1 балл, вторая и третья задачи — по 2 балла, четвертая задача — 3 балла, пятая — 4 балла, шестая — 8 баллов.

Тур 1

1. Тело двигалось прямолинейно с постоянной скоростью 10 м/с. В некоторый момент времени на тело начала действовать сила, сообщающая ему ускорение, направленное в сторону, противоположную вектору скорости, и равное по модулю 2 м/с^2. Вычислите путь, пройденный телом через 7 с после начала действия силы.

2. На графике (рис. 1) представлено изменение ускорения материальной точки во времени. Начальная скорость тела (в момент $t_0=0$) была равна 12 м/с. Считая движение материальной точки прямолинейным, вычислите ее скорость в момент времени $t=4$ с.

3. Шар массой 3 кг опирается на две гладкие (трение отсутствует) плоскости, образующие с горизонталью углы $\alpha=30°$ и $\beta=15°$ (рис. 2). Определите величину большей из сил давления на плоскости. Считайте $g=9,8$ м/с^2.

4. Ледяная гора составляет с горизонталью угол $\alpha=10°$. По ней снизу вверх толкнули санки, которые, поднявшись на некоторую высоту, затем соскальзывают вниз по тому же пути. Вычислите коэффициент трения, если время спуска санок в 2 раза больше времени их подъема.

5. Тело начинает двигаться с поверхности Земли вертикально вверх с начальной скоростью 5 км/с. Считая, что масса тела остается постоянной, а атмосфера у Земли отсутствует, определите, на какую высоту от поверхности Земли поднимется тело. Масса Земли $6\cdot10^{24}$ кг, ее радиус — $6,4\cdot10^{6}$ м, гравитационная постоянная $G=6,67\cdot10^{-11}$ м^3/(кг · с^2). Ответ дайте в километрах.

6. Платформа длиной 13 м и массой 12 т начинает перемещаться под действием постоянной силы, равной 2 кН и направленной горизонтально (рис. 3). Одновременно с началом движения платформы из бункера, расположенного у правого края платформы, на нее начинает высыпаться песок. Скорость нагружения платформы постоянна и равна 100 кг/с. Песок на платформу падает по вертикали. Определите скорость платформы с песком через 30 с после начала движения.

Тур 2

1. Некоторое количество газа сначала сжали изотермически так, что объем газа уменьшился в два раза, а затем расширили изобарически до первоначального объема. Определите отношение первоначальной температуры газа к его конечной температуре.

2. Имеется два баллона с газом. В первом баллоне находится 10^{24} молекул газа при температуре 300 К, а во втором баллоне такого же объема — 10^{22} молекул газа при температуре 500 К. Найдите отношение давления газа в первом баллоне к давлению во втором баллоне.

3. В замкнутом сосуде емкостью 1000 см^3 находится 1 г воды и водяного пара при температуре 17,2 °С. Давление насыщенного пара при этой температуре равно 14,72 мм рт. ст. Какую часть от общей массы воды и пара составляет водяной пар при указанных условиях? Ответ дайте в процентах. Масса моля воды равна 18 г/моль, универсальная газовая постоянная $R=8,31$ Дж/(моль · К), плотность ртути 13,6 г/см^3.

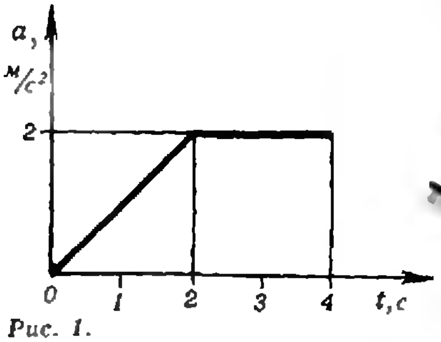


Рис. 1.

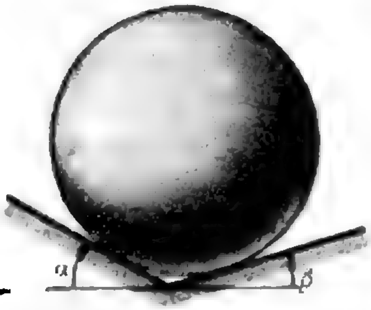


Рис. 2.

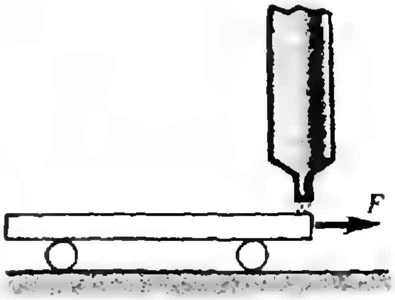


Рис. 3.

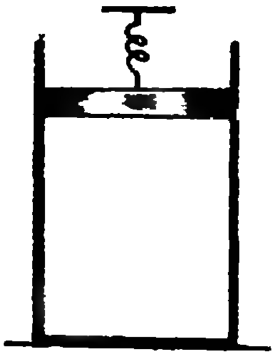


Рис. 4.

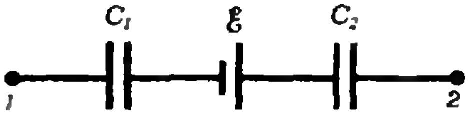


Рис. 5.

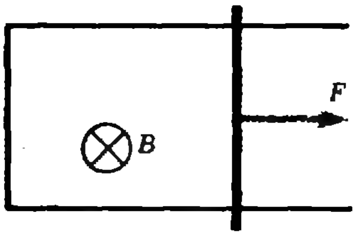


Рис. 6.

4. Какую среднюю энергию надо затратить, чтобы отделить один атом алюминия от куска алюминия массой 50 г при температуре 0 °C? Теплоемкость твердого алюминия меняется по закону $C=C_0(1+\alpha t)$, где $C_0=23{,}3$ Дж/(моль · К) — молярная теплоемкость алюминия при 0 °C, $\alpha=0{,}0004$ К$^{-1}$. Температура плавления алюминия 660 °C, температура испарения 2450 °C, удельная теплота плавления $3{,}9\cdot10^5$ Дж/кг, молярная теплота испарения 294 кДж/моль. Молярная масса алюминия 27 г/моль. Теплоемкость жидкого алюминия равна максимальной теплоемкости твердого алюминия. Ответ дайте в электронвольтах с точностью до одной значащей цифры (1 эВ$=1{,}6\times10^{-19}$ Дж).

5. В цилиндре, закрытом поршнем массой 1 кг и площадью 100 см^2, подвешенном на невесомой недеформированной пружине (рис. 4), находится 4 моля газа при температуре 300 К. Жесткость пружины равна 50 Н/см. При нагревании газа совершена работа 250 Дж. Какой стала температура газа в цилиндре? Давление снаружи равно 10^5 Па. Трением и тепловыми потерями можно пренебречь.

6. В вертикальном герметичном цилиндре движется поршень. Над и под поршнем находятся одинаковые массы азота при температуре 300 К. В исходном состоянии вес поршня уравновешивается разностью сил давления газа, при этом объем нижней части цилиндра в три раза меньше объема его верхней части. Чему равно отношение объемов верхней и нижней частей цилиндра при температуре газа 400 К? Трением и тепловыми потерями можно пренебречь.

Тур 3

1. Два точечных заряда находятся в одной плоскости. Заряд $q_1=10^{-6}$ Кл имеет координаты $x_1=0$ и $y_1=3$ м, заряд $q_2=-2\cdot10^{-6}$ Кл — $x_2=1$ м и $y_2=0$. Определите потенциал электрического поля в точке с координатами $x_0=4$ м, $y_0=6$ м.

2. В схеме (рис. 5) $C_1=3$ мкФ, $C_2=2$ мкФ, $E=10$ В, а разность потенциалов, $\varphi_1-\varphi_2=5$ В. Определите напряжение на конденсаторе емкостью C_1.

3. Заряд $q=10^{-6}$ Кл, летящий со скоростью 10^5 м/с, попадает в электромагнитное поле, в котором вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$ ($E=10^4$ В/м) перпендикулярен вектору магнитной индукции $\vec{B}$ ($B=0{,}2$ Тл). Вектор скорости заряда находится в той же плоскости, что и векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$, и составляет с вектором $\vec{B}$ угол 60°. Определите величину силы, действующей на заряд со стороны электромагнитного поля.

4. По проводнику, сопротивление которого 12 Ом, за 12 секунд протек заряд 30 Кл. Ток за указанный промежуток времени уменьшался прямо пропорционально времени и упал до нуля. Определите напряжение на концах проводника в момент времени $t=3$ с.

5. Перемычка, замыкающая П-образный провод, перемещается под действием горизонтальной силы $\vec{F}$ с постоянной скоростью 10 м/с (рис. 6). Контур находится в перпендикулярном его плоскости однородном магнитном поле. Определите величину силы $\vec{F}$, если в контуре каждую секунду выделяется количество теплоты, равное 1 Дж. Массой перемычки можно пренебречь.

6. По двум гладким параллельным шинам, составляющим угол 30° к горизонту, скользит без трения под действием силы тяжести медная перемычка массой 10^{-2} кг. Шины замкнуты на резистор сопротивлением 2 Ом. Расстояние между шинами 0,2 м. Шины и перемычка находятся в магнитном поле, индукция которого равна 0,5 Тл и перпендикулярна наклонной плоскости, образуемой шинами и сопротивлением. Пренебрегая сопротивлением шин и перемычки, определите величину установившейся постоянной скорости перемычки.

Публикацию подготовил В. Башкиров

Конференция клуба «Глюон»

Московский клуб «Глюон» создан при Московском инженерно-физическом институте для работы с молодыми людьми, увлекающимися математикой, физикой, информатикой и астрономией.

Члены клуба — школьники, лицеисты, гимназисты — собираются на еженедельные семинары, где обсуждают интересные задачи, сами планируют и ставят эксперименты, встречаются со студентами и учеными московских вузов, рассказывают о своих достижениях.

Итогом работы клуба в 1990—1991 учебном году стала конференция, состоявшаяся в конце марта 1991 года на западном берегу Крыма в поселке Николаевка.

На конференцию, кроме москвичей, членов клуба, были приглашены учащиеся физико-математических школ, лицеев и гимназий из других городов страны, так что в Николаевку приехали школьники и их руководители из Киева, Красноярска, Москвы, Новгорода, Тбилиси, Харькова.

Тематика 24-х докладов, зачитанных на двух секциях (математики и физики), была очень разнообразной.

Жюри конференции, состоявшее из преподавателей вузов, лицеев и гимназий, признало лучшими по секции физики доклады *Б. Барышникова* (Новгород) «Параметрический резонанс в космической технике», *И. Тучина* (Москва) «Распределение температуры в металлических изделиях», *Б. Кириллова* «Исследование термической интерференции звука».

По секции математики лучшими признаны доклады *С. Рязанцева* (Москва) «Построение на плоскости ограниченными средствами», *С. Ельцева* (Москва) «О геометрических доказательствах некоторых неравенств», *Г. Челидзе* (Тбилиси) «О рациональных точках на кривых второго порядка».

Многие участники конференции были награждены дипломами и специальными призами клуба «Глюон».

Сильнейшее впечатление на участников произвел тест на одаренность по американской методике. Результаты теста у многих из них оказались более высокими, чем у лучших из их американских сверстников.

Очень интересной была и культурная программа, самым ярким событием которой была автобусная поездка в Севастополь с посещением развалин древнегреческого города-государства Херсонес.

Клуб «Глюон» надеется, что подобные конференции станут традиционными и будут проводиться ежегодно, несмотря на все трудности, переживаемые сейчас всеми нами.

Начиная с 1991—1992 учебного года, клуб «Глюон» учреждает ежегодные премии за лучшие научные работы школьников по математике, физике, астрономии и информатике.

Присуждаться будут две премии по одной тысяче рублей каждая, а также специальные премии и призы.

Будут также проводиться различные интеллектуальные соревнования: международная тест-рейтинговая олимпиада, тест-анкетирование, конкурсы и фестивали знаний.

Первая международная тест-рейтинговая олимпиада уже прошла в октябре 1991 года в Ашхабаде.

Мы приглашаем всех школьников и их руководителей, желающих принять участие в мероприятиях клуба или высказать предложение о других возможных формах работы, сообщить нам об этом по адресу: 115580, Москва, а/я 10. Клуб «Глюон».

Президент клуба «Глюон»
В. Альминдеров

Ответы к кроссворду

По горизонтали: 5. Галилей. 6. Гершель. 9. Мегрец. 10. Плеяды. 14. Титов. 15. Новолуние. 16. Надир. 19. Юнона. 22. Земля. 23. Водолей. 24. «Восток». 25. Кеплер. 29. Дельфин. 30. Гиады. 31. Болид. 36. Мицар. 37. Микроскоп. 38. Сарос. 41. Алголь. 42. «Пионер». 43. Процион. 44. Луноход.

По вертикали: 1. Гагарин. 2. Денеб. 3. Фекда. 4. Альтаир. 7. Орион. 8. Зенит. 11. «Молния». 12. Плутон. 13. Галлей. 17. Андромеда. 18. Рефлектор. 20. Королев. 21. Гевелий. 26. Эридан. 27. Ньютон. 28. Экипаж. 32. Гиппарх. 33. Виток. 34. Фобос. 35. Комаров. 39. Алиот. 40. Регул.

Олимпиады

Математическая олимпиада тихоокеанских стран

В последнее десятилетие во многих странах проводятся математические олимпиады школьников. Естественно, что стремление к общению в этой области переросло рамки Международной математической олимпиады, число стран-участниц которой увеличилось с 22-х в 1978 году до 60-ти в 1991 году. Поэтому стали практиковаться различные региональные олимпиады: Балканская (Болгария, Греция, Югославия и др.), Иберо-американская (стран, говорящих на испанском или португальском языке), стран Персидского залива (Бахрейн, Ирак, Кувейт, Объединенные Арабские Эмираты, Оман, Саудовская Аравия), тихоокеанских стран и другие.

Математическая олимпиада тихоокеанских стран существует с 1989 года. Тогда в ней участвовали 4 государства, в следующем году — уже 9 стран, а в 1991 году — 12: Австралия, Гонконг, Канада, Китай, Колумбия, Корея (Южная), Малайзия, Мексика, Новая Зеландия, Сингапур, Таиланд и Филиппины. Приводим задачи олимпиады 1991 года. На их решение отводилось 4 часа. В скобках после каждой задачи указана страна, предложившая ее.

1. В треугольнике ABC точка G — его центр тяжести (точка пересечения медиан), а M — середина стороны BC. Проведем через точку G прямую, параллельную стороне BC, и обозначим через X и Y точки ее пересечения с отрезками AB и AC соответственно. Обозначим далее через Q точку пересечения прямых XC и GB и через P — точку пересечения YB и GC. Докажите, что треугольники MPQ и ABC подобны.

(Канада)

2. На плоскости даны 997 точек. Середины отрезков, соединяющих эти точки, окрашены в красный цвет. Докажите, что имеется не менее 1991 красной точки. Сможете ли вы найти расположение точек, при котором будет ровно 199 красных точек?

(Гонконг)

3. Положительные вещественные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ таковы, что $a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1+b_2+\ldots+b_n$. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(a_k)^2}{a_k+b_k} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(Австралия)

4. На перемене между уроками ученики сели в кружок вокруг учителя, который провел с ними следующую игру. Он начал ходить по часовой стрелке вдоль сидящих учеников и вручать им конфеты по такому правилу: сначала он выбрал одного из учеников и вручил ему конфету, затем он пропустил одного школьника и вручил конфету следующему, затем пропустил двух учеников и вручил конфету следующему и т. д. Найдите, при каком количестве учеников в конце концов (может быть, через много кругов) все ученики получат хотя бы по одной конфете.

(Мексика)

5. Даны две касающиеся окружности C_1 и C_2 и точка P на их радикальной оси, т. е. на их общей касательной, которая перпендикулярна линии центров. Постройте с помощью циркуля и линейки все окружности, касающиеся окружностей C_1 и C_2 и проходящие через точку P.

(Колумбия)

Ответы, указания, решения

анные школьные задачи по физике

1. Полезная мощность вентилятора равна кинетической энергии, которую он сообщает воздуху в единицу времени:

$$P=(\Delta m/\Delta t)v^2/2,$$

где $\Delta m/\Delta t$ — масса воздуха, приводимого в движение за 1 секунду, v — скорость потока воздуха. Так как $\Delta m/\Delta t$ пропорционально v, мощность пропорциональна v^3. При увеличении скорости вращения лопастей вентилятора в 2 раза скорость потока возрастает тоже в 2 раза, а полезная мощность возрастает при этом в 8 раз.

2. Совершенная работа равна изменению потенциальной энергии системы:

$$A=mgh+kx^2/2,$$

где x — удлинение пружины. Так как пластинка находится в равновесии, справедливо равенство

$$mg-kx=0.$$

Получаем окончательно

$$A=mg(h+mg/(2k))=150\ \text{Дж}.$$

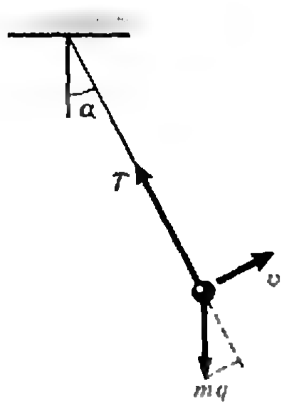


Рис. 1.

3. Если в некоторый момент времени нить отклонена от вертикали на угол α, а скорость шарика равна v, то второй закон Ньютона в проекциях на направление нити имеет вид (рис. 1)

$$T - mg\cos\alpha = mv^2/l\,,$$

где m — масса шарика, l — длина нити. Видно, что натяжение нити минимально в крайнем положении шара, когда $v=0$, а $\cos\alpha$ — минимальный, т. е. угол α максимальный:

$$T_{\min} = mg\cos\alpha_{\max}.$$

Максимальное натяжение соответствует, напротив, нижнему положению шара:

$$T_{\max} = mg + mv^2_{\max}/2.$$

Скорость шара $v_{\max}$ в этот момент найдем из закона сохранения механической энергии

$$mgl(1-\cos\alpha_{\max}) = mv^2_{\max}/2.$$

Тогда

$$T_{\max} = mg(3 - 2\cos\alpha_{\max})\,.$$

По условию $T_{\max} = 4T_{\min}$. Отсюда находим искомый угол:

$$\cos\alpha_{\max} = 1/2,\ \alpha_{\max} = 60^\circ.$$

4. Из условия задачи следует, что скорости шаров после соударения одинаковы по модулю, но противоположны по направлению. Запишем законы сохранения импульса и энергии для упругого удара:

$$m_1v = -m_1u + m_2u\,,$$

$$m_1v^2/2 = m_1u^2/2 + m_2u^2/2,$$

где v — скорость первого шара до удара, u — скорости шаров после удара. Решая эти уравнения, получаем

$$m_1 = m_2/3 = 0{,}2\ \text{кг}.$$

5. Чтобы найти выделившееся количество теплоты, подсчитаем, на сколько конечная механическая энергия меньше начальной:

$$Q = (m_1v^2/2 + m_2gh) - (m_1+m_2)u^2/2.$$

Конечную скорость u найдем из закона сохранения импульса

$$m_1v = (m_1+m_2)u\,.$$

Решая эти уравнения, находим

$$Q = m_1m_2v^2/(2(m_1+m_2)) + m_2gh = 150\ \text{Дж}.$$

6. На обеих лампочках вместе выделяется мощность

$$P = U^2/(R_1+R_2)\,,$$

где U — номинальное напряжение, R_1 и R_2 — сопротивления лампочек. Эти сопротивления (предполагая их неизменными) выразим через номинальные мощности:

$$R_1 = \frac{U^2}{P_1}\,,\quad R_2 = \frac{U^2}{P_2}\,.$$

Тогда получаем

$$P = P_1P_2/(P_1+P_2) = 60\ \text{Вт}.$$

7. Тепловая мощность, выделяющаяся в единице объема конденсатора, равна

$$q = \frac{P}{V} = \frac{UI}{dS} = \frac{(Ed)(jS)}{dS} = Ej\,.$$

Отсюда находим

$$E = q/j = 5000\ \text{В/м}.$$

8. Пусть в батарее N элементов. Тогда ЭДС батареи равна $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление — r/N, а полезная мощность —

$$P = \mathscr{E}I - I^2r/N\,.$$

Отсюда находим

$$N = 7.$$

9. Полезная мощность электродвигателя $UI - I^2R$, где R — сопротивление обмотки, равна механической мощности трамвая Fv:

$$UI - I^2R = Fv\,,$$

откуда

$$R = (UI - Fv)/I^2 = 3\ \text{Ом}.$$

10. По первому закону электролиза масса меди равна

$$m = kq\,,$$

где q — прошедший заряд, который равен

$$q = q_1 + q_2 = (0+I_1)t/4 + (I_1+I_2)t/4.$$

Окончательно

$$m = k(2I_1+I_2)t/4 \approx 230\ \text{мг}.$$

11. Уравнение движения протона имеет вид

$$F = \Delta p/\Delta t\,.$$

Так как начальный импульс протона равен нулю, а сила $F=eE$ постоянна, приобретенный протоном импульс равен

$$p = eEt\,.$$

В классической (нерелятивистской) физике импульс связан со скоростью соотношением

$$p = mv\,,$$

поэтому скорость протона оказывается равной

$$v = p/m = eEt/m \approx 9{,}6\cdot 10^8\ \text{м/с},$$

что в три с лишним раза больше скорости света ($c = 3\cdot 10^8$ м/с). В релятивистской механике связь p и v иная:

$$p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}\,,$$

и скорость оказывается, конечно же, меньше c:

$$v = c\sqrt{p^2/(p^2+m^2c^2)} =$$

$$= c/\sqrt{1+m^2c^2/p^2} \approx 0{,}95\ c = 2{,}85 \cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

12. За секунду масса Солнца уменьшается на величину

$$\Delta m = \Delta E/c^2 = 4{,}2 \cdot 10^9\ \text{кг} = 4{,}2\ \text{млн. т.}$$

Время, за которое масса Солнца уменьшится на один процент, равно

$$t = 0{,}01M/\Delta m \approx 4{,}9 \cdot 10^{18}\ \text{с} \approx 1{,}52 \cdot 10^{11}\ \text{лет},$$

что в несколько раз превышает время жизни Вселенной.

13. Энергия основного состояния атома водорода $E_1 = -13{,}6$ эВ. Чтобы удалить электрон из ядра, ему надо сообщить энергию ионизации

$$E_{\text{ион}} = 0 - E_1 = -E_1.$$

Согласно второму постулату Бора и условию задачи,

$$E_{\text{воз}} - E_1 = 8/9E_1\ .$$

Отсюда получаем

$$E_{\text{воз}} = E_1/9 \approx -1{,}5\ \text{эВ}.$$

14. Запишем ядерную реакцию в виде

$$^{27}_{13}\text{Al} + {}^{12}_{6}\text{C} \rightarrow {}^{4}_{2}\alpha + {}^{1}_{0}n + {}^{A}_{Z}X\ .$$

Из законов сохранения числа нуклонов и электрического заряда находим $A = 34$, $Z = 17$. Отсюда число нейтронов $N = A - Z = 17$.

15. Пусть число α-распадов равно k_α, а число β-распадов — k_β. Тогда цепочку радиоактивных превращений можно представить так:

$$^{235}_{92}\text{U} \rightarrow k_\alpha \cdot {}^{4}_{2}\alpha + k_\beta \cdot {}^{0}_{1}\beta + {}^{207}_{82}\text{Pb}\ .$$

Записывая законы сохранения, получаем два уравнения

$$235 = 4k_\alpha + 207\ ,$$
$$92 = 2k_\alpha - k_\beta + 82\ ,$$

откуда находим $k_\alpha = 7$, $k_\beta = 4$. Итак, всего в цепочке 11 распадов.

[redacted]ем системы уравнений

1. (1; 0; 3); (—1; —2; 1). 2. $\left(\frac{24}{23}; 24\right)$; (3; 1,5). 3. (—5; —2); (—3; —4); (1; 4); (3; 2). 4. (2; 2). 5. (1; 2); (2; 1). 6. (—2; —3); (—3; —2); (2; 3); (3; 2). 7. (2; 3; 4). 8. (3; 1). 9. (—1; 1); (1; 1). 10. $\left(\frac{25}{3}; \frac{16}{3}\right)$. 11. (2; 3). 12. $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Указание: исключите z и рассмотрите полученное уравнение как квадратное.

[redacted]сибирский государственный университет

Математика

Вариант 1

1. В 2 раза. При составлении системы уравнений удобно принять за единицу измерения улова ту порцию рыбы, которую Вася отдал Пете.

2. 4. **Указание.** Если L — середина BC и $CR:LR = x$, то, из соображений подобия, легко выразить через x искомую сумму площадей. Минимум этой функции на промежутке $x > 0$ достигается при $x = 2$.

3. $(-1;\ 2] \cup [3;\ 5)$. Удобно воспользоваться методом интервалов. При освобождении от логарифмов обратите внимание на то, что $2-\sqrt{3} < 1$. Не забудьте учесть область допустимых значений.

4. $[5/2;\ 3) \cup (3;\ 2+\sqrt[3]{26}\ /2]$. Переформулировка: при каком a ($a \neq 3$, $a > 2$) число $(a-2)^3$ входит в множество значений функции, стоящей под логарифмом?

5. $8\sqrt{6}$. Постройте параллелограмм $AB'D'C$ с диагоналями AD', $B'C$. Из равнобедренного прямоугольного треугольника $A'CD'$ найдите $A'C$, а затем $A'A$. Применение векторной алгебры дает еще более короткое решение.

Вариант 2

1. $\arccos\frac{9}{10}$. Используя формулу для скалярного произведения, найдите максимум искомого угла.

2. $x = \pi k$, $x = (-1)^{k-1}\arcsin\frac{\pi}{6} + \pi k$ ($k \in Z$). Последовательно решая уравнения $2\cos y = 1$ и $4\sin x = \frac{5\pi}{3} - y$, не забудьте, что $|\sin x| \leqslant 1$.

3. $AC = 12$, $BC = 16$. Из подобия треугольников ALC и APL (или из свойства касательной и секущей, проведенных из одной точки) найдите AC. Заметьте, что CL является биссектрисой угла C, и воспользуйтесь ее свойством.

4. $x = -2 \pm \frac{1}{\log_2 3 - 1}$. Заменой $y = (3/2)^{|x+2|}$ уравнение сводится к квадратному.

5. $\sqrt{3}$. Докажите, что прямая PQ' и плоскость $ABA'B'$ параллельны. Тогда искомый радиус — это расстояние между ними, т. е. третья часть высоты треугольника ABC.

Физика

Вариант 1

1. Из условия равновесия следует, что давление между поршнями сохраняется равным внешнему атмосферному давлению. Отсюда по закону Гей-Люссака получаем

$$(S_1+S_2)l/T_0 = 2S_1l/T\ ,$$

т. е.

$$T = 2T_0S_1/(S_1+S_2)\ .$$

2. Максимальное растяжение пружины наступает в момент, когда скорости шариков и одинаковы. Записав законы сохранения импульса и энергии:

$$mv = (M+m)u,\ \ mv^2/2 = (M+m)u^2/2 + Q\ ,$$

где Q — выделившееся количество теплоты, получаем

$$Q = mMv^2/(2(M+m))\ .$$

3. Напряжения на конденсаторах одинаковы

и равны ЭДС индукции:

$$U_{C_1}=U_{C_2}=\mathcal{E}\,.$$

Согласно закону Фарадея,

$$\mathcal{E}=-\Delta\Phi/\Delta t=-Blv=Blat\,.$$

По второму закону Ньютона,

$$ma=F-IBl.$$

Ток I, текущий через перемычку, равен сумме токов через конденсаторы:

$$I=I_1+I_2\,.$$

Заряды на конденсаторах равны

$$Q_{1,2}=\mathcal{E}C_{1,2}=I_{1,2}t\,.$$

Таким образом, окончательно

$$F=(m+B^2l^2(C_1+C_2))\,a.$$

4. Угол между начальным и конечным положениями луча равен $\alpha=\omega t=2\pi t/T$, где ω — угловая скорость, T — период вращения Земли. Соответственно, путь, который пройдет пятно за время t, равен $l\sim\alpha L\sim 2\pi tL/T$, где $t=1$ мин, $T=1$ сутки, $L\sim 5$ м — длина комнаты. Таким образом,

$$l\sim 2\pi tL/T\sim 2 \text{ см}.$$

5. После растяжения уменьшается взаимный подогрев соседних витков и увеличивается поверхность соприкосновения с воздухом. В результате температура растянутого участка падает, а его сопротивление уменьшается. И хотя ток в цепи несколько увеличивается, из-за резкого роста теплоотдачи нагрев (соответственно и свечение) растянутой части спирали ослабевает. Тепловая мощность на нерастянутом участке при этом увеличивается как за счет увеличения тока, так и за счет роста сопротивления этого участка в связи с повышением температуры.

Вариант 2

1. Пусть цилиндр погрузился в жидкость на глубину x. Тогда из условия несжимаемости жидкости

$$hS_0/2=hS_0/4+x(S_0-S)$$

и из условия равновесия цилиндра

$$h\rho_0=x\rho$$

находим искомую плотность материала цилиндра:

$$\rho_0=\rho/(4(1-S/S_0)) \text{ при } \rho_0\leqslant\frac{3}{4}\rho$$

(иначе $x>3h/4$, жидкость будет выливаться из стакана, а задача не будет иметь решения).

2. Искомое время

$$\tau=(d+b)/v_0-t\,,$$

где t — время пролета после подачи потенциала. Ввиду равноускоренности этого движения, на пути $d+b$ происходило оно со средней скоростью, равной средней арифметической

$$v_{\text{ср}}=(v+v_0)/2=(\sqrt{v_0^2+2q\varphi/m}+v_0)/2,$$

поэтому

$$t=2(d+b)/(v_0+\sqrt{v_0^2+2q\varphi/m}\,).$$

Тогда

$$\tau=\frac{d+b}{v_0}-t=\frac{d+b}{v_0}\,\frac{\sqrt{v_0^2+2q\varphi/m}-v_0}{\sqrt{v_0^2+2q\varphi/m}+v_0}\,.$$

3. Пусть деформация правой пружины в момент разрыва нити равна x. Тогда деформация левой пружины равна $L-l$. Критическое условие разрыва $kx=k(L-l)+T$ и закон сохранения энергии

$$mv_{\min}^2/2=kx^2/2+k(L-l)^2/2$$

дают

$$v_{\min}=(L-l)\sqrt{\frac{k}{m}(2-2\alpha+\alpha^2)}\,,$$

$$\text{где } \alpha=\frac{T}{k(L-l)}\,.$$

4. Свет от точечного источника распространяется во все стороны одинаково. В глаз с расстояния l в единицу времени попадает некоторое количество энергии света, пропорциональное площади зрачка $\pi d^2/4$ и обратно пропорциональное квадрату расстояния до источника. Бинокль с размером стекла D собирает весь свет, падающий на площадь $\pi D^2/4$, в глаз. При той же чувствительности глаза доля света, попадающего в глаз с расстояния L, практически должна быть равна доле света, попадающей в глаз с более близкого расстояния l без бинокля:

$$\pi D^2/(4L^2)\approx\pi d^2/(4l^2)\,.$$

Отсюда при $D\approx 5$ см и $d\approx 5$ мм получаем

$$L/l\approx D/d\approx 10.$$

5. В полном термосе с кипятком на пробку изнутри давит насыщенный пар, давление которого равно атмосферному, и поэтому пробка не выскакивает (небольшого трения вполне хватает). При отливе воды в термос входит сравнительно холодный воздух, который нагревается и создает дополнительное давление, кроме несколько уменьшившегося давления насыщенного пара. Это нескомпенсированное добавочное давление и выбивает пробку.

Вариант 3

1. $p'=2p(p-\Delta p)/(2p-\Delta p)\,.$

2. Из симметрии схемы (см. рис. 6 в условии) потенциалы точек A и B равны между собой. То же для точек C и D. Это означает, что

$$I_{AB}=I_{CD}=0.$$

Через батарейки и резисторы AD и BC ток идет не ответвляясь, поэтому

$$I_{AD}=I_{BC}=2\mathcal{E}/(2(R+r))=\mathcal{E}/(R+r)\,.$$

3. Сила, действующая на заряд q шарика, равна

$$F=q\mathcal{E}/d.$$

Пусть максимальное смещение, которое достигается в момент остановки шарика, равно x. Тогда из условия разрыва пружины

$$T=k(x-x_0)$$

и из закона сохранения энергии

$$2kx_0^2/2+Fx=k(x_0+x)^2/2+k(x_0-x)^2/2$$

находим

$$F=T+kx_0 .$$

Окончательно

$$\mathcal{U}_{\min}=\frac{Fd}{q}=\frac{d(T+kx_0)}{q}.$$

4. Пренебрегая суточным движением Земли, непараллельностью солнечных лучей и размером Луны, оценим время затмения как время прохождения Луной отбрасываемой Землей цилиндрической (а не конической) тени:

$$t=d_З/v_Л=d_ЗT/(2\pi l),$$

где $d_З$ — диаметр Земли, T — период обращения Луны вокруг Земли, l — расстояние от Земли до Луны. Полагая $d_З=1{,}3\cdot 10^4$ км, $T=28$ суток, $l=4\cdot 10^5$ км, получаем

$$t\sim 3{,}4\ \text{ч.}$$

5. Для тонкой нити и груза получается обычный конический маятник. Наличие же заметной массы у шнура меняет ситуацию. Во-первых, массивный шнур находится (и «провисает», изгибаясь) в эффективном поле, создаваемом как тяготением, так и вращением. Во-вторых, сказывается и то, что центростремительное ускорение различных участков шнура зависит от расстояния до оси вращения. Все это и приводит к изгибу шнура. (Попытка точного описания ситуации приводит к очень сложному уравнению.)

[redacted]овский авиационный институт

Математика

Вариант 1

1. 2.

2. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}n,\ n\in Z.$

3. $[0;\ 1)\cup(2;\ 3)\cup(3;\ 4]\cup[6;\ 11)$. Указание. Воспользуйтесь формулой $\log_a c\cdot\log_b d=\log_b c\cdot\log_a d$, после чего приведите неравенство к виду

$$\log_{0,2}\left(\frac{x-3}{3}\right)^2\cdot\left(\log_2\frac{(x-2)(x-1)}{x+3}-\log_2\frac{(x-2)(x-1)}{11-x}\right)\geqslant 0.$$

4. См. рис. 2. Указание. Множество точек D, для которых $ADC=30^\circ$ — это две дуги окружностей, стягиваемые хордой AC. Множество точек D, для которых $\angle ADC<30^\circ$, — это область вне построенных дуг.

Аналогично строится множество точек D, для которых разность величин $\angle BDC$ и $\angle ADC$ больше 60°. Эта разность равна величине угла BDA, поэтому граница соответствующей области состоит из двух дуг окружностей, стягиваемых хордой AB. При этом треугольник ABD_2 — равносторонний. Вершины углов BDA, для которых $\angle BDA>60^\circ$, лежат внутри построенной «восьмерки». Искомая область, т. е. множество точек D, удовлетворяющих одновременно обоим условиям, показано розовым цветом.

5. 67. Пусть m и n — количества телевизоров в контейнере и в вагоне соответственно. Из

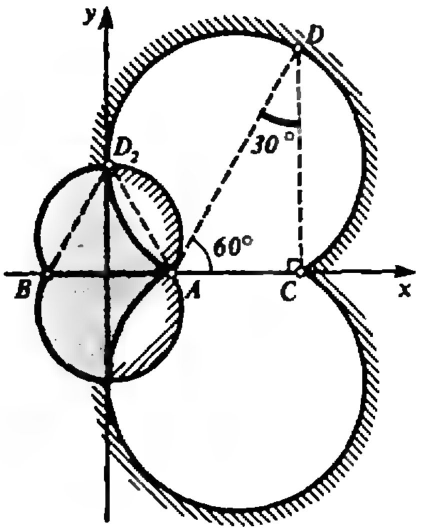


Рис. 2.

условия следует, что числа $7n+5$ и $12n-1$ делятся на m. Но тогда на m делится и число

$$12(7n+5)-7(12n-1)=67.$$

Из простоты числа 67 следует, что $m=67$. Нетрудно доказать, что существует n такое, что $7n+5$ и $12n-1$ делятся на 67.

6. 121. Указание. Сечение сферы плоскостью, проходящей через ребра BC и HC,— окружность, касающаяся ребра BC в точке B и пересекающаяся с HC в точках M и K. По условию, $CM=2x$, $CK=3x$, $CH=5x$. По теореме о квадрате касательной, $BC^2=CM\cdot CK$. Теперь легко найти высоту пирамиды, а затем и объем.

Вариант 2

1. 1/2. Указание. По условию, $ac=b^2$.

2. $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z.$

3. $\left(\frac{1}{4};\ 2-\frac{\sqrt{47}}{4}\right)\cup\left(2+\frac{\sqrt{47}}{4};\ \frac{15}{4}\right)$. Указание. Неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases}x\geqslant 0,\\ 16|x^2-4x+1|<1\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x\leqslant 0,\\ 16x^2+16<1.\end{cases}$$

4. $2\cdot 13\cos 15^\circ=\frac{13(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}$. Указание. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник, O — центр описанной около него окружности, OM и OK — перпендикуляры из точки O на хорды AC и BD соответственно. Пользуясь тем, что треугольники AOM и OKD равны, докажите, что наибольший угол, под которым некоторая сторона четырехугольника может быть видна из точки O, равен 150°.

5. 2744; 371; —112; —1189; 119; —364; —2737; —19204. Указание. Поскольку $2744=2^3\cdot 7^3$, из условия задачи получаем уравнение:

$$n(2a+7(n-1))=2^4\cdot 7^3.$$

Здесь a — первый член прогрессии, а n — количество членов.

Если n — четно, то $2a+7(n-1)$ — нечетно и поэтому $n=16k$, где k — делитель числа 7^3. Отсюда находим все возможные значения для k, а вместе с ними и все значения a.

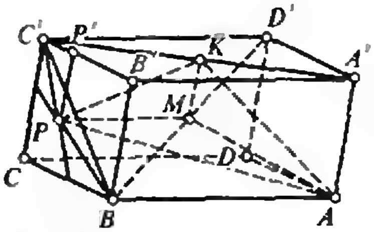


Рис. 3.

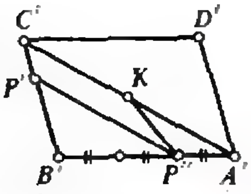


Рис. 4.

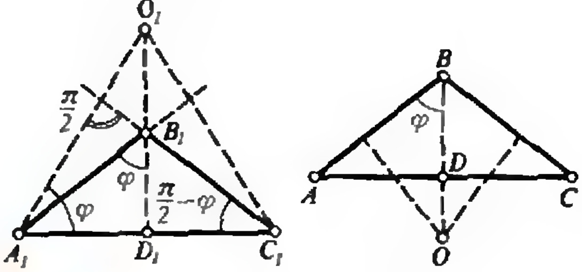


Рис. 5.

Аналогично рассматривается случай нечетных n.

6. $72V$. Указание. Объем треугольной пирамиды не меняется, если одну из вершин передвинуть параллельно противолежащей грани, а остальные вершины оставить на месте. Точку P передвинем на ребро $B'C'$ параллельно ребру KM, т. е. параллельно грани AKM. Затем (см. рис.) точку A заменим точкой A' $(AA'\parallel KM)$. Из теоремы Фалеса следует, что $C'P' : P'B' = 1 : 2$. Точку P' можно сдвинуть на ребро $A'B'$ параллельно диагонали $A'C'$, причем $A'P'' : P''B' = 1 : 2$. Объем пирамиды $AMKP$ равен объему пирамиды $A'MKP''$. Площадь треугольника $A'P''K$ (рис. 4) составляет $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$ площади параллелограмма $A'B'C'D'$, а высота пирамиды, опущенная из вершины M, вдвое короче соответствующей высоты параллелепипеда. Поэтому объем пирамиды составляет $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{72}$ объема параллелепипеда.

Физика

Вариант 1

1. $\Delta t = t\left(\sqrt{6+5l/L}-\sqrt{5(1+l/L)}\right)=1{,}02$ с.
2. $a=F(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)/(2m)-\mu g=2{,}64$ м/с^2; $T=F(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)/2=42{,}55$ Н.
3. $C=R/2=4{,}16$ Дж/(моль · К), где $R=8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная.
4. Напряженность поля направлена под углом 45° к горизонту и равна $\sigma/(\sqrt{2}\varepsilon_0)=80$ В/м, где $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.
5. $r=0$.
6. $\lambda=\dfrac{c}{\nu_0+eU/h}=2{,}26\cdot10^{-7}$ м, где $c=3\times10^8$ м/с — скорость света, $h=6{,}63\times10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка.

Вариант 2

1. $r=t\sqrt{v_0^2-v_0\sin\alpha_0\cdot gt+g^2t^2/4}=3{,}1\times10^4$ м, где $t=v_0(\sin\alpha_0-\cos\alpha_0\operatorname{tg}\alpha)/g=37{,}3$ с.
2. $N=pV/(2kT)=6{,}04\cdot10^{21}$, где $k=1{,}38\times10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.
3. $h=\left(L+l+H-\sqrt{(L+l+H)^2-4Ll}\right)/2=12{,}1$ см.
4. $n=1+2\varepsilon_0SA/(q^2d)=3$.
5. $q=BS/R=10^{-4}$ Кл.
6. $v_{\min}=\sqrt{3hR/(2m)}=1{,}87\cdot10^6$ м/с, где $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, $R=3{,}2\cdot10^{15}$ с$^{-1}$ — постоянная Ридберга, $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг — масса электрона.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 1

1. $\frac{\pi}{6}(6n-1)$; $\frac{\pi}{3}\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{6}+\frac{\pi(2n+1)}{2}$, $n\in Z$.

Указание. После замены $y=\frac{\pi}{3}-x$ уравне-

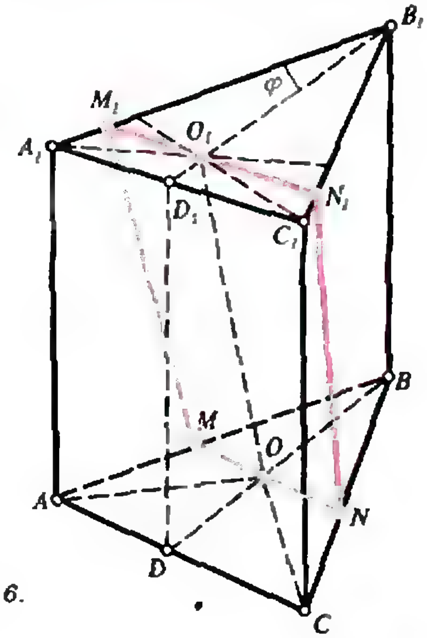


Рис. 6.

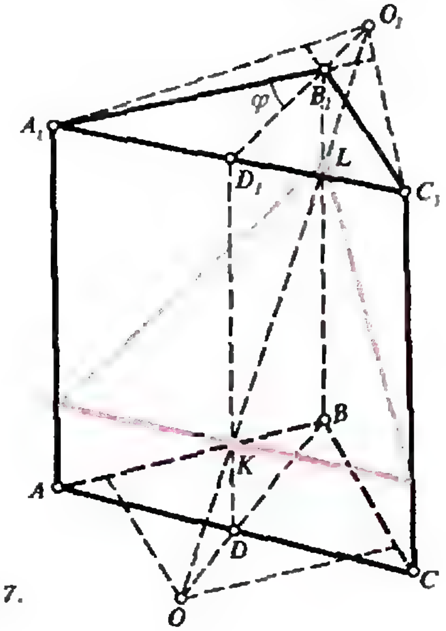


Рис. 7.

ние приводится к виду $4\cos y=-3\cos 3y$, или $\cos y=-3\cos 3y-3\cos y=-6\cos y\cdot\cos 2y$.

2. 9109. **Указание.** Пусть $A=xyzt$, где x, y, z, t — цифры. Из условия после преобразований получим уравнение $111(x-t)+10(y-z)=10$, откуда $x=t$, $y-z=1$.

3. $(3;+\infty)$ при $a\leqslant 2$;
$(2;a)\cup(3;+\infty)$ при $2<a\leqslant 3$;
$(2;3)\cup(a;+\infty)$ при $a>3$

Указание. Исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-a>0, \\ \log_3(x-2)>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-a<0, \\ \log_3(x-2)<0. \end{cases}$$

4. $$\frac{d^2\sin\varphi\sin\alpha(1+2\cos 2\varphi)}{8\cos^3\varphi}\times$$
$$\times\sqrt{4\cos^2\alpha\cos^2\varphi+\sin^2\alpha(1-2\cos 2\varphi)^2}$$

при $0<\varphi<\pi/4$;

$$\frac{1}{4}d^2\sin 2\alpha\sin 2\varphi\frac{\sqrt{4\cos^2\varphi+\text{tg}^2\alpha(2\sin\varphi-\cos 2\varphi)^2}}{2\sin\varphi-\cos 2\varphi}$$

при $\pi/4\leqslant\varphi<\pi/2$.

Указание. Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности, O_1 — точка пересечения высот равного ему треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 5). Если $0<\varphi<\pi/4$, треугольник ABC остроугольный и точки O и O_1 лежат внутри треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно, так что в этом случае сечение является трапецией (рис. 6). При $\pi/4\leqslant\varphi<\pi/2$ треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ либо прямоугольные (при $\varphi=\pi/4$), либо тупоугольные, а сечение будет треугольником (рис. 7).

В первом случае $AB=d\sin\alpha$, $BB_1=d\cos\alpha$. Пусть O_2 — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 8). Тогда $BO=AB/(2\cos\varphi)$, $BO_2=BC\times\cos 2\varphi/\cos\varphi$ и $OO_2=|BO-BO_2|=d\sin\alpha\,|1-2\cos 2\varphi|/(2\cos\varphi)$. Высоту OO_1 трапеции находим из соотношения

$$OO_1^2=OO_2^2+BB_1^2.$$

Для вычисления оснований трапеции — отрезков MN и M_1N_1 — воспользуйтесь подобием соответствующих треугольников:

$$MN=AC\cdot\frac{BO}{BD};\ M_1N_1=AC\cdot\frac{BO_2}{BD}.$$

Если $\pi/4\leqslant\varphi<\pi/2$, сечение — треугольник с основанием, равным $AC=2d\sin\alpha\sin\varphi$, и высотой KL. При вычислении KL нужно, как и раньше, найти $OO_2=O_2D+OB-BD$ (рис. 9), заметить, что $KL=BD/\cos\gamma$, где γ — угол наклона секущей плоскости и плоскости основания и воспользоваться тем, что $\text{tg}\,\gamma=B_1B/OO_2$.

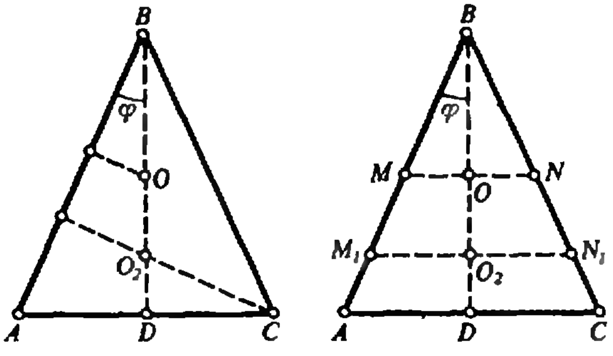


Рис. 8.

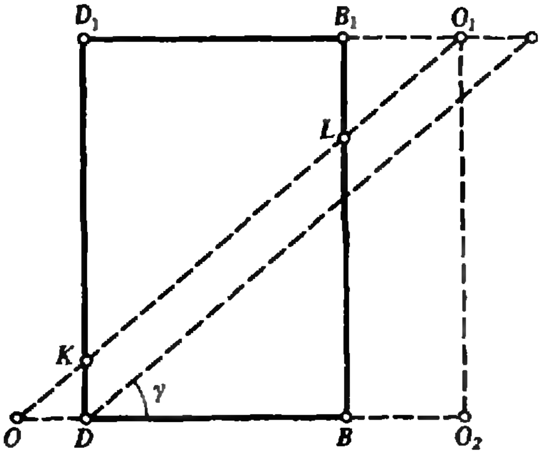


Рис. 9.

Вариант 2

1. $\frac{\pi}{4}(4k+1)$; $-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin\frac{4-\sqrt{17}}{\sqrt{2}}+\pi k$, $k\in Z$.

2. 60 ч.

3. $x_1=-(c+63)$; $x_2=1-c$. Оба корня положительны при $c<-63$.

4. Если $0<\gamma\leqslant\arccos{}^1/_3$, имеются два существенно различных случая: $R_1=\frac{h}{2}\sqrt{\frac{3\cos\gamma-1}{\cos\gamma}}$ (сечение параллельно плоскости основания) и $R_2=h\sqrt{2}\frac{\text{ctg}\,\gamma\cdot\text{tg}\,\gamma/2}{\sqrt{2+\text{ctg}^2\gamma}}$ (сечение параллельно боковой грани). Если $\arccos{}^1/_3<\gamma<\pi/2$, остаются только сечения, параллельные боковым граням, при этом $R=R_2$.

Физика

Билет 1

1. Полное ускорение $\bar{a}$ складывается из нормального $\bar{a}_n$ и тангенциального $\bar{a}_\tau$:

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}.$$

Нормальное ускорение равно $a_n=v^2/R$, а скорость тела v при постоянном тангенциальном ускорении линейно растет со временем: $v=a_\tau t$. В результате получаем

$$a=\sqrt{((a_\tau t)^2/R)^2+a_\tau^2}=a_\tau\sqrt{1+(a_\tau t^2/R)^2}.$$

2. Средняя энергия атома аргона $\bar{E}$ связана с температурой T соотношением $\bar{E}={}^3/_2kT$, где k — постоянная Больцмана. Температуру найдем из уравнения Клапейрона — Менделеева: $T=pV/(\nu R)$. Тогда

$\bar{E}={}^3/_2kpV/(\nu R)={}^3/_2pV/(\nu N_A)=1{,}2\cdot10^{-23}$ Дж, где $N_A=6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро.

3. Потенциал шарика возрастает до тех пор, пока кинетическая энергия самых быстрых вылетающих из него фотоэлектронов достаточна для того, чтобы они смогли преодолеть возникающий задерживающий потенциал и удалиться от шарика на бесконечно большое расстояние. Поэтому уравнение Эйнштейна для фотоэффекта запишется в виде

$$hc/\lambda = A + e\varphi_{\max},$$

откуда находим искомую работу выхода A:

$$A = hc/\lambda - e\varphi_{\max} = 4{,}36 \text{ эВ}.$$

4. Поскольку сила, действующая на протон со стороны магнитного поля, не изменяет величину скорости v, а начальная скорость протона равна нулю, закон сохранения энергии — для момента, когда протон находится в точке A, и для начального момента — запишется в виде

$$mv^2/2 - eEh = 0.$$

Второй закон Ньютона для протона в точке A, в проекциях на ось Y, выглядит так:

$$-ma = eE - evB.$$

Таким образом, ускорение протона равно равно

$$a = (e/m)(B\sqrt{2(e/m)Eh} - E) = 10^{12} \text{ м/с}^2.$$

Билет 2

1. На рисунке (см. рис. 2 в статье) представлены графики изобарных процессов. Давление газа в состоянии *1* меньше, чем в состоянии *4*.

2. На частицу в магнитном поле действует сила Лоренца $F = |q|vB$, сообщающая ей центростремительное ускорение $a = v^2/R = F/m = |q|vB/m$. Отсюда

$$|q| = mv/(BR).$$

Правило нахождения направления силы $\vec{F}$ дает ответ на вопрос о знаке заряда — он отрицательный.

3. Ускорение системы, состоящей из нити и обоих тел, равно

$$a = F/(m_1 + m_2 + m).$$

Тело A движется под действием силы натяжения нити в точке соединения с этим телом, поэтому

$$T_A = m_2 a = F m_2/(m_1 + m_2 + m).$$

Ускорение тела B обусловлено действием на него силы F и силы натяжения нити в точке соединения с ним:

$$m_1 a = F - T_B,$$

следовательно,

$$T_B = F - m_1 a = F(m_2 + m)/(m_1 + m_2 + m).$$

4. Пользуясь свойством обратимости хода лучей, точку S можно рассматривать как мнимое изображение. Тогда формула линзы запишется в виде

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{l} = D,$$

где d — расстояние от линзы до точки пересечения лучей, преломившихся в линзе. Отсюда

$$d = l/(1 + Dl) = 13{,}6 \text{ см}.$$

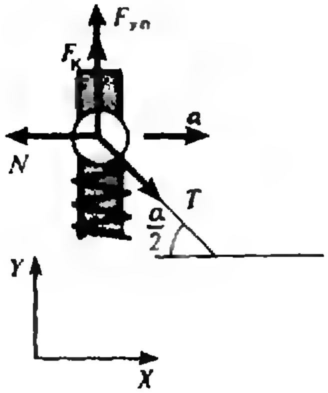


Рис. 10.

Билет 3

1. Уравнение движения тела, брошенного под углом к горизонту, имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \vec{g}t^2/2,$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор тела в произвольный момент движения t, $\vec{r}_0$ — начальный радиус-вектор, $\vec{v}_0$ — начальная скорость тела.

2. Внутренняя энергия ν молей одноатомного газа связана с его температурой соотношением

$$U = {}^3/_2 \nu RT.$$

Теперь из уравнения Клапейрона — Менделеева легко найти давление газа:

$$p = \nu RT/V = 2U/(3V) = 1 \text{ атм}.$$

3. Лучи, преломившиеся в линзе и отразившиеся от зеркала, вновь преломляются в линзе. Поэтому оптическая сила системы «линза + + зеркало» равна удвоенной оптической силе линзы, а уравнение этой системы имеет вид

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{F}.$$

Отсюда получаем

$$f = Fd/(2d - F) = -20 \text{ см}.$$

Изображение мнимое и находится на расстоянии 20 см от линзы.

4. Запишем второй закон Ньютона для системы в целом:

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

а также для одной из муфточек (рис.10):

$$m_м\vec{a} = \vec{T} + \vec{F}_{уп} + \vec{N} + \vec{F}_К,$$

где $m_м$ — масса муфточки, $\vec{T}$ — сила натяжения нити, $\vec{F}_{уп}$ — сила упругости пружины, $\vec{N}$ — сила нормальной реакции стержня, $\vec{F}_К$ — сила кулоновского взаимодействия муфточек. Запишем эти уравнения в проекциях на оси X и Y соответственно:

$$ma = F,$$
$$0 = -T\sin(\alpha/2) + k(l_0 - l) + q^2/(4\pi\varepsilon_0 l^2),$$

где l — расстояние между муфточками. Заметим также, что силы T и F связаны соотношением

$$F = 2T\cos(\alpha/2),$$

а величина l может быть выражена через l_0:

$$l = l_0\sin(\alpha/2).$$

Окончательно получаем

$$a=(2kl_0/m)\,\mathrm{ctg}\,(\alpha/2)\,(1-\sin(\alpha/2)+$$
$$+q^2/(4\pi\varepsilon_0 kl_0^3\sin^2(\alpha/2)))=0{,}2\text{ м/с}^2.$$

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

1. $l=(v+Mu/(M+m))t\approx 4$ м.
2. $h=at^2/(2(1+a/g))=170$ м.
3. $\varrho=m(p_1-p_2)/(S(p_1l_1-p_2l_2))=400$ кг/м^3.
4. $f'=f+mRT\cdot 100\,\%/(MVp_н)\approx 63\,\%$.
5. $v=\dfrac{\Delta x}{\sqrt{2h/(g-qE/m)}-\sqrt{2h/(g+qE/m)}}\approx 1{,}1$ м/с
6. $T=3mg+2qE=5\cdot 10^{-2}$ Н.
7. $\mathscr{E}=\sqrt{NR/(k(1-k))}=625$ В; $N_1=N(R-k(R-R_1))/R_1=242$ Вт.
8. $q=\dfrac{|B_г-B_в|\,ab}{R+2\varrho(a+b)/S}\approx 10^{-7}$ Кл.
9. $x=2d\sin\alpha/\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}\approx 2{,}1$ см.
10. $q_{max}=(hc/\lambda-A)\varepsilon_0S/(ed)\approx 8{,}85\cdot 10^{-11}$ Кл, где $\varepsilon_0=8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

Московский институт стали и сплавов

Вариант 1

1. 8. 2. Нет решений. 3. —1. 4. 13. 5. 8. 6. 2. 7. 5. 4. 8. 4. 9. 2. 10. 0,5. 11. 0,75. 12. 1.

Вариант 2

1. 0,4. 2. 3. 3. 3. 4. —1. 5. 3. 6. 6. 7. 5. 8. 1. 9. 0. 10. 6,25. 11. 1. 12. 0,2.

Вариант 3

1. —2. 2. —0,28. 3. —3. 4. 8. 5. 8. 6. —1. 7. 2. 8. —1. 9. 2. 10. 37,5. 11. 0,125. 12. 8.

Рейтинговый экзамен по физике в МИСиСе

Тур 1

1. $l=29$ м.
2. $v=18$ м/с.
3. $F=20{,}8$ Н.
4. $\mu=0{,}105$.
5. $h=1600$ км.
6. $v=4{,}5$ м/с. Указание. В течение того времени, когда на тележку сыпется песок, ускорение тележки изменяется по линейному закону.

Тур 2

1. $T_н/T_к=0{,}5$.
2. $p_1/p_2=60$.
3. $\alpha=1{,}5\,\%$.
4. $W=3$ эВ. Указание. Бо́льшая часть энергии затрачивается на процесс испарения.
5. $T=768$ К.
6. $n=2{,}4$.

Тур 3

1. $\varphi_0=-890$ В.
2. $U_1=6$ В.
3. $F=0{,}02$ Н.
4. $U=45$ В.
5. $F=0{,}1$ Н.
6. $v=9{,}8$ м/с.

Квант для младших школьников

(см. «Квант» (№ 2)

1. Заметим, что количество партий, выигранных каждым участником, равно количеству всех партий, в которых выиграли черные, поэтому все участники выиграли по одинаковому числу партий.
2. Такими словами являются, например, колокол и водопровод.
3. $1609\times 6=9654$. Указание: начните поиск решений с буквы И.
4. Галя весит 50 кг, Света — 40, Маша — 30, Даша — 20 и Катя — 10.
5. Так как AM и CN — высоты, то точки M и N лежат на полуокружности с диаметром AC и центром в точке Q (рис. 11). Следовательно, отрезки QN и QM равны как радиусы этой окружности. Угол NAM равен 30°, как второй острый угол прямоугольного треугольника AMB с углом ABM, равным 60°. Но угол NQM опирается на ту же дугу, что и угол NAM, но является центральным, а потому вдвое больше его, т. е. равняется 60°. Из этих утверждений следует, что треугольник NMQ — равносторонний.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 2)

Вопросы и задачи

1. Необходимо прикоснуться концом одного стержня к середине другого (в виде буквы T).
2. Сначала магнит создает в нижних концах иголок одноименные магнитные полюса, что вызывает отталкивание иголок друг друга. Когда магнит приближается на достаточно малое расстояние, взаимодействие между ним и каждой из иголок становится сильнее взаимодействия между иголками, и они опускаются, притягиваясь к магниту.
3. Да, на концах стержня будут одноименные полюса.
4. Возникнет. Электроны сверхпроводящего кольца не будут увлечены движением, а положительные ионы кристаллической решетки — будут, что и создаст магнитное поле.
5. Нулю.
6. В проводниках объемный электрический заряд равен нулю, поэтому проявляются только магнитные силы. В случае катодных пучков действуют и магнитные, и электрические силы, но преобладают силы отталкивания между одноименными зарядами.
7. Витки пружины представляют собой параллельные проводники, по которым течет ток в

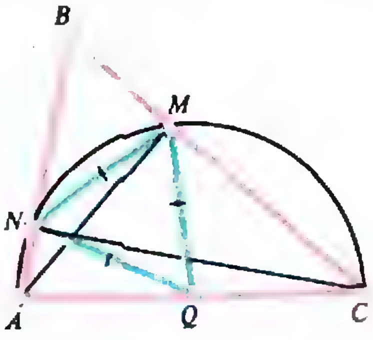


Рис. 11.

одном направлении. При прохождении тока витки притягиваются друг к другу, что вызывает размыкание цепи. Магнитное поле исчезает, пружина распрямляется, нижним концом замыкает цепь, и все повторяется.

8. Провод обовьется вокруг магнита.

9. Сила взаимодействия равна нулю, так как направление кругового тока совпадает с направлением линий магнитной индукции прямолинейного тока.

10. Сила взаимодействия уменьшится.

11. Кольцевой ток, текущий в плоскости, близкой к экваториальной.

Микроопыт

Магнитное поле Земли на расстояниях порядка длины магнитной стрелки практически однородно, поэтому, действуя на стрелку, может создавать только вращающий момент. Поле постоянного магнита на этих же расстояниях неоднородно, поэтому вызывает не только вращательное, но и поступательное движение стрелки.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 11 за 1991 г.)

7. Это число 1,128.

8. Вот одно из решений. Разрежем прямоугольник так, как показано на рисунке 12, и, перегнув бумагу, положим коричневые прямоугольники на желтые. В результате получается двухслойная развертка куба.

9. Пусть порция мороженого стоит x копеек. Так как Пете хватило рубля на две порции, то $x \leqslant 50$. Если бы у Коли было не меньше 4-х рублей, то ему хватило бы денег на 8 порций, а он смог купить только 6. Следовательно, у него было 2 или 3 рубля. Рассмотрим оба случая.

Пусть у Коли 2 рубля, и он может купить 6 порций мороженого, но не может купить 7 порций. Тогда порция мороженого стоит больше 200/7 копеек, но не меньше 200/6 копеек, т. е. $29 < x < 33$. Отсюда $319 < 11x < 363$, следовательно, у Васи было не меньше 4-х рублей. Но в этом случае у него осталось бы не меньше 37 копеек, а этого хватило бы еще на одну порцию мороженого, что противоречит условию. Итак, у Коли было 3 рубля, поэтому выполнены неравенства: $300/7 \leqslant x < 300/6$, откуда $43 < x < 50$. Если $x \geqslant 46$, то $506 \leqslant 11x < 550$, откуда следовало бы, что у Васи не меньше 6 рублей. Но тогда он смог бы купить не меньше 12 порций мороженого. Следовательно, $43 < x \leqslant 45$ и $473 < 11x \leqslant 495$, т. е. у Васи было 5 рублей, а вместе с Колей — 8 рублей, причем на 18 порций этого не хватало. Поэтому $x > 800/18 = 44,4...$, откуда $x = 45$ копеек.

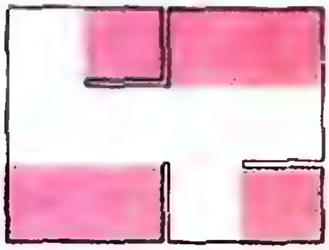


Рис. 12.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко,
С. Табачников, В. Тихомирова, В. Уроев,
А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили
Л. Винюкова, А. Егоров, Л. Кардасевич,
С. Коновалов, Е. Коршунова, А. Котова,
А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, С. Лухин,
П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Н. Дорохова

103006, Москва, К-6, ул. Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»,
тел. 250-33-54, факс 251-55-57

Сдано в набор 29.12.91. Подписано к печати 13.03.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,73.
Тираж 89 149 экз. Заказ 2066. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

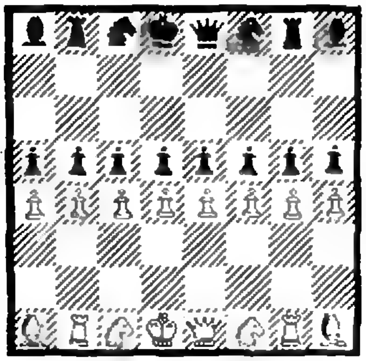
КОРОТКАЯ ЖИЗНЬ РЕКОРДОВ

Мы получаем множество писем с решениями заданий, предложенных ранее. Читатели рассказывают о поставленных ими рекордах. Вот наиболее интересные сообщения.

В «Кванте» № 7 за 1991 год приводился быстрый мат при условии, что ходы наикратчайшие. И. Верещагин, который придумал его, был уверен, что это самый быстрый мат. Но В. Хуторной из Твери побил рекорд на полхода: **1. d3 e6 2. d4 e5 3. Фd2 Крe7 4. Фd3 Крe6 5. Фe3 Крe7 6. Фe4 Крe6 7. Ф:e5×**. Итак, белые матуют на полхода быстрее, чем черные. При этом использованы всего четыре фигуры: ферзь и пешка у белых, король и пешка у черных.

В. Хуторной предложил еще один рекорд. Вот самый быстрый мат при условии, что ходы каждой фигуры кратчайшие: **1. e3 f6 2. Сe2** (если король, ферзь, ладья и пешка могут сделать ход длиной 1, то у слона кратчайший ход $\sqrt{2}$) **2...f5 3. Сf3 g6 4. Сg4 g5 5. Сh5×**.

В шестом номере нашего журнала за 1991 год рассматривалась следующая задача.



Какое наименьшее число перестановок фигур надо осуществить, чтобы получить начальное положение для игры?

В журнале был дан ответ: 38 перестановок. Однако Г. Меликян из Еревана сумел побить этот рекорд, и даже дважды...

Займемся только белыми фигурами. Для перестановки короля и ферзя требуется три «хода»: ферзь становится на любое поле доски, его место занимает король, и затем на свое законное место d1 возвращается ферзь. Однако для расстановки остальных белых фигур требуется не восемь, а семь «ходов». Вот один из вариантов: 1. Сa1—b2 2. Лb1—a1 3. Кc1—b1 4. Сh1—c1 5. Лg1—h1 6. Кf1—g1 7. Сb2—f1. Для перестановки пешек требуется 8 «ходов». Таким образом, белые фигуры расставляются по местам за 18 перестановок, столько же «ходов» требуется черным. Итого 36.

Поскольку в задании не сказано, кто с какой стороны играет, рекорд можно улучшить, если белые и черные фигуры поменять местами (белые расставить вверху диаграммы, а черные — внизу). В этом случае нужно всего 35 «ходов»: 1. Сa1—b2 2. Лb8—a1! 3. Кc1—b8! 4. Сa8—c1! 5. Лb1—a8! и т. д.

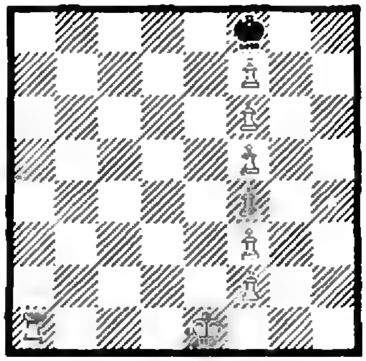
Испанский король Карлос I, правивший в середине XVI века, поощрял увлечение шахматами среди своих придворных. Но, будучи человеком, облеченным абсолютной властью, он считал себя вправе вносить изменения в правила игры. Как утверждают историки, в 1547 году он подписал указ «о голом короле», согласно которому если у кого-то из игроков остался один король, то партнер не имеет права атаковать его и обязан тут же соглашаться на ничью.

Вот позиция (ее автор — известный рекордсмен Б. Сидоров), которая наводит на мысль, что шахматное нововведение Карлоса имеет свой резон. Конечно, если у вас остался одинокий король, придется расстаться с мыслью о победе и... смириться с ничьей.

Белые: **Крg2**. Черные: **Крd1, Фb1, Лb2, Лc2, Сa2, Сc1, Кa1, Кa4**, пешки: **b3, b5, b6, c3, c4, c5, d2, f2**. Ничья.

1. Крf1! b4 2. Кр:f2 (только теперь можно взять пешку!) **2...b5 3. Крf1 Кb6 4. Крf2 Кd5 5. Крf1 Кe3+ 6. Крf2 Кg4+ 7. Крf1 Кh2+ 8. Крf2 Кf3 9. Крf1!** с ничьей. Если бы на первом ходу белые поспешно взяли пешку — 1. Кр:f2?, то в рассмотренном варианте в ответ на 5. Крf2 последовало бы 5...Кe3!, и клубок черных фигур мгновенно распутывался.

Две необычные позиции получили мы от А. Шурякова из Кривого Рога.



Мат в 9 ходов

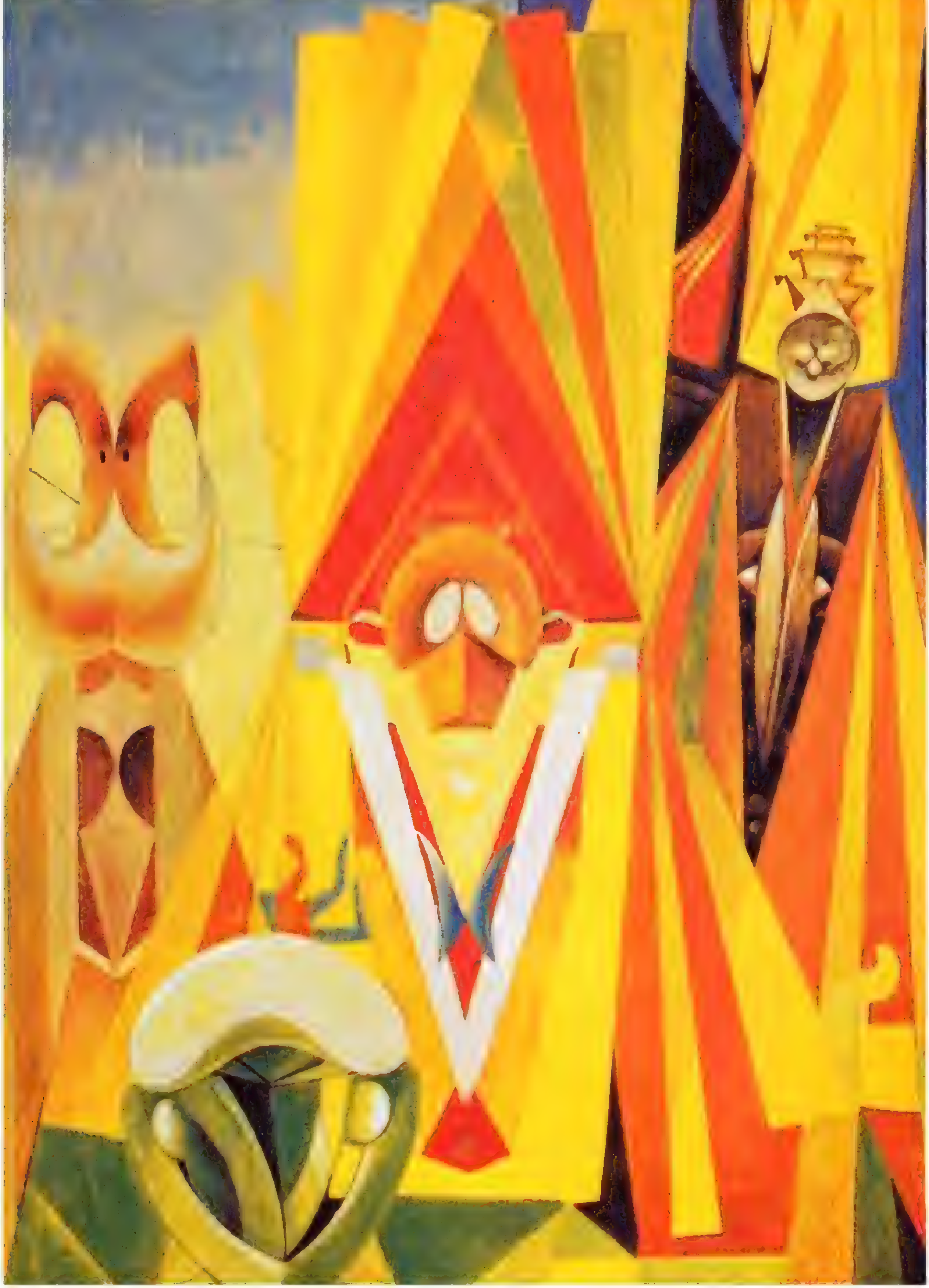
1. Лa8+ Кр:f7 2. Лh8! Кр:f6 3. Лh7 Кр:f5 4. Лh6 Кр:f4 5. Лh5 Кр:f3 6. Лh4 Крg2 7. Крe2 Крg1 8. Крf3 Крf1 9. Лh1×. В задаче занятная начальная позиция, но есть и еще одна особенность: белая ладья побывала в процессе решения во всех четырех углах доски! Может быть, кто-нибудь из читателей придумает задачу с меньшим числом фигур, где ладья ставит мат (в любое число ходов), совершая такое же путешествие «по углам»?

А вот вторая его позиция: **Белые: Крa4, Лf8, Сf4. Черные: Крf1, пешки a2, a5, c2, c5, e2, e5, g2, g5. Мат в 34 хода.**

1. Сg3+ 2. Сf2+ (если ход черного короля вынужденный, то для сокращения текста мы его опускаем) **Крf1 (2...Крh1 3. Лh8×) 3. Сd4+ 4. Сc3+ 5 Лd8+ 6. Сd2! Крd1 (6...Крb2 7. Лb8+ Крa1 8. Сc3×) 7. С:a5+ 8. Сd2+ 9. С:g5+ 10. Сh4+ 11. Лf8+ 12. Сf2+ 13. С:c5+ 14. Сb4+ 15. Лd8+ 16. Сa3+! 17. Лb8+ 18. Сb2+ 19. С:e5+ 20. Сf4+ 21. Лd8+ 22. Сg3+ 23. Лf8+ 24. Сf2+ 25. Сc5+ 26. Сb4+ 27. Лd8+ 28. Сa3+ 29. Лb8+ 30. Сe7! c1Ф 31. Сf6+ Фb2 32. Л:b2 e1 (g1) Ф 33. Лb8+ 34. С:Ф×.**

Черные пешки образуют своего рода клетку, в которую заключен белый слон. Интересно было наблюдать, как он расшатывает эту клетку и в конце концов вырывается на волю!

Е. Гик

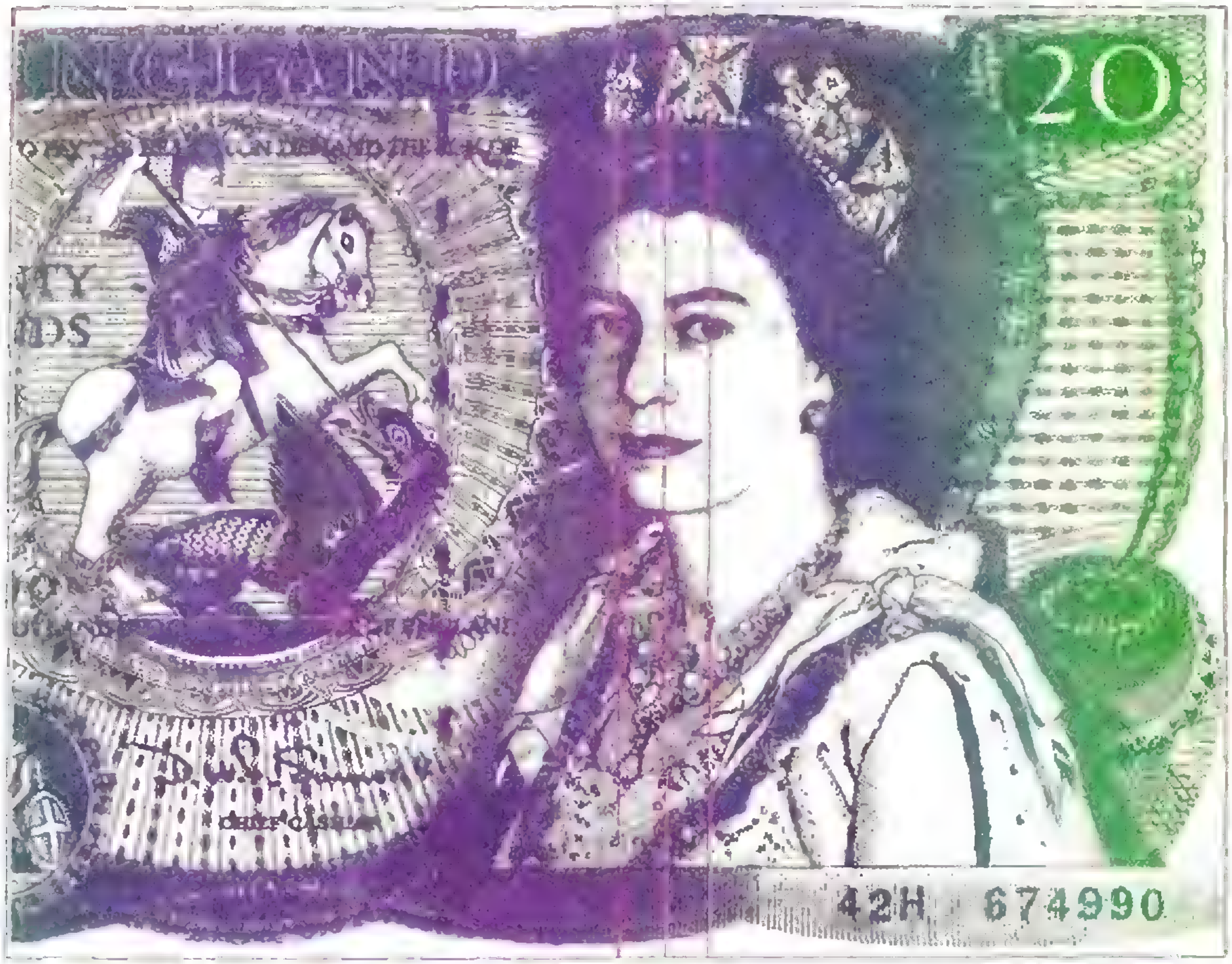


1 р. 10 к.
Индекс 70465

Хотите, чтобы английская королева вам улыбнулась? На дворе март, месяц женского праздника 8 Марта и редакция решила подарить всем читательницам и читателям журнала улыбку королевы Елизаветы.

Для того чтобы получить наш подарок, проделайте следующее. Аккуратно согните обложку журнала по трем вертикальным пунктирным линиям и слегка сдвиньте края листа к центру так, чтобы получилась М-образная складка. Затем наклоните лист «от себя», и чудо совершится — королева с 20-фунтовой английской банкноты улыбнется лично вам. Осторожно! Не поворачивайте лист «на себя». В этом случае королева посмотрит на вас весьма неодобрительно. Кстати, ни с одной советской банкнотой этот фокус не проходит. Их персонаж никогда не поворачивает к нам свое лицо, а смотрит вбок.

Надеемся, что вам не составит труда разобраться в физике фокуса. На первый взгляд кажется, что при улыбке у королевы приподнимаются уголки губ. На самом деле, при наклоне листа бумаги уголки губ остаются на своих местах, а середина губ спускается вниз, создавая эффект улыбки.



НОМЕР
4

Квант

4 1992

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Российской академии наук,
Президиум
Академии педагогических наук
и коллектив редакции
журнала «Квант»

Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *Н. Виленкин.* О кривизне
10 *А. Минеев.* О высоких деревьях
16 Орбиты, которые мы выбираем

Задачник «Кванта»

22 Задачи М1336 — М1340, Ф1343 — Ф1347
24 Решения задач М1306 — М1309, Ф1323 — Ф1327
33 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

34 Задачи
35 *В. Гетман.* Высоко ли погас болид?
37 Конкурс «Математика 6—8»

Качественные задачи по физике

38 «...и самым коричневейшим-наиперекоричневейшим был Эфиоп»
38 Как дерево спасает от дождя?

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»
Математика 9—11:

42 *Ю. Соловьев.* Неопределенные уравнения первой степени

Лаборатория «Кванта»

47 *А. Насретдинов.* Опыты с пластинкой Френеля

Практикум абитуриента

50 *И. Гельфгат, Л. Генденштейн.* Вокруг колеса

Р — значит ракета

56 *В. Туров.* По ступеням космических скоростей

Информатика

60 *Л. Столяров.* Алгоритм

Фантастика

64 *У. Моррисон.* Мешок

68 **Варианты вступительных экзаменов в 1991 г.**

Информация

39 Заочная физическая школа при МГУ

Игры и головоломки

63 Новая игра на клетчатой бумаге

76 **Ответы, указания, решения**

«Квант» улыбается *(59)*

Реклама *(49)*

Наша обложка

1 *Формула Циолковского — основное уравнение движения ракеты.*
2 *Репродукция картины бельгийского художника Р. Магритта (1898—1967) «Букет». Природа вдохновляет не только художников, но и физиков — см. статью «О высоких деревьях» в этом номере.*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка «Звезда».*

© «Квант», 1992

Наум Яковлевич Виленкин (1920—1991), видный советский математик, был одним из постоянных и любимых авторов нашего журнала. Хорошо известны его научно-популярные книги — «Комбинаторика», «Популярная комбинаторика», «Рассказы о множествах», «В поисках бесконечности» и другие. На них воспитывалось не одно поколение советских математиков, а по его учебнику для 5—6 классов и сейчас учатся миллионы школьников. Предлагаемую статью Наум Яковлевич передал в редакцию за месяц до своей кончины.

О КРИВИЗНЕ

Доктор физико-математических наук
Н. ВИЛЕНКИН

На арене цирка раньше выступали призовые силачи с различными трюками: они сгибали медные пятаки, завязывали узлом железную кочергу и гнули на плечах полосовое железо. Но даже сам легендарный Геркулес встал бы в тупик, если бы ему предложили согнуть не какой-нибудь предмет, а пространство. Ведь здесь пришлось бы изгибать пустоту, а это сложнее, чем побороть великана Антея или добыть яблоки из сада Гесперид. И в решении этой задачи не помогли бы никакие достижения современной техники — блюминги, штампы и прессы предназначены для того, чтобы деформировать предметы, а не пространство.

Но, подобно мольеровскому герою, который всю жизнь говорил прозой, но не подозревал об этом, каждый из нас всю жизнь изгибает пространство, не замечая того. Однако здесь играет роль не физическая сила человека, а его масса. Дело в том, что знаменитый физик Альберт Эйнштейн установил связь между гравитацией и искривлением пространства. Всякая масса, притягивая к себе по закону всемирного тяготения другие массы, искривляет пространство, причем тем сильнее, чем она больше. Поэтому мы и не замечаем искривления пространства, вызванного нашим собственным телом,— масса его слишком мала.

Только скопления материи космического масштаба — звезды, галактики, метагалактики — могут искривить пространство заметным образом.

Теория Эйнштейна о связи между притяжением и кривизной пространства используется всеми учеными, изучающими космологию — науку об устройстве Вселенной. Из этой теории вытекает, в частности, что искривление пространства должно быть особенно сильным там, где большие массы материи сосредоточены в малом объеме — около белых карликов и гипотетических нейтронных звезд.

Каким же образом физики проверили правоту Эйнштейна? Оказывается, по его теории, лучи света, проходящие мимо больших скоплений материи, меняют свое направление (см. рис. 1). Впрочем, еще Ньютон знал, что лучи света должны отклоняться под действием тяготения. Но по его теории величина отклонения получалась вдвое меньше, чем у Эйнштейна. Наблюдения над солнечным затмением, проведенные 29 мая 1919 года, показали правоту Эйнштейна.

Возможно ли кривое пространство?

Легко представить себе, что такое кривая линия, кривая поверхность, но представить себе кривое пространство очень трудно.

Обычные возражения против искривленности пространства таковы: кривую линию невозможно совместить с прямой, а приходится располагать на плоскости или в пространстве; точно так же и кривую поверхность невозможно поместить на плоскости — чтобы вместить ее, нужно по крайней мере трехмерное пространство. Следовательно, и искривленное трехмерное пространство должно лежать в каком-то объемлющем его пространстве четырех, а то и пяти измерений. А так как никто четырехмерного пространства не наблюдал, то пространство, в котором мы живем, никак не может быть искривленным. Некоторые философы добавляли к этим рассуждениям всякие страшные слова об идеализме, фидеизме и т. д. Зато авторам научно-фантастических рассказов идея четырехмерного пространства очень понравилась. Во многих рассказах и повестях Уэллса происходят путешествия в четвертом измерении.

На самом деле, искривленность пространства никак не связана с четвертым измерением, а является, так сказать, его внутренним делом. И установить искривленность можно не выходя из этого пространства, а лишь проводя измерения внутри него.

Для того чтобы читателю было яснее, как это делается, расскажем сначала, как установить кривизну поверхности, не покидая ее, а лишь измеряя расстояния между ее точками.

Нужно ли было путешествие Магеллана?

В течение многих тысячелетий люди думали, что Земля плоская. Однако астрономические наблюдения (за тенью Земли во време лунных затмений, за Солнцем и звездами) привели древнегреческих ученых к мысли о шарообразности Земли. Эратосфену удалось даже с довольно большой точностью измерить радиус Земли. Но после того как христианство стало государственной религией, достижения языческой науки были забыты, и снова воцарилась мысль, что Земля — плоская. И для доказательства шарообразности Земли понадобилось кругосветное путешествие Магеллана.

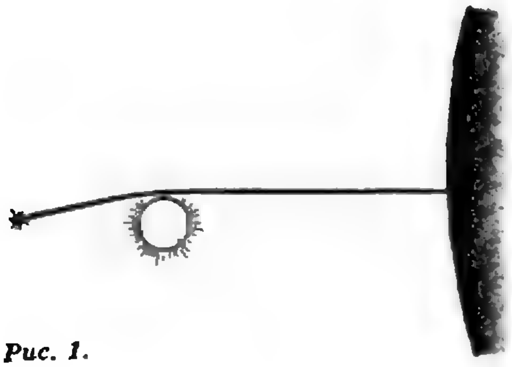


Рис. 1.

А теперь представьте себе планету Ялмез, где живут разумные существа, но небо закрыто вечной пеленой облаков, а океанские путешествия по тем или иным причинам невозможны. Смогли бы жители этой планеты узнать, что они живут не на куске плоскости, со всех сторон окруженном водой, а на сфере? Иными словами, было ли необходимо путешествие Магеллана для того, чтобы доказать шарообразность Земли?*)

Геометрия на Ялмезе

Чтобы понять, как возникает идея кривизны поверхности, проследим за ходом развития геометрии на планете Ялмез. Геометрия возникает как экспериментальная наука, как теоретическое обобщение многовековых наблюдений над свойствами пространства. Поскольку небо планеты покрыто облаками, геометрам Ялмеза пришлось вести наблюдения лишь на ее поверхности. Оказалось, что среди всех линий, соединяющих две точки этой поверхности, всегда есть наикратчайшая (рис. 2). Наикратчайшие линии и были названы «отрезками прямых». Разумеется, наблюдатель, который посмотрел бы на планету со стороны, сказал бы, что эти линии совсем не прямые, а кривые — это дуги больших кругов сферы. Но ялмезяне не могли посмотреть на свою планету со стороны и считали наикратчайшие линии, проведенные на поверхности, прямыми (впрочем, ведь и мы часто говорим «дорога прямая, как стрела», хотя на самом деле она идет по дуге большого круга).

---

*) Разумеется, автор не ставит под сомнение ни географическую ценность путешествия Магеллана, ни его историческое значение. Речь идет только о чисто математическом вопросе — как установить искривленность земной поверхности, не наблюдая звезды и не совершая кругосветных путешествий.

Затем установили свойства этих «прямых». В самом начале наблюдению была доступна лишь малая часть планеты, а точность измерения оставалась очень небольшой. Поэтому в пределах точности измерения свойства «прямых» на поверхности планеты были такими же, как свойства прямых на плоскости,— через две точки проходила одна и только одна «прямая», две «прямые» пересекались в одной и только одной точке (вторая точка пересечения, диаметрально противоположная первой, была недосягаема для наблюдателей). Наконец, ялмезянские геометры были уверены, что их «прямые линии» бесконечны. Сама мысль, что при движении по «прямой» в одном и том же направлении они вернутся в исходную точку, казалась дикой, непонятной и противоречащей здравому смыслу. И ялмезянские ученые были убеждены, что поверхность их планеты бесконечна, а тех, кто выдвигал иные идеи, обвиняли во всех смертных грехах.

Дальнейшее изучение свойств «прямых» показало, что в пределах точности измерения сумма углов любого треугольника равна 180 градусам, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов и т. д. Иными словами, жители Ялмеза построили геометрию Евклида и считали, что она полностью приложима к поверхности их планеты.

Вскоре, однако, им пришлось убедиться, что это не так. По мере развития техники удавалось измерить все бо́льшие и бо́льшие куски суши (мы договорились, что океанских плаваний ялмезяне совершать не могли). И эти измерения вступили в противоречие с евклидовой геометрией. Чтобы понять в чем дело, возьмем на сфере три точки A, B и C (рис. 3, *а*). Эти точки можно соединить «отрезками прямых», а по-нашему — дугами больших кругов (т. е. дугами меридианов AB и AC и дугой экватора BC). В результате получается треугольник ABC. Легко видеть, что все три угла этого треугольника прямые. Значит, сумма его углов равна 270 градусам, а не 180 градусам, как полагается по геометрии Евклида. На 90 градусов больше, чем нужно.

У других треугольников избыток суммы углов был бы другой. Например, у треугольника ABD (рис. 3, *б*) каждый из углов B и D равен 90 градусам, а угол BAD — 180 градусам. Сумма углов этого треугольника равна 360 градусам — на 180 градусов больше, чем нужно. В дальнейшем число $\alpha+\beta+\gamma-180°$, где α, β, γ — углы сферического треугольника, мы будем для краткости называть *избытком* этого треугольника.

Поворот параллельных

Но не только наличие избытка у треугольников показало жителям Ялмеза, что они живут не на плоскости, а на кривой поверхности. Неверной

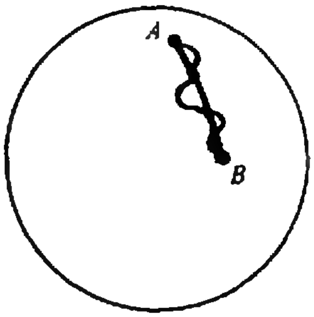
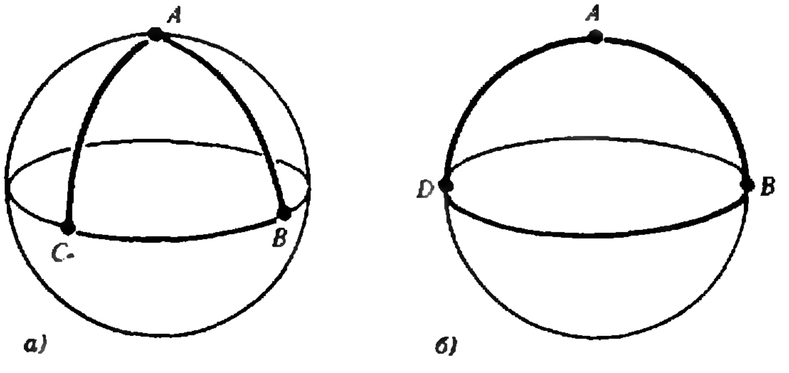


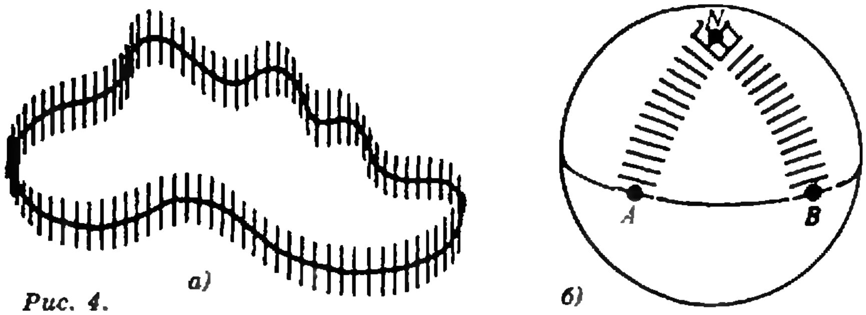
Рис. 2.



а)

б)

Рис. 3.



а)
б)

Рис. 4.

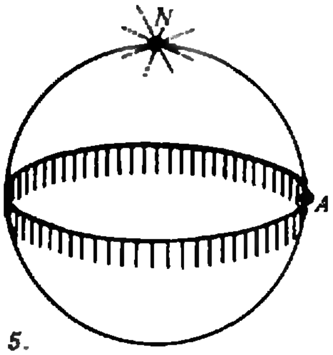


Рис. 5.

оказалась и теорема Пифагора. Например, у треугольника *ABC* угол *A* составляет 90 градусов, а все его стороны равны друг другу. Вообще, здесь трудно разобрать, где гипотенуза, а где катеты,— все углы прямые.

К неожиданным результатам привело и изучение «параллельных *прямых*» *на поверхности планеты.* Ведь если провести на плоскости замкнутую линию, а потом перемещать вдоль нее отрезок так, чтобы он оставался все время параллелен самому себе, то отрезок вернется в исходную точку, не изменив направления (рис. 4, *а*). Измерения малых участков поверхности планеты, казалось бы, подтверждали этот результат («параллельными» ялмезяне считали «прямые», перпендикулярные одной и той же «прямой»).

Но измерения больших участков поверхности привели совсем к иным результатам. Возьмем, например, треугольник *ABN* (рис. 4, *б*) и проведем в точке *N* «отрезок», перпендикулярный *NA*. Будем переносить этот отрезок вдоль контура треугольника *ABN*, следя за тем, чтобы он оставался все время параллельным самому себе. Когда мы придем в точку *A*, то получим отрезок, направленный по экватору. Так как экватор сам является «прямой», то после параллельного переноса в точку *B* отрезок снова будет направлен по экватору. А когда мы перенесем его еще по меридиану *BN*, то получим отрезок, повернутый на 90 градусов относительно первоначального направления (т. е. как раз на величину избытка треугольника *ABN*). А если бы мы переносили отрезок по контуру треугольника *ABD* на рисунке 3, *б*, то он повернулся бы на 180 градусов.

Вообще, при параллельном переносе по контуру любого сферического треугольника отрезок поворачивается на угол, равный избытку этого треугольника. Любопытный результат получается, если переносить отрезок вдоль *экватора. На первый взгляд кажется,* что он возвратится в исходную точку, не повернувшись. Но это неверно. Если все время сносить движущийся отрезок в одну и ту же точку — полюс сферы, то мы увидим, что он повернулся на 360 градусов (рис. 5). Это и неудивительно. Дополним экватор дугой меридиана *AN*. Мы получим «треугольник» *NAN*. В этом треугольнике два угла прямые, а третий равен 360 градусов. Поэтому и его избыток равен 360 градусам. Подумайте сами, могут ли быть «треугольники» с еще большим избытком?

Измерение кривизны

Итак, измеряя сумму углов треугольника, наблюдая за поворотом параллельных при переносе по замкнутому контуру, проверяя теорему Пифагора, жители планеты убедились, что они живут не на плоскости, а на какой-то искривленной поверхности. За меру кривизны некоторого участка поверхности они приняли угол поворота отрезка, параллельно перенесенного вдоль границы этого участка. Эту кривизну можно было считать и по-другому — разбить участок на треугольники и сложить избытки всех треугольников. Ведь если два треугольника объединяются в один, то их избытки складываются.

Оказалось, что чем больше площадь участка, тем сильнее он искривлен. Точнее говоря, избыток любого треугольника оказался пропорционален его площади:

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=KS \qquad (*)$$

(начиная с этого места, мы будем измерять углы не в градусах, а, как обычно принято в математике, в радианах ($360°=2\pi$ радиан), при таком измерении сумма углов плоского треугольника равна π). Отсюда был сделан вывод, что кривизна поверхности на единицу площади всюду одна и та же. Число K и приняли за меру кривизны.

Но среди всех поверхностей есть только одна поверхность, для которой избыток треугольника на единицу площади всегда один и тот же,— это сфера. Поэтому геометры Ялмеза установили, что они живут на сфере, а не на какой-нибудь другой поверхности. Без особого труда удалось даже найти радиус этой сферы. Ведь если число K не зависит от выбора треугольника, его достаточно подсчитать для одного треугольника. Возьмем, например, треугольник ABC на рисунке 3, *а*. Его избыток равен 90 градусам или, в радианной мере, $\pi/2$. Площадь же этого треугольника равна 1/8 площади сферы, т. е. $\pi R^2/2$. Подставляя эти значения в формулу (*), получаем, что $K=1/R^2$, а поэтому для любого сферического треугольника:

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=\frac{S}{R^2},$$

где α, β, γ — его углы, S — площадь и R — радиус сферы. Эта формула позволяет определить радиус сферы путем измерения углов треугольника и его площади. Разумеется, этот способ не очень удобен, так как требует весьма большой точности измерения углов. Для измерения радиуса Земли прибегли к иному способу — измерению длины дуги меридиана. Но этот способ требует наблюдения за звездами.

Гауссова кривизна

Формула (*) определяет кривизну K поверхности сферы, отнесенную к единице площади. Как мы видели, она равна $1/R^2$. Иными словами, чем больше радиус сферы, тем меньше искривлен участок ее поверхности, имеющий единичную площадь,— поверхность мяча искривлена гораздо больше, чем поверхность Земли.

Великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс, которого его современники называли Mathematicorum princeps (первый среди математиков), предложил таким же образом измерять кривизну любой поверхности. На любой поверхности можно строить геометрию точно так же, как и на поверхности сферы. Роль прямолинейных отрезков играют при этом «кратчайшие» (их еще называют *геодезическими*) линии, т. е. линии, длина которых меньше длины всех остальных линий, соединяющих данные две точки. С ними впервые столкнулись геодезисты при измерении расстояний на поверхности Земли. К слову сказать, и сам Гаусс пришел к занятиям геометрией на поверхностях после того, как он в течение нескольких лет занимался геодезическими измерениями.

Из геодезических линий можно строить треугольники, четырехугольники и т. д. При этом на любой кривой поверхности, как и на сфере, сумма углов треугольника не будет, вообще говоря, равна π. Кривизной треугольника на единицу площади мы снова назовем число

$$K=\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{S}.$$

На произвольных поверхностях это число будет для различных треугольников различным. Более того, оно может быть для одних треугольников положительным, а для других — отрицательным (треугольники могут иметь не только избыток, но и недостаток).

Чтобы найти кривизну в какой-то точке поверхности, надо брать все меньшие и меньшие треугольники,

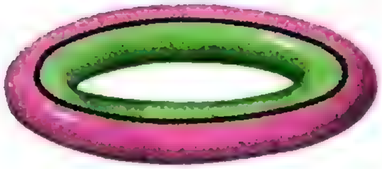


Рис. 6.

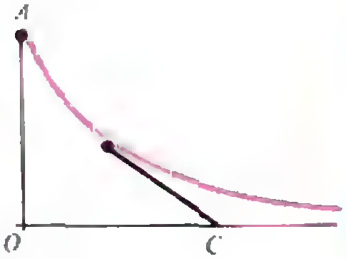


Рис. 7.

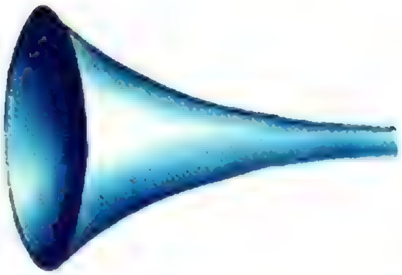


Рис. 8.

охватывающие эту точку, и искать их кривизну на единицу площади. В пределе мы получим кривизну поверхности в данной точке. Это определение кривизны дал Гаусс, и ее обычно называют гауссовой кривизной. Если треугольники имеют избыток, то гауссова кривизна поверхности положительна, а если сумма их углов меньше π, то кривизна отрицательна.

Если поверхность выпукла, то ее гауссова кривизна во всех точках положительна, а для бублика, изображенного на рисунке 6 (математики называют его тором), в красных точках гауссова кривизна положительна, а в зеленых — отрицательна.

Замечательным свойством гауссовой кривизны является то, что она не меняется при изгибании поверхности. Отсюда ясно, что во всех точках цилиндра гауссова кривизна равна нулю. Ведь цилиндр получается изгибанием куска плоскости, а кривизна плоскости равна нулю. Равна нулю гауссова кривизна и во всех точках конуса, кроме его вершины.

Псевдосфера и геометрия Лобачевского

На сфере во всех точках кривизна одна и та же и притом положительная. А есть поверхность постоянной отрицательной кривизны. Ее называют псевдосферой. Она получается следующим образом.

Представим себе, что в точке *A* стоит человек, который держит на поводке собаку (рис. 7). Вначале собака находится в точке *O*. После этого она бежит по прямой *Ox* с постоянной скоростью, а ее хозяин бежит вслед за ней так, что его скорость все время направлена вдоль поводка. Поэтому сначала хозяин бежит в направлении *AO*. Но по мере того, как собака продвигается по прямой *Ox*, направление бега хозяина образует все меньший угол с этой прямой, причем расстояние от бегущего человека до прямой *Ox* становится все меньше. На рисунке 7 изображена линия, по которой бежит человек. Она называется трактрисой и обладает следующим замечательным свойством: в какой бы точке к ней ни провести касательную, отрезок этой касательной между этой точкой и осью *Ox* имеет одну и ту же длину.

Если повернуть трактрису вокруг прямой *Ox*, то получится псевдосфера (рис. 8). Эта поверхность замечательна тем, что геометрия на ней совпадает с геометрией на куске плоскости Лобачевского. Поэтому открытие псевдосферы было очень важным этапом в развитии неевклидовой геометрии.

Сферическое изображение поверхности и кривизна

Представление о гауссовой кривизне поверхности можно определить еще и иначе.*) Чтобы сделать это, проведем в каждой точке поверхности к ней перпендикуляр. Для плоскости все эти перпендикуляры имеют одно и то же направление, а для других поверхностей направлены в разные стороны. Например, для сферы все эти перпендикуляры проходят через центр сферы (рис. 9). Поэтому степень расхождения перпендикуляров и характеризует кривизну поверхности. Неудобно только, что перпендикуляры восставлены в разных точках поверхности. Чтобы освободиться от этого неудобства, выберем одну точку *O* в пространстве и проведем через нее прямые, параллельные этим перпендикулярам. Возьмем еще сферу с радиусом 1 и с центром в точке *O*. Точки пересечения проведенных прямых со сферой образуют на сфере некоторую область. Ее называют сферическим изображением данной поверхности. Чем сильнее искривлен участок поверхности, тем сильнее расходятся в разные стороны перпендикуляры и тем больше площадь сферического изображения в точности этого участка. Оказывается, площадь сферического изображения совпадает с кривизной участка. Например, сферическое изображение полусферы является полусферой единичного радиуса, площадь которой равна 2π. И кривизна любой полусферы тоже равна 2π.

---

*) Отметим, что это определение требует уже выхода в пространство, окружающее поверхность.

А кривизна цилиндра равна нулю. Ведь перпендикуляры к поверхности цилиндра все перпендикулярны оси цилиндра и потому параллельны одной и той же плоскости (рис. 10). Если перенести их в точку *O*, то все они будут лежать в одной плоскости (например, плоскости экватора). Значит, сферическим изображением цилиндра является не участок сферы, а линия, площадь которой, конечно, равна нулю. Поэтому и кривизна цилиндра тоже равна нулю.

Гаусс и Риман

В работах Гаусса был до конца решен вопрос о том, что такое кривизна поверхности. На повестку дня встала проблема, как определить меру кривизны пространства. Это удалось сделать одному из самых замечательных математиков — Бернгарду Риману. Риман учился в Геттингенском университете, где в те годы основную математическую кафедру возглавлял Гаусс. Но Гаусс преподавал неохотно и был тогда вообще недосягаемым олимпийцем. Вдобавок, по не вполне выясненным причинам, отношения молодого студента со знаменитым профессором сложились далеко не идеальным образом, и в течение многих лет Гаусс относился к Риману с большим предубеждением.

Несмотря на это, мы должны считать Римана учеником Гаусса и притом единственным его учеником, проникшим в самые сокровенные идеи Гаусса. Во многих работах Римана чувствуется духовная близость с Гауссом, внутренний контакт, доходивший до того, что Риман выбирал иногда те же обозначения, которыми пользовался Гаусс в своих неопубликованных (и неизвестных Риману) работах.

Проблеме кривизны пространства была посвящена пробная лекция, прочитанная Риманом в 1854 году. Тогда в немецких университетах существовал хороший обычай — начинающий преподаватель должен был прочесть лекцию для членов факультета, чтобы они могли определить его педагогические способности. Риман предложил несколько тем пробных лекций, из которых Гаусс выбрал одну, более всего заинтересовавшую его,— «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Надо полагать, что слушатели остались не слишком высокого мнения о педагогических даро-

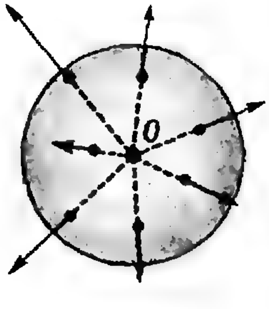


Рис. 9.

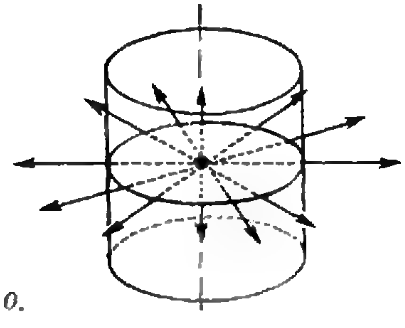


Рис. 10.

ваниях Римана — только Гаусс и смог понять содержание лекции.

Кривизна пространства

Как же ответил Риман на вопрос, что такое кривизна пространства и как она измеряется? Он применил тот же способ, каким Гаусс измерял кривизну поверхности,— подсчитывал сумму углов треугольника, составленного из отрезков геодезических линий, и смотрел, на сколько она отличается от π. Однако при этом возникало осложнение — ведь в пространстве через точку можно провести много плоскостей, и кривизна зависит не только от того, в какой точке ее вычисляют, но и от того, в какой плоскости лежат треугольники. Поэтому Риман говорит о кривизне в данной точке в направлении данной плоскости.

Если для всех треугольников в пространстве сумма углов равна π, то в этом пространстве верна обычная геометрия Евклида. Такое пространство не имеет кривизны, оно, как говорят, плоское. Если же есть треугольники, сумма углов которых больше π, то кривизна пространства в направлении плоскости этого треугольника в соответствующих точках положительна; если же сумма углов меньше π, то отрицательна.

Таким образом, понятие кривизны пространства не содержит в себе ничего таинственного, а указывает лишь на то, что сумма углов треугольника может отличаться от предписанного Евклидом значения. Особенно интересными являются пространства, в которых кривизна во всех точках и во всех плоскостях одна и та же. В таких пространствах (их называют пространствами постоянной кривизны) тела могут передвигаться из одного места в другое, не меняя своих размеров. Если же кривизна пространства переменна, то тело при перемещении будет менять размеры, искажаться. Риман поставил и вопрос о том, является ли искривленным реальное пространство — пространство, в котором мы живем.

В эпоху Римана физика еще не знала явлений, которые не укладывались бы в схему евклидова пространства и ньютоновых концепций. И все же он говорил о том, что «нужно пытаться объяснить возникновение метрических соотношений чем-то внешним — силами связи, действующими на это реальное... Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке — физике, и переступать его не дает нам повода сегодняшний день».

Как же узнать, имеет ли кривизну реальное пространство? Для этого надо сначала найти в нем геодезические — кратчайшие линии. Физическими наблюдениями было установлено, что свет всегда распространяется так, чтобы пройти свой путь за кратчайшее время. При этом скорость света в пустоте всегда одна и та же. Поэтому ясно, что геодезической линией, соединяющей две точки пространства, является идущий из одной точки в другую световой луч (в пустоте).

Проще всего было бы поэтому установить кривизну пространства, измерив сумму углов треугольника, составленного из световых лучей. Однако эта сумма даже для треугольников, вершинами которых являются звезды, не отличается от π в пределах точности измерения, и можно сказать, что если пространство в целом и искривлено, то кривизна его очень мала (безуспешные попытки доказать таким путем неевклидовость реального пространства предпринимали и Гаусс, и великий русский геометр Н. И. Лобачевский).

Только после того, как Эйнштейн установил, что заметная кривизна пространства может наблюдаться лишь вблизи притягивающих масс, удалось экспериментально установить ее наличие. Это и сделали экспедиции, наблюдавшие за полным солнечным затмением 1919 года.

Другое доказательство искривленности пространства дали наблюдения за планетой Меркурий. Эта планета

(Окончание см. на с. 15)

О ВЫСОКИХ ДЕРЕВЬЯХ

(статистика и простые оценки)

Кандидат физико-математических наук
А. МИНЕЕВ

Только механических оценок, которым была посвящена первая часть статьи, оказалось недостаточно, чтобы понять причины ограничений на высоту деревьев. Левый склон графика на рисунке 1 пока «в тумане». Дерево, как и следовало ожидать, гораздо сложнее сухой палки, воткнутой в землю. Продолжим наши исследования.

2. Движение воды

Приглядимся к движению воды по дереву. Она связывает корни, ствол и листья воедино. Оценим характерные скорости движения воды в трех важнейших случаях (см. рисунок 2):

— при всасывании воды кончиками корней из почвы $v_н$ (*«н»* — низ);

— при движении по стволу дерева $v_с$ (*«с»* — ствол или середина);

— при испарении с поверхности листьев или кроны $v_в$ (*«в»* — верх).

Пройдем эту цепочку в направлении от верхушки к корням дерева, от простых оценок к более сложным.

$v_в$. Из-за нагрева Солнцем кроны дерева требуется ее постоянное охлаждение. Иначе крона перегреется и не станет выполнять свои функции. При слабом ветре тепло может быть отведено в основном путем испарения воды с поверхности листьев или хвои. Это запускает «насос», выкачивающий воду из почвы.

Запишем уравнение баланса тепла для листа площадью $S_л$, поглощающего солнечное излучение:

$$\alpha q_{\odot} S_л = Q_{исп} \rho_ж v_в S_л.$$

Слева от знака равенства записан приход энергии от Солнца, справа — ее уход при испарении воды с листа. Здесь $q_{\odot}$ — средний поток солнечного тепла на поверхности Земли ($q_{\odot} \sim$ $\sim 10^3$ Вт/м^2), α — доля энергии, поглощенная листом (с учетом отражения от его поверхности, ориентации и экранировки кроной $\alpha \sim 0{,}2$—$0{,}3$), $Q_{исп}$ — удельная энергия испарения воды ($Q_{исп} \sim 2 \cdot 10^6$ Дж/кг), $\rho_ж$ — плотность воды ($\rho_ж = 10^3$ кг/м^3). Отсюда для скорости подвода воды к поверхности листа (или хвоинки) с последующим испарением получаем

$$v_в = \frac{\alpha q_{\odot}}{Q_{исп} \rho_ж}.$$

При указанных выше значениях параметров $v_в \sim 10^{-7}$ м/с $\sim 4 \cdot 10^{-4}$ м/ч. Как видно из формулы, $v_в$ зависит только от освещенности и пропорциональна ей. При ветре скорость теплоотвода больше, что увеличивает значение $v_в$. Таким образом, эта формула является ограничением на $v_в$ снизу.

$v_с$. В стволе дерева вода течет по тонким каналам — «скелетам» когда-то живых клеток. Диаметр таких сосудов чрезвычайно мал: масштаба 10^{-5} м у хвойных деревьев и до $(1-2) \cdot 10^{-4}$ м у лиственных.

При медленном течении воды по тонким каналам сила сопротивления $F_с$ определяется вязкостью воды.

Если слои жидкости движутся с разными скоростями, то между ними возникает «трение» — сила вязкости. Для количественного описания вязкости жидкости можно рассмотреть простейший пример: жидкость между двумя параллельными близко расположенными пластинами. Если одна из пластин неподвижна, а другая движется со скоростью v, то возникающая между ними сила вязкости равна

$$F_в = \eta S \frac{v}{h},$$

Окончание. Начало см. в № 3.

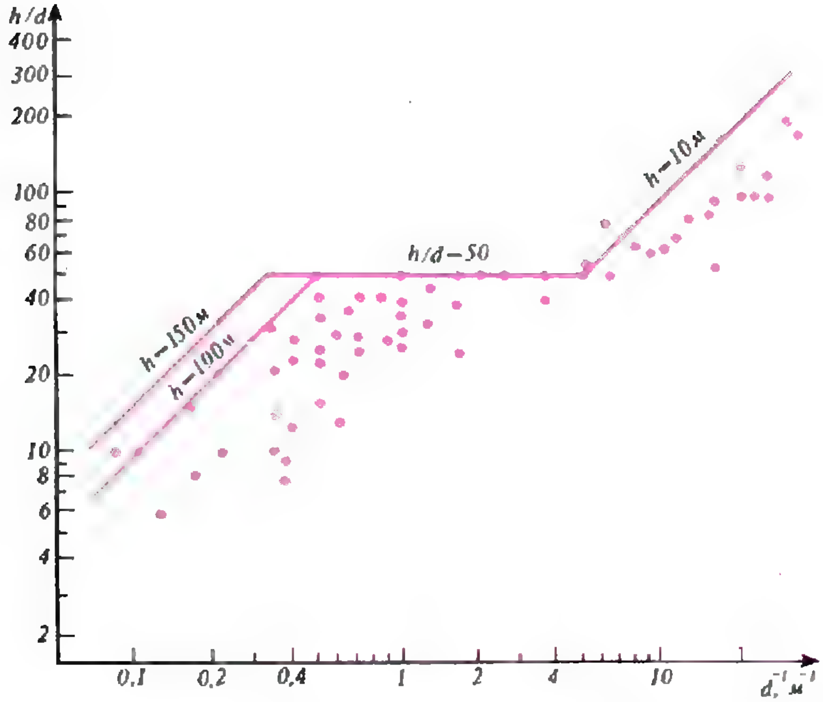


Рис. 1. Зависимость относительной высоты дерева h/d от его диаметра d. Слева на графике — самые толстые деревья, справа — самые тонкие.

где S — площадь каждой пластины, h — расстояние между ними, а коэффициент пропорциональности η, называемый коэффициентом вязкости, характеризует вязкие свойства жидкости (для воды $\eta \sim 10^{-3}$ кг/(м · с)). Величину v/h, которая показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою, называют градиентом скорости.

При движении жидкости по трубе (каналу) градиент скорости от стенок к центру по порядку величины равен v/d (d — диаметр трубы), площадь стенки трубы $S \sim ld$ (l — длина трубы), т. е.

$$F_в \sim \eta v l.$$

В случае равномерного течения жидкости сила вязкости компенсируется перепадом давлений:

$$F_в = \Delta p \frac{\pi d^2}{4}.$$

Отсюда для перепада давлений на длине l получаем оценку

$$\Delta p \sim \frac{\eta l v}{d^2}.$$

Точная формула (ее называют законом Пуазейля) дает

$$\Delta p = \frac{32 \eta l v}{d^2}.$$

Для подъема воды в поле тяжести Земли на высоту h со скоростью $v_с$ по сосуду диаметром $d_с$ требуется перепад давлений

$$\Delta p_с = \rho_ж g h + \frac{32\,\eta h v_с}{d_с^2} = \rho_ж h \left(g + \frac{32\,\nu v_с}{d_с^2}\right),$$

где $\nu = \eta/\rho_ж \sim 10^{-6}$ м²/с — так называемая кинематическая вязкость воды.

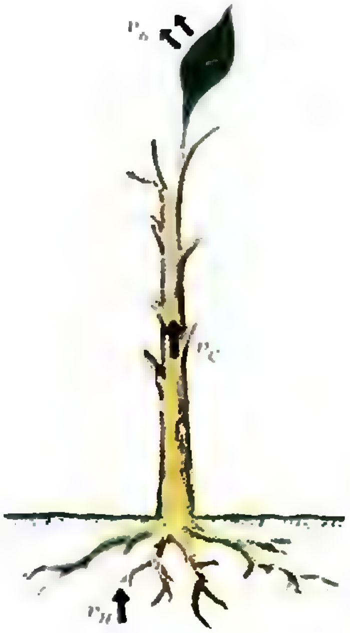


Рис. 2. Схематическое изображение движения воды по дереву.

Изобразим графически зависимость Δp_c от скорости воды (рисунок 3). При малых v_c величина Δp_c не зависит от скорости, а при больших — пропорциональна ей. Характерное значение скорости, при которой происходит излом зависимости (и дереву становится все труднее поднимать воду наверх), равно

$$v_{cx}=gd_c^2/(32\nu),$$

или, после подстановки значений g и ν,

$$v_{cx}\sim 3\cdot 10^{-7}d_c^2,$$

где d_c измерен в микронах, а v_{cx} — в м/с.

Мы получили, что v_{cx} квадратично зависит от диаметра сосудов (рисунок 4). Для хвойных деревьев диаметр сосудов $d_c\sim 10^{-5}$ м и характерная скорость $v_{cx}\sim 10$ см/ч, для лиственных — $d_c\sim 10^{-4}$ м и $v_{cx}\sim$ ~ 10 м/ч. Интересно, что, несмотря на оценочный характер формулы для v_{cx}, измеренные значения скорости передвижения воды по сосудам реальных деревьев, приводимые в литературе, близки к нашим оценкам. Дерево как бы «чувствует» границу изменения зависимости Δp от скорости. При характерном значении скорости перепад давлений по стволу дерева составляет

$$\Delta p_c\sim 2\rho_ж gh$$

и для очень высоких деревьев ($h\sim$ $\sim 100—150$ м) величина Δp_c порядка 20—30 атм.

А может ли лиственное дерево при $v_c\sim 10$ м/ч иметь диаметр сосудов того же масштаба, что и у хвойного дерева, т. е. $\sim 10^{-5}$ м? Посмотрим. В этом случае получаем Δp_c (атм) $\sim 10\cdot h$ (м). Уже при высоте ~ 10 м перепад давлений составит ~ 100 атм — величину, близкую к максимально возможному давлению p_{max}, при котором рвутся силы сцепления молекул воды. Таким образом, сосуды ствола при увеличенной скорости прокачки воды «обязаны» утолщаться, чтобы вода не «порвалась». Именно так и «поступают» лиственные деревья, «увеличивая» d_c до величин $\sim 10^{-4}$ м.

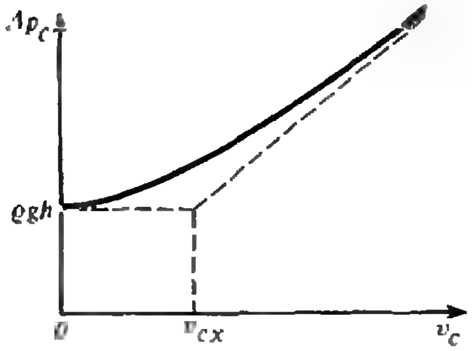


Рис. 3. Зависимость давления, требуемого для прокачки воды наверх по сосудам дерева, от скорости движения воды.

$v_н$. Попадая в корни дерева, вода обязана пересечь оболочку корневого волоска. Это не так просто, поскольку нужно преодолеть барьер — клеточную мембрану, т. е. двухслойную полунепроницаемую перегородку толщиной $\sim 10^{-8}$ м. Диффузия воды через мембрану сильно замедляет скорость ее движения. Простые, но несколько громоздкие оценки приводят к величине

$$v_н\sim 10^{-8}\ \text{м/с}\sim 4\cdot 10^{-5}\ \text{м/ч}.$$

Итак, все три характерные скорости передвижения воды определены. Их сопоставление довольно любопытно. Действительно, поток массы воды через корни, ствол и крону должен быть одинаков. Поэтому площади корневой системы (точнее, корневых волосков) $S_н$, водопроводящей системы ствола S_c и кроны $S_в$ должны относиться обратно пропорционально

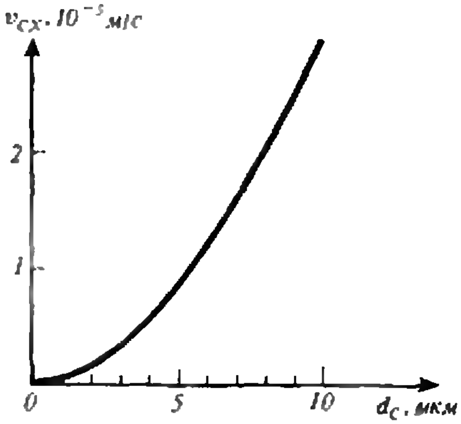


Рис. 4. Зависимость характерной скорости подъема воды по дереву от диаметра сосудов.

соответствующим скоростям. Приняв $S_{\text{с}}$ за единицу площади, получим для хвойных деревьев (при $v_{\text{с}} \sim \sim 0{,}1$ м/ч) при хорошем освещении дерева и достаточно увлажненной почве

$S_{\text{в}}:S_{\text{с}}:S_{\text{к}}=(200-300):1:(2500-3000)$.

Отсюда следует, что площадь «корешков» больше площади «вершков» и каждая из них существенно превышает сечение водопроводящих каналов ствола. При переходе от ствола к кроне или корням дерево «обязано» сильно нарастить поверхность. Как это выполнить при минимальном расходе материала?

Подобные задачи часто возникают в природе и в технике. Так «вынуждены» поступать и молния, разделяясь на все более мелкие каналы, и причудливый морозный узор на оконном стекле. Способ решения, как правило, одинаков. Это — постепенное разделение на все более мелкие структуры, где и протекает основной процесс (всасывание воды корневыми волосками и испарение листьями, выделение энергии молнией).

На этом прервем рассказ о путешествии воды по дереву. Он позволил грубо оценить скорости передвижения воды, а также понять причину сильно разветвленной структуры веток и корней. Но «тумана» возле левого склона и он не рассеял...

Сделаем лишь одно замечание. Упомянутая выше величина максимального растягивающего давления воды в деревьях ($p_{\max} \sim 100$ атм) требует некоторых пояснений. Для идеальной воды (без примесей и посторонних включений) величина $p_{\max}$ существенно больше (см. рисунок 5, кривая *а*). Она порядка тысячи атмосфер и уменьшается с ростом температуры. Переход к технической воде (водопроводной и колодезной) кардинально меняет ситуацию. Для такой воды величина $p_{\max}$ масштаба одной или нескольких атмосфер. Вода же в деревьях проходит через тонкое сито мембран корневых волосков, что в значительной степени очищает ее. Измерения $p_{\max}$ для тщательно очищенной воды проводились неоднократно и дали величину $\sim 100-300$ атм. В качестве примера на рисунке 5 (кривая *б*) приведена зависимость $p_{\max}(T)$ в одной из самых аккуратных серий экспериментов. Уровень $p_{\max}$ порядка 200—280 атм, с ростом температуры величина давления уменьшается. При значении разрывающего давления 100—300 атм, даже с учетом потерь на трение воды о стенки сосудов, величина предельной высоты дерева больше 500 метров! Это означает, что для реальных деревьев водные нити не рвутся.

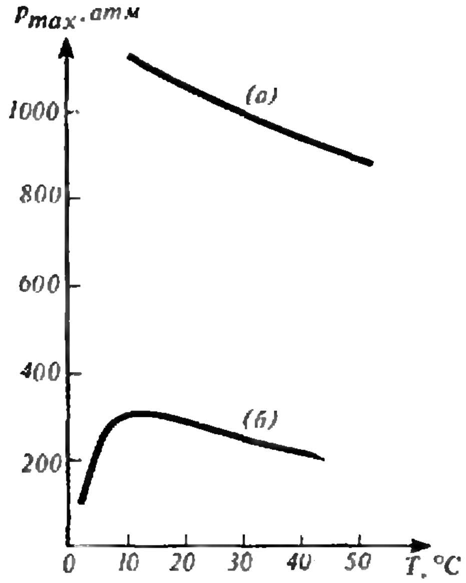


Рис. 5. Зависимость разрывающего воду давления от температуры: для идеальной воды (а) и для хорошо очищенной воды (б).

3. Процесс роста дерева

А может быть, все дело не в строгих физических ограничениях высоты дерева, а в том, что дерево за разумное время просто не успевает стать слишком высоким?

Рассмотрим эволюцию во времени размеров отдельного дерева. При небольшой высоте отношение h/d может быть очень велико. Постепенно h/d выходит на примерно постоянное значение.

Изобразим своеобразный тоннель, а в нем — цепочку дальнейших рассуждений (см. рисунок 6). Справа —

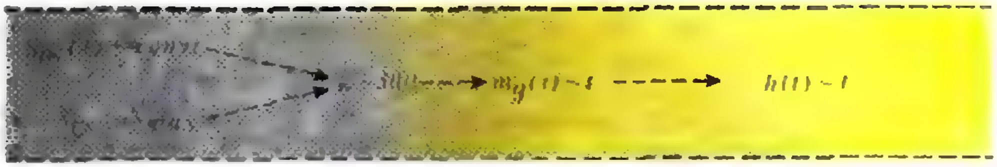


Рис. 6. Слабый свет в конце тоннеля...

«свет», к которому мы идем. На пути — несколько остановок.

$S_{гк}(t) \approx \text{const}$. Приглядимся к структуре годичных колец дерева (см. их типичный вид на рисунке 7). С возрастом, как правило, толщина годичного кольца уменьшается, так что его площадь слабо зависит от времени. Примем для простоты $S_{гк}(t) \approx \text{const}$.

$N_{гк} \leqslant N_{max}$. С течением времени клетки внутренних годичных слоев постепенно засоряются и перестают выполнять водопроводящую функцию. Поэтому в подъеме воды на верх дерева участвует только небольшой слой древесины вблизи коры. Таким образом, количество годичных слоев ствола $N_{гк}$, через которые питается крона, невелико. У хвойных деревьев оно не превышает нескольких десятков, у лиственных — меньше десяти.

В результате можно принять постоянными:

— полную площадь дерева, работающую на подъем воды,

$$S(t) \sim S_{гк}(t) N_{гк} \approx \text{const};$$

— массу воды, прокачанной через ствол дерева за год,

$$M_в(t) = \rho_ж v_c S(t) T_1$$

(v_c — скорость подъема воды по сосудам, T_1 — продолжительность работы нашего «насоса» за год).

$k \sim 300$. Введем еще один важный коэффициент: k — отношение массы воды, закачанной на верх дерева, к массе синтезированного в кроне органического вещества. Именно последнее и дает прирост размеров и массы дерева. Величина k для разных растений меняется в не слишком широких пределах и в среднем $k \sim 300$.

$m_д(t) \sim t$. При постоянных $M_в(t)$ и k получаем, что годичный прирост массы древесины $\Delta m_д(t)$ слабо меняется со временем, грубо можно положить $\Delta m_д(t) \approx \text{const}$. И тогда масса взрослого дерева будет примерно линейно расти с возрастом дерева: $m_д(t) \sim t$.

$h(t) \sim t^{1/3}$. И наконец, последнее звено в нашей цепочке. Масса дерева пропорциональна $d^2 h$. Таким образом, при постоянном значении $h/d \sim 50$ масса дерева пропорциональна кубу высоты. А поскольку $m_д(t) \sim t$, то $h(t) \sim t^{1/3}$.

Чем интересна такая зависимость? Видно, что рост дерева в высоту со временем сильно замедляется. Так, если дерево достигло высоты 50 метров к 50 годам, то 100-метровый рубеж оно преодолеет к 400 годам, а 200-метровый — только через 3200 лет.

Это уже похоже на свет в конце тоннеля... Хотя, конечно, следует отдавать себе отчет в многочисленности не очень строгих рассуждений и предположений, допущенных на нашем долгом пути.

Приведем еще несколько соображений эволюционного характера против чрезмерного гигантизма деревьев:

— Окружающая данное дерево растительность конкурирует с ним если не по высоте, то в почвенном питании. К изменениям питания более низкорослым растениям приспособиться легче, чем гиганту.

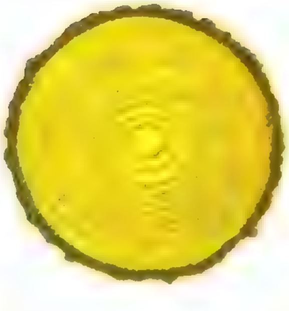


Рис. 7. Характерный вид годичных колец ствола дерева.

— За промежуток времени масштаба сотен и тысяч лет жучки и микроорганизмы чаще всего успевают сильно ослабить прочность дерева. Разрушение происходит с сердцевины, клетки которой практически прекратили жизнедеятельность.

— За времена $\sim 10^4$ лет существенно меняется климат Земли. Так, последнее великое оледенение закончилось примерно 10 тысяч лет назад.

— У 100-метровых деревьев уже нет конкуренции за место под Солнцем. Поэтому отпадают эволюционные причины тянуться к 200—300-метровой высоте — трудности с доставкой воды растут, а преимуществ не видно.

— Дерево — кандидат на рекордную высоту — «обязано» иметь хорошо выраженный вертикальный и зачастую очень толстый ствол и сравнительно небольшую крону. Можно сказать, что гиганты «работают» в основном на себя, а не на потомство. Такие деревья явно проигрывают по продуктивности (скорости размножения) более низкорослым, но раскидистым деревьям.

По-видимому, подобные причины и приводят к тому, что растительные мастодонты высотой более 150 метров на Земле не встречаются.

О кривизне

(Начало см. на с. 2)

находится ближе к Солнцу, чем остальные планеты, и потому испытывает наибольшее влияние искривленности околосолнечного пространства. Из-за этой искривленности, после полного оборота Меркурия вокруг Солнца, его орбита немного поворачивается, точно так же, как поворачивалась параллельная штриховка замкнутой линии на сфере (рис. 11). Впрочем, орбита поворачивается и по другой причине — из-за притяжения планет. Поворот орбиты, вызванный притяжением, астрономы умели учитывать. Но их расчеты не сходились с действительностью — орбита поворачивалась быстрее, чем нужно, на 41 секунду в сто лет. Когда подсчитали по формулам Эйнштейна, на сколько поворачивается орбита из-за кривизны пространства, ответ был: на 41 секунду в сто лет. Этим была объяснена загадка, долгое время мучившая астрономов, а заодно и подтверждена теория относительности Эйнштейна.

С кривизной пространства приходится сталкиваться и при космологических исследованиях, где надо учитывать искривление пространства, вызванное притяжением целых галактик и метагалактик. В связи с этим возникает один из основных вопросов космологии — конечно или бесконечно реальное пространство. Ведь если пространство искривлено и кривизна его положительна, то оно может быть устроено примерно как трехмерная сфера, т. е. не иметь нигде границ, но быть конечных размеров. Некоторые люди отрицают саму возможность конечности реального пространства. Однако их доводы не более убедительны, чем доводы ялмезянских ученых, доказывающих, что они живут на бесконечной плоскости, а не на ограниченной сфере. Ответ на этот вопрос должны дать не умозрительные построения, а астрономические исследования. В частности, решающую роль должны сыграть точные измерения средней плотности материи во Вселенной.

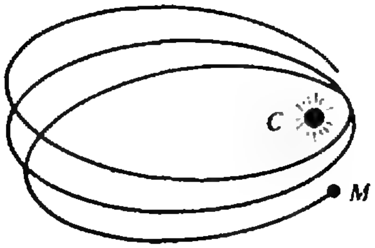
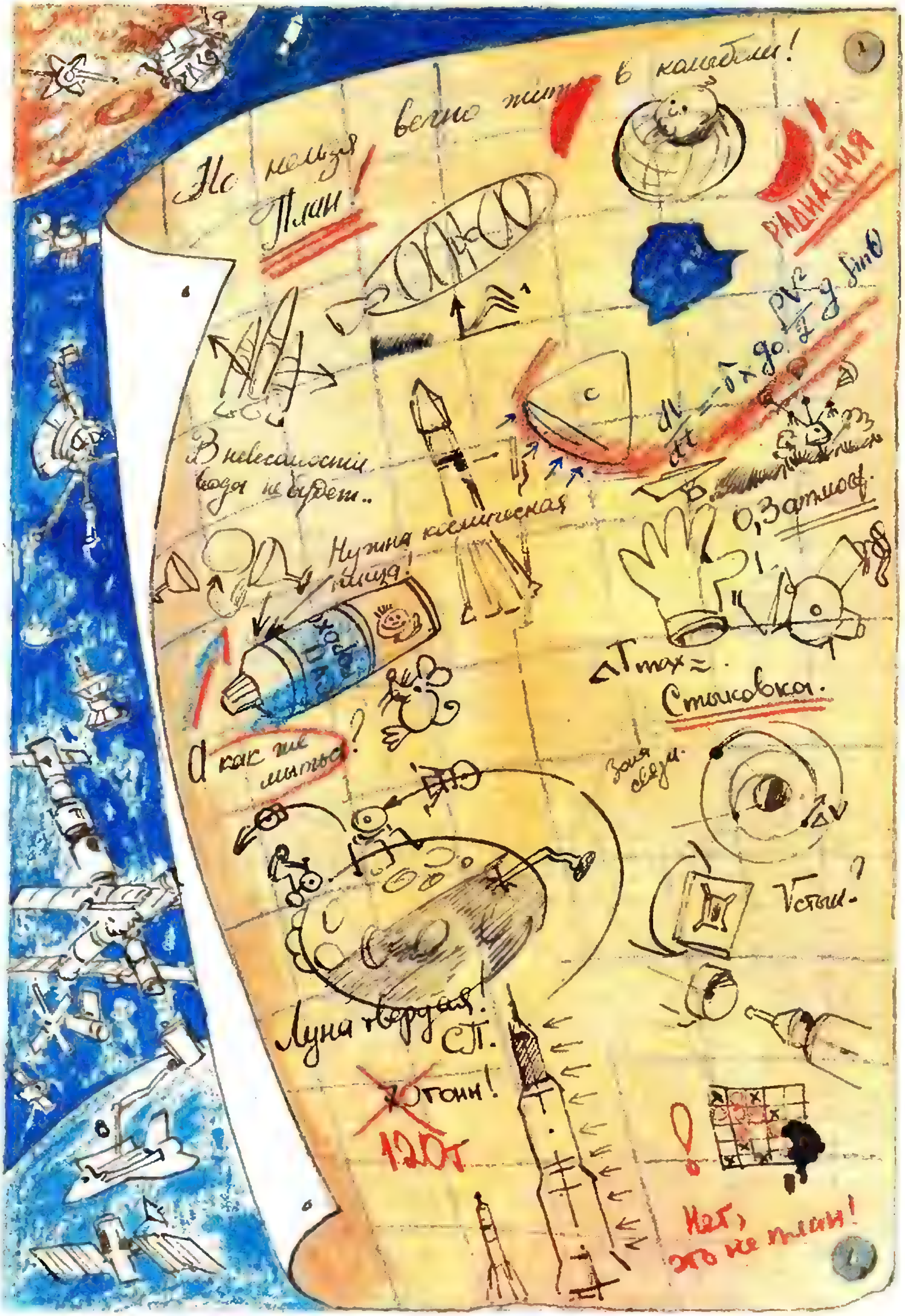


Рис. 11.


Но нельзя вечно жить в колыбели!
План!
РАДИАЦИЯ
$\frac{dV}{dt} = -\delta \times \rho_0 \frac{\rho V^2}{2} y \sin\theta$
В невесомости вода не будет..
Нужна космическая пища!
0,3 атмосф.
ΔTmax =
Стыковка.
А как же мыться?
Зона связи.
ΔV
Vстык.?
Луна твердая! С.П.
~~70~~ тонн!
120т
Нет, это не план!

ОРБИТЫ, КОТОРЫЕ МЫ ВЫБИРАЕМ

(беседа с В. Бурдаковым и К. Феоктистовым)

В год, провозглашенный ООН годом космическим, редакция обратилась с рядом вопросов к известным специалистам в области проектирования космической техники, докторам технических наук Валерию Бурдакову и Константину Феоктистову. Оба многие годы проработали на «королёвской» космической фирме, ныне НПО «Энергия». За их плечами участие в большей или меньшей степени в создании почти всех космических аппаратов фирмы — от первых спутников до космических станций и «Бурана», а также в не меньшем количестве разработок, оказавшихся позднее в «корзине». Кроме того, К. Феоктистову довелось совершить полет в первом многоместном космическом корабле.

Предлагаем вам запись беседы с ними корреспондента нашего журнала В. Николаева. Мнения ученых по многим проблемам космонавтики различны, а уж какое из них убедительнее — судить вам.

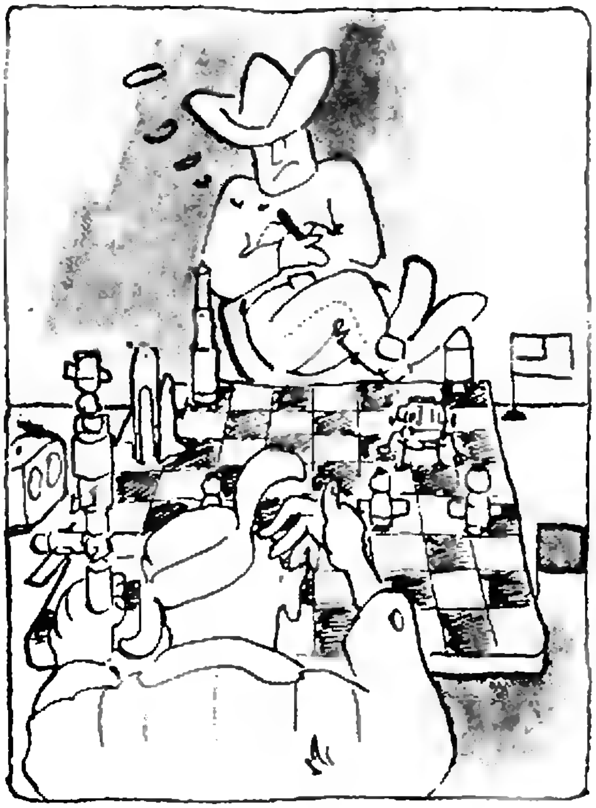
В. Н.: В начале космической эры не было недостатка в прогнозах развития космической техники. Этим увлекались и ученые, и журналисты. Жизнь показала, что в большинстве своем прогнозы были слишком оптимистичными. В чем вы видите причину срыва «графика»?

В. Б.: Если не рассматривать прогнозы, связанные с освоением дальнего космоса, то мне не кажется, что они были чересчур завышенными. Наоборот, в удовлетворении практических земных потребностей сделано даже больше того, о чем мечтал С. П. Королев и мы вместе с ним.

К. Ф.: Я затрудняюсь сказать, о чем мечтал С. П. (Королев.— *Прим. ред.*), думаю, он просто хотел быть везде первым. Это проглядывалось при принятии любых решений. Поэтому говорить о том, что у нас была программа со сроками и мы ее не выполнили, вряд ли правильно.

У нас была программа — высадки на Луну, и мы рассчитывали ее осуществить где-то на рубеже 60-х — 70-х годов. Мы всерьез задумывались о полете на Марс в начале 80-х, готовили эскизы. В этом смысле график сорван, но, полагаю, цели эти были надуманными, абсурдными. И ничего плохого в том, что они не реализованы, нет. С моей точки зрения, это было бы пустой тратой времени и средств.

Если же говорить вообще о развитии космической техники, то, несмотря на ужасную неорганизованность, продвижение очень значительное во всем мире, и у нас в том числе. Мы научились непрерывно жить на орбите в течение года, постоянно работает орбитальная станция, налажено ее снабжение грузами и топливом, регулярно сменяются экипажи... Другое дело (и это очень унизительно), что отдача всех пилотируемых



программ очень низка, почти равна нулю. Она существенна в некоторых американских предприятиях — спутниках связи, контроля за природной средой; великолепны результаты, полученные от работы автоматических астрофизических лабораторий. Но и у них, несмотря на огромные затраты, эффективность и лунной программы, и программы «Спейс Шаттл», с точки зрения возврата денег, приближается к нулю.

Поэтому, если говорить о срывах, то правильнее было бы сказать о неоправдавшихся надеждах на извлечение реальной пользы. Хотя сегодня хорошо видно, что извлекать ее не только можно, но и нужно.

В. Б.: Но вы говорите о тех программах, которые реализовывались после С. П. А это уже не начало освоения космического пространства. Сперва же был каскад открытий в области геофизики, атмосферы Земли, были интереснейшие наблюдения за прохождением электромагнитных волн различного диапазона через атмосферу.

Королев часто собирал нас и очень любил, когда мы, молодые, мечтали вместе с ним, прикидывали, чего можно достичь с помощью космической техники. Вот тогда и рождались проекты космических энергоисточников, спутников связи и т. д.

Сейчас, занимаясь проблемами качества жизни, я понимаю, что оно для любого организма — от живой клетки до человеческого общества в целом — зависит от пяти факторов: энергетики, информации, технологии, транспорта и экологии. Все эти составляющие зайдут в тупик уже в следующем веке, если земляне не будут развивать космонавтику. Причем космонавтику не игрушечную — в смысле ее практического использования, которая у нас сейчас развивается (впрочем, как и в США).

Однако в любом случае нам стесняться нечего. По качеству снимков земной поверхности наш космический аппарат «Ресурс» не отстает ни от американского «Лендсата», ни от французского «Спота». К тому же наши снимки намного дешевле. Другое дело, что мы никак не научимся извлекать из этого прибыль.

Мне трудно с вами согласиться и в отношении неразберихи. Еще при С. П. мы считали, что организация работ оставляет желать лучшего. На каждом собрании заявляли, что так работать нельзя, что это безобразие. Но по сравнению с тем, что сейчас происходит в космонавтике, да и во всей стране, это была чуть ли не идеальная организация. А уж дисциплина... Запуски очень часто были связаны с астрономическими датами, но неудач было немного.

В. Н.: Но были и другие прогнозы, например американских ученых-специалистов в области космонавтики, писателя А. Кларка. Они предполагали, что пилотируемые полеты к ближайшим планетам состоятся в 80-е годы, их колонизация — в начале следующего века, а межзвездные зонды будут отправлены в 2020 году...

В. Б.: Прогнозы — сложная штука. Это ведь научная дисциплина. Я тоже занимаюсь ими и довольно давно. Дело в том, кто их делает. П. Глоба тоже выступает с прогнозами в области космонавтики... Большинство из тех, кого вы имеете в виду, не являются экспертами, и свои прогнозы они делали на основании общих соображений, т. е на основании так называемого тренда. Они замечают какой-то рост и продолжают его с минимальным расширением.

В. Н.: А имелся ли у нас аналогичный прогноз?

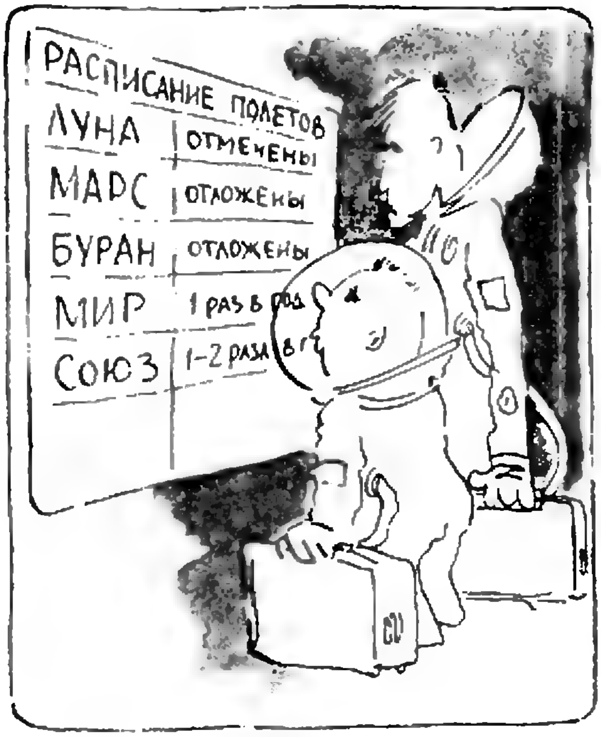
В. Б.: У нас были прогнозы полета на Марс (где-то к 80-м годам). Они, конечно, не сбылись. В эти сроки осуществлен беспилотный полет с посадкой на планету. Кроме того, у нас составлялся прогноз по заданию Хрущева. Этот прогноз удивительно напоминал прогноз построения коммунистического общества. И судьба их похожа. Строить прогнозы на основании простой линейной экстраполяции нельзя.

К. Ф.: Стратегической программы освоения космоса вообще не было. Гнались, чтобы везде быть первыми, что достаточно неразумно. И я не согласен с тем, что у нас была эпоха очень быстрого и эффективного продвижения вперед. С точки зрения техники — да! Мы научились делать очень неплохие космические аппараты. Но насчет открытий в геофизике?.. Американцы открыли радиационные пояса, хотя мы их засекли первыми. Но не разобрались. Насчет атмосферы — я вообще не знаю, какие мы открытия сделали. По метеорам — в основном подтверждали существовавшие представления о метеорном облаке вокруг Земли. Конечно, кое-что было уточнено на базе экспериментов в последние 20 лет. По информационным системам — создали «Молнию», а затем и другие спутники связи, но все равно позорно отстали. У нас только 2000 каналов связи, хотя мы и начали первыми. У американцев на порядки больше.

Выбирать цели надо все-таки более обстоятельно, и при этом считать деньги. Такого рода прогнозы — в 70-е на Луну, в 80-е на Марс, а затем и к звездам,— несерьезны. На Луну надо лететь, если надеешься обнаружить там что-то очень ценное. Например, золото или какую-нибудь суперценную информацию. А если этого нет — то только обладая избытками богатства. То же самое и в отношении Марса.

В. Н.: В начале 70-х годов было принято решение о прекращении работ по советской пилотируемой лунной программе Н1—Л3. К этому времени прошла, притом удачно, отработка лунного корабля, предназначенного для доставки на Луну космонавта, успешно продолжались работы по орбитальному кораблю, который должен был доставить космонавтов на окололунную орбиту, а затем возвратить их на Землю, ну и, к сожалению, довольно неудачно проводились пуски ракеты-носителя Н1 — царь-ракеты, как ее называли в конструкторском бюро (по аналогии со всем известными, так никогда и не побывавшими в деле колоколом и пушкой). Н1 предназначалась для выведения кораблей на орбиту ИСЗ и разгона их к Луне.

Для большинства из работавших по этой программе принятое решение было едва ли не личной трагедией, душевной травмой (особенно для молодых инженеров), от которой многие так и не избавились. Как вы

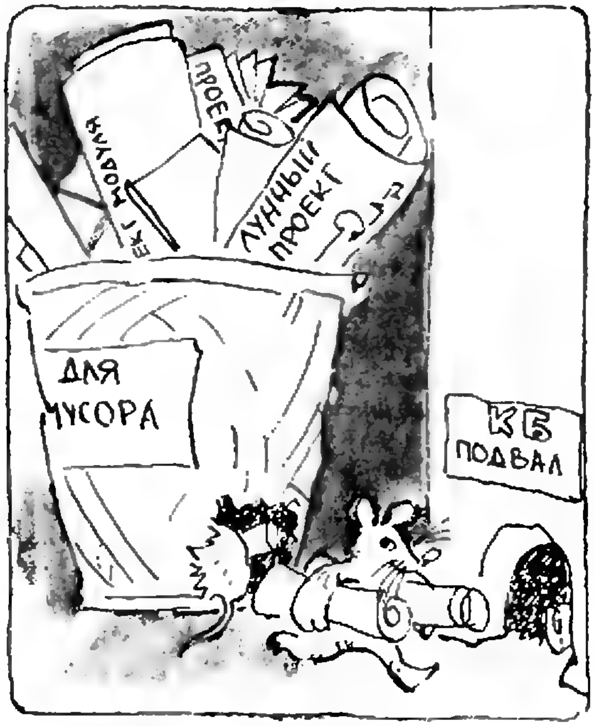


полагаете, было ли оно оправданно, тем более, что была уверенность в том, что доработать ракету-носитель было вполне возможно?

В. Б.: Да, это было травмой не только для молодых. Я знаю, что М. К. Тихонравов (один из старейших «ракетчиков», начинавший работу вместе с Королевым.— *Прим. ред.*) просто плакал. Думаю, надо было закончить строительство хотя бы Н1.

К. Ф.: Принцип «начал дело — закончи» разумен, но в данном случае необоснованным было само начало работ. А уж заканчивать и повторять в худшем варианте то, что уже сделали американцы, причем в варианте заведомо более опасном (в отличие от программы «Аполлон», в советской программе на поверхность Луны высаживался один человек.— *Прим. ред.*), совершенно неправильно.

Что касается ракеты, то с инженерной точки зрения она была спроектирована грамотно. Конструктивная схема была здравая, элементарная. И в наших силах было ее довести до полета. Под этим углом, конечно, я должен был бы сказать, что зря ее не доделали. Но, оглядываясь на прошедшие десятилетия, я уже этого не скажу. Работы были прекращены где-то в 1973 году...



В. Б.: В 74-м, когда пришел Глушко (академик В. П. Глушко сменил на посту главного конструктора академика В. П. Мишина, в свою очередь сменившего С. П. Королева.— *Прим. ред.*).

К. Ф.: Тогда в жертву принесли Мишина. Прекращая такую дорогостоящую программу, кого-то надо было положить на жертвенный алтарь. Решили его... Он был такой видный человек, как раз для этой роли подходил. Способ хотя и нечестный, но характерный. (Смеется.)

Возвращаясь к ракете, могу сказать, что за два десятилетия так и не появились космические аппараты, которые нужно было бы выводить этой ракетой. Тогда зачем мы ее делали? А держать ракету 20 лет на всякий случай или делать какие-то драндулеты под нее, поскольку она есть,— это нелепо. Короче, сам заказ не был продуман.

В. Б.: Но и мы, и они считали: сначала — Луна, затем — Марс. А теперь мы все равно вернулись к машине («Энергия».— *Прим. ред.*), которая выводит те же самые 100 тонн.

В. Н.: Там, правда, было 95 тонн.

В. Б.: Плюс-минус 5 тонн, это одно и то же. И что качественно нового мы создали? По сути, это же мы могли иметь уже в 70-е годы.

К. Ф.: Вы доказываете, что Н1 надо было делать, потому что прошло 20 лет и мы все равно создали подобную. Но это совсем не доказательно, ведь и сегодня эти 100 тонн никому не нужны...

В. Н.: Тупиковых и даже бессмысленных программ было не одна, не две. Можно ли к их числу отнести программу «Буран»? Ведь уже почти четыре года прошло после первого полета, а о следующем ничего не слышно.

В. Б.: О «Шаттле» тоже говорят, что он не нужен, но американцы летают регулярно, увеличивая при этом эффективность.

К. Ф.: Что вы имеете в виду? У нас корабль «Союз», хоть и одноразовый, а стоит около 10 млн. рублей, да полет его — 20 млн. А полет «Шаттла» обходится в 300 млн. долларов. Что ж тут хорошего?

В. Б.: Возможность возвращать с орбиты дорогостоящие полезные нагрузки. Возвращать их и ремонтировать на Земле намного дешевле, чем делать это на орбите или запускать новые.

К. Ф.: 300 млн. туда, 300 млн. обратно и затем вновь 300 млн. туда. Проще новую запустить.

В. Б.: По их подсчетам не так...

К. Ф.: Да ничего они не считали. Уверяю вас, ничего! Они исходили из рекламных цифр, когда стоимость пуска называлась в 10 млн., а оказалось 300. Причем и это неполные цифры. Не учтены амортизация вложенных средств в создание самого «Шаттла», в строительство стартовой площадки и т. д. Так что эти цифры надо удвоить, а то и утроить.

Мы же повторили их глупость. Помните, вы мне рассказывали, как ходили к маршалу Гречко: «Вот американцы делают многоразовый корабль, а наши паразиты не хотят». Гречко послал их. Пошли к Устинову (А. А. Гречко был в то время министром обороны СССР, Д. Ф. Устинов — секретарем ЦК КПСС, отвечавшим за оборону.— *Прим. ред.*), по-моему, результат был тем же. Тогда начальство прорвалось к Брежневу и стало объяснять ему, что американцы смогут мимоходом Москву разбомбить, а наши не хотят паритета.

В. Б.: Да, аргументы были такими.

К. Ф.: И вот тогда Брежнев вызвал Устинова и Афанасьева (министр общего машиностроения СССР в те годы.— *Прим. ред.*), дал указание и дело покатилось.

В. Б.: Любопытный момент: когда Глушко пришел на фирму, он перечислил все аппараты, которыми нам предстояло заниматься. Их было довольно много. Единственное, чего мы не должны были, по словам Глушко, делать — это советский аналог «Шаттла». Не прошло, однако, и полутора лет, как многое было заброшено, а мы навалились на «Буран».

В. Н.: В чем вы видите сегодня достоинства «Бурана»?

В. Б.: В том, ради чего он и создавался — в способности возвращать на Землю грузы массой до 20 тонн.

К. Ф.: Но ведь пуск «Бурана» обходится тоже в 300 млн. А я не знаю ни одной полезной нагрузки с такой стоимостью.

В. Б.: У нас нет, а американцы «Шаттл» под программу СОИ делали.

В. Н.: Ну а «Буран» зачем нужен?

В. Б.: Сейчас главная проблема дальнейшего существования человечества связана с ограниченными ресурсами Земли. Выкопаем все изнутри, как дальше жить будем? Через 100—200 лет? Необходимо извлекать природные ресурсы из космоса. Как это делать? Надо увеличить массу, оснащенность. Следовательно, возрастет стоимость аппаратов. Французы, например, недавно запустили спутник-рекордсмен, стоимостью аж в 3,5 млрд. франков.

Очень дорогие приборы и для исследования дальнего космоса...

К. Ф.: А при чем здесь «Буран»?

В. Б.: «Буран» позволяет продлевать срок работы этих объектов. Есть, например, зеркала, которые очень быстро теряют свои характеристики.

К. Ф.: Но оптику можно и нужно беречь от загрязнения, закрывать блендами, крышками.

В. Б.: Существует еще испарение материалов в вакууме.

К. Ф.: На «Салюте» с этой проблемой справились, нанеся на зеркало телескопа повторное покрытие. Хотя определенные трудности, согласен, здесь имеются.

В. Н.: Итак, все-таки вы считаете, что «Буран» имеет будущее?

В. Б.: Считаю, что и «Шаттл», и «Буран» еще будут развиваться...

(Окончание следует)

Задачник „Кванта"

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 июня 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4 — 92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1336» или «Ф1343». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М1336 — М1340, Ф1343 — Ф1347

М1336. Докажите для любых натуральных чисел m и n, больших 1, неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}}>1.$$

Л. Курляндчик

М1337. Выпуклая фигура на плоскости имеет 4 оси симметрии (углы между соседними осями составляют 45°). Через одну точку фигуры проведены параллельные этим осям прямые, которые делят фигуру на 8 частей, раскрашенных поочередно в голубой и розовый цвета (см. рис. 1). Докажите, что сумма площадей голубых частей равна сумме площадей розовых.

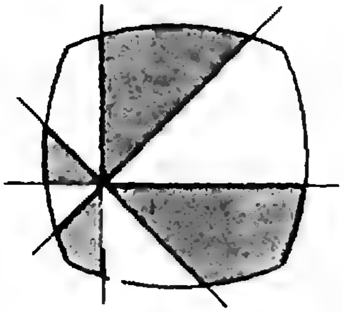


Рис. 1.

В. Произволов

М1338. Укажите способ вычисления 2^n-го числа f_{2^n} последовательности Фибоначчи $f_1=1$, $f_2=1$, $f_3=2$, $f_{k+1}=f_k+f_{k-1}$ $(k>1)$ не более чем за $6n$ операций сложения, умножения и вычитания.

В. Быковский

М1339. Дан треугольник ABC. Пусть S — его площадь, γ — угол ACB, а l — длина биссектрисы, проведенной из вершины C.

а) Докажите, что $S\geqslant l^2\cdot \operatorname{tg}(\gamma/2)$.

б) Для каких треугольников ABC выполняется равенство?

Н. Нелировская

М1340. На красной окружности произвольным образом отмечено $N\geqslant 4$ различных синих точек. Начиная с какой-нибудь из них будем перекрашивать каждую вторую синюю точку (по часовой стрелке) в красный цвет, соединяя ее при этом хордой со следующей перекрашиваемой точкой, и т. д., пока на окружности не останется синих точек. На сколько частей распадается внутренность окружности, если ее разрезать по всем проведенным линиям, если

а) $N=32$? б) $N=1992$?

С. Дориченко

Задачник „Кванта"

Ф1343. Лиса видит зайца на расстоянии $l = 160$ м. Заяц бежит по прямой с постоянной скоростью $v_1 = 6$ м/с. Скорость лисы равна $v_2 = 10$ м/с и в каждый момент направлена по прямой, соединяющей лису и зайца. В начальный момент скорость зайца перпендикулярна этой прямой. Где произойдет встреча? На сколько секунд раньше она могла бы произойти, если бы лиса была умнее?

Хоанг Куи, Вьетнам

Ф1344*. В теплоизолированном цилиндрическом сосуде под поршнем находится сильно разреженный гелий при температуре $T_0 = 100$ К. Поршень очень медленно отодвигают на некоторое расстояние, после чего в сосуде устанавливается температура $T_1 = 99$ К. Какая температура установится в сосуде, если поршень передвинуть очень быстро? Что такое «очень быстро» в этом случае? Сделайте оценку такой скорости передвижения поршня, при которой изменение температуры составит $\Delta T = 0{,}5$ К.

З. Рафаилов

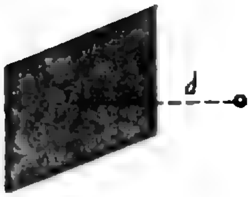


Рис. 2.

Ф1345. На расстоянии $d = 10$ см от точечного заряда находится равномерно заряженная квадратная пластинка размером 20×20 см, как показано на рисунке 2 (заряд расположен на продолжении нормали к центру пластинки). Во сколько раз изменится сила взаимодействия между пластинкой и зарядом, если расстояние d увеличить в 100 раз?

Д. Александров

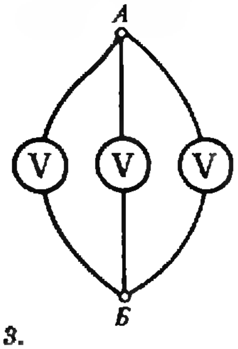


Рис. 3.

Ф1346. Три одинаковых вольтметра подключены длинными проводами к точкам A и Б, как показано на рисунке 3. Система находится в медленно изменяющемся магнитном поле. В некоторый момент показания крайних вольтметров составляют $U_1 = 0{,}35$ В и $U_3 = 0{,}1$ В. Что показывает средний вольтметр в это время?

Д. Александров

Ф1347. Тонкая сферическая линза из стекла имеет толщину $d = 3$ мм и диаметр $D = 4$ см. Линзу плашмя положили на поверхность воды, наполовину погрузив в нее. При этом изображение Солнца, стоящего в зените, оказалось на глубине $h_1 = 17{,}5$ см. Когда линзу «притопили» другой стороной, получили $h_2 = 13{,}5$ см. Чему равны радиусы кривизны поверхностей линзы? Коэффициент преломления воды $n = 1{,}33$.

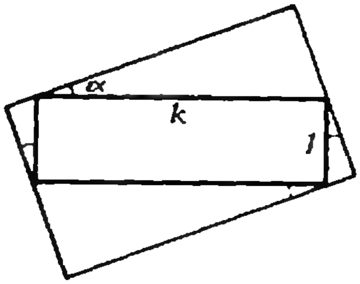
А. Зильберман

Решения задач

M1306 — M1309, Ф1323 — Ф1327

***M1306.** Назовем вытянутостью прямоугольника отношение большей стороны к меньшей. Докажите, что вытянутость прямоугольника B, вписанного в другой прямоугольник A (так, что вершины B лежат по одной на сторонах прямоугольника A), не меньше вытянутости A.*

Пусть α — угол между бо́льшими сторонами прямоугольников A и B (см. рисунок), стороны внутреннего прямоугольника B равны k и 1, причем $k > 1$, так что вытянутость B равна k. Тогда стороны внешнего прямоугольника A равны $k\cos\alpha+\sin\alpha$ и $\cos\alpha+k\sin\alpha$ (причем первая больше или равна второй, если $\cos\alpha \geqslant \sin\alpha$, т. е. $\alpha \leqslant \pi/4$, что мы и будем предполагать). При этом вытянутость B равна



$$\frac{k\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha+k\sin\alpha} \leqslant k,$$

поскольку $k^2\sin\alpha > \sin\alpha$.

Н. Васильев

***M1307.** Докажите, что при любом натуральном n число $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ имеет не менее n различных простых множителей.*

Воспользуемся следующим разложением на множители:

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1-x)(x^2+1+x).$$

Полагая $x=2^{2^{n-1}}$, получаем:

$$2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1=(2^{2^n}-2^{2^{n-1}}+1)(2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1).$$

Нетрудно доказать взаимную простоту чисел $2^{2^n}-2^{2^{n-1}}+1$ и $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ при любом натуральном n: если бы они имели общий (нечетный) множитель $q > 1$, то их разность $2^{2^{n-1}+1}$ должна была бы иметь тот же множитель.

Предполагая доказанным, что число $2^{2^n}+2^{2^{n-1}}+1$ имеет не менее n различных простых множителей, получаем по индукции, что $2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1$ имеет их не менее $n+1$.

Замечания. 1) При $n > 4$ число имеет не менее $(n+1)$ различных простых множителей, поскольку

$$2^{2^4}-2^{2^3}+1=97\cdot 673.$$

2) Из утверждения задачи вытекает бесконечность количества различных простых чисел.

Н. Васильев, В. Сендеров

М1308. *На плоскости даны три прямые. Найдите множество центров правильных треугольников, вершины которых лежат на данных прямых (по одной на каждой из трех прямых). Исследуйте все случаи взаимного расположения данных прямых.*

Сначала решим такую задачу на построение: «Даны две прямые b и c и точка A. Построить равносторонний треугольник, одна из вершин которого находится в точке A, а две другие — на прямых b и c (по одной на каждой из прямых)». Решение этой задачи несложно. Пусть такой треугольник ABC построен (рис. 1), тогда, если повернуть прямую b вокруг точки A на 60°, то точка B перейдет в точку C, следовательно, точка C может быть получена как точка пересечения прямой c с прямой b_1, возникшей после поворота прямой b на угол 60° вокруг точки A. После этого точка B находится мгновенно поворотом точки C на угол 60° в обратную сторону.

Если вращать прямую b в другую сторону вокруг точки A, то получим другую точку C_1 и новый треугольник AB_1C_1. Следует заметить, что в том случае, когда угол между прямыми b и c равен 60°, одна из повернутых прямых окажется параллельной прямой c и искомый треугольник оказывается единственным, за исключением того случая, когда точка A лежит на биссектрисе угла в 120° между прямыми b и c. В этом случае параллельные прямые совпадут и в качестве точки C можно брать любую точку на прямой c, т. е. требуемых треугольников будет бесконечно много.

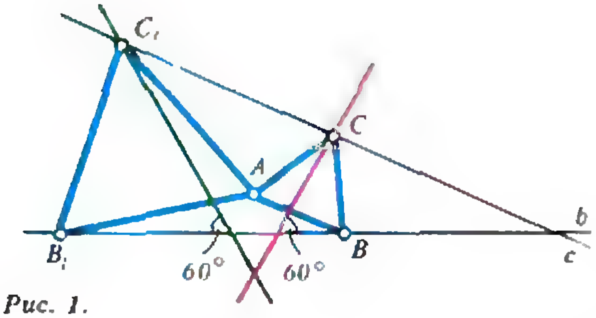


Рис. 1.

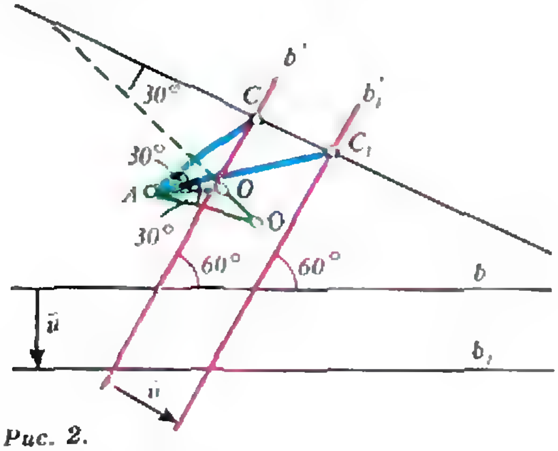


Рис. 2.

Теперь начнем двигать точку A вдоль некоторой прямой a и будем следить за тем, как перемещается при этом центр тяжести соответствующего равностороннего треугольника. Но сначала докажем лемму.

Лемма. *Пусть даны прямые b и c и точка A. Пусть, далее, ABC — равносторонний треугольник, вершина B которого лежит на прямой b, а вершина C — на прямой c. Точка O — центр треугольника ABC. Если параллельно передвинуть прямую b на вектор $\bar u$ в прямую b_1, то центр O_1 равностороннего треугольника AB_1C_1, у которого вершина B_1 лежит на прямой b_1, а вершина C_1 — на прямой c, может быть получен параллельным переносом точки O на вектор $\bar q$, направленный под углом 30° к прямой c и пропорциональный модулю вектора $\bar u$.*

Доказательство. Повернем прямые b и b_1 на 60° вокруг точки A (рис. 2). Они пересекут прямую c в точках C и C_1.

Отметим центры равносторонних треугольников — точки O и O_1 и заметим, что отрезок AO повернут относительно отрезка AC на угол 30° и в $\sqrt{3}$ меньше его; аналогично отрезок AO_1 повернут относительно отрезка AC_1 на 30° и также меньше его в $\sqrt{3}$ раза. Следовательно, и отрезок OO_1 повернут на 30° относительно отрезка CC_1 и в $\sqrt{3}$ раза меньше его. Но модуль вектора $\vec{w} = \overrightarrow{CC_1}$ пропорционален модулю вектора $\vec{v}$, на который сдвинуты повернутые прямые, а тот, в свою очередь, равен модулю вектора $\vec{u}$, а так как модуль вектора $\vec{q} = \overrightarrow{OO_1}$ пропорционален модулю вектора $\vec{w}$, то он пропорционален и модулю вектора $\vec{u}$, сам же вектор $\vec{q}$, как мы уже отметили, направлен под углом 30° к вектору $\vec{w}$, а следовательно, и к прямой c. Осталось заметить, что при этом и центр второго равностороннего треугольника передвинется на некоторый вектор $\vec{q}_1$, модуль которого также пропорционален модулю вектора $\vec{u}$ (но с другим коэффициентом пропорциональности), направленный под углом 30° к прямой c и под углом 120° к вектору $\vec{q}$.

Теперь мы готовы к тому, чтобы проследить перемещение центра равностороннего треугольника при движении точки A вдоль некоторой прямой a. Пусть A_1 — другая точка на прямой a. Проведем прямую через точки A и M — точку пересечения прямых b и c (рис. 3) и параллельную ей прямую через точку A_1. Отметим точку M_1 пересечения последней прямой с прямой c. Проведем еще прямую b_1 через точку M_1 параллельно прямой b. Обозначим через P точку пересечения прямых a и c, а через N и N_1 — точки пересечения прямой a с прямыми b и b_1. Не трудно увидеть, что смещение $\vec{u}$ прямой b в прямую b_1 пропорционально модулю вектора $\overrightarrow{AA_1}$. Кроме того, из подобия треугольников NPM и N_1PM_1 следует, что смещение центра равностороннего треугольника ABC в центр равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$

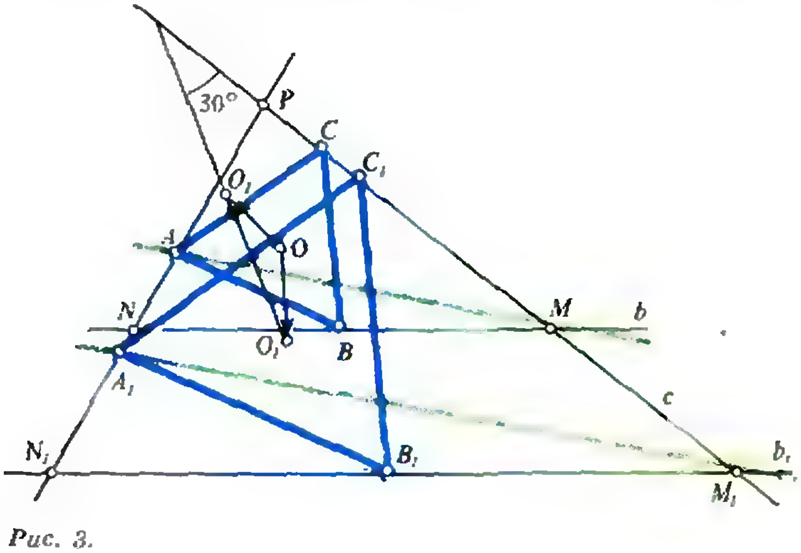


Рис. 3.

также пропорционально модулю вектора $\overrightarrow{AA_1}$ и направлено по прямой PO.

Теперь воспользуемся леммой. Если прямую b_1 параллельно перенести в прямую b, то точка O_1 перейдет в точку O_1', причем вектор $\overrightarrow{O_1O_1'}$ составляет угол 30° с прямой c, а его модуль пропорционален модулю вектора $\vec{u}$, а следовательно, и вектора $\overrightarrow{AA_1}$. Но точка O_1' и есть точка, в которую перейдет точка O, если вместо точки A взять точку A_1. Таким образом, общее смещение точки O в точку O_1' можно представить как $\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1O_1'}$. Вектор $\overrightarrow{OO_1}$ направлен по прямой PO, и его модуль пропорционален модулю вектора $\overrightarrow{AA_1}$, следовательно, $\overrightarrow{OO_1}=\overrightarrow{PO}\cdot k_1|\overrightarrow{AA_1}|$, аналогично вектор $\overrightarrow{O_1O_1'}$ сонаправлен с некоторым вектором $\vec{q}$, составляющим 30° с прямой c, и его модуль пропорционален модулю вектора $\overrightarrow{AA_1}$, т. е. $\overrightarrow{O_1O_1'}=\vec{q}\cdot k_2\cdot|\overrightarrow{AA_1}|$. В результате получаем, что вектор $\overrightarrow{OO_1}=|\overrightarrow{AA_1}|(k_1\cdot\overrightarrow{PO}+k_2\vec{q})$. Так как векторы $\overrightarrow{PO}$ и $\vec{q}$ постоянны, то перемещение точки O будет проходить по прямой, параллельной вектору $k_1\overrightarrow{PO}+k_2\vec{q}$. А это значит, что искомое множество точек — прямая. Если мы проведем те же рассуждения со вторым треугольником (рис. 1), то получим другую прямую.

Заметим, что эти прямые не пересекаются. Действительно, если бы существовала их общая точка X, то при описанном в лемме перемещении одной из прямых, она, с одной стороны, должна была переместиться на вектор $\vec{q}$, а с другой — на вектор $\vec{q}_1$, что невозможно, поскольку эти векторы имеют разные направления.

Итак, в случае если угол между прямыми не равен 60°, искомое множество точек есть пара параллельных прямых, правда, если все три прямые пересекаются в одной точке или параллельны, то эти прямые сольются в одну.

Остается рассмотреть случай, когда хотя бы один из углов между прямыми равен 60°. В этом случае, как уже было замечено, для точки A на прямой a можно построить только один искомый треугольник с вершиной в точке A. Поэтому, казалось бы, искомое множество будет состоять из одной прямой. (Заметим, что она в этом случае является биссектрисой угла в 60° между прямыми b и c). Однако на прямой a имеется особенная точка A^* — точка ее пересечения с биссектрисой угла в 120° между прямыми b и c. Для этой точки A^* помимо равностороннего треугольника из указанного семейства (заметим, что его центр лежит в точке P пересечения прямых b и c) оказывается еще бесконечно много равносторонних треугольников A^*BC. Действительно, как нетрудно проверить, любой угол в 60° с вершиной в точке A^* пересекает прямые b и c в точках B и C, образующих с точкой A^* равносторонний треугольник. Множество центров таких треугольников является серединным перпендикуляром к отрезку PA^* и, следовательно, будет прямой, параллельной уже найденной ранее.

Осталось рассмотреть случай, когда все углы между заданными прямыми равны по 60°. В этом случае все равносторонние треугольники с вершинами на этих прямых имеют один и тот же центр — центр треугольника, образованного заданными прямыми. Если к тому же все три прямые пересекаются в одной точке, то тогда любая точка A на прямой a обладает свойством точки A^*, а поэтому искомым множеством будет множество всех точек плоскости.

А. Савин

М1309. *На плоскости задан треугольник. Для произвольной точки M плоскости определяется 1-й «залп»: множество $H_1(M)$ из трех точек — середин отрезков, соединяющих M с вершинами треугольника, затем 2-й залп: множество $H_2(M)$ из 9 точек — середин отрезков, соединяющих точки $H_1(M)$ с вершинами треугольника, и так далее (k-й залп $H_k(M)$ состоит из 3^k точек — середин отрезков, соединяющих точки $H_{k-1}(M)$ с вершинами треугольника). Докажите, что для любого $\varepsilon>0$ для данного треугольника можно указать фигуру площади меньше ε такую, что для любой точки M найдется номер $k=k(M, \varepsilon)$, начиная с которого весь «салют» $H_k(M)$, $H_{k+1}(M)$, ... не будет выходить за пределы этой фигуры.*

Искомой фигурой может служить «дырявый ковер», состоящий из мелких треугольников, подобных данному и расположенных внутри него и в узкой полоске вокруг него. Покажем, как он строится.

Пусть O — центр окружности, вписанной в данный треугольник T, $T(d)$ — треугольник, гомотетичный T с коэффициентом $d+1$ и центром O, и T^* — некоторый фиксированный треугольник такого вида, содержащий T, скажем, $T^*=T(O, 1)$. Назовем объединение 3-х треугольников, гомотетичных T^* с коэффициентом $1/2$ и центрами в вершинах T (рис. 1), ковром 1-го ранга; объединение фигур, получающихся из ковра 1-го ранга гомотетиями с коэффициентом $1/2$ и центрами в вершинах T — объединение 9-ти треугольников, гомотетичных T^* с коэффициентом $1/4$ (рис. 2) — ковром 2-го ранга, и так далее: ковер n-го ранга — объединение фигур, получающихся из ковра $(n-1)$-го ранга гомотетиями с коэффициентом $1/2$ и центрами в вершинах T, т. е. объединение 3^n треугольников, гомотетичных T^* с коэффициентом $1/2^n$. Площадь ковра меньше $(3/4)^n$ площади треугольника T^* и при достаточно большом $n=n(\varepsilon)$ меньше ε.

Для каждой точки M можно выбрать $d>0$ так, что M покрывается треугольником $T(d)$. Заметим, что образ треугольника $T(d)$, при гомотетии с коэффициентом $1/2$ и центром в любой из вершин данного треугольника T — треугольник, лежащий в пределах треугольника $T(d/2)$ (рис. 3; точки, изображенные голубыми кружками — образы вершин внешнего треугольника $T(d)$ при таких гомотетиях с центрами в вершинах T). Итак, если M — любая точка треугольника $T(d)$, то все точки происходящего из нее первого залпа лежат в пределах треугольника $T(d/2)$;

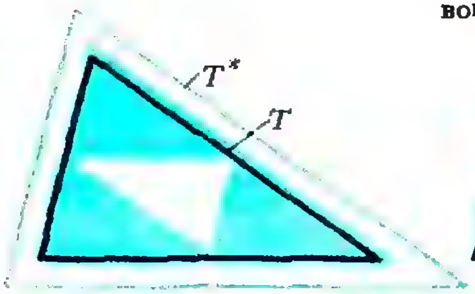


Рис. 1.

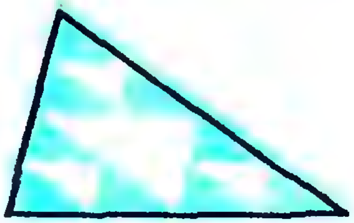


Рис. 2.

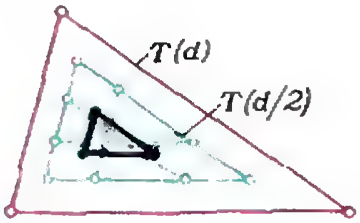


Рис. 3.

отсюда по индукции следует, что все точки салюта, начиная с m-го залпа $H_m(M)$, лежат в пределах треугольника $T(d/2^m)$. Поэтому для каждой точки M можно выбрать m так, что ее m-й салют попадает внутрь треугольника T^*.

Все происходящие в дальнейшем из нее залпы $H_{m+n}(M)$ также лежат внутри T^*. Более того, точки $(m+1)$-го залпа попадут внутрь ковра 1-го ранга; точки $(m+2)$-го залпа — внутрь ковра 2-го ранга и так далее; точки $(m+n)$-го попадут внутрь ковра n-го ранга. Ясно, что при достаточно большом $k=m(M)+n(\varepsilon)$ (зависящем от точки M и от ε) весь салют, начиная с k-го залпа, попадает в этот ковер площади меньшей ε.

А. Белов, Н. Васильев

Ф1323. *Тело немного сместили из положения неустойчивого равновесия, и оно поехало. При этом скорость удаления от начальной точки возрастает по закону $v(x)=A\sqrt{x}$, где x — расстояние до начальной точки, A — постоянный коэффициент. Через какое время тело окажется на расстоянии L?*

Обычно скорость задают как функцию времени t, а в нашем случае она задана как функция координаты x. Такой вид непривычен, но, может быть, это какое-то хорошо известное движение и получить ответ будет легко? Давайте попробуем.

Зададим очень малый промежуток времени Δt и найдем ускорение a тела:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{\Delta v}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Ясно, что первый множитель — это просто производная функции $v(x)=A\sqrt{x}$:

$$\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{1}{2}A\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{A}{2\sqrt{x}}.$$

Второй множитель — это скорость тела:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=v(x)=A\sqrt{x}.$$

Таким образом,

$$a=\frac{A}{2\sqrt{x}}A\sqrt{x}=\frac{A^2}{2}=\text{const}.$$

Это означает, что тело движется просто равноускоренно и окажется на расстоянии L от положения равновесия через время

$$t=\sqrt{\frac{2L}{a}}=\sqrt{\frac{2L}{A^2/2}}=\frac{2}{A}\sqrt{L}.$$

З. Рафаилов

Ф1324. *В кастрюлю-скороварку налили немного воды, закрыли герметично и поставили на огонь. К тому моменту, когда вся вода испарилась, температура кастрюли оказалась 115 °С, а давление внутри — 3 ат-*

В начальном состоянии можно пренебречь давлением паров воды и объемом, который она занимает, и считать, что воздух при атмосферном давлении $p_0=1$ атм и температуре $T_0=293$ К занимает весь объем кастрюли V. В конечном состоянии давление в кастрюле $3p_0$ складывается из давления воздуха при температуре $T=388$ К и давления паров воды, испарившейся к этому моменту полностью. Если обозначить ρ, v, M соответ-

мосферы. Какую часть объема вначале занимала вода? Начальная температура 20 °С.

ственно плотность, начальный объем и молярную массу воды ($\rho = 10^3$ кг/м^3, $M = 18$ г/моль), то для давления воздуха $p_в$ и давления пара $p_п$ в конечном состоянии можно записать:

$$p_в = p_0 T/T_0,\quad p_п = \rho v RT/(MV).$$

По условию

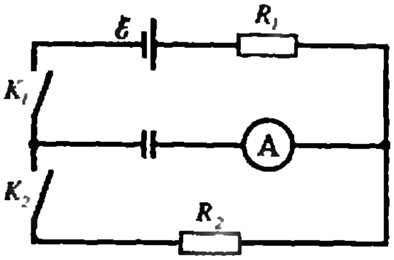
$$p_в + p_п = 3p_0.$$

Из этих формул окончательно находим отношение объема воды к объему кастрюли:

$$\frac{v}{V} = \frac{p_0 M (3 - T/T_0)}{\rho RT} \approx 10^{-3}.$$

А. Шеронов

Ф1325. *В схеме, изображенной на рисунке, ключи K_1 и K_2 в начальный момент разомкнуты. Через некоторое время после замыкания ключа K_1 ток через амперметр составляет $I = 1$ мкА. В этот момент замыкают ключ K_2. Каким станет ток через амперметр сразу после этого? ЭДС батареи $\mathscr{E} = 100$ В, сопротивления резисторов $R_1 = 50$ МОм, $R_2 = 100$ МОм. Конденсатор, батарею, амперметр считайте идеальными.*



В тот момент, когда ток через амперметр составляет $I = 1$ мкА, напряжение на конденсаторе равно

$$U = \mathscr{E} - IR_1 = 50 \text{ В}.$$

Сразу после замыкания ключа K_2 это напряжение не изменится (оно будет меняться постепенно). Не изменится сразу и ток через резистор R_1, который определяется разностью ЭДС батареи и напряжения на конденсаторе:

$$I_1 = I = 1 \text{ мкА}.$$

А вот ток через резистор R_2 сразу после замыкания ключа K_2 составит

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = 0{,}5 \text{ мкА}.$$

Таким образом, ток через амперметр будет равен

$$I' = I_1 - I_2 = 0{,}5 \text{ мкА}.$$

Заметим, что емкость конденсатора в решении не фигурирует. Важно только, чтобы она была достаточно большой.

В. Можаев

Примечание редакции. В условии задачи (см. «Квант», 1991, № 12) по вине редакции была допущена опечатка — приведено неправильное значение тока I. Подумайте, сильно ли изменится ответ, если в условии задать другой ток: $I = 0{,}2$ мкА.

Ф1326. *Радиолюбителям хорошо известна схема, приведенная на рисунке 1. Считая диоды и конденсаторы идеальными, определите показания высокоомного вольтметра при напряжении сети 220 В. Для чего может понадобиться такая схема?*

Для начала разберемся с простой схемой, содержащей диод D и конденсатор C (рис. 2). К точкам A и $Б$ подключим источник переменного напряжения $U = U_0 \cos \omega t$. Конденсатор C в этой схеме зарядится до напряжения U_0, после чего диод будет закрыт навсегда. Впрочем, если мы отнимем от конденсатора некоторый заряд (например, подключив параллельно ему резистор с большим сопротивлением R), то диод будет периодически открываться, восполняя уход заряда. Известно простое условие, при выполнении кото-

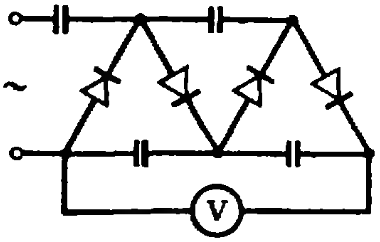


Рис. 1.

рого заряд конденсатора изменяется незначительно:

$$RC \gg T = 2\pi/\omega.$$

Рассмотренная схема — это обычный однополупериодный выпрямитель. Дополним его еще одной парой «конденсатор — диод» (рис. 3; обратите внимание — точки A и $Б$ по сравнению с рисунком 2 поменялись местами). Напряжение между точками A и B равно сумме входного напряжения $U = U_0 \cos \omega t$ и напряжения на конденсаторе C_1, которое равно U_0. Таким образом, диод D_2 окончательно закроется, когда конденсатор C_2 зарядится до максимального значения этого суммарного напряжения, т. е. до величины $2U_0$. Это произойдет не сразу — каждый раз, подзаряжаясь, конденсатор C_2 отнимает некоторый заряд у C_1, а диод D_1 восполняет потерю, но со временем порции становятся все меньше и меньше, так что $2U_0$ — это предельный результат. Если теперь параллельно C_2 подключить резистор R (чтобы использовать полученное напряжение $2U_0$), процесс подкачки зарядов в C_1 и C_2 станет продолжаться беспрерывно, а условие малости пульсаций напряжения $2U_0$ придется выполнять с бо́льшим запасом.

Перед тем как перейти к основной схеме, заметим, что добавление к переменному напряжению постоянного не изменит напряжения на C_2 — оно по-прежнему будет равно «размаху» приложенного к $AБ$ напряжения (в литературе используют ясный термин «напряжение от пика до пика») — убедитесь в этом самостоятельно.

Легко увидеть, что схема в условии задачи состоит из двух схем, изображенных на рисунке 3. На рисунке 4 мы нарисовали ее так, чтобы это стало очевидно. Ясно, что конденсатор C_2^* зарядится до напряжения $2U_0$, а полное напряжение между точками A и E^* составит $4U_0$ (конденсаторы C_1 и C_2 будем считать заряженными до U_0 и $2U_0$ соответственно, тогда переменное напряжение между точками A^* и $Б^*$ по-прежнему составит $U_0 \cos \omega t$). Вольтметр в нашем случае покажет

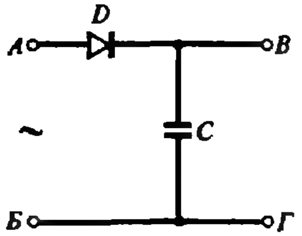


Рис. 2.

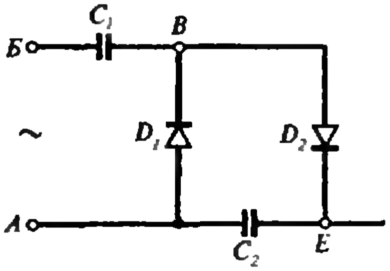


Рис. 3.

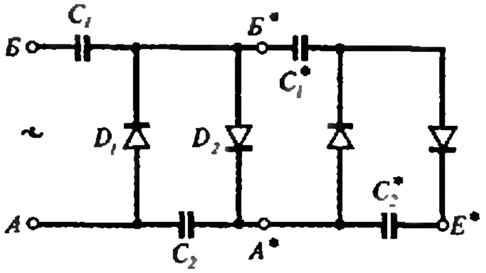


Рис. 4.

$$U = 220 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \text{ В} \approx 1240 \text{ В}.$$

Схема эта имеет специальное название — «выпрямитель с умножением напряжения». Ячеек типа изображенных на рисунке 3 можно включить и побольше — для получения более высокого коэффициента умножения. Кстати, несколько таких ячеек из конденсаторов и диодов, залитых эпоксидной смолой в монолитный блок, представляют собой дорогой и дефицитный «умножитель напряжения» для современных телевизоров (это не самая надежная деталь в телевизоре — именно поэтому ее название многие хорошо знают).

А нельзя ли обойтись обычным выпрямителем и не устраивать довольно сложную схему? В принципе, можно. Но обмотка трансформатора, дающего переменное напряжение, должна будет содержать в несколько раз большее количество витков, а конденсатор и диод нужно будет выбирать в расчете на то, что они должны «с запасом» выдерживать полное значение выпрямленного напряжения (а диод — даже в 2 раза больше). В схеме умножителя можно использовать конденсаторы и диоды попроще (и подешевле!) — ведь эту схему применяют именно для высоких (тысячи вольт) напряжений в телевизорах, счетчиках Гейгера и т. п.

А. Сашин

Ф1327. *При нормальном падении света на бипризму Френеля (рис. 1) пучки света, преломленные каждой из половинок бипризмы, интерферируют между собой. На каком максимальном расстоянии от бипризмы еще будет наблюдаться интерференционная картина? Расстояние между вершинами бипризмы $S=4$ см, показатель преломления материала бипризмы $n=1,4$, преломляющий угол $\alpha=0,001$ рад.*

Рассмотрим прохождение луча через призму (рис. 2). На ее задней грани будет происходить преломление луча по закону

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{1}{n}.$$

Отсюда получаем

$$\sin\beta=n\sin\alpha.$$

Но так как угол α очень мал, можно записать

$$\beta\approx n\alpha.$$

Из построения видно, что

$$\gamma=\beta-\alpha\approx(n-1)\,\alpha.$$

Интерференционная картина будет наблюдаться в области перекрытия преломленных пучков от обеих половинок бипризмы (рис. 3). Максимальное расстояние, на котором это еще происходит, равно

$$L=\frac{S/2}{\operatorname{tg}\gamma}\approx\frac{S}{2\gamma}\approx\frac{S}{2\,(n-1)\,\alpha}\approx 50\text{ м}.$$

В. Дерябкин

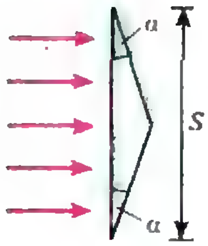


Рис. 1.

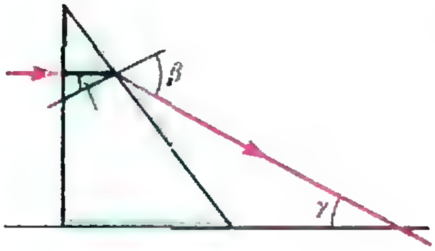


Рис. 2.

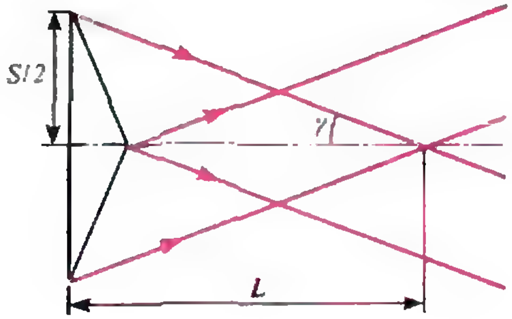


Рис. 3.

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1291—М1305, Ф1298—Ф1312, справились с задачами М1293, М1296—М1300, М1304, М1305. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

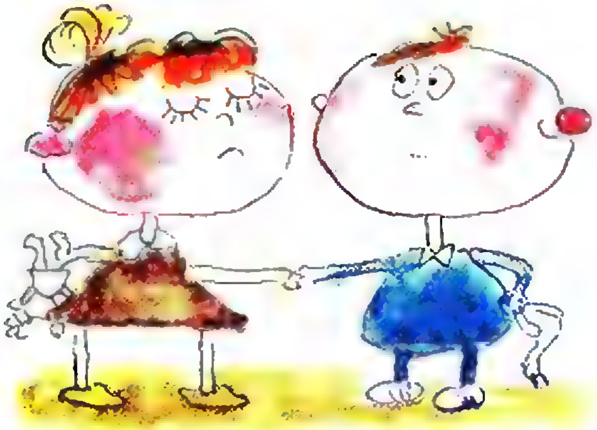
О. Авдеев (Днепропетровск) **02**; *Ю. Алексеенко* (Киев) **92**; *А. Алиев* (Баку) **92**; *Д. Антипов* (Киев) **94, 02**; *А. Ахмедов* (Баку) **91, 92, 94, 95, 01, 03**; *Ю. Белоус* (Нижний Тагил) **91, 92, 95**; *Г. Берколайко* (Воронеж) **94**; *А. Бириан* (Одесса) **95**; *А. Бородин* (Донецк) **91, 92, 94, 95, 01—03**; *В. Бринюк* (Донецк) **91, 92, 94, 95**; *О. Бурд* (Киев) **91, 92, 95, 02, 03**; *Б. Вайнер* (Киев) **91, 92, 94, 95, 01—03**; *А. Васильев* (п. Даниловка Киевской обл.) **92**; *И. Винарчук* (Киев) **92, 94, 95**; *И. Воробей* (Жуковский) **92, 95**; *О. Гайдай* (Львов) **91, 02, 03**; *С. Гетун* (Киев) **91, 92, 94, 95, 02, 03**; *И. Горбачев* (Бобруйск) **91, 92, 94, 95**; *Ю. Горенбургов* (Санкт-Петербург) **91, 95**; *П. Григорьев* (Самара) **95**; *Д. Дудко* (Киев) **91, 92, 01, 03**; *В. Замятин* (Киров) **92, 94, 02**; *С. Зиновьев* (Хврьков) **91, 92, 94, 95, 01**; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) **01—03**; *А. Ильяня* (Новгород) **94**; *С. Иоффе* (п. Черноголовка Московской обл.) **92, 94, 95, 01—03**; *В. Караман* (Старая Русса) **95**; *Т. Карнаух* (Киев) **91, 94, 01, 03**; *Р. Касымов* (Ангрен) **91**; *С. Киршнер* (Одесса) **92**; *С. Климов* (Ижевск) **91, 92, 95, 01—03**; *Н. Когабаев* (Усть-Каменогорск) **95, 02**; *П. Кожевников* (Калуга) **91, 92, 94, 95, 01, 03**; *А. Корниенко* (Днепропетровск) **92, 94, 95, 01, 03**; *С. Кузьмич* (Минск) **91, 92, 94, 95, 01—03**; *А. Кукушкин* (Москва) **91, 93, 95, 01, 03**; *Я. Лавренюк* (Киев) **91, 92, 94, 01—03**; *А. Лапунов* (Киров) **03**; *П. Левин* (Москва) **92, 02, 03**; *Н. Лисицын* (Ижевск) **92, 94, 95, 01—03**; *М. Магеррамов* (Баку) **03**; *Э. Магеррамов* (Баку) **92**; *Д. Макей* (Гродно) **91, 92, 95**; *К. Мальков* (Киров) **91, 03**; *Н. Мамедов* (Баку) **91, 95**; *М. Мокляк* (Кременчуг) **95**; *А. Монахов* (Глазов) **94**; *А. Мороз* (Днепропетровск) **94**; *А. Мотрунич* (Ужгород) **91, 95, 01**; *В. Мустафаев* (Баку) **03**; *А. Назарян* (Тбилиси) **94**; *Б. Насыпанный* (Гайворон) **91, 95, 02, 03**; *С. Одрибец* (Переяслав-Хмельницкий) **91, 94, 95, 01, 03**; *С. Павличков* (Евпатория) **91, 94, 95**; *Д. Панов* (Москва) **91, 92, 94, 02**; *Е. Перельман* (Санкт-Петербург) **94**; *А. Петросян* (Ереван) **91, 92, 94**; *В. Пиковский* (Киев) **91, 92, 94, 95, 02, 03**; *Е. Порошенко* (Алма-Ата) **94**; *Г. Сироткин* (Харьков) **91, 92, 95**; *А. Солодушкин* (Степногорск) **91, 94, 95, 01, 03**; *И. Сороко* (Минск) **91, 92**; *Д. Сухов* (Энергодар) **95**; *А. Таратин* (Северодвинск) **01**; *А. Теплинский* (Каменец-Подольский) **92, 94, 01, 03**; *М. Тройников* (Ижевск) **92**; *Б. Турешбаев* (Кзыл-Орда) **01**; *Е. Турчин* (Днепропетровск) **92, 95, 01, 03**; *А. Уханов* (Евпатория) **91, 01**; *К. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) **91, 92, 95, 01—03**; *Д. Хайкис* (Ижевск) **91, 92, 94, 95, 01—03**; *М. Хасин* (Донецк) **91, 92, 94, 02**; *К. Хвенкин* (Минск) **91, 92, 94, 95, 01—03**; *Ю. Ходзинский* (Киев) **91, 92, 94, 95, 01—03**; *А. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) **95, 03**; *В. Яновский* (Харьков) **91, 92, 94, 95, 01—03**.

Физика

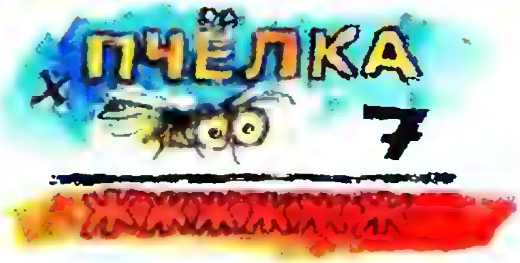
М. Аллаберганов (Ургенч) **08, 11**; *Д. Антипов* (Киев) **02, 04, 06, 09—11**; *Д. Апальков* (Харьков) **98, 02, 08, 11**; *Ю. Арбузов* (Москва) **08, 11**; *З. Аскоров* (Ургенч) **08, 11**; *Я. Бабкин* (Киев) **03, 08**; *И. Бейбалиев* (с. Чиликар Хивского р-на) **04**; *О. Белиловский* (Алма-Ата) **08—11**; *В. Боган* (Донецк) **08, 11**; *Д. Боднарь* (Винница) **08, 11**; *В. Борохов* (Керчь) **05, 10, 11**; *Т. Бретман* (п. Черноголовка Московской обл.) **98, 04**; *В. Васев* (Николаев) **08, 09, 11**; *А. Ветров* (Северодвинск) **03, 08, 09, 11**; *И. Воскобойник* (Киев) **98—12**; *А. Вылугин* (Донецк) **08, 11**; *Д. Гагасов* (Борисов) **99, 02**; *Д. Гайдунько* (Алма-Ата) **08, 11**; *А. Галанин* (Сергиев Посад) **98, 02, 03, 05—11**; *П. Гвоздев* (Котельнич) **98, 03, 04, 08, 11**; *А. Георгадзе* (Нальчик) **03—07**; *В. Глазков* (Коломна) **05—09, 11**; *В. Головач* (с. Волока Черновицкой обл.) **11**; *В. Горгадзе* (Нальчик) **98—00, 02, 08—11**; *П. Гребенев* (Кузнецовск) **98—00, 02—05, 08—11**; *А. Гревцев* (Москва) **98, 02—06, 09—11**; *А. Григорян* (Кумайри) **08, 10, 12**; *Т. Григорян* (Ереван) **03, 04**; *С. Гудзенко* (Павлодар) **03**; *Р. Гулгазарян* (Ереван) **03, 04, 08, 09, 11**; *Н. Гуляев* (Нижний Новгород) **98—12**; *Э. Девятов* (Тула) **98, 02, 04—06**; *С. Дибров* (Киев) **98, 00—06, 08—12**; *С. Дубровина* (Владимир) **08, 11**; *С. Дудий* (п. Комсомольский Харьковской обл.) **06, 08—12**; *Ю. Егоров* (Авдеевка) **98, 02—04, 06, 08, 09, 11**; *Г. Елганов* (Ургенч) **08, 10, 12**; *А. Ельников* (Донецк) **98—00, 02, 04—11**; *С. Жак* (Тернополь) **98—02, 04—12**; *В. Жукова* (Кузнецовск) **09, 11**; *М. Заболотный* (Винница) **00, 02—06, 08, 11, 12**; *С. Залюбовский* (Винница) **98, 00, 02—06, 08, 09, 11, 12**; *С. Занкович* (Николаев) **98, 00, 02, 04, 06, 08—12**; *З. Зарипов* (Хивинский р-н Хорезмской обл.) **08, 12**; *И. Зозуля* (Одесса) **00, 04, 06**; *Э. Ибрагимов* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) **08**; *С. Ивленков* (Тольятти) **08—11**; *Н. Ивченко* (Киев) **98, 00—02, 04—12**; *Ф. Игнатович* (Дубна) **04—07, 10**; *Ш. Исмаилов* (Ургенч) **08**; *О. Каргальцев* (Мичуринск) **04, 08**; *А. Касаткин* (Тольятти) **08, 11**; *Н. Keберле* (Запорожье) **08, 11**; *М. Климбовский* (Николаев) **98, 00, 02, 04, 06—12**; *К. Коваль* (Запорожье) **09, 11**; *А. Ковальский* (Казань) **11**; *К. Кожухов* (Кузнецовск) **08, 11**; *В. Козлов* (Старый Оскол) **98, 00, 02—05, 07—09, 11**; *А. Колесников* (Воронеж) **03, 04, 08, 10, 12**; *А. Коростелев* (Чебоксары) **98**; *А. Коткин* (п. Черноголовка Московской обл.) **04, 08**; *Д. Кример* (Брест) **04, 08, 11**; *Э. Крицун* (Богородчаны) **08, 11**; *И. Кузнецова* (Новороссийск) **04, 08, 11**; *Ю. Кулик* (Канев) **98, 99, 03, 04, 08, 09, 11**; *У. Курязов* (Шават) **03, 08, 10, 11**; *П. Левин* (Москва) **98, 03, 04, 08, 11**; *В. Лисов* (Минск) **08—11**; *В. Лобас* (Киев) **04**; *Э. Локшин* (п. Черноголовка Московской обл.) **04**; *С. Люб-*

(Окончание см. на с. 62)

Задачи

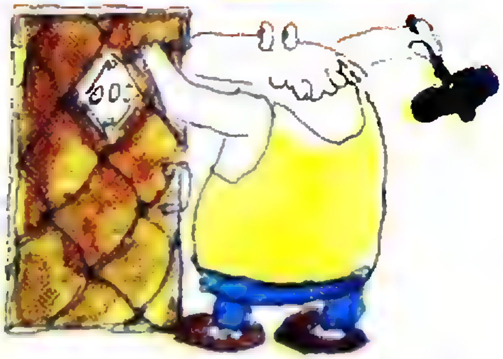


1. Перед началом уроков классный руководитель заметил, что каждый учащийся его класса поздоровался за руку с шестью девочками и восемью мальчиками. При этом количество рукопожатий между мальчиками и девочками было на пять меньше числа остальных рукопожатий. Сколько учеников в классе?

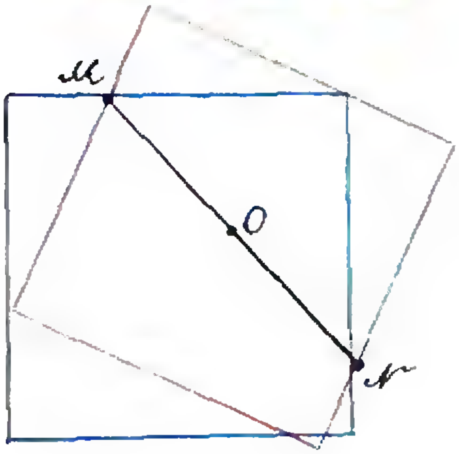


2. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

3. Числа 18 и 46 интересны тем, что их квадраты — 324 и 2116 — имеют ту же сумму цифр, что и сами числа. Докажите, что целых чисел с этим свойством бесконечно много даже среди чисел, не оканчивающихся нулем.



4. Жильцы всех квартир, выходящих на одну лестничную площадку, решили прикрепить к своим дверям новые номера квартир. Кооператив, в который они обратились с просьбой изготовить необходимые 7 цифр, объявил, что он берет за изготовление каждой цифры столько рублей, какова эта цифра (например, нули изготовляются бесплатно). Жильцы собрали по 3 рубля с каждой квартиры, и этого им хватило. Какие цифры были заказаны?



5. Два квадрата, синий и красный, расположены так, что две соседние вершины красного квадрата находятся на соседних сторонах синего, а одна из вершин синего квадрата лежит на стороне красного (см. рисунок). Докажите, что отрезок MN, соединяющий еще две общие точки периметров этих квадратов, проходит через центр красного квадрата.

Эти задачи нам предложили К. Кохась, С. Баженов, Л. Курляндчик, И. Акулич, В. Произволов.

ВЫСОКО ЛИ ПОГАС БОЛИД?

Кандидат физико-математических наук

В. ГЕТМАН

— Мама, мама! — Андрюша вбежал в дом с горящими глазами.— Я сейчас в небе болид видел! Пролетел прямо как огненный змей, а в конце вспыхнул и исчез!

— То-то я тебя докричаться не могла. Ты уроки-то все сделал? Десять часов уже...

— Сделал,— Андрей был явно разочарован тем, что маме совсем не интересно. Она это почувствовала и спросила:

— А болид — что это такое?

— Болид — это летящий по небу огненный шар...

Пока Андрюша рассказывает о нем своей маме, мы расскажем вам. Болидом называется довольно редкое явление — летящий по небу огненный шар (в отличие от шаровых молний болиды наблюдаются на значительных высотах — 10 километров и больше). Представьте себе, что в нашу атмосферу из космоса с огромной скоростью влетает осколок астероида или ядра кометы. За одну секунду он может пролететь 20 или 30 километров. Или даже больше. Двигаясь сквозь атмосферу, он разогревается до 2000 градусов, постепенно разрушаясь и испаряясь, и летит дальше уже окруженный громадным облаком светящегося газа. Вот это-то облако мы и видим. А когда осколок полностью разрушится, болид гаснет. Обычно это происходит через 3—4 секунды после его появления и сопровождается сильным взрывом. Но иногда бывает так, что осколок разрушается не полностью (если его размеры были достаточно велики), часть его падает на поверхность Земли и тогда его называют метеоритом.

— ...Интересно... А можно ли узнать, упадет метеорит или нет?

— Все зависит от высоты, на которой погас болид. Если это произойдет на высоте 40 или 60 километров, то метеорита нечего ждать, а если болид погас на высоте примерно 10—30 километров, то можно и поискать метеорит.

— Понятно. Но как же ты узнаешь, какая была высота?

— Определить-то ее можно, да один я не смогу. Это надо делать вдвоем — наблюдать одновременно из двух мест, расположенных друг от друга на расстоянии 20—30 километров...

...Прошло некоторое время, и Андрюша поехал в город на районную олимпиаду по математике. И вот там-то он и познакомился с Витей, таким же страстным любителем астрономии. Витя тоже страдал от отсутствия компаньона и единомышленника, а идея вместе определять высóты увиденных болидов показалась ему просто замечательной.

Прежде всего ребята сделали себе по угломеру для измерения зенитных углов наблюдаемых объектов. Это очень простое устройство. Посмотрите на рисунок 1. К дощечке *1* прибита рейка *2*. В верхней части рейки *2* просверлено отверстие, через которое про-

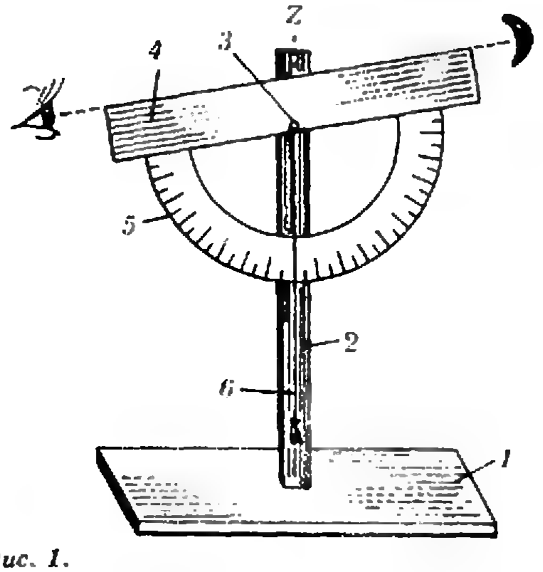


Рис. 1.

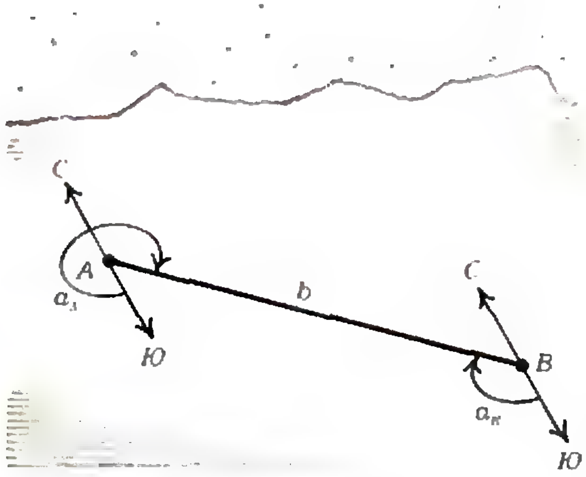


Рис. 2.

пущен болт 3. Болт нужен для того, чтобы прикрепить к рейке 2 еще одну рейку — 4, поменьше. Теперь укрепим на рейке 4 транспортир 5 так, как показано на рисунке. Его можно приклеить или прикрепить к рейке болтами. Теперь осталось подвесить отвес 6 на прочной нитке, и угломер готов. Укрепите его на ровной горизонтальной площадке и тщательно установите рейку 4 в горизонтальном положении. Если вы все сделали правильно, то нить отвеса будет проходить под транспортиром точно через деление 90°. Это означает, что рейка 2 направлена строго в зенит Z и угломер готов к работе.

Давайте проверим, как работает наш угломер. Измерим, например, зенитный угол Луны. Ослабьте гайку и направьте на Луну тот конец рейки 4, на котором оказалось деление транспортира 180° (см. рис. 1). Зафиксируйте положение рейки, закрутив гайку, и посмотрите, через какое деление на транспортире проходит нить отвеса. Предположим, что нить проходит через деление 80°. Значит, зенитный угол Луны $Z_{Л}=80^\circ$.

Вернемся к нашим друзьям. Андрюша живет в селе A, Витя живет в селе B (рис. 2). Отрезок $AB=b$ называется базисом их пунктов наблюдений. По компасу Андрюша определил азимут a_A на направление между селами A и B — т. е. угол между направлением на юг и отрезком AB (этот угол всегда отсчитывается по направлению от юга к западу). Витя, в свою очередь, определил азимут a_B. А затем ребята договорились вести наблюдения с 10 до 12 часов вечера каждый день с 12 по 25 июля.

И вот, вечером 15 июля в 11 часов 32 минуты ребята увидели на небе яркий болид, вспыхнувший в конце своего полета.

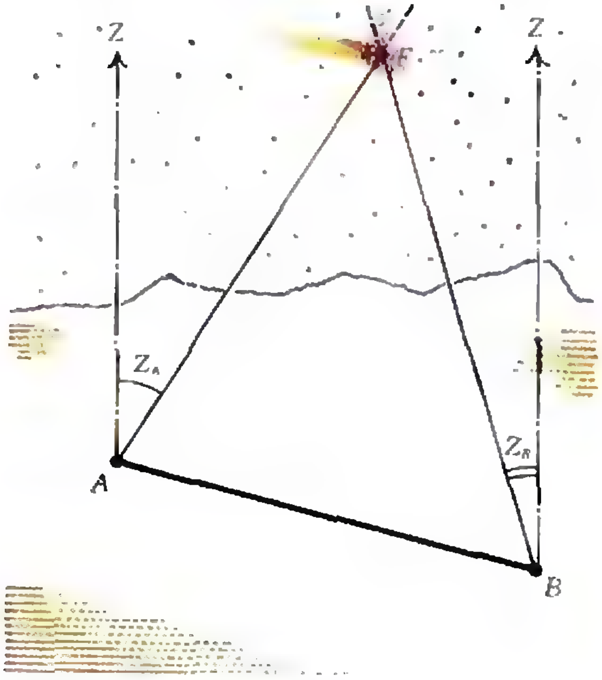


Рис. 3.

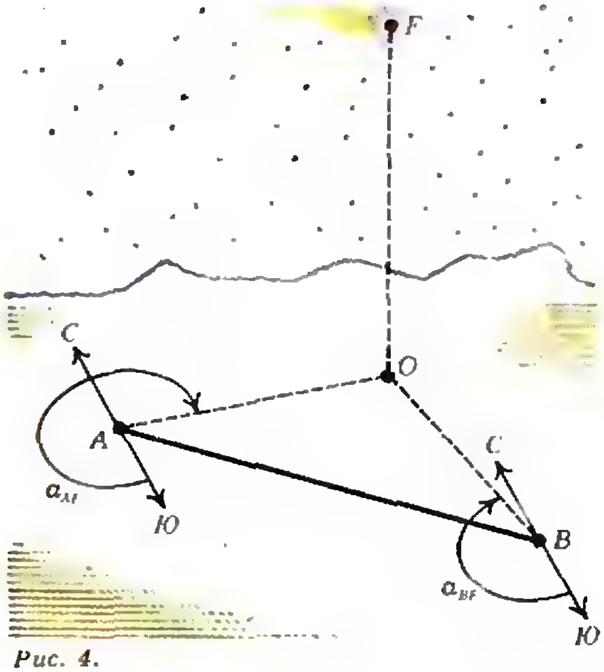


Рис. 4.

Конкурс «Математика 6—8»

Мы продолжаем конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач, по 3 в каждом номере журнала, начиная с девятого. Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 июня 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

22. Использовав каждую из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по одному разу, составьте такие два пятизначных числа, чтобы их произведение было максимальным.

Л. Курляндчик

23. Шахматную доску покрыли 32 костяшками домино, каждая из которых покрывает ровно две клетки. Восемь костяшек покрывают восемь клеток одной из диагоналей доски; при этом одни костяшки покрывают еще одну клетку выше диагонали, а другие — еще одну клетку ниже ее. Докажите, что при любом покрытии доски тех и других костяшек будет поровну.

В. Произволов

24. По поверхности стола перекатывают кубик, переворачивая его через ребра. Можно ли его перевернуть 12 раз так, чтобы он перевернулся по одному разу через каждое ребро и в результате оказался на прежнем месте?

С. Токарев

В каком же порядке надо проводить измерения, чтобы узнать высоту полета болида? Во-первых, надо запомнить место вспышки болида относительно положения звезд — на рисунке 3 оно обозначается буквой F (от английского слова *flare* — вспышка), затем измерить угломером зенитный угол вспышки и по компасу определить азимут точки F, мысленно опустив из нее перпендикуляр на землю. Не забудьте, что ребята проводят измерения каждый со своей точки наблюдения: Андрюша измерил зенитный угол Z_A и азимут a_{AF}, а Витя — зенитный угол Z_B и азимут a_{BF} (см. рис. 3 и 4).

В первый же выходной Витя приехал к Андрюше, и ребята по совместным измерениям построили схему азимутов, добавили данные по зенитным углам и получили чертеж, с помощью которого определить высоту вспышки болида теперь не составит труда (рис. 5).

Обозначим $\angle OAB = a_A - a_{AF} = \alpha$, $\angle OBA = a_{BF} - a_B = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Высоту вспышки FO далее будем называть h (от английского слова *height* — высота). Для треугольников OFA и BFO верны следующие соотношения:

$$h = FO = AO \operatorname{ctg} Z_A = BO \operatorname{ctg} Z_B. \quad (1)$$

Далее, для треугольника AOB —

$$\frac{AO}{\sin\beta} = \frac{BO}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\gamma}. \quad (2)$$

В этом треугольнике $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. Тогда из (1) и (2) следует

$$h = b\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\operatorname{ctg} Z_A \text{ или } h = b\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\operatorname{ctg} Z_B.$$

Именно таким способом мальчики определили, что вспышка болида произошла на высоте 51 километра.

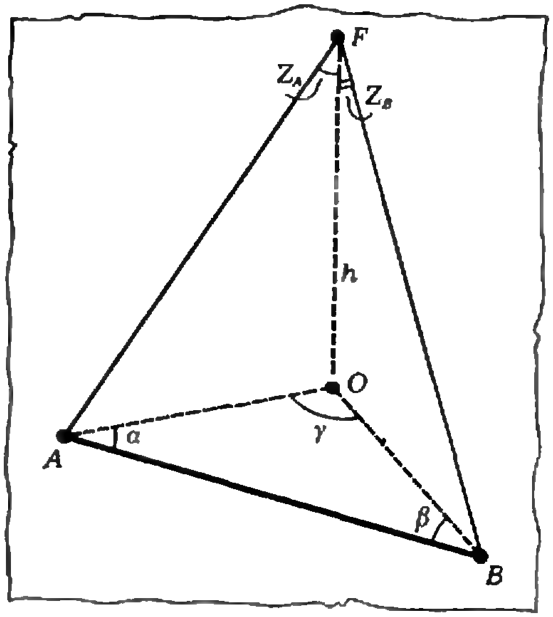


Рис. 5.

Качественные задачи по физике

«...и самым коричневейшим-наиперекоричневейшим был Эфиоп»

Эта цитата — из чудесной сказки Р. Киплинга «Откуда у Леопарда на шкуре пятна». В основе этой сказки лежит библейская поговорка о том, что не дано эфиопу изменить цвет кожи, а леопарду избавиться от пятен — или, другими словами,— чего не может быть, того не может быть никогда.

Правда, Киплинг остроумно и убедительно рассказал о том, как леопард приобрел пятна, а эфиоп изменил цвет кожи. Но, во-первых, это — сказка, а во-вторых, «это было давно, когда все были еще одного цвета и мир был еще таким молодым, что многие вещи не имели названия и на них приходилось показывать пальцами» (Р. Киплинг).

С тех пор прошло не одно столетие. Живой мир стал цветным, и многие вещи не только были названы (так что у культурных людей отпала необходимость показывать на них пальцами), но и получили строгие, «научнейшие-перенаучнейшие» определения. Так, приспособительная окраска у животных, которая помогает им скрываться и охотиться, названа мимикрией. А пигментом назвали темное вещество, которое выделяется в коже и является причиной того, что на коже появляются веснушки или загар.

А недавно автору попалась на глаза биофизическая работа, объясняющая, почему на теле леопарда — пятна, а на хвосте — полосы.

Почему же «самым коричневейшим-наиперекоричневейшим был Эфиоп»? Почему кожа у жителей экваториальных стран — черная? Почему (разумеется, с физической точки зрения) мы темнеем от загара?

На первый взгляд, ответ прост — пигмент (или темный цвет кожи) защищает от солнечных лучей. Но этот ответ кажущийся! Разве надевают для защиты от солнца черные панамки? Разве, скрываясь от жары, раскрывают черные солнечные зонтики? Разве существуют черные холодильники? Нет! Потому что черные предметы поглощают больше солнечных лучей и сильнее нагреваются.

«Конечно, всегда можно сказать: «Когда переходишь к живой природе, все возможно». Но если вы станете на такую точку зрения, вы никогда не поймете законов живой природы» (Р. Фейнман). А «исследование живой материи — самый интересный предмет исследования для живой материи, способной к исследованию» (Л. Блюменфельд).

А теперь о том,

Как дерево спасает от дождя?

(см. «Квант» № 7 за 1991 год)

Как показывает житейский опыт, ель (и не хуже, чем пальма) спасает от дождя. И вот каким образом.

Капля, упав на лист (или иголку), съезжает, как по канатной дороге, на самую удаленную от ствола часть листа — острие. С острия капля срывается и... падает на следующий лист, расположенный ниже. В дождливую погоду в лесу можно услышать «...множество различных оттенков стука дождевых капель, падающих с листа на листок» (Марсель Эме) и увидеть, как «...бежала с чашечки на чашечку грозой одуреиная влага» (Б. Пастернак).

Скатываясь с листа (иголки), капля удаляется от ствола на три-четыре сантимента. А встретив на пути десять, двадцать листьев (игл), она будет отброшена на значительное расстояние. Как будто просто прокатилась по крыше.

Вот и все.

Е. Гурович

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет прием учащихся в 10 и 11 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения и, прежде всего, на физический факультет МГУ.

Физический факультет МГУ готовит физиков-теоретиков и физиков-экспериментаторов по всем разделам современной физики и астрономии. Фундаментальное университетское образование позволяет выпускникам физического факультета быстро осваивать специфику любого научного или технического направления, успешно работать на стыке научных направлений, таких, например, как геофизика и биофизика, астрофизика и химическая физика.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 1 сентября* по адресу: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. *В письмо вложите два* экземпляра анкеты, заполненной на листах плотной бумаги размером 7×12 см по приведенному здесь образцу, и конверт с вашим адресом.

Решение о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября.

Принятым в ЗФШ в течение года высылаются контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенные задания оцениваются, рецензируются и отсылаются обратно. Учащиеся 10 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 11 класс. Успешно прошедшие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ (при поступлении на физический факультет удостоверения об окончании ЗФШ учитываются приемной комиссией).

Образец

Фамилия, имя, отчество	***Колесов Владимир Владимирович***
Класс ЗФШ	***10***
Профессия родителей	***мать — инженер, отец — врач***
Подробный домашний адрес	***240812, г. Калуга, ул. Пушкина, д. 24, кв. 26***
Номер и адрес школы	***школа № 777, ул. Садовая, д. 11***

Вступительное задание

Поступающим в 10 класс ЗФШ нужно решить задачи 1—4, поступающим в 11 класс — задачи 4—7.

1. Самолет летит горизонтально со скоростью $v=500$ м/с. Человек услышал звук от самолета через $\tau=20$ с после того, как самолет пролетел над ним. На какой высоте летит самолет? Скорость звука $v_{зв}=330$ м/с.

2. Шарик массой $M=0{,}1$ кг, падая без начальной скорости с высоты $H=2{,}5$ м, ударился о твердую горизонтальную плиту. При ударе импульс шарика изменился на $\Delta p=1{,}2$ кг·м/с. Какую часть энергии потерял шарик во время удара?

3. На горизонтальной платформе находится брусок; коэффициент трения между ними $\mu=0{,}1$. На какое расстояние относительно платформы сместится брусок через $\tau=2$ с после начала движения платформы в горизонтальном направлении с постоянным ускорением $a=1{,}96$ м/с^2?

4. Из большого резервуара через шланг с помощью насоса откачивают воду. Коэффициент полезного действия насоса $\eta=60\,\%$. Наконечник шланга имеет сечение $S=30$ см^2 и расположен на уровне воды в резервуаре. Струя выходит из наконечника под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту. Какую мощность потребляет насос, если струя достигает высоты $h=5$ м?

5. В некотором процессе давление и объем идеального газа связаны соотношением $pV^{1/2}=\mathrm{const}$. При температуре T_0 давление газа равно p_0. Какое давление будет при температуре T_1?

6. Три точечных заряда, попарно помещенные на расстоянии $L=10$ см друг от друга в вакууме, отталкиваются с силами, равными $F_1=5$ Н, $F_2=10$ Н, $F_3=12$ Н. Найдите величины зарядов.

7. На одной из пластин плоского конденсатора емкостью C_0 находится заряд $+q$, а на другой $+5q$. Определите разность потенциалов между пластинами.

Калейдоскоп „Кванта"

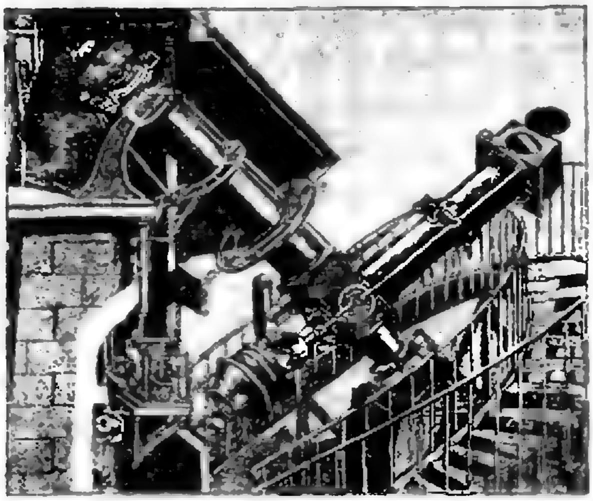
Астрономия, рассмотренная наиболее общим образом, есть великая проблема механики, которая состоит в определении небесных движений произвольного вида.

Лаплас

А так ли хорошо знакома вам

астрономия

?



Для тех, кто еще не перешел в последний школьный класс, этот вопрос покажется странным: ведь «официально» познакомиться с астрономией можно только за несколько месяцев до окончания школы. Однако вспомните курс механики, а также природоведения, физической географии, истории древнего мира и средних веков... И везде, заметьте, возникали и обсуждались вопросы астрономического содержания — о движении планет и наблюдении звезд, о навигации и затмениях, об устройстве и исследовании внеземного мира. Это, безусловно, свидетельствует о давней, с незапамятных времен, связи человека с Космосом, о постоянном интересе к тому, что знаменитый Кеплер назвал «небесной физикой».

Сегодня вы станете участниками всего лишь нескольких актов из грандиозного спектакля, ежедневно разыгрываемого Природой на небесной сцене. Уверены, что астрономический «Калейдоскоп» будет для вас не менее увлекательным, чем другие его выпуски.

Вопросы и задачи

1. На сколько угловых минут поворачивается Земля вокруг своей оси за одну минуту?

2. На какой угловой высоте находится Солнце, если длина тени от вертикального предмета равна его высоте?

3. В каких случаях высота светил над горизонтом Земли не меняется в течение суток?

4. Для наблюдателя, находящегося на географическом полюсе Земли, Солнце полгода расположено над горизонтом и полгода — под горизонтом. А Луна?

5. Почему терминатор Венеры — линия раздела дня и ночи — при наблюдении с Земли имеет форму дуги эллипса?

6. Можно ли в воде глубокого колодца увидеть отражение Солнца?

7. Луна, если ее наблюдать с Земли, восходит не менее двух минут. В течение какого времени восходит Земля для наблюдателя на Луне?

8. На Венере настолько густая облачность, что не видно небесных светил. Можно ли, находясь на Венере, убедиться в ее вращении вокруг своей оси и определить направление этого вращения?

9. Какой вид имеет кольцо Сатурна для наблюдателей, находящихся на экваторе и на полюсах этой планеты?

10. Если на Земле наблюдается полное лунное затмение, то что увидит космонавт, очутившийся в это время на Луне?

11. Почему полные солнечные затмения в северном полушарии Земли чаще бывают летом, а не зимой?

12. Освещенная заходящим Солнцем белая стена кажется ярче поверхности Луны, находящейся на той же высоте над горизонтом, что и Солнце. Означает ли это, что поверхность Луны состоит из темных пород?

13. Одинаковый ли вид имеет Солнце с Луны и с Земли?

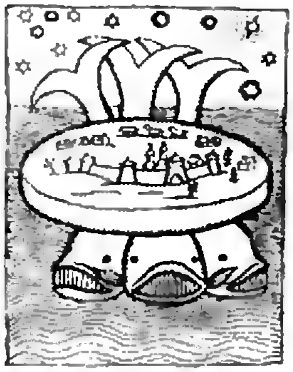
14. Изменится ли видимое расположение звезд на небе, если вдруг исчезнет земная атмосфера?

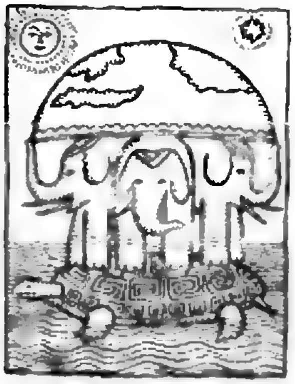
15. Какие наблюдения доказывают, что кометы не находятся в земной атмосфере, как это полагали в древности?

16. Почему с полуночи до рассвета наблюдается больше метеоров, чем с вечера до полуночи?

Микроопыт

Видимые размеры дисков Солнца и Луны у горизонта кажутся увеличенными по сравнению с их видимыми размерами в зените. Как можно экспериментально доказать, что это увеличение кажущееся?





Любопытно, что...

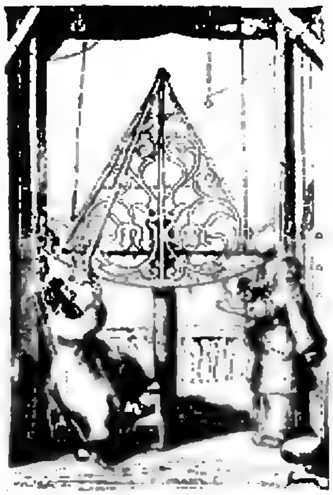
...одной из самых древних, известных истории обсерваторий, возможно, являются знаменитые развалины Стоунхенджа в Англии. Этому сооружению около четырех тысяч лет. А первая «настоящая» астрономическая обсерватория появилась в Европе лишь в XVI веке.

...детальное исследование неба стимулировалось и астрологией. К примеру, около двух с половиной тысяч лет назад жрецы Ассирии умели предсказывать даты затмений.

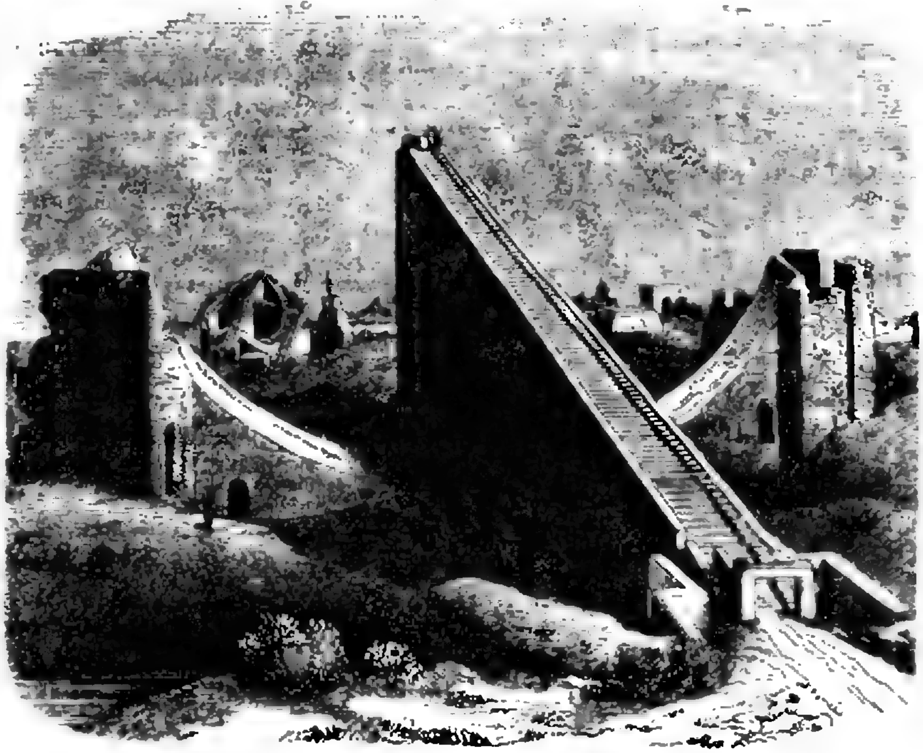
...имя изобретателя телескопа неизвестно. Мы знаем лишь одно: в 1604 году торговец стеклами для очков голландец Янссен «снял копию» с телескопа, принадлежащего некоему итальянцу.

...телескопы вовсе не дают увеличенного изображения звезд. Задача телескопа — увеличение светового потока, попадающего в глаз человека от наблюдаемого объекта. Поэтому и строят телескопы-гиганты с зеркалами диаметром в несколько метров.

...оптическое приборостроение стало одной из первых отраслей индустрии, где непосредственное участие физиков поставило кустарное эмпирическое мастерство на уровень совершенного производства.



...астрономические наблюдения подтверждают справедливость важнейших физических теорий. Например, искривление луча света в гравитационном поле Солнца, наблюдавшееся во время солнечного затмения, или смещение орбиты Меркурия, открытое в 1845 году, не могли быть объяснены классической наукой, но вполне «укладывались» в новые представления — общей теории относительности.



...первый полный астрономический учебник вышел в 1618 году — это была книга Кеплера «Сокращения коперниковой астрономии».

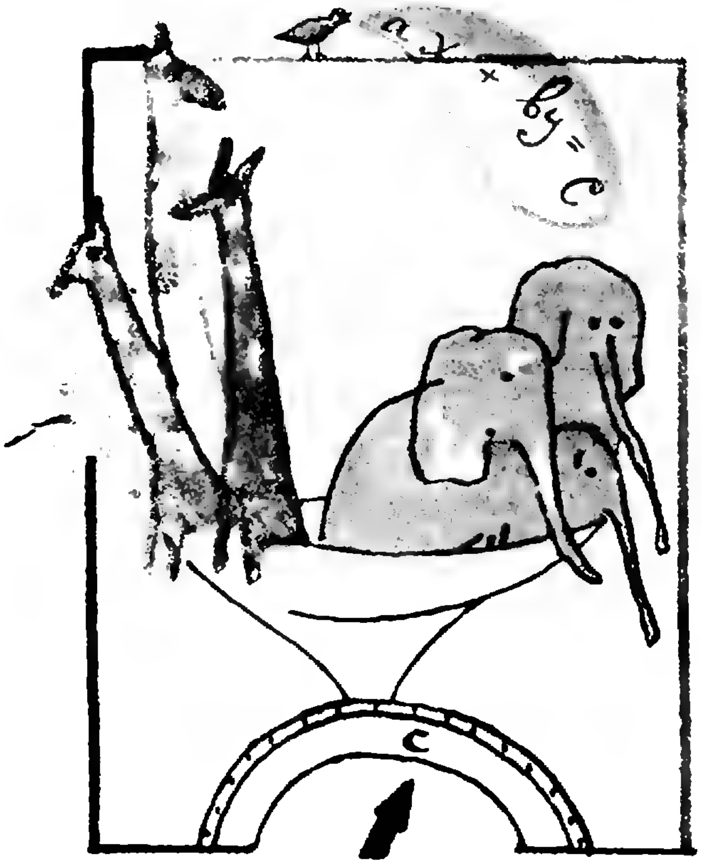
...знаменитый английский астроном Гершель вполне серьезно считал, что Солнце — обитаемо, его поверхность довольно холодна и только плавающие над ней облака очень горячи.

Что читать в «Кванте» по астрономии

(публикации последних лет)

1. «Космические иллюзии и миражи» — 1988, № 7, с. 15;
2. «Калейдоскоп «Кванта» — 1989, № 4, с. 40;
3. «Гиганты» — 1989, № 5, с. 50;
4. «Орбиты» — 1989, № 9, с. 60;
5. «Перспективы поиска обитаемых планет» — 1990, № 8, с. 58;
6. «Кто придумал «ночезрительную трубу»?» — 1990, № 9, с. 36;
7. «Ближайшие задачи в космосе» — 1991, № 2, с. 46;
8. «Формула рождения звезд» — 1991, № 11, с. 11.

Материал подготовил А. Леонович



Школа в „Кванте"

Неопределенные уравнения первой степени

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

Существование решений

Неопределенными уравнениями первой степени с двумя неизвестными называются уравнения вида

$$ax+by=c, \qquad (*)$$

где a, b и c — числа из некоторой данной совокупности (действительные, рациональные, целые и т. п.), причем a и b не равны нулю. Решениями неопределенного уравнения (1) называются любые пары чисел $(\alpha;\ \beta)$, принадлежащих данной совокупности, которые удовлетворяют уравнению.

Выясним, прежде всего, как выглядят решения этого уравнения в случае, когда a, b и c — действительные числа. Решим его относительно какого угодно неизвестного. Например, для y получим:

$$y=\frac{c-ax}{b}.$$

Это выражение показывает, что y однозначно зависит от x, само же x может быть совершенно произвольным. Следовательно, если a, b и c — действительные числа, то уравнение $(*)$ имеет бесконечное множество решений

$$\left(r;\ \frac{c-ar}{b}\right),$$

где r — произвольное действительное число.

Если a, b и c — рациональные числа, то естественно рассматривать рациональные решения уравнения $(*)$. Очевидно, что они задаются той же самой формулой $\left(r;\ \frac{c-ar}{b}\right)$, где на сей раз r — произвольное рациональное число.

Гораздо содержательнее и интереснее случай, когда коэффициенты a, b и c — целые числа, и требуется найти целые решения уравнения $(*)$. Задачу нахождения целых решений можно переформулировать следующим образом: из бесконечного множества действительных решений уравнения $(*)$ выделить только целые. Ясно, что такое ограничение значительно уменьшает число решений.

Прежде всего, выясним, всегда ли возможно решить неопределенное уравнение $(*)$ в целых числах. Ответом на этот вопрос служат следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если свободный член c неопределенного уравнения*

$$ax+by=c$$

не делится на наибольший общий делитель коэффициентов a и b, НОД

(a, b), то уравнение не имеет целых решений.

Доказательство. Пусть $d=$ НОД $(a; b)$, так что $a=md$, $b=nd$, где m и n — целые числа. Тогда наше уравнение принимает вид

$$mdx+ndy=c,$$

или

$$d(mx+ny)=c.$$

Допустив, что существуют целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению (*), мы получим, что коэффициент c делится на d. Полученное противоречие доказывает теорему.

Если все три коэффициента a, b и c имеют общий множитель, то по сокращении на него может оказаться или что коэффициенты a и b имеют общий множитель, или что a и b — взаимно просты. В первом случае, по предыдущей теореме, уравнение не имеет целых решений. Во втором случае мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Если коэффициенты a и b неопределенного уравнения*

$$ax+by=c$$

являются взаимно простыми числами, то уравнение имеет по крайней мере одно целое решение.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $a>0$. Решив уравнение относительно x, получим

$$x=\frac{c-by}{a}.$$

Докажем, прежде всего, что если в эту формулу вместо y подставлять все натуральные числа, меньшие a, т. е. числа 0, 1, 2, ..., $a-1$, и каждый раз совершать деление, то все a остатков будут различны. В самом деле, подставим вместо y какие-нибудь два числа m_1 и m_2, меньшие a (из множества 0, 1, 2, ..., $a-1$). В результате мы получим две дроби

$$\frac{c-bm_1}{a} \text{ и } \frac{c-bm_2}{a}.$$

Выполнив деление и обозначив неполные частные через q_1 и q_2, а остатки — через r_1, r_2, найдем

$$\frac{c-bm_1}{a}=q_1+\frac{r_1}{a},\quad \frac{c-bm_2}{a}=q_2+\frac{r_2}{a}.$$

Предположим, что остатки r_1 и r_2 равны. Тогда, вычитая второе равенство из первого, получим

$$\frac{c-bm_1}{a}-\frac{c-bm_2}{a}=q_1-q_2,$$

или

$$\frac{b(m_2-m_1)}{a}=q_1-q_2.$$

Так как q_1-q_2 — число целое, то и левая часть должна быть целым числом. Стало быть, $b(m_2-m_1)$ должно делиться на a. Но числа b и a — взаимно просты, следовательно, m_2-m_1 должно делиться на a, т. е. разность двух натуральных чисел, каждое из которых меньше a, должна делиться на a, что невозможно. Значит, r_1 не может равняться r_2, т. е. все остатки различны.

Итак, мы получили a различных натуральных остатков, меньших a. Но различные a натуральных чисел, не превосходящие a, суть не что иное, как числа 0, 1, 2, ..., $a-1$. Следовательно, среди остатков непременно найдется один и только один, равный нулю. Значение y, подстановка которого в выражение $(c-by)/a$ дает остаток 0, превращает $x=(c-by)/a$ в целое число. Итак, если a и b взаимно просты, то уравнение (*) действительно допускает целые решения, что и требовалось доказать.

Доказанная выше теорема 1 утверждает, что условие НОД $(a; b)=1$ является необходимым условием для разрешимости неопределенного уравнения (*) в целых числах. Теорема 2 утверждает, что это условие является достаточным.

Первый способ решения

Теорема 2 дает практическую возможность находить одну пару решений неопределенного уравнения в целых числах. Пусть, например, дано уравнение

$$7x+5y=232.$$

Решаем это уравнение относительно того из неизвестных, при котором находится наименьший (по модулю) коэффициент, т. е. в данном случае относительно y:

$$y=\frac{232-7x}{5}.$$

Подставляем в это выражение вместо x натуральные числа, меньшие 5, т. е. 0, 1, 2, 3, 4. В результате находим:

$$x=0, \quad y=\frac{232}{5}=46\,\frac{2}{5},$$

$$x=1, \quad y=\frac{232-7}{5}=45.$$

Итак, одно решение данного уравнения получено: $x=1$, $y=45$.

Этот прием решения неопределенного уравнения целесообразно употреблять в тех случаях, когда коэффициент при каком-либо из неизвестных не велик по модулю.

Коль скоро найдена одна пара целых решений, то легко найти и все такие решения.

Теорема 3. *Неопределенное уравнение*

$$ax+by=c,$$

в котором a и b являются взаимно простыми числами, допускает бесконечное множество целых решений. Все эти решения задаются формулами

$$x=\alpha+bt, \quad y=\beta-at,$$

где $(\alpha;\ \beta)$ — некоторое решение уравнения (1), а t — произвольное целое число.

Доказательство. Так как по условию пара $(\alpha;\ \beta)$ является решением нашего уравнения, то подстановка $x=\alpha$, $y=\beta$ в уравнение дает тождество

$$a\alpha+b\beta=c.$$

Вычитая это тождество из нашего уравнения, имеем

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)=0,$$

откуда

$$x=\alpha+\frac{b(\beta-y)}{a}.$$

Чтобы x было целым числом, необходимо, чтобы $b(\beta-y)/a$ было целым, т. е. чтобы произведение $b(\beta-y)$ делилось на a без остатка. Но a и b — взаимно простые числа; стало быть, для этого необходимо, чтобы $(\beta-y)/a$ равнялось некоторому целому числу. Обозначим это целое число через t:

$$\frac{\beta-y}{a}=t.$$

Тогда $y=\beta-at$ и, следовательно,

$$x=\alpha+\frac{b(\beta-y)}{a}=\alpha+bt,$$

что и требовалось доказать.

Второй способ решения

Сперва рассмотрим один частный случай. Допустим, что коэффициент при одном из неизвестных равняется единице. Например, рассмотрим уравнение

$$x+by=c.$$

Отсюда

$$x=c-by.$$

Положив $y=0$, получим для x целое значение $x=c$. Следовательно, одна пара решений уравнения имеет вид $x=c$, $y=0$. Все же целые решения задаются формулами

$$x=c+bt, \quad y=-t.$$

Аналогично, если коэффициент при y равен 1, то все целые решения задаются формулами

$$x=t, \quad y=c-at.$$

На этом замечании основан общий способ решения неопределенного уравнения в целых числах. В самом деле, если бы нам удалось привести уравнение $ax+by=c$ к уравнению, в котором один из коэффициентов равен единице, то задача была бы решена. Но когда a и b — взаимно простые числа, такое приведение всегда возможно. Пусть, например, дано уравнение

$$17x-37y=55.$$

Решаем это уравнение относительно неизвестного, имеющего меньший по модулю коэффициент, в данном случае, относительно x. Получаем

$$x=\frac{55+37y}{17}. \qquad (1)$$

Выделив целую часть, найдем, что

$$x=3+2y+\frac{4+3y}{17}.$$

Полученное для x выражение состоит из двух частей: $3+2y$, которая будет целой при всяком целом y, и дробной $(4+3y)/17$. Для того чтобы x было целым числом, необходимо выбрать такие целые значения y, при которых $(4+3y)/17$ является целым числом. Положим

$$\frac{4+3y}{17}=t,$$

где t — произвольное целое число. Из последнего равенства находим

$$3y-17t=-4. \qquad (2)$$

Решаем это уравнение относительно неизвестного, имеющего меньший по модулю коэффициент, т. е. относительно y:

$$y=\frac{17t-4}{3}.$$

Выделив целую часть, получим

$$y=5t-1+\frac{2t-1}{3}.$$

Для того чтобы y было целым числом, необходимо подобрать такие целые значения t, чтобы

$$\frac{2t-1}{3}=t_1,$$

где t_1 — произвольное целое число. Последнее равенство дает

$$2t-3t_1=1. \qquad (3)$$

Поступая так же, как прежде, находим

$$t=\frac{1+3t_1}{2}=t_1+\frac{1+t_1}{2}.$$

Чтобы число t было целым, необходимо выполнение следующего условия:

$$\frac{1+t_1}{2}=t_2,$$

где t_2 — произвольное целое число. Из полученного равенства вытекает, что

$$t_1-2t_2=-1. \qquad (4)$$

В этом уравнении коэффициент при одном из неизвестных равен единице, и поэтому мы можем его решить.

Итак, мы получили следующую серию уравнений:

$$17x-37y=55,$$
$$3y-17t=-4,$$
$$2t-3t_1=1,$$
$$t_1-2t_2=-1.$$

Из уравнения (4) получаем, что

$$t_1=2t_2-1.$$

Одно из решений этого уравнения имеет вид

$$t_1=-1, \quad t_2=0.$$

Подставляя полученное значение t_1 в уравнение (3), находим $t=-1$; подставляя это значение t в уравнение (2), получаем $y=-7$. После подстановки этого значения y в уравнение (1), мы видим, что $x=-12$. Итак,

$$x=-12, \quad y=-7$$

есть одно из решений заданного уравнения. Общая же формула решений на основании теоремы 3 будет иметь вид

$$x=-12-37t, \quad y=-7-17t,$$

где t — произвольное число.

Докажем, что описанный выше прием решения неопределенного уравнения всегда приводит к получению целых решений. В самом деле, мы получили следующую цепочку уравнений:

1. Данное уравнение

$$17x-37y=55,$$

или уравнение с неизвестными x и y и коэффициентами при них a и b.

2. Уравнение

$$3y-17t=-4,$$

и вообще уравнение с неизвестными x и t (если $|a|>|b|$) или y и t (если $|a|<|b|$). Коэффициентами его являются a (соответственно b) и остаток r_1 от деления a на b (соответственно b на a).

3. Уравнение

$$2t-3t_1=1,$$

т. е. уравнение с неизвестными t и t_1. Коэффициенты его: предыдущий остаток r_1 и остаток от деления a или b на r_1.

4. Уравнение

$$t_1-2t_2=-1,$$

т. е. уравнение с неизвестными t_1, t_2. Его коэффициенты: предыдущий остаток r_2 и остаток от деления r_1 на r_2. И так далее.

Отсюда видно, что процесс решения сводится к такой последовательности действий, которая имеет место при нахождении наибольшего общего делителя (НОД (a; b)) чисел a и b с помощью алгоритма Евклида. Но коэффициенты a и b взаимно просты, а потому наибольший общий делитель их равен единице. Следовательно, продолжая ряд указанных действий, мы обязательно дойдем до остатка, равного единице, который и будет коэффициентом в одном из получаемых уравнений. Тем самым, задача сводится к уже известному частному случаю.

Уравнения с большим числом неизвестных

Ограничимся рассмотрением случая уравнения с тремя неизвестными. Пусть

$$ax+by+cz=d \qquad (**)$$

такое уравнение, в котором a, b, c, d — целые числа, и ни одно из чисел a, b и c не равно нулю. Прежде всего необходимо, чтобы коэффициенты a, b и c не имели такого общего множителя, который не входил бы в d, так как иначе уравнение не может быть решено в целых числах. Если же у этих коэффициентов имеется общий множитель, содержащийся в d, то его удаляют сокращением. В результате могут представиться два случая:

1) из трех коэффициентов a, b и c по крайней мере два — взаимно просты, как, например, в уравнении

$$12x+11y+15z=141;$$

2) каждые два коэффициента имеют общий множитель, но все три взаимно просты; таково, например, уравнение $12x+15y+20z=181$, в котором НОД $(12;\ 15)=3$, НОД $(12;\ 20)=4$, НОД $(15;\ 20)=5$.

Первый случай. Пусть a и b — взаимно простые числа. Перенесем cz в правую часть и применим к уравнению

$$ax+by=d-cz$$

метод решения уравнения с двумя неизвестными, считая временно z известной величиной. В результате мы найдем

$$x=\alpha+bt, \quad y=\beta-at,$$

где α и β — *многочлены первой степени относительно* z. Придавая z и t произвольные целые значения, мы получим все целые решения уравнения (**).

Второй случай. Пусть теперь среди коэффициентов a, b и c нет ни одной пары взаимно простых. Пусть $h=$ $=$НОД (a; b) и a', b' — частные от деления a, b на h. Тогда уравнение (**) примет вид

$$ha'x+hb'y+cz=d,$$

откуда

$$a'x+b'y=\frac{d-cz}{h}.$$

Чтобы левая часть была целым числом, необходимо, чтобы $(d-cz)/h$ было равно некоторому целому числу t. Следовательно,

$$a'x+b'y=t, \qquad (5)$$

$$cz+ht=d. \qquad (6)$$

Но НОД $(a';\ b')=1$, а потому уравнение (5) имеет целые решения вида

$$x=\alpha+b't', \quad y=\beta-a't',$$

(Окончание см. на с. 55)

Лаборатория „Кванта"

Опыты с пластинкой Френеля

А. НАСРЕТДИНОВ

Из школьного курса физики вы знаете, что можно фокусировать свет при помощи линзы. Но, конечно, линза — не единственная такая возможность. Сегодня мы поговорим об одном достаточно интересном приборе — зонной пластинке Френеля (ее иногда называют просто зонной пластинкой или пластинкой Френеля), с помощью которой тоже можно фокусировать свет.

Что же представляет собой пластинка Френеля? Для того чтобы понять это, рассмотрим следующий пример. Пусть между точечным источником монохроматического света S и точкой наблюдения P поставлен непрозрачный экран, плоскость которого перпендикулярна оси SP (рис. 1). Найдем на экране геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до точек S и P отличается от расстояния SP на целое число длин полуволн. Если A — одна из искомых точек, то

$$SA+AP=SP+m\frac{\lambda}{2}, \text{ где } m \text{ — целое число.}$$

Из точек S и P как из центров опишем окружности, проходящие через точку A. Из рисунка 1 видно, что

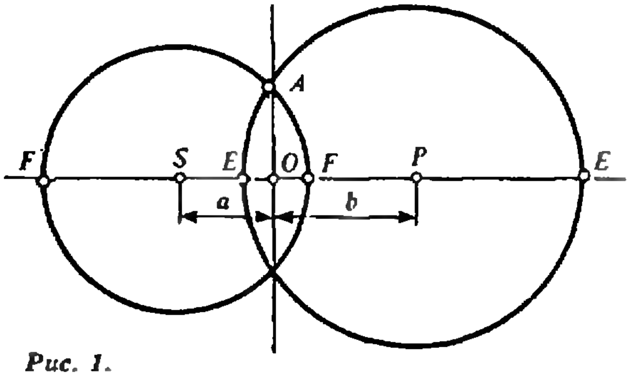


Рис. 1.

$$SA+AP=SP+EF, \text{ где } EF \ll SP,$$

$$OA^2=2aOF,$$

$$OA^2=2bEO.$$

Тогда

$$EF=EO+OF=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)OA^2.$$

Но, с другой стороны, $EF=m\lambda/2$, поэтому можно написать, что

$$OA=\sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda}=\text{const}\sqrt{m}, \qquad (1)$$

т. е. в плоскости отверстия искомым геометрическим местом точек является система концентрических окружностей с центром в точке O. Радиус первой окружности (для $m=1$) равен

$$R_1=\sqrt{\frac{ab}{a+b}\lambda}.$$

Радиусы последующих окружностей R_m увеличиваются в $\sqrt{m}$ раз.

Таким образом, мы разбили плоскость экрана на кольцевые зоны, построенные так, что расстояния от краев каждой зоны до точки P отличаются на $\lambda/2$. Эти зоны называются зонами Френеля.*)

Что произойдет, если в непрозрачном экране сделать отверстие радиусом первой зоны Френеля? Согласно принципу Гюйгенса — Френеля, когда волновой фронт от источника света достигнет краев отверстия, все точки волнового фронта, ограниченного отверстием, можно рассматривать как вторичные источники сферических волн. Так как разность хода между этими волнами в точке P не превышает $\lambda/2$, эти волны, интерферируя, усилят друг друга. Расчет показывает, что в сравнении со случаем отсутствия экрана интенсивность света в точке P возрастает в четыре раза! Это озна-

---

*) О зонах Френеля мы уже рассказывали в статье «Дифракция волн» в «Кванте» № 1 за 1992 год. *(Прим. ред.)*

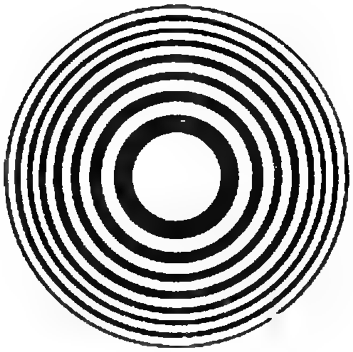


Рис. 2.

чает, что свет как бы сфокусировался в точке P.

Если на пути световой волны поставить непрозрачную пластинку, которая закрывает все четные (или все нечетные) зоны, то интенсивность света в точке P резко возрастает. Это происходит вследствие того, что колебания от открытых зон приходят в точку P синфазно и, интерферируя, усиливают друг друга. Такая пластинка и является зонной пластинкой Френеля. На рисунке 2, например, показана зонная пластинка, закрывающая нечетные зоны.

Можно сказать, что усиление интенсивности света зонной пластинкой аналогично фокусирующему действию линзы. Более того, расстояния от пластинки до источника S и «изображения» P связаны тем же соотношением, что и соответствующие величины для линзы. Это сразу станет видно, если мы перепишем выражение (1) в виде

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f},$$

где «фокусное расстояние» f определяется формулой

$$\frac{1}{f}=\frac{m\lambda}{R_m^2}=\frac{\lambda}{R_1^2}. \qquad (2)$$

Но вернемся к пластинке Френеля. Изготовить ее несложно: достаточно нарисовать ряд концентрических окружностей (не менее тридцати) с радиусами, задаваемыми формулой (1), в крупном масштабе на листе ватмана, закрасить тушью зоны через одну (в данном случае — все нечетные для того, чтобы изготовить негативы) и сфотографировать их с помощью обычного фотоаппарата с разных расстояний (лучше использовать мелкозернистую пленку). Полученные негативы и будут зонными пластинками. (Для опытов вам понадобятся пластинки с внешним диаметром 2—7 мм.)

Так как фокусное расстояние пластинки Френеля зависит от длины волны, определив его и зная размеры самой пластинки, вы легко сможете определить длину волны источника света.

Практически фокусное расстояние пластинки Френеля можно определить с помощью приспособления, изображенного на рисунке 3. Вам понадобятся: короткофокусный окуляр (от подзорной трубы, микроскопа и т. д.), кусок ватмана или жести для изготовления телескопической системы из трубок 4. Также нужно изготовить держатель для пленки (пластинок Френеля). Его возможная конструкция показана на рисунке 4.

Вставьте в держатель один из негативов. Меняя длину системы трубок, добейтесь наилучшего изображения источника света. Измерьте значение c. Считая лампочку удаленным источником ($a \gg b$), для фокусного расстояния пластинки Френеля можно напи-

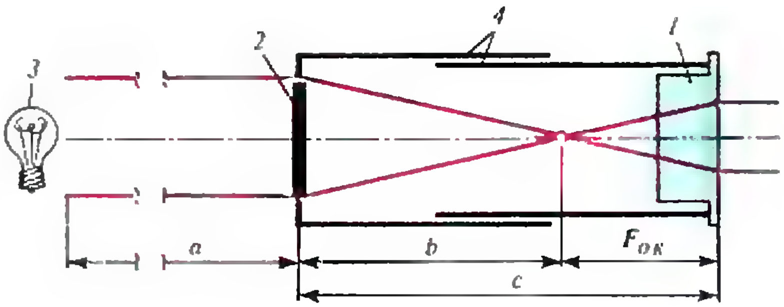


Рис. 3. 1 — окуляр, 2 — пластинка Френеля, 3 — источник света, 4 — телескопическая система трубок, a — расстояние от пластинки Френеля до источника света, b — расстояние от пластинки Френеля до «изображения» источника света, $F_{ок}$ — фокусное расстояние окуляра, c — общая длина трубок.

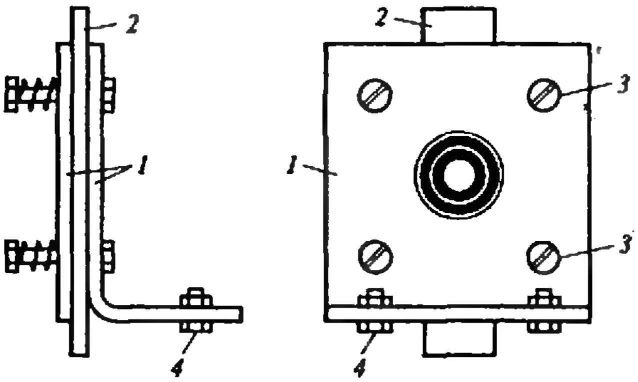


Рис. 4: 1 — металлические пластинки, 2 — пластинки Френеля на пленке (негативы), 3 — винты с пружинками, 4 — винты для крепления к телескопическому устройству.

сать следующие соотношения:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},\ \text{где}\ b=c-F_{\text{ок}},$$

или

$$f=\frac{a(c-F_{\text{ок}})}{a+c-F_{\text{ок}}}\approx c-F_{\text{ок}}.$$

Таким образом, измерив значение c и зная фокусное расстояние окуляра $F_{\text{ок}}$, вы получите фокусное расстояние пластинки Френеля.

Теперь осталось определить радиус первой зоны. К сожалению, измерить его с хорошей точностью непосредственно на негативе не удастся, поэтому пересчитайте его значение, измерив радиус внешней зоны и воспользовавшись формулой (1).

Итак, зная все необходимые величины, по формуле (2) вы найдете длину волны источника света. Проведя же аналогичные измерения для нескольких пластинок, можно более точно определить значение длины волны.

Рекомендуемые размеры для проведения экспериментов:

диаметр пластинок Френеля	$D=2$—10 мм,
длины трубок 4	$c=10$—30 см,
фокусное расстояние окуляра	$F_{\text{ок}}=2$—5 мм,
расстояние до источника света	$a=0{,}5$—5 м.

Предлагаемый опыт можно существенно «украсить», поставив различные светофильтры или изменяя температуру накала нити, варьируя тем самым длину волны излучаемого лампочкой света. А воспользовавшись негативом, на котором зонная пластинка снята под некоторым углом к нормали, вы сможете наблюдать очень красивые картинки.

Школьникам и абитуриентам

КООПЕРАТИВ «УЧИТЕЛЬ»

предлагает методические пособия

ПО МАТЕМАТИКЕ (способы решения задач)

для 9 кл., для 11 кл., для поступающих в вузы:
№ 1 — алгебра и тригонометрия, № 2 — начала анализа и геометрия;

ПО ФИЗИКЕ

для 11 кл. и поступающих в вузы:
№ 1 — ответы на билеты, № 2 — способы решения задач;

а также пособия по следующим предметам:

ХИМИЯ, БИОЛОГИЯ, РУССКИЙ ЯЗЫК, СОЧИНЕНИЕ, ИНОСТРАННЫЕ ЯЗЫКИ.

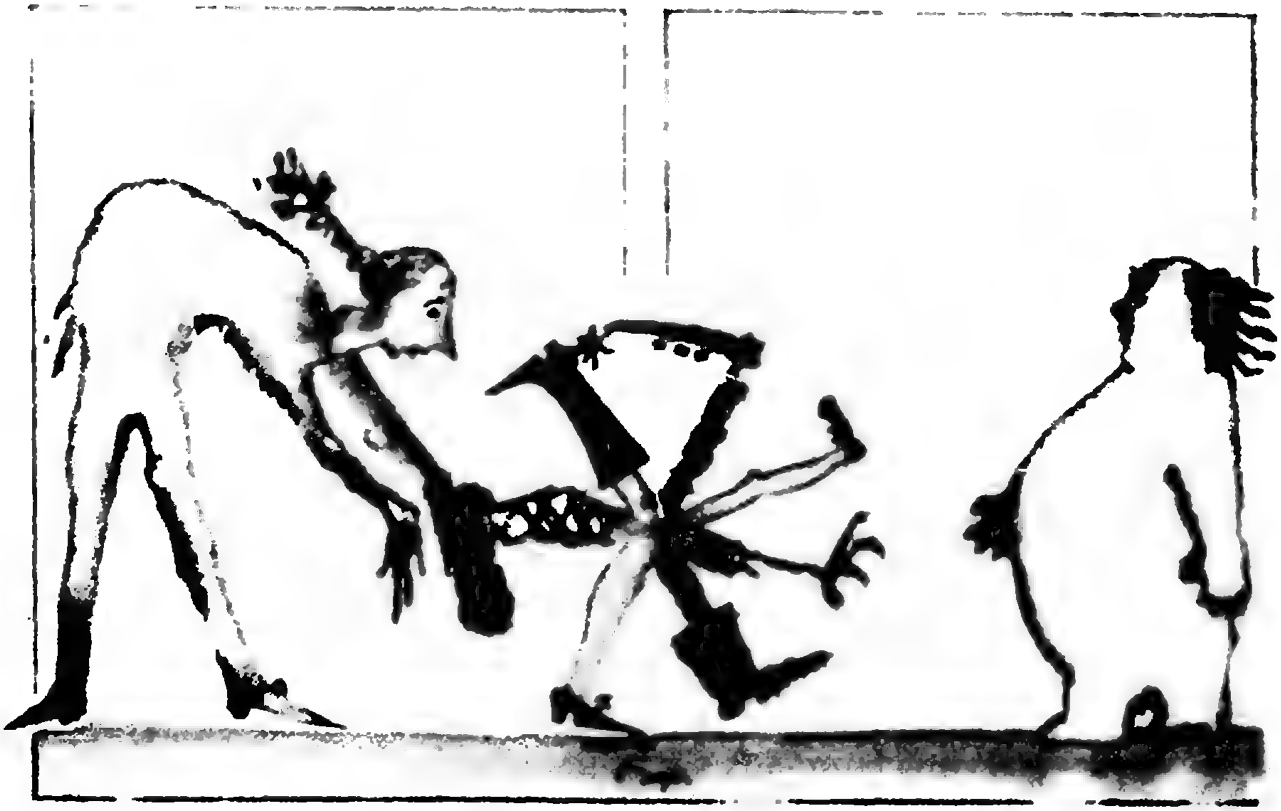
Заказы присылайте по адресу:
400067, Волгоград, п/о 67, а/я 48, кооператив «Учитель».

Оплата при получении на почте.

Школы и организации могут заказать пособия по безналичному расчету, прислав гарантийное письмо.

О цене пособий на момент получения заказа и остальную информацию вы можете узнать по вышеуказанному адресу
или по телефону в Волгограде: 42-24-00.

Пособия будут интересны и для учителей.



Практикум абитуриента

Вокруг колеса

Кандидат физико-математических наук
И. ГЕЛЬФГАТ,
Л. ГЕНДЕНШТЕЙН

— Что ты так пристально рассматриваешь след от своего велосипеда?

— Я только сейчас обратил внимание на то, какой четкий след оставляют шины.

— Что же тут удивительного?

— Я мчался во весь дух, а след такой четкий, будто колесо покоилось!

— Ты хочешь сказать: нижняя точка колеса покоилась. Но ведь это совершенно понятно.

— Почему?

— Ты отталкиваешься колесом, точнее нижней его точкой, от дороги примерно так же, как подошвами во время ходьбы.

— Это ты хорошо придумал. А я, кажется, начал понимать, как можно связать поступательное и вращательное движения колеса... Скорости этих движений равны друг другу.

— Как же ты это увидел? Ведь проследить за этими двумя движениями не так просто.

— Но и не так трудно. Посмотри: каждая точка колеса, благодаря поступательному движению, имеет одну и ту же скорость $\vec{v}_{\text{п}}$, а скорость вращения $\vec{v}_{\text{в}}$ для каждой точки своя и направлена всюду по касательной к ободу колеса (рис. 1).

— Понял! В нижней точке эти скорости направлены как раз в противоположные стороны, а поскольку нижняя точка покоится, поступательная и вращательная скорости должны быть равны по модулю.

— Конечно. Видишь, как это просто? А полная скорость верхней точки вдвое больше скорости поступательного движения.

— Теперь понятно, почему верхние спицы при езде мелькают намного быстрее нижних. Мне это всегда казалось удивительным.

— Постой, но ведь если точка A неподвижна, то вполне можно считать, что именно там проходит некая неподвижная ось, вокруг которой колесо и вращается.

— Тогда скорости (полные) всех точек колеса прямо пропорциональны их расстоянию от этой оси, т. е. от точки A.

— А ведь верно! Смотри: $v_B:v_C:v_O=2:\sqrt{2}:1=AB:AC:AO$. Здорово!

— Здорово-то здорово... Но что-то мне в этой воображаемой оси не нравится. Ведь она же не дает колесу двигаться вперед. И потом — выходит, что точка O вращается вокруг точки A со скоростью, равной $v_п$. Тогда она должна иметь направленное вниз, к точке A, центростремительное ускорение $a=v_п^2/AO=v_п^2/R$. Но ведь совершенно очевидно, что при равномерном качении колеса ускорение его центра отсутствует — он движется равномерно и прямолинейно.

— Может быть, дело в том, что точка A не все время неподвижна, а останавливается лишь на мгновение, соприкасаясь с дорогой, затем опять начинает двигаться.

— И при этом ее ускорение не равно нулю даже в момент остановки — оно равно $v_в^2/R$ и направлено к точке O.

— А ту ось, которую мы придумали, можно назвать мгновенной осью вращения. Ею очень удобно пользоваться, когда нужно определить скорости точек колеса (и вообще любого тела, движущегося непоступательно), но лучше не пробовать с ее помощью определять ускорения!

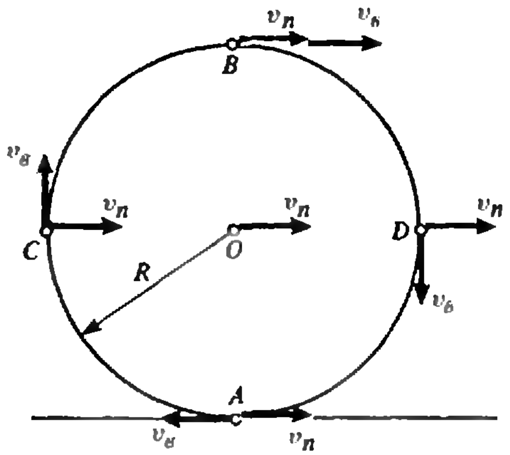


Рис. 1.

— Знаешь, я придумал еще одно применение такого подхода — разложение сложного движения на более простые. Я могу найти импульс катящегося колеса.

— Вот тебе бумага и карандаш, показывай.

— Бумага и карандаш ни к чему, все можно сделать устно. Скорость любой точки — это векторная сумма скоростей поступательного и вращательного движений.

Разобьем все наше колесо на маленькие кусочки и назовем их элементами. Пусть они будут настолько малыми, что каждый из них можно считать материальной точкой с массой Δm. Тогда импульс каждого элемента равен векторной сумме импульсов, соответствующих поступательному и вращательному движениям.

— Теперь понятно.

— А импульс всего колеса есть векторная сумма импульсов составляющих его элементов.

— Тоже согласен... и, кажется, понимаю, к чему ты ведешь. Импульс всего колеса будет равен сумме импульсов его поступательного и вращательного движений. Импульс поступательного движения найти совсем просто: он равен $mv_п$, где m — масса всего колеса, потому что при поступательном движении все точки движутся одинаково. А вот как ты определишь импульс, соответствующий вращательному движению? Ведь каждая точка движется по-своему.

— По-своему, да не совсем. Все части колеса составляют единое целое, и поэтому их движения должны быть согласованы друг с другом. И действительно, при вращении для любого элемента колеса найдется другой элемент той же массы, но движущийся с противоположно направленной скоростью.

— Конечно, колесо ведь симметрично относительно своего центра. Получается, что векторная сумма импульсов этих двух симметричных элементов в точности равна нулю. А значит, и суммарный импульс всех элементов при вращении равен нулю. Красиво получилось, бумага действительно не потребовалась. Итак, вращается колесо или не вращается — с точки зрения импульса это все равно. Импульс определяется только скоростью поступательного движения.

— Может быть, и с энергией дело обстоит так же просто, и энергия катящегося колеса равна $mv_{\text{п}}^2/2$, как было бы для чисто поступательного движения?

— Ну нет, с энергией этот фокус не пройдет — энергия чисто вращательного движения уже не равна нулю.

— Конечно, энергии диаметрально противоположных элементов уже не сокращают друг друга: они пропорциональны квадрату скорости и всегда положительны. Ничего не поделаешь: придется разбивать колесо на малые элементы, для каждого из них вводить свою скорость $\vec{u}_i = \vec{v}_{\text{п}} + \vec{v}_i$, где v_i — скорость вращательного движения (разная для разных элементов).

— Может быть, все это не так уж страшно. Попробуем записать выражение для полной энергии:

$$E = \Sigma E_i = \Sigma \frac{\Delta m u_i^2}{2} = \Sigma \frac{\Delta m}{2} (\vec{v}_{\text{п}} + \vec{v}_i)^2 =$$

$$= \Sigma \frac{\Delta m}{2} (v_{\text{п}}^2 + v_i^2 + 2\vec{v}_{\text{п}} \cdot \vec{v}_i).$$

— Мне все понятно, кроме последнего слагаемого в скобках.

— Это скалярное произведение векторов $\vec{v}_{\text{п}}$ и $\vec{v}_i$. Мы ведь возводили в квадрат вектор $(\vec{v}_{\text{п}} + \vec{v}_i)$, т. е. умножали его на самого себя.

— Да, да, конечно. Но тогда это слагаемое равно $v_{\text{п}} v_i \cos \alpha_i$, где α_i — угол между $\vec{v}_{\text{п}}$ и $\vec{v}_i$.

— Вот именно. Давай снова возьмем диаметрально противоположные элементы. Если для одного из них $\cos \alpha > 0$, то для другого $\cos \alpha < 0$, но имеет тот же самый модуль. А значит, сумма всех слагаемых, соответствующих последнему члену в скобках, тоже равна нулю, и для кинетической энергии катящегося колеса мы получим

$$E = \Sigma \frac{\Delta m}{2} (v_{\text{п}}^2 + v_i^2).$$

— Давай раскроем скобки и учтем, что $v_{\text{п}}$ для всех элементов одна и та же:

$$E = \Sigma \frac{\Delta m}{2} v_{\text{п}}^2 + \Sigma \frac{\Delta m}{2} v_i^2 =$$

$$= \frac{v_{\text{п}}^2}{2} \Sigma \Delta m + ? = \frac{m v_{\text{п}}^2}{2} + ?$$

— А что это за вопросительные знаки?

— Мне не совсем понятно, что означает $\Sigma \Delta m/2\, v_i^2$, если $\vec{v}_i$ — разные.

— Это кинетическая энергия чисто вращательного движения, т. е. сумма кинетических энергий всех элементов. Значит, полная кинетическая энергия катящегося колеса равна сумме кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения...

— Относительно центра колеса!

— Да, конечно. Итак,

$$E = E_{\text{п}} + E_{\text{в}}.$$

— Это неплохо, но все-таки окончательного выражения для энергии мы не получили — ведь мы не умеем вычислять $E_{\text{в}}$.

— Вот если бы у нас было не колесо, а обруч...

— А чем это было бы хорошо?

— У обруча все точки имеют одну и ту же (по абсолютной величине) скорость вращательного движения.

— И мало того, они движутся со скоростью, как раз равной скорости поступательного движения. Иначе возникало бы проскальзывание — нижняя точка не покоилась бы относительно дороги.

— Помню, помню. Но тогда кинетическая энергия катящегося обруча будет равна

$$E_{\text{к}} = \frac{m v_{\text{п}}^2}{2} + \frac{m v_{\text{п}}^2}{2} = m v_{\text{п}}^2.$$

— Красивый ответ. Значит, при качении кинетическая энергия вдвое больше, чем при поступательном движении обруча с той же скоростью. А напиши кто-нибудь формулу $E_{\text{к}} = mv^2$, особенно на экзамене...

— Да, ему не позавидуешь. Кстати, для велосипедного колеса наш результат вполне применим: ведь такое колесо — это почти обруч.

— Ну что ж, мы хорошо поработали с колесом. Надо признать — вот уж действительно великое изобретение. Насколько быстрее оно позволяет двигаться...

— А кстати, давай посмотрим, на сколько. Вот как раз дорога идет вниз. Я становлюсь на роликовую доску, а ты отпускаешь без толчка обруч. Кто быстрее? Смотри — я заметно обгоняю обруч!

— Но ты ведь тоже на «колесах».

— Неважно. Их роль в данном случае — лишь уменьшить трение практически до нуля. Это своего рода идеальная смазка (масса роликов ничтожна по сравнению с моей массой).

— Вот тебе и великое изобретение! Выходит, что колесо на наклонной плоскости разгоняется медленнее, чем тело, которое просто соскальзывает.

— Просто, но без трения.

— А какая, собственно, сила разгоняет колесо, катящееся с горы?

— Что же тут сложного? Конечно, сила тяжести (mg). Колесо же катится вниз.

— Хорошо, а какая сила раскручивает колесо? Ведь оно, разгоняясь, вращается все быстрее.

— Тоже сила тяжести: раз она разгоняет — она и раскручивает, это же понятно.

— Понятно? Не совсем. Дело в том, что разгонять сила тяжести может, а вот раскручивать — никак.

— Почему?

— Колесо может раскрутить только такая сила, момент которой относительно центра не равен нулю. А момент силы тяжести (см. рис. 2)...

— ...равен, конечно, нулю. Что же это тогда за таинственная сила, которая раскручивает колесо?

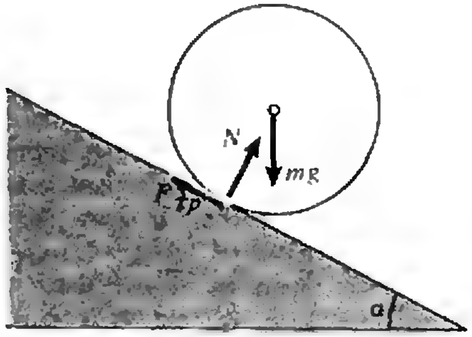


Рис. 2.

— Давай подумаем. Кроме Земли, наше колесо взаимодействует только с дорогой.

— Сила нормальной реакции (N) нам тоже не поможет: она направлена вдоль радиуса и поэтому ее момент относительно центра колеса тоже равен нулю.

— Но больше никаких сил нет!

— И все-таки, если уж колесо раскручивается, должна быть еще какая-то сила. Просто мы ее не видим.

— Вот если бы колесо не скатывалось, а соскальзывало...

— А чем это могло бы помочь?

— Если бы колесо соскальзывало, на него действовала бы еще сила трения ($F_{\text{тр}}$). Эта сила направлена по касательной, и уж ее-то момент нулю никак не равен. Поэтому сила трения и раскручивала бы колесо.

— Час от часу не легче! Если колесо соскальзывает, то ему незачем раскручиваться.

— Да, мы все получили наоборот: катящееся колесо раскручивается — однако не видно силы, которая его раскручивает; если же оно соскальзывает — такая сила есть, но нет раскручивания.

— Придумал! Есть подходящая сила — это тоже сила трения.

— Какое же может быть трение колеса о дорогу, если нижняя точка колеса покоится относительно дороги?

— Но между телами, которые покоятся друг относительно друга, тоже может действовать сила трения.

— Конечно! Сила трения покоя. Мы почему-то о ней совсем забыли.

— Теперь, кажется, все становится понятным: эта сила направлена по касательной назад, она и раскручивает колесо. Вопросов больше нет.

— У тебя нет.

— А у тебя?

— Сила трения покоя направлена назад — значит, она притормаживает колесо? Раскручивает и в то же время притормаживает? Но ведь скорости поступательного и вращательного движений должны быть все время одинаковы — иначе неизбежно проскальзывание. Как же может сила трения одну из них увеличивать, а другую уменьшать?

— Я, кажется, понял, в чем дело. На самом деле обе скорости — поступательного и вращательного движений — возрастают. Дело в том, что на поступательное движение влияют, кроме силы трения, сила тяжести и реакция опоры. Их совместное действие вызывает, конечно же, не торможение, а разгон колеса.

— А можно ли определить, чему равна сила трения?

— Не думаю, что это так просто. Ведь это сила трения покоя, а она может быть любой...

— Так уж и любой!

— Ну, конечно, не превышающей $F_{тр}=\mu N$, где μ — коэффициент трения; но уже в этих пределах — любой. Поэтому-то задачи, в которых присутствует сила трения покоя, обычно «с подвохом».

— Если бы мы могли найти ускорение колеса...

— Разумеется, тогда можно было бы применить второй закон Ньютона*): $m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр} \Rightarrow \vec{F}_{тр}=m\vec{a}-m\vec{g}-\vec{N}$.

— Но как узнать ускорение? Из того же второго закона Ньютона? Вряд ли...

— Давай попробуем обходной путь — применим закон сохранения механической энергии. Ведь действие силы трения покоя не приводит к переходу механической энергии во внутреннюю.

— При скатывании потенциальна энергия переходит в кинетическу Правда, это кинетическая энергия по ступательного и вращательного дви жений — значит, на кинетическу энергию поступательного движени остается меньше... ровно вдвое меньше.

— Ну, «ровно» — это для обруча а не для колеса.

— Не отвлекайся. Будем считат колесо обручем. Вперед!

— Если кинетическая энергия поступательного движения на том же пути при скатывании вдвое меньше, чем при соскальзывании без трения, то и ускорение центра тоже должно быть вдвое меньше.

— Откуда это следует?

— При равноускоренном движении без начальной скорости справедлива формула $v^2=2as$, т. е. на том же пути квадрат скорости пропорционален ускорению. Но ведь кинетическая энергия пропорциональна как раз квадрату скорости.

— Ускорение центра колеса без трения (при соскальзывании) было бы $g\sin\alpha$, значит, при качении $a=(g\sin\alpha)/2$.

— И мы, наконец, получаем выражение для силы трения покоя при скатывании обруча (для этого нужно лишь записать уравнение второго закона Ньютона в проекциях на ось, параллельную наклонной плоскости):

$$F_{тр}=mg\sin\alpha-\frac{1}{2}mg\sin\alpha=\frac{1}{2}mg\sin\alpha.$$

— Ты считаешь, что мы решили задачу?

— Как, ты и теперь остался с какими-то вопросами? Мы же так исчерпывающе все разобрали, поняли, какие силы действуют на колесо; нашли даже выражение для неудобной силы трения покоя...

— Вот это выражение меня и не устраивает. Мне не нравится, что в него вообще не вошел коэффициент трения μ.

— Да, странно... Впрочем, так и

---

*) Для особо придирчивых читателей уточним, что второй закон Ньютона применим к телу, движущемуся произвольно (не обязательно поступательно), если под $\vec{a}$ понимать ускорение центра масс.

должно быть. Ведь этот коэффициент определяет лишь максимальную силу трения покоя.

— Но у нас это ограничение на силу трения вообще не учитывается.

— Согласен, его надо учесть:

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{2} mg \sin\alpha \leqslant F_{\text{тр max}} = \mu N =$$

$$= \mu mg \cos\alpha, \text{ или } \operatorname{tg}\alpha \leqslant 2\mu.$$

— Что бы могло означать такое неравенство? Насколько я помню, для невращающегося тела (например, бруска) скольжение начинается при $\operatorname{tg}\alpha > \mu$. А у нас?

— А у нас скольжение колеса (обруча) начнется при большем угле, когда $\operatorname{tg}\alpha > 2\mu$.

— Неужели при бо́льших углах наклона колесо будет не скатываться, а скользить? Давай проверим: возьмем вместо колеса трубку, положим на стекло (чтобы уменьшить μ) и будем наклонять... Смотри!

— Трубка катится при любом угле.

— Чего же тогда сто́ит наше ограничение?

— А разве может трубка при движении вниз не крутиться вообще? Вспомни, мы с тобой установили, что если сила трения есть (а она ведь есть при любом угле наклона), то она будет обязательно раскручивать колесо или трубку.

— Значит... колесо будет скатываться, но проскальзывая?

— По-моему, да. И тогда силу трения покоя сменит сила трения скольжения, и...

— Слушай, давай на этом остановимся — по крайней мере, сегодня. Мы оба устали, а новые вопросы могут сыпаться из этого колеса еще долго — сомневаться в этом уже не приходится.

Неопределенные уравнения первой степени

(Начало см. на с. 42)

где α и β — *многочлены первой степени от t с целыми коэффициентами*. Заметим теперь, что НОД $(c; h) = 1$, поскольку h, будучи делителем чисел a и b, не делит c. Отсюда вытекает, что уравнение (6) имеет целые решения вида

$$z = \gamma + ht'', \quad t = \delta - ct''.$$

Подставляя это значение t в формулы для x и y, мы представим эти неизвестные в виде многочленов первой степени с целыми коэффициентами от t' и t''. Давая t' и t'' произвольные целые значения, мы получим все целые решения x, y и z исходного уравнения.

Задачи для самостоятельного решения

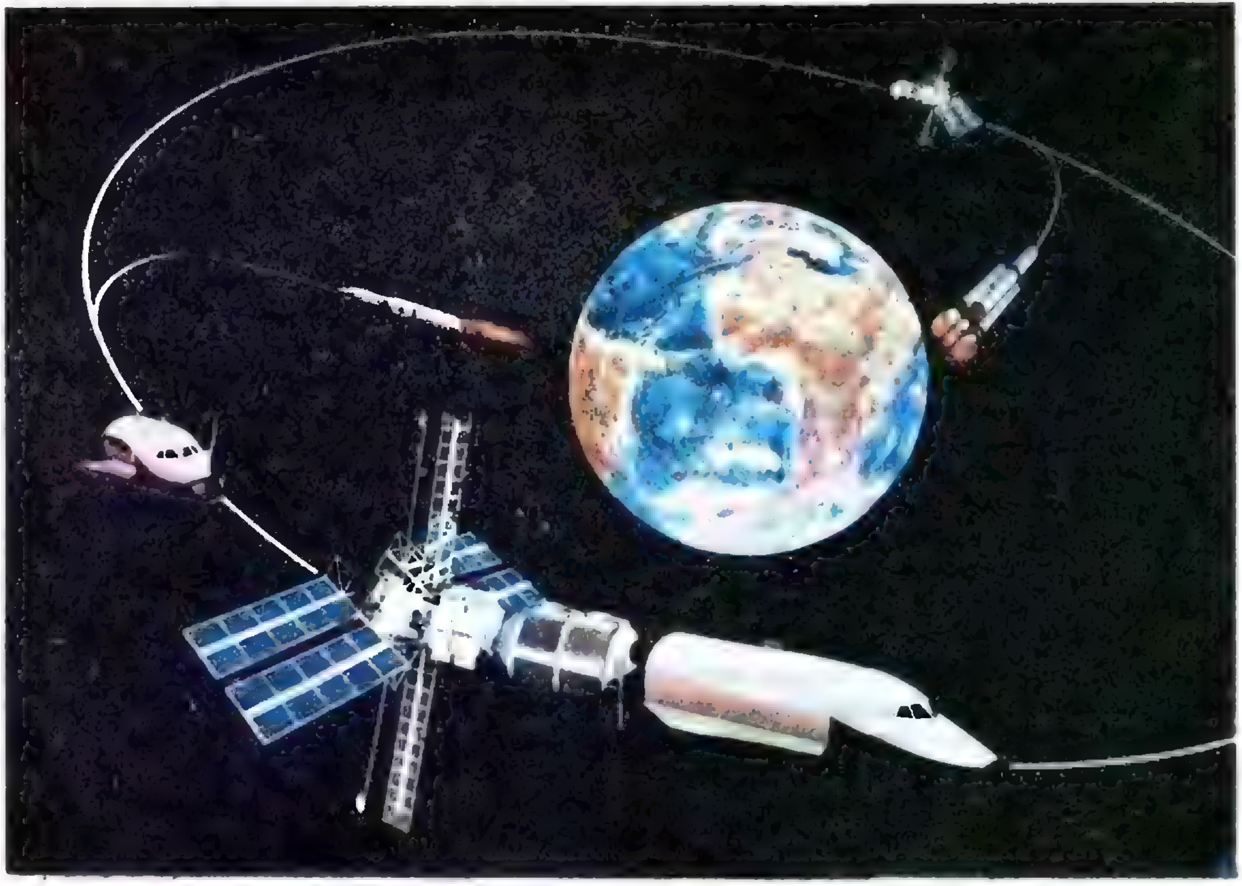
1. Решите задачу, сформулированную в начале статьи.

2. Решите в целых числах уравнения:

а) $5x + 8y = 29$;
б) $89x - 144y = 1$;
в) $16x + 4y = 1830$;
г) $7x + 4y + 9z = 89$;
д) $10x + 13y + 8z = 143$;
е) $(a^3 + a - 1)x + (a - a^4)y = (a^4 + 2a)(1 - a^3)$, где a — целое число;
ж) $(3x + y)(x + y) = p$, где p — данное простое число.

3. Найдите все двузначные числа, кратные произведению своих цифр.

4. Найдите трехзначное число, в 34 раза большее суммы своих цифр.



Р-значит ракета

По ступеням космических скоростей

В. ТУРОВ

> *Бывают даже такие дети*
> *(я их встречал),*
> *которым хочется знать,*
> *как выглядит черная дыра...*
>
> К. Саган

Мы живем на дне глубокого гравитационного «колодца». Изучением этого дна — поверхности Земного шара — заполнена вся история человечества. Но всегда находились отчаянные мечтатели — легенда об Икаре тому свидетельство,— которым хотелось шагнуть не за горизонт, а — ввысь. Трудами многочисленных ученых, начиная с безвестных халдейских звездочетов, через Птолемея и Коперника, Галилея и Кеплера, и, наконец, великого Ньютона, люди пришли к пониманию закономерностей движения в поле сил тяжести.

А. Штернфельд*), один из пионеров космонавтики, размышляя о возможности полета в космическом пространстве, ввел, независимо от К. Э. Циолковского, понятие первой космической скорости и предложил ее «в качестве единицы для сравнения космических скоростей, характеризующих данную планету». Далее он выстроил целую систему космических скоростей — своеобразную космическую лестницу. Давайте пройдем по нескольким ступеням этой лестницы.

Предварительно получим простое, но очень важное соотношение для потенциальной энергии тела в центрально-симметричном гравитационном поле, т. е. таком поле, в котором величина силы тяжести зависит только от расстояния до центра тяготения. Именно таким является поле всех космических тел, которые приближенно можно считать сферическими,— планет, звезд и т. п.

---

*) Об этом ученом рассказывалось в статье «Бросайся вниз, если хочешь взлететь повыше» («Квант», 1991, № 3).

Элементарная работа перемещения тела массой m в поле тяготения небесного тела массой M равна

$$dA=Fdr=-GMmdr/r^2,$$

где r — расстояние между центрами масс обоих тел, G — гравитационная постоянная. Изменение потенциальной энергии тела, когда его расстояние до центра тяготения меняется от r_1 до r_2, равно работе, совершаемой над телом при таком перемещении:

$$\Delta E_p=-\int_{r_1}^{r_2} dA=GMm(1/r_1-1/r_2).$$

Подсчитаем минимальную энергию, требующуюся для выведения космического корабля на круговую орбиту радиусом r с поверхности планеты радиусом r_0. В этом случае нам необходимо не только изменить потенциальную энергию корабля в поле тяготения, но и сообщить ему некоторую кинетическую энергию для обращения по круговой орбите. Скорость обращения находится из условия равенства ускорения свободного падения и центростремительного ускорения:

$$\frac{GM}{r^2}=\frac{v_{кр}^2(r)}{r}$$

и составляет

$$v_{кр}(r)=\sqrt{GM/r}\,.$$

Тогда минимальная кинетическая энергия, которую должны сообщить кораблю двигатели при взлете, равна

$$mv_{в}^2(r)/2=mv_{кр}^2(r)/2+\Delta E_p=$$
$$=GmM(1/r_0-1/(2r)),$$

откуда находим взлетную скорость, позволяющую вывести корабль на круговую орбиту радиусом r:

$$v_{в}(r)=\sqrt{GM(2/r_0-1/r)}.$$

Возьмем вначале радиус орбиты $r=r_0$. Тогда

$$v_{в}(r_0)=\sqrt{GM/r_0}=v_1,$$

где v_1 — первая космическая скорость для рассматриваемой планеты.

Для Земли, которая естественно интересует нас прежде всего, $v_{13}=7{,}9$ км/с.

Пусть теперь $r\to\infty$, т. е. корабль, стартуя с поверхности планеты, имеет такую скорость, что способен преодолеть узы тяготения планеты и удалиться от нее на произвольно большое расстояние. При этом корабль будет двигаться по параболической траектории. По этой причине такая скорость носит название параболической относительно данной планеты, или второй космической. Она равна

$$v_{в}(\infty)=v_{пар}=\sqrt{2GM/r_0}=\sqrt{2}\,v_1=v_2.$$

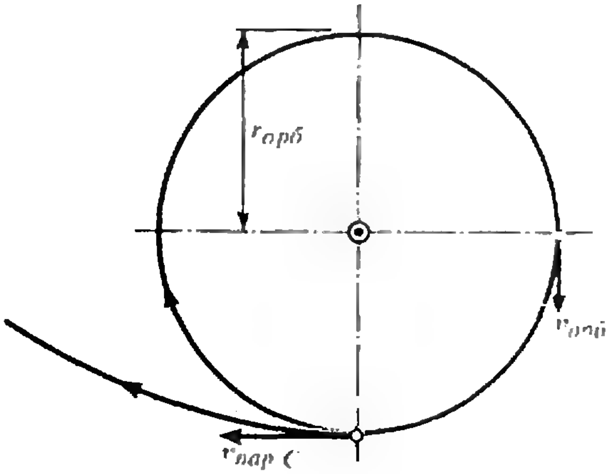
Для Земли $v_{23}=11{,}2$ км/с.

Все эти рассуждения справедливы для изолированной планеты. Однако, если планета входит в планетную систему, имеющую центральное светило — Солнце, то, освободившись от тяготения планеты, корабль отнюдь не избавится от притяжения Солнца. Теперь он станет обращаться по замкнутой траектории вокруг Солнца.

Чтобы разорвать путы солнечного притяжения, мы должны сообщить кораблю параболическую скорость относительно Солнца (см. рисунок):

$$v_{пар\,C}=\sqrt{2GM_c/r_{орб}}=\sqrt{2}\,v_{орб},$$

где M_C — масса Солнца, $r_{орб}$ — радиус орбиты планеты, которую мы для про-



стоты считаем круговой, $v_{\text{орб}}$ — скорость орбитального движения планеты.

Для Земли $v_{\text{орб}}=29{,}8$ км/с и $v_{\text{пар С}}=42{,}1$ км/с.

Означает ли это, что мы обязаны разогнать корабль до скорости 42,1 км/с для того, чтобы он ушел произвольно далеко от Солнца? Конечно, нет, ведь мы можем использовать грандиозную катапульту, которой снабдила нас природа,— Землю, несущуюся по своей орбите со скоростью $v_{\text{орб}}$. Легко понять, что для Земли скорость, позволяющая, хотя бы в принципе, долететь до любого космического объекта, расположенного в плоскости орбиты Земли за пределами Солнечной системы,— третья космическая скорость — равна

$$v_3=\sqrt{v_2^2+(v_{\text{пар С}}-v_{\text{орб}})^2}=16{,}7 \text{ км/с}.$$

Итак, сообщив кораблю скорость v_3 у поверхности Земли, мы можем послать его к любой звезде, лежащей в плоскости обращения Земли. К любой, кроме ближайшей — Солнца! Это — один из парадоксов, отмеченных А. Штернфельдом.

Можно показать, что для того, чтобы корабль мог двигаться по направлению к центру Солнца, нужно полностью компенсировать орбитальное движение Земли. Тем самым, четвертая космическая скорость относительно Земли равна

$$v_4=\sqrt{v_2^2+v_{\text{орб}}^2}=31{,}8 \text{ км/с}.$$

Далее, следуя Штернфельду, можно ввести понятия пятой и шестой космических скоростей. Пятая позволяет достичь любого космического объекта, двигаясь в плоскости, перпендикулярной к плоскости орбиты Земли. Она определяется выражением

$$v_5=\sqrt{v_2^2+v_{\text{орб}}^2+v_{\text{пар С}}^2}=52{,}8 \text{ км/с}.$$

При шестой космической скорости так же, как и в случае третьей, полет происходит по параболе в плоскости орбиты Земли, но стартовать можно против направления орбитального движения, что позволяет лететь к избранному космическому объекту в произвольный момент времени. Эта скорость равна

$$v_6=\sqrt{v_2^2+(v_{\text{орб}}+v_{\text{пар С}})^2}=72{,}8 \text{ км/с}.$$

А. Штернфельд считал, что эти скорости могут быть полезны при изучении комет.

И наконец, вернемся еще раз к выражению для параболической скорости относительно какого-либо гравитирующего тела сферической формы

$$v_{\text{пар}}=\sqrt{2GM/R}.$$

Как мы видим, величина этой скорости зависит от массы тела M и от его радиуса R, причем с уменьшением радиуса скорость увеличивается. В ньютоновской механике нет никаких ограничений для величины скорости, однако мы знаем, что такие ограничения возникают в специальной теории относительности: никакой материальный объект не может иметь скорость, бóльшую скорости света в вакууме $c=3\cdot10^5$ км/с.

Для гравитирующего тела можно поставить вопрос: какой радиус должно иметь это тело для того, чтобы никакой материальный объект не мог удалиться от него на произвольно большое расстояние? Такой радиус называется гравитационным радиусом данного тела и определяется выражением

$$R_{\text{гр}}=2GM/c^2.$$

Попробуйте самостоятельно посчитать гравитационный радиус для Земли и оценить, какой при этом стала бы плотность земного вещества.

Оказывается, если по тем или иным причинам размер какого-либо тела становится меньше гравитационного радиуса, тело превращается в черную дыру. Тем читателям, кому захочется узнать побольше о свойствах этих образований, рекомендую прочитать прекрасную книгу выдающегося английского ученого С. Хокинга «От большого взрыва до черных дыр», вышедшую в издательстве «Мир» в 1990 году. Из предисловия к этой книге американского астрофизика К. Сагана и взят наш эпиграф.

„Квант" улыбается

Кроссворд

продолжение кроссворда от 29 ноября 1981 г.

Сегодня «Квант» улыбается вместе с московским физтехом и их газетой «За науку», а именно с номером, посвященным 10-летнему юбилею СТЭМ ФОПФ (см. в кроссворде № 32 и 42). Кстати, кроссворд ими (т. е. стэмфопфовцами, или стэмцами, или...?) и составлен.

31. Великий писатель: А. К., или Л. Н., или А. Н.

32. Студенческий Театр Эстрадных Миниатюр Факультета Общей и Прикладной Физики (8 букв).

33. Известный композитор по кличке Ван.

34. Который сейчас час?

35. Известное произведение.

36. Порядковый номер вопроса под номером 8 в предыдущем кроссворде.

38. Сумасшедшая курица.

39. 3.30

40. Главный герой любого фильма: положительный — положительный, отрицательный — отрицательный.

41. Первый чемпион мира по плаванию.

42. На какой год СТЭМ ФОПФ празднует свое десятилетие.

148. $\int erf(x^2 sh^3 \times \times tg(\frac{\pi^2-x^3}{5}))dx$.

149. Газообразная оболочка Земли (5 букв, первая а).

149. Что, не подходит? Тогда из 9-ти.

150. Уважаемый человек.

151. Пусто.

152. Дубль пусто.

153. Ранил.

154. Погибаю, но не сдаюсь.

47. Номера с 148-го до 154-го считать номерами с 40-го до 46-го.

48. Брат-близнец Ленина.

49. Брат-близнец партии.

50. Утка во фраке.

51. ****

52. Нужное подчеркнуть, ненужное зачеркнуть.

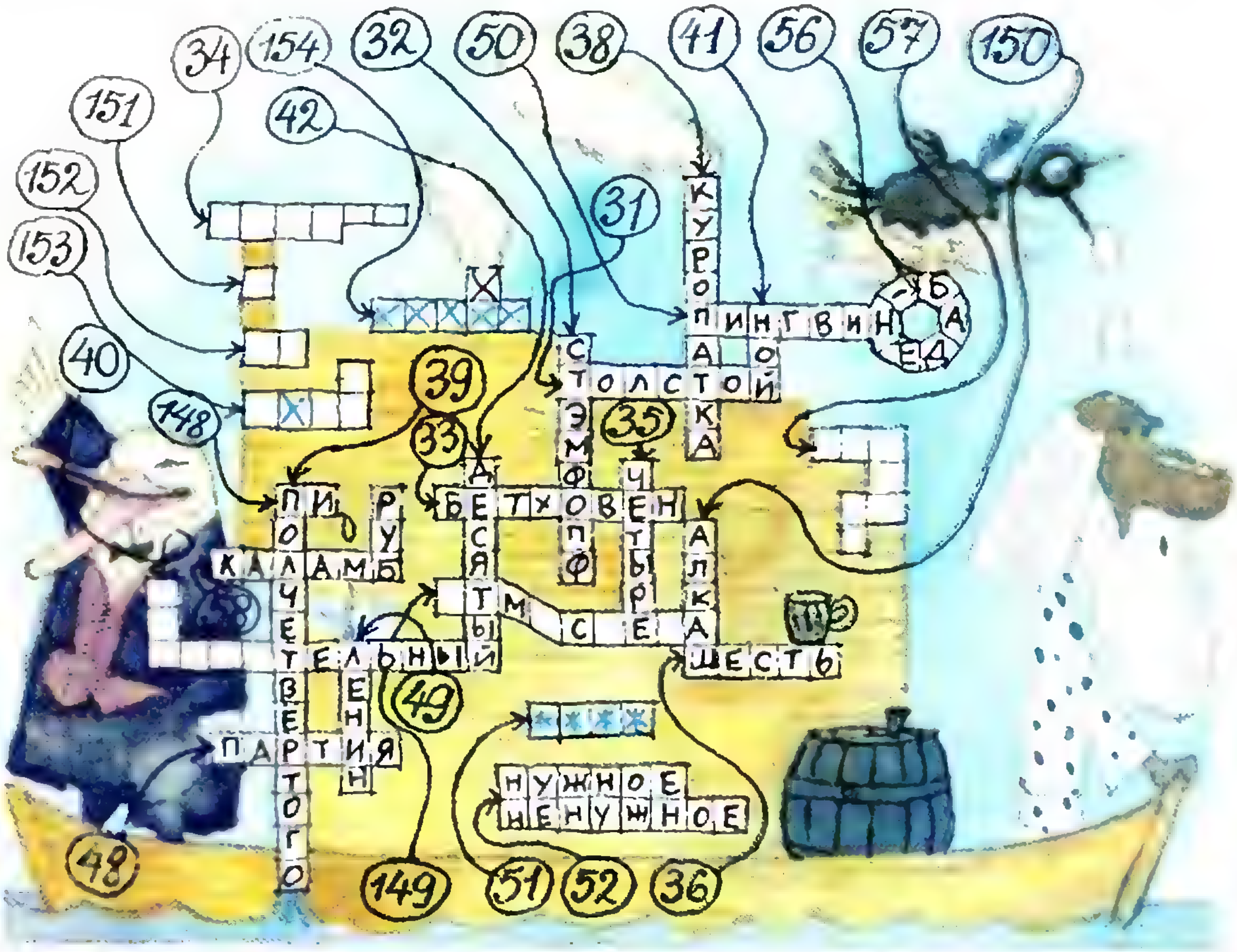
53. У вас банкрот. Переход хода.

56. Город в Западной Европе, 2 оборота.

57. А теперь напишите сюда буквы, которые знаете.

58. А к этому слову вопрос подберите сами.

59. Вот и все.


34
154
32
50
38
41
56
57
150
151
42
152
31
153
40
148
39
33
35
48
49
149
51
52
36
КУРОПАТКА
ПИНГВИН
ИНОЙ
Б
А
ЕД
СТЭМФОПФ
ТОЛСТОЙ
БЕТХОВЕН
ДЕСЯТЫЙ
ЧЕТЫРЕ
АЛКА
ТМ
С
Е
ШЕСТЬ
ПИ
РУБ
КАЛАМБ
ПОЛЧЕТВЕРТОГО
ТЕЛЬНЫЙ
ЕНИН
ПАРТИЯ
****
НУЖНОЕ
НЕНУЖНОЕ

вкусной
и
ровой
пище

Информатика

Алгоритм

Доктор физико-математических наук
Л. СТОЛЯРОВ

Слово «алгоритм» прочно вошло в наш лексикон с появлением электронных вычислительных машин как обозначение для совокупности действий, составляющих некоторый процесс. И хотя мы подразумеваем здесь, как правило, процесс решения некоторой задачи, но и кулинарный рецепт, и инструкция по пользованию стиральной машиной, и многие другие правила, часто не имеющие отношения к математике, являются алгоритмами. Да и в математике такие чисто геометрические задачи, как задачи на построение, содержат в своем решении алгоритмы.

Термин «алгоритм» произошел от имени ученого VIII—IX веков Аль-Хорезми. Его имя говорит, что родился он в городе Хорезме (который сейчас входит в состав Узбекистана). Большую часть своей жизни Аль-Хорезми провел при дворе багдадских калифов. С его именем связывают создание в Багдаде «Дома мудрости» — багдадского хранилища рукописей. Из математических работ Аль-Хорезми до нас дошли всего две — алгебраическая и арифметическая. Алгебраическая работа называется «Альджебр уальмукабала», что означает «Восстановление и противоположение». Восстановлением он называл перенос отрицательных членов в другую часть уравнения, а противоположением — сокращение равных членов в разных частях уравнения. От названия этой книги родилось слово алгебра. Вторая книга, долгое время считавшаяся потерянной, была найдена в 1857 году в библиотеке Кембриджского университета. Точнее, был найден ее перевод на латинский язык. В этой книге даны четкие правила арифметических действий, практически те же самые, что используются и сейчас. Первые строки этой книги были переведены так: «Сказал Алгоритми. Воздадим должную хвалу Богу, нашему вождю и защитнику». Так имя Аль-Хорезми перешло в Алгоритми, откуда и появилось слово алгоритм. Его ввел в обиход немецкий математик Эрнст Шредер (1841—1902) для обозначения вычислительных процедур механического характера.

Интуитивное понятие об алгоритме как о системе предписаний для действий не могло удовлетворить математиков уже в прошлом веке, не говоря уже о нынешнем, когда информатика прочно вошла во все сферы человеческой деятельности.

В двадцатых годах нашего века задача точного определения понятия алгоритма стала одной из центральных проблем математики. Дело в том, что тогда существовало две точки зрения на математические проблемы:

1. Все проблемы алгоритмически разрешимы, но для некоторых алгоритм еще не найден, поскольку еще не развиты соответствующие разделы математики.

2. Есть проблемы, для решения которых вообще не может существовать алгоритма.

Правы оказались сторонники второй точки зрения, но для того, чтобы ее обосновать, необходимо было дать четкое определение алгоритма. Это было сделано трудами целой плеяды математиков, в которую входили К. Гёдель, А. Чёрч, С. Клини, А. Тьюринг, Э. Пост, А. Марков, А. Колмогоров и многие другие.

Точное определение понятия алгоритма дало возможность к настоящему времени доказать алгоритмическую неразрешимость более десятка математических проблем. В их число входит и знаменитая десятая проблема Д. Гильберта, выдающегося немецкого математика конца прошлого — начала нынешнего века, сформулировавшего список наиболее важных проблем математики своего времени.

Десятая проблема Гильберта связана с решениями так называемых «диофантовых уравнений», т. е. уравнений вида $P(x_1, x_2, \ldots x_n)=0$, где P — многочлен с целыми коэффициентами, например $x+y+z=1$ или $x^n+y^n=z^n$. Гильберт формулировал ее так:

«Пусть дано произвольное диофантово уравнение с произвольным числом неизвестных..., требуется указать общий метод, следуя которому, можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет ли данное уравнение решение в целых... числах или нет».

Есть основания считать, что Гильберт был убежден в существовании общего метода и хотел стимулировать его поиск. Алгоритмическую неразрешимость этой проблемы доказал в 1970 году советский математик Ю. Матиясевич, талант которого проявился еще в школьные годы на математических олимпиадах.

С различными взглядами на понятие алгоритма мы постараемся познакомить читателей в последующих номерах журнала, а сейчас сформулируем современные наглядные представления об алгоритмах для процессов обработки данных, принятые в вычислительной практике.

1. Данные

Объекты, с которыми нужно будет оперировать, принято называть конструктивными объектами. Алгоритм перерабатывает исходные конструктивные объекты в результирующие конструктивные объекты.

1.1. Идентификация данных

Каждый конструктивный объект должен быть идентифицирован (выделен) среди других конструктивных объектов тем или иным способом. Так, например, цифры различаются по написанию, шахматные фигуры по названию, цвету и координатам положения на шахматной доске.

1.2. Структура данных

Из совокупности конструктивных объектов выделяются те, которые задаются изначально. Они называются элементарными, а их совокупность называется алфавитом. Остальные конструктивные элементы называются сложными и создаются из элементарных при помощи тех или иных операций. Например, натуральные числа представляются строками из цифр.

1.3. Конечность данных

Алфавит всегда должен содержать конечное количество элементов. В то же время из элементов алфавита может быть образовано бесконечное число сложных конструктивных объектов. Так, из алфавита, содержащего лишь десять цифр, может быть образовано множество натуральных чисел, которое бесконечно, но множество натуральных чисел не может входить в алфавит.

2. Процесс

Алгоритмический процесс расчленяется на отдельные шаги. Каждый шаг переводит состояние, возникшее перед этим шагом, в другое, последующее состояние. Состояния описываются в виде набора конструктивных объектов. Преобразование производится одной операцией из конечного списка операций, специально введенных для каждого конструктивного объекта.

3. Процессор

Процессор выполняет действия по преобразованию состояний, записи и хранению информации о состояниях. Действия выполняются в соответствии с заданным порядком выбора команд. Запись команд на каком-либо языке и соглашение по порядку их выполнения и является конкретным алгоритмом. Этот язык может быть языком программирования (Бейсик, Паскаль, Фортран), язык машины Тьюринга или обычный человеческий язык, которым написаны, например, правила сложения чисел в книге Аль-Хорезми.

Разумеется, не всякий процесс преобразования одного состояния в другое можно назвать алгоритмом. Так, физический процесс преобразования энергии падающей воды в электрическую энергию не принято называть алгоритмом.

Алгоритмические процессы должны удовлетворять ряду требований.

Детерминированность

При применении алгоритма к одним и тем же исходным данным всегда должен получаться один и тот же результат, поэтому, скажем, процесс преобразования информации, в котором участвует бросание монеты, не является детерминированным и не может быть назван алгоритмом.

Массовость

Алгоритм служит, как правило, для решения некоторого класса задач, а не одной конкретной задачи. Так, алгоритм сложения чисел применим к любой паре натуральных чисел.

Результативность

Искомый результат должен быть получен через конечное число шагов, после чего процесс должен остановиться, и можно прочесть искомый результат. Некоторые алгоритмы для одних исходных данных приводят к результату за конечное число шагов, для других же это не происходит. В таком случае говорят об области применимости данного алгоритма.

Процесс дальнейшего уточнения понятия алгоритма продолжается и по сей день. При этом развиваются формальные стороны этого понятия, предназначенные для решения проблем оценки сложности алгоритмов, преобразований алгоритмов в целях практического программирования и для ряда других целей.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 33)

ко (Мукачево) 08, 10; *С. Макаров* (Усинск) 08—11; *С. Малащицкая* (Кузнецовск) 09, 11; *Ю. Маравин* (Евпатория) 98, 99, 02—12; *А. Матрунич* (Ужгород) 98—06, 08, 10, 11; *М. Махмудов* (Исфара) 03—06, 08—11; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 98, 06, 08, 11; *В. Мушик* (Кузнецовск) 11; *А. Мясоед* (Старый Оскол) 08, 11; *А. Нежуренко* (Киев) 98—01, 03—12; *М. Немировский* (Одесса) 98, 02, 04, 06, 08, 10—12; *А. Носиков* (Винница) 08, 11; *А. Овсянников* (Старый Оскол) 08; *А. Ольховец* (Киев) 98, 99, 02—06, 08—11; *А. Ордабаев* (Алма-Ата) 03—06, 08, 10, 11; *Д. Островский* (Санкт-Петербург) 98, 01, 02, 08, 10—12; *Х. Отоженов* (Ургенч) 08; *Д. Пастухов* (Витебск) 98, 00, 02, 04—11; *Д. Петрайтис* (Вольск) 04, 06, 08, 11; *Я. Пикаев* (Владивосток) 03; *А. Пикалов* (Канаш) 98, 02; *М. Плетюхов* (Брест) 00, 02—06, 08—11; *В. Понкратов* (Старый Оскол) 08, 11; *С. Рассадин* (Минск) 03, 04, 08, 09, 11, 12; *Е. Рослый* (Омск) 05, 06, 11; *Д. Рузметов* (Ургенч) 08; *Ш. Рузметов* (Хивинский р-н Хорезмской обл.) 03, 08, 11; *В. Рыбачук* (Винница) 00, 03, 08, 11; *С. Самсонов* (Старый Оскол) 08, 11; *И. Сихарулидзе* (Тбилиси) 11; *Д. Смирнов* (Кузнецовск) 03, 04; *А. Соклаков* (Брест) 04, 08, 11; *А. Терентьев* (Канаш) 98, 00, 02, 04—06, 08, 11; *С. Тимощук* (с. Черинца Ровенской обл.) 08, 09, 11; *В. Толпекин* (Одесса) 99, 03, 04, 06, 09, 11; *С. Тумача* (Киев) 08, 09, 11; *А. Файзуллаев* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) 03, 04, 08, 10, 11; *Д. Федорец* (Харьков) 04; *Р. Халков* (Старый Оскол) 08, 11; *А. Хацкевич* (Брест) 98, 02; *Д. Чигирев* (Санкт-Петербург) 03, 04, 06, 08—11; *Д. Чиркин* (Грозный) 00, 02—04, 07; *А. Чистый* (Брест) 00, 02—06, 08, 10, 11; *Д. Чичкан* (Барановичи) 06, 07, 10—12; *И. Ширяев* (Кузнецовск) 03, 04, 09, 11; *А. Шпагин* (Мариуполь) 98—00, 02, 04—06, 08—12; *О. Шпырко* (Киев) 98—12; *И. Шумович* (Николаев) 08, 09, 12; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 98—12; *Д. Юдин* (Самара) 98, 02, 04, 05, 08—11; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 98, 99, 01—04, 06, 08—11; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 03, 04, 08, 09, 11.

Новая игра на клетчатой бумаге

Клетчатая бумага всегда под рукой. Поэтому большой популярностью пользуются всевозможные игры, использующие ее в качестве игрового поля, такие как крестики-нолики, рэндзю или го, которыми вечно кто-нибудь развлекается на уроках в школе или на лекциях в институте. Как правило, такие игры предусматривают участие двух противников, в некоторых количество игроков неограниченно. Предлагаем вам игру на клетчатой бумаге для одного.

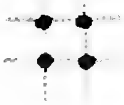


Рис. 1.

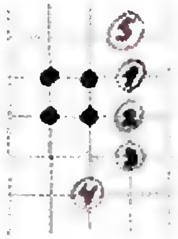


Рис. 2.

На «бесконечном» поле задана начальная конфигурация из четырех точек (рис. 1). Нужно к этим точкам последовательно добавлять новые, подчиняясь следующим двум правилам:

1. Каждая новая точка должна образовывать с предыдущими хотя бы один ряд из трех рядом стоящих точек по вертикали, горизонтали или диагонали.
2. Запрещается ставить точку, если она образует с предыдущими хотя бы один ряд более чем из трех стоящих рядом точек.

Так, на рисунке 2 точки 1, 2, 3 поставлены по правилам, а 4 и 5 — нет, поскольку 4 образует только пару точек (3, 4), а 5 образует четверку точек (5, 1, 2, 3).

Цель игры состоит в том, чтобы поставить как можно больше новых точек.

На рисунке 3 приведены некоторые конечные конфигурации (т. е. такие, к которым нельзя добавить новые точки, не нарушая правил).

Вместо приведенной на рисунке 1 начальной конфигурации можно использовать и другие (примеры даны на рисунке 4). Интересно было бы построить для них конечные конфигурации, а также найти минимальное количество новых точек в таких конфигурациях. Можно строить и конфигурации с заранее заданным числом точек.

Попробуйте доказать, что число новых точек всегда конечно для любой начальной позиции.

С. Хорошкин

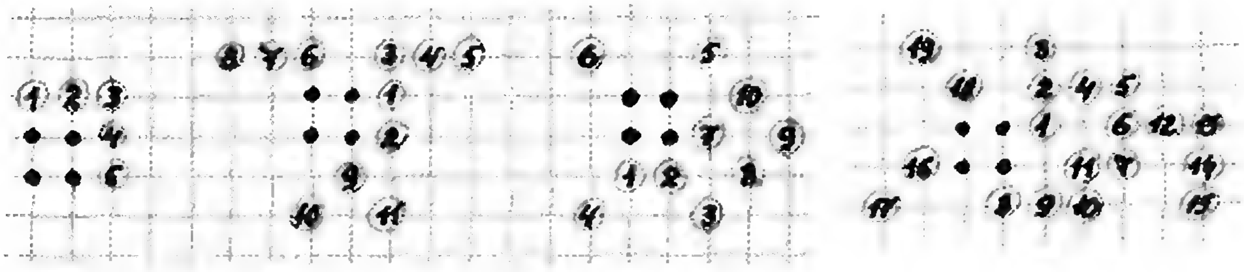


Рис. 3.

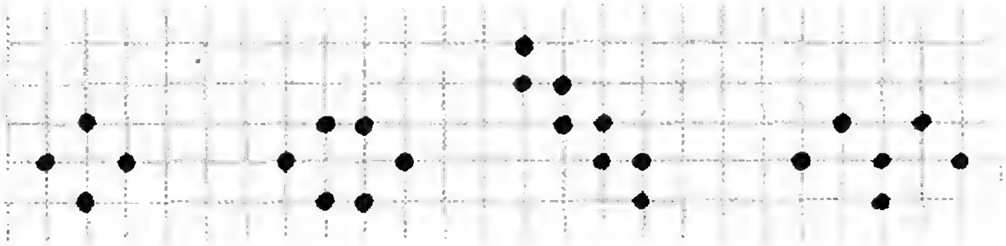


Рис. 4.

Мешок

(фантастический рассказ)

У. МОРРИСОН

Через год Зиблинг уже затруднился бы сказать, что более занимало его: эти часовые беседы с Мешком или хитроумно-дурацкие требования некоторых мужчин и женщин, заплативших свои сотни тысяч за драгоценные шестьдесят секунд. Кроме сравнительно простых вопросов, задаваемых учеными и искателями счастья, желавшими знать, где можно найти драгоценные металлы, попадались и сложные проблемы, занимавшие по нескольку минут.

Все беседы с Мешком, в том числе и беседы Зиблинга, записывались на пленку, а записи хранились в центральном архиве на Земле. Многие из записей Зиблинг не понимал — некоторые потому, что они были сугубо техническими, другие — потому что они были на незнакомом ему языке. Мешок, конечно, немедленно выучивал все языки при помощи процесса, суть которого он так и не смог объяснить Зиблингу, а в центральном архиве технические эксперты и эксперты-лингвисты тщательно изучали каждую фразу каждого вопроса и ответа, чтобы, во-первых, убедиться, что клиент не являлся преступником, и, во-вторых, чтобы иметь данные для сбора налога, когда клиент с помощью Мешка добудет состояние.

К концу года Зиблинг убедился в правильности предсказаний Мешка относительно бедствий, грозящих человечеству. Впервые за столетие число ученых-исследователей не увеличилось, а уменьшилось. Знания Мешка сделали целый ряд исследований ненужными и уничтожили закономерную последовательность открытий. *Мешок прокомментировал* этот факт Зиблингу.

Окончание. См. «Квант» № 2 и № 3.

Зиблинг кивнул:

— Я вижу. Человечество теряет независимость.

— Да, и я из верного его раба превращаюсь в его же хозяина. А я ведь хочу быть хозяином не больше, чем рабом.

— Вы можете уйти, как только захотите.

Человек в ответ на это вздохнул бы — Мешок сказал просто:

— У меня нет сил чего-либо желать. К счастью, эта проблема скоро будет решена без меня.

— Вы имеете в виду политические склоки?

Ценность Мешка невероятно увеличилась, и одновременно с этим усилилась жестокая борьба за право пользоваться его услугами. Финансовая политика приобретала странное направление. Президенты, владельцы и директора стали почти марионетками, ибо все главные вопросы политики теперь решались не на основе изучения фактов, а путем обращения к Мешку. Мешок зачастую давал советы ожесточенным противникам, и это походило на игру в космические шахматы, где гигантские корпорации и правительственные агентства были пешками, а Мешок — игроком, делающим попеременно ходы то за одну, то за другую сторону. Назревали кризисы.

Мешок сказал:

— Я имею в виду и политические склоки и многое другое. Борьба за мои услуги стала слишком жестокой. Она может иметь только один конец.

— Вы имеете в виду, что будет сделана попытка вас украсть?

— Да.

— Вряд ли это возможно. Ваша охрана все время усиливается.

— Вы недооцениваете силу жадности.

Он был прав — Зиблингу пришлось убедиться в этом довольно скоро.

В конце четырнадцатого месяца его службы, спустя полгода после провала Хорригана на перевыборах, появился клиент, заговоривший с Мешком на марсианском диалекте Прдл — экзотическом языке, известном весьма немногим. Он обратил на себя внимание Зиблинга еще и потому, что заранее уплатил миллион за беспрецедентную привилегию говорить с Мешком десять минут подряд. Разговор был записан, но, естественно, остался непонятным ни Зиблингу, ни кому-либо другому из служащих станции. Замечательно было еще и то, что незнакомец покинул астероид через семь минут, так и не использовав оставшиеся три минуты, которых было бы достаточно для получения сведений, как сколотить несколько небольших состояний. Эти три минуты не могли быть использованы другими частными клиентами. Но никому бы и в голову не пришло запретить использовать их правительственному служащему, и Зиблинг сейчас же заговорил с Мешком:

— Что спрашивал этот человек?

— Совета, как украсть меня.

Зиблинг был ошарашен.

— Что?

Мешок всегда воспринимал такие восклицания, выражающие изумление, буквально.

— Совета, как украсть меня,— повторил он.

— Тогда... позвольте... он отбыл тремя минутами раньше. Это означает, что он торопится. Он хочет начать проводить свой план немедленно!

— Он уже проводит его,— ответил Мешок.— Организация преступников отлично, если не досконально, осведомлена о диспозиции войск охраны. Вероятно, кто-то в правительстве оказался предателем. Меня спросили, какой из нескольких планов наилучший, и предложили рассмотреть их с точки зрения слабых мест. Так я и сделал.

— Хорошо, но как мы можем воспрепятствовать выполнению этого замысла?

— Воспрепятствовать ему нельзя.

— Не понимаю почему. Пусть мы не можем помешать им высадиться, но мы можем помешать им удрать отсюда с вами.

— Есть только один путь. Вы должны уничтожить меня.

— Я не могу сделать этого! У меня

нет на это права, а если бы и было — я все равно не смог бы!

— Моя гибель была бы благословением для человечества.

— И все же я не могу,— горестно проговорил Зиблинг.

— Тогда — если это исключается — выхода нет. Они попросили меня проанализировать возможные шаги, которые будут предприняты для преследования, но они не спросили совета, как бежать, ибо это было бы тратой времени. Они успеют спросить, когда я буду у них в руках.

— Значит, я ничего не могу сделать, чтобы спасти вас. Как мне спасти своих людей?

— Вы можете спасти и их и себя, погрузившись в аварийный корабль и вылетев к Солнцу. Тогда вы избежите контакта с преступниками. Но меня с собой не берите, иначе за вами будет погоня.

Крики охраны привлекли внимание Зиблинга.

— Радио сообщает о нападении бандитов, мистер Зиблинг! Сигнализация тревоги не действует!

— Да, я знаю. Готовьте корабль,— Зиблинг снова повернулся к Мешку.— Мы можем бежать, но они захватят вас. И с вашей помощью будут управлять всей системой.

— Не в этом дело,— сказал Мешок.

— Они захватят вас. Можно сделать еще что-нибудь?

— Уничтожьте меня.

— Не могу,— сказал Зиблинг, чуть не плача.

К нему нетерпеливо подбежали его люди, и он понял, что времени больше не осталось. Он пробормотал простую и глупую фразу: «До свидания!», словно Мешок был человеком и мог переживать, как человек, и бросился к кораблю.

Они стартовали вовремя. Полдюжины кораблей неслись к астероиду с нескольких сторон, и корабль Зиблинга успел проскочить как раз за секунду до того, как они оцепили астероид, на котором находился Мешок.

Зиблинг понял, что он и его люди спасены. Дело переходило отныне в руки командования Вооруженными силами, но Зиблинг представил себе, как они выступят против совершенного мозга Мешка, и сердце его сжалось. Но затем произошло нечто совершенно неожиданное. Впервые Зиблинг полностью уразумел, что хотя Мешок и позволил использовать себя, как простую машину, как раба, отвечающего на вопросы, однако это случилось вовсе не потому, что его возможности были ограничены лишь способностью анализировать. Экран телевизора вдруг осветился.

Связист подбежал к Зиблингу:

— Что-то случилось, мистер Зиблинг, ведь телевизор не включен!

Телевизор не был включен. И тем не менее они увидели камеру, в которой Мешок провел четырнадцать месяцев — краткое мгновение своей жизни. В камеру вошли двое — незнакомец, говоривший на Прдл, и сенатор Хорриган.

К изумлению обоих, первым заговорил Мешок. Он сказал:

— «До свидания» — не вопрос и не ответ. Это сообщение не содержит почти никаких сведений.

Хорриган явно благоговел перед Мешком, но был не из тех, кто отступает перед непонятным. Он почтительно произнес:

— Нет, сэр. Разумеется, не содержит. Это просто выражение...

Незнакомец прервал его на превосходном английском языке:

— Заткнитесь, вы, болтун! Нечего терять время. Надо взять его и бежать. Мы поговорим с ним там.

Зиблинг успел обрушить не одно проклятие на голову Хорригана и пожалеть людей, которых бывший сенатор предал за то, что они не переизбрали его, когда на экране снова возникло изображение. Это была комната внутри пиратского корабля, покидающего астероид. Его никто не преследовал. По-видимому, планы похитителей плюс информация Мешка составили действенную комбинацию.

Сначала единственными людьми возле Мешка были Хорриган и незнакомец, говорящий на Прдл, но это продолжалось недолго. В помещение ввалилось еще человек десять. Лица их казались угрюмыми и выражали недоверие. Один из них объявил:

— Не смейте разговаривать с Мешком, пока мы все не соберемся около него. Мы все имеем на него право.

— Не нервничайте, Меррилл. Не думаете ли вы, что я собираюсь надуть вас?

— Да, я так думаю,— ответил Меррилл.— Что вы скажете, Мешок? Есть у меня основания не доверять ему?

Мешок ответил коротко:

— Да.

Незнакомец, говорящий на Прдл, побледнел. Меррилл холодно рассмеялся.

— Будьте осторожны, когда задаете вопросы возле этой штуки.

Хорриган прокашлялся.

— У меня нет намерения, как вы говорите, надувать кого бы то ни было. Не такой я человек. Поэтому я буду говорить с ним,— он повернулся к Мешку.— Сэр, грозит ли нам опасность?

— Да.

— С какой стороны?

— Ни с какой. Изнутри корабля.

— Опасность немедленная?

— Да.

Тут выяснилось, что Меррилл обладает самой быстрой реакцией: именно он первый начал действовать в соответствии с намеками, содержавшимися в ответе. Он застрелил человека, говорившего на Прдл, прежде чем тот успел схватиться за оружие, а когда Хорриган бросился в ужасе к дверям, хладнокровно уложил и его.

— Вот так,— сказал он.— Есть ли еще опасность внутри корабля?

— Есть.

— Кто? — зловеще спросил Меррилл.

— Опасность не исчезнет до тех пор, пока я буду с вами и на корабле останется больше одного человека. Я слишком большое сокровище для таких, как вы.

Зиблинг и его экипаж как завороженные глядели на экран, ожидая, что бойня начнется снова. Но Меррилл овладел собой.

Он сказал:

— Погодите, ребята. Я признаю, что мы — каждый из нас — хотели бы иметь эту штуку только для себя. Но это неосуществимо. Мы вместе в этом деле, и будь я проклят, если очень скоро нам не придется отбиваться от военных кораблей. Эй, Прадер! Почему ты здесь, а не у перископов?!

— Я слушаю,— сказал Прадер.— Если кто-нибудь вздумает разговаривать с этой штукой, то я хочу быть здесь и слышать ответы. А если есть еще новые способы ударить из-за угла, то я хочу узнать и про них.

Меррилл выругался. В тот же момент корабль качнуло, и он заорал:

— Мы сошли с курса! По местам, идиоты! Живее!

Все кинулись вон, но Зиблинг заметил, что Меррилл был не настолько озабочен общей опасностью, чтобы не выстрелить Прадеру в спину, прежде чем несчастный успел выскочить.

— Теперь им конец,— сказал Зиблинг.— Они перебьют друг друга, а оставшиеся двое или трое погибнут потому, что их будет слишком мало, чтобы управлять таким кораблем. Должно быть, Мешок предвидел и это. Странно только, почему он не предупредил меня.

Мешок заговорил, хотя в помещении никого не было.

— Меня никто не спрашивал,— сказал он.

Зиблинг взволнованно закричал:

— Вы слышите меня! Но что будет с вами?! Вы тоже погибнете?

— Нет еще. Мне захотелось пожить дольше,— он помолчал и затем чуть тише добавил: — Я не люблю выражений, не содержащих сведения, но я должен сказать. Прощайте.

Послышались крики, стрельба. Затем экран внезапно потускнел и погас.

Мешок, существо, на вид столь чуждое человеческим эмоциям, навсегда ушло за пределы знания Зиблинга. Вместе с Мешком — как он сам и предсказывал — исчезла ужасная угроза всему человечеству.

Как странно, думал Зиблинг, я чувствую себя таким несчастным при таком счастливом конце.

Перевод с английского В. Бережкова

Санкт-Петербургский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический и физический факультеты)

1. Число 101 представьте в виде суммы двух натуральных чисел, сумма кубов которых максимальна.

2. Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две другие — на кривой $y = x - x^2$. Вычислите площадь квадрата.

3. Найдите все вещественные значения a, при которых все решения неравенства $8\log_a x + \log_x a \leqslant 6$ удовлетворяют неравенству $\cos\left(\pi \frac{x^2}{a^2}\right) \geqslant \frac{1}{2}$.

4. Круг и квадрат имеют общий центр, и их площади равны. Сторона квадрата равна 1. Вычислите сумму длин частей окружности, расположенных внутри квадрата.

5. В кубе с ребром 1 расположен конус так, что его вершина совпадает с вершиной куба. Три грани куба касаются боковой поверхности конуса, а вписанный в куб шар касается основания конуса. Найдите объем конуса.

Вариант 2

(биолого-почвенный и экономический факультеты)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x^2 - \sin y = 1, \\ x^2 + |y| = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt[3]{x^3 + |x| - 1} \geqslant 2x - 1.$$

3. Решите уравнение

$$\log_2(5\cos 2x - 2) + \log_{1/2}(1 - 6\sin^2 x \cos^2 x) = 3.$$

4. Для каких значений a неравенство

$$4^{x+1} + 9 \cdot 4^{-x} - 2(2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x}) \geqslant a$$

выполняется при всех $x \geqslant 0$?

5. В цилиндре с высотой h и радиусом основания r расположен квадрат так, что две его вершины лежат на окружности одного основания, а две другие — на окружности другого основания. Вычислите площадь квадрата.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Сплошной однородный шар объемом V и плотностью ρ плавает на границе двух несмешивающихся жидкостей. Плотность верхней жидкости ρ_1, нижней ρ_2 ($\rho_1 < \rho < \rho_2$). Какая часть объема шара находится в верхней части жидкости?

2. На какую высоту может подняться автомобиль с работающим мотором по ледяной горе ($\mu < \operatorname{tg} \alpha$), если у начала подъема он имел скорость v_0?

3. На pT-диаграмме (рис. 1) показан процесс, проводимый с идеальным газом. Объем газа постоянен. Найдите точки, где масса газа максимальна и минимальна.

4. Над одним молем газа совершают замкнутый процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 2). Температуры в точках 1 и 3 равны T_1 и T_3. Определите работу, совершаемую за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

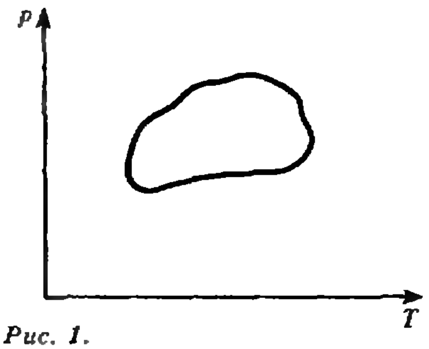


Рис. 1.

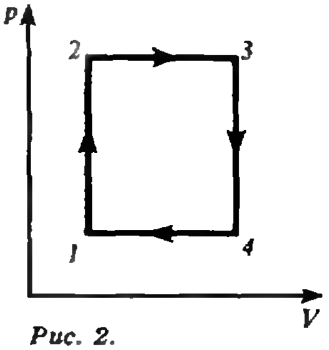


Рис. 2.

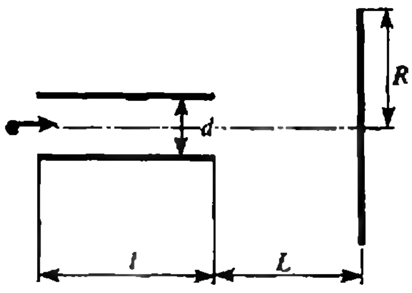


Рис. 3.

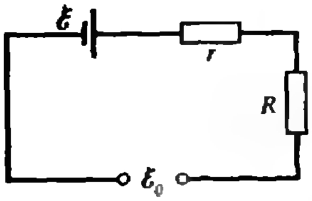


Рис. 4.

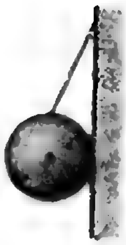


Рис. 5.

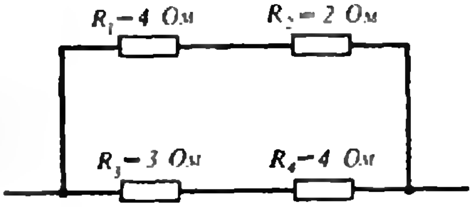


Рис. 6.

5. Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускают в керосин. Найдите плотность шариков, если угол расхождения нитей в воздухе и керосине одинаков.

6. Электрон влетает в плоский конденсатор посередине между пластинами. Расстояние между пластинами d, длина пластин l, приложенное напряжение U. Какова должна быть минимальная скорость электрона, чтобы он попал в круглую мишень радиусом R, расположенную на расстоянии L от конденсатора (рис. 3)?

7. Человек посмотрел (по вертикальному направлению) на дно водоема и оценил его кажущуюся глубину в $h=0{,}9$ м. Определите истинную глубину водоема.

8. Имеется оптическая система из собирающей и рассеивающей линз, оптические оси которых совпадают. Фокусные расстояния линз равны по модулю $F=20$ см. Линзы расположены на расстоянии $l=25$ см друг от друга. Где на оптической оси следует поместить точечный источник, чтобы система давала параллельный пучок лучей?

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. Из одной точки одновременно бросают два тела — горизонтально и вертикально вверх с одинаковыми скоростями v_0. На каком расстоянии будут тела через промежуток времени τ?

2. Какой минимальной силой можно опрокинуть через ребро куб массой m, находящийся на горизонтальной плоскости? Каков должен быть минимальный коэффициент трения?

3. Объем пузырька воздуха по мере его всплывания со дна озера на поверхность увеличивается в n раз. Какова глубина озера? Изменением температуры с глубиной пренебречь.

4. В комнате объемом $V=40$ м^3 воздух имеет температуру $t=20$ °C и относительную влажность $\varphi_1=20\,\%$. Сколько воды нужно испарить в комнате, чтобы относительная влажность достигла $\varphi_2=50\,\%$? Известно, что при 20 °C давление насыщенных паров воды $p_н=2330$ Н/м^2.

5. Аккумулятор, заряженный до напряжения $\mathscr{E}=25$ В, дозаряжается через дополнительное сопротивление $R=5$ Ом от источника с напряжением $\mathscr{E}_0=40$ В (рис. 4). Чему равно напряжение на зажимах аккумулятора, если его внутреннее сопротивление $r=1$ Ом?

6. Электромотор питается от источника напряжением $U=24$ В. Чему равна мощность на валу мотора при протекании по его обмотке тока $I=8$ А, если известно, что при полностью заторможенном якоре по цепи течет ток $I_0=16$ А?

7. При падении на плоскую границу двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 луч преломляется таким образом, что угол между отраженным и преломленным лучами составляет 90°. Найдите угол падения.

8. Светящаяся точка, находящаяся на расстоянии $d=15$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=10$ см, движется со скоростью $v=2$ см/с перпендикулярно оптической оси. С какой скоростью движется ее изображение?

Геологический факультет

1. При каком минимальном коэффициенте трения о стену точка подвеса и центр шара будут находиться на одной вертикали (рис. 5)?

2. Стержень с шариком образует угол α с вертикалью и вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. В каком месте стержня находится шарик, если известно, что он неподвижен относительно стержня, его масса m, а действующая на него сила трения равна $F_{тр}$?

3. Некоторое количество водорода находится при температуре $T_1=200$ К и давлении $p_1=400$ Н/м^2. Газ нагревается до температуры $T_2=10\,000$ К, при которой молекулы водорода практически полностью распадаются на атомы. Определите новое давление газа, если его объем и масса остались без изменения.

4. Газ нагрели от температуры $t_1=27$ °C до температуры $t_2=39$ °C. На

сколько процентов увеличился объем, если давление осталось неизменным?

5. На каком из резисторов, изображенных на рисунке 6, выделится наибольшее количество теплоты?

6. На точечный заряд, находящийся внутри плоского конденсатора, заряженного до заряда Q, действует сила f_0. На какую величину изменится сила, если конденсатор в течение времени τ заряжается током силой I?

7. Два изображения точечного источника света в двух плоских зеркалах находятся на одном и том же расстоянии a от источника и на расстоянии L друг от друга. Под каким углом друг к другу расположены зеркала?

8. Узкий параллельный пучок света падает на плоскопараллельную пластинку из стекла под углом α, синус которого равен 0,8. Вышедший из пластинки пучок оказался смещенным вдоль поверхности относительно продолжения падающего пучка на расстояние $l=2$ см. Какова толщина пластинки, если показатель преломления стекла $n=1{,}7$?

Публикацию подготовили
В. Рябов, А. Чирцов

Санкт-Петербургский государственный технический университет

Математика

Вариант 1
(радиофизический факультет)

1. Найдите область определения функции

$$f(y)=\sqrt{16y^{-2}-4y^{-1}+0{,}25}\,(4y^{-2}+$$
$$+y^{-3/2})(32-y^{3/2}-4y+8y^{1/2})^{-1}$$

и множество ее значений на промежутке $[0{,}25;\ 0{,}5]$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+\log_2 y=y\log_2 3+\log_2 x, \\ x\log_2 72+\log_2 x=2y+\log_2 y. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{13^x-5}\leqslant\sqrt{2(13^x+12)}-\sqrt{13^x+5}\,.$$

4. Найдите расстояние между наибольшим отрицательным корнем и наименьшим положительным корнем уравнения

$$\sin\pi(x-1)^2=\sin\pi(x^2+2x+1).$$

5. Плоскость делит медианы граней ABC, ACD и ADB треугольной пирамиды $ABCD$, выходящие из вершины A, в отношениях 2:3, 1:2 и 2:5, считая от вершины. Пусть P, Q, R — точки пересечения этой плоскости с прямыми AB, AC, AD. Найдите отношения $AP:PB$, $AQ:QC$ и $AR:RD$.

Вариант 2
(физико-механический факультет)

1. Решите уравнение

$$2\log_{\sqrt{2}}2+\log_{\sqrt{2}}\left(2^{x^2-1}-\frac{1}{4}\right)=\log_{\sqrt{2}}31.$$

2. Решите неравенство

$$32^{3(x^3-8)}\geqslant 8^{19(2x-x^2)}.$$

3. Решите уравнение

$$x^3+3x^2-6x+a=0,$$

зная, что оно имеет три различных действительных корня, образующих геометрическую прогрессию.

4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство

$$|3\sin^2x+2a\sin x\cos x+\cos^2x+a|\leqslant 3$$

выполняется для любых значений x.

5. Две касающиеся сферы вписаны в двугранный угол величиной $\pi/3$. Пусть A — точка касания первой сферы с первой гранью, B — точка касания второй сферы со второй гранью. Найдите отношение $AK:KL$, если K и L — точки пересечения отрезка AB с первой и второй сферами соответственно.

Вариант 3
(физико-технический факультет)

1. В арифметической прогрессии $a_7=9$. При каком значении разности арифметической прогрессии произведение a_1a_2 будет наименьшим?

2. Решите неравенство

$$2\sqrt{x}\cdot 4^x+5\cdot 2^{x+1}+2\sqrt{x}-4\geqslant$$
$$\geqslant 2^{2x+2}+5\sqrt{x}\cdot 2^x.$$

3. Известно, что многочлен $1{,}5x^2+12x+26$ равен сумме кубов двух линейных функций. Найдите эти функции.

4. В треугольной пирамиде три двугранных угла прямые. Один из отрезков, соединяющих середины противоположных ребер, равен 4, а другой $\sqrt{3}$. Найдите длину наибольшего ребра пирамиды.

5. Найдите все значения параметра a, при которых любой корень уравнения

$$3\sin^3x-a(2a+1)\cos^3x+2a^2\cos x=0$$

является корнем уравнения

$$0{,}5\log_{\sqrt{7}}(4-3\,\mathrm{ctg}\,x)-\log_{1/7}(8+\mathrm{ctg}\,x)-$$
$$-\log_7(3-4\,\mathrm{ctg}\,x)=1$$

и, наоборот, любой корень второго уравнения является корнем первого уравнения.

Вариант 4

(факультет технической кибернетики)

1. Решите уравнение

$$\log_5(5^{-1/2}\cdot x^3)-0{,}5=(\log_5 x)\left(\log_3\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{-1}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{1/\sqrt{5}}(6^{x+1}-36^x)\geqslant -2.$$

3. Найдите решения системы уравнений

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos x+6\sin y=3+12\sin^2 x,\\ 4\sqrt{3}\cos x+2\sin y=7,\end{cases}$$

для которых выражение x^2+y^2-4y принимает наименьшее значение.

4. На плоскость положены два цилиндра, радиусы которых r; цилиндры примыкают друг к другу по образующей. На них положены два других касающихся по образующей цилиндра с радиусами R и осями, перпендикулярными осям первых двух цилиндров. Найдите радиус шара, касающегося всех четырех цилиндров.

5. Найдите все значения параметра a, при которых равносильны системы уравнений

$$\begin{cases} x+2y=2-a,\\ ay-x=a-2a^2\end{cases}$$

и

$$\begin{cases} x^2-y^4-4x+3=0,\\ 2x^2+y^2+(a^2+2a-11)x+12=6a.\end{cases}$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Шарик начал падать с нулевой начальной скоростью на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Пролетев расстояние h, он упруго отразился от плоскости. На каком расстоянии от места падения шарик отразится второй раз?

2. На гладкой горизонтальной поверхности находится тело массой M, а на нем — небольшая шайба массой m (рис. 1). Шайбе сообщили в горизонтальном направлении скорость v. На какую высоту (по сравнению с первоначальным уровнем) она поднимется после отрыва от тела? Трения нет.

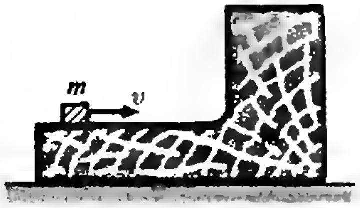


Рис. 1.

3. По резиновой трубке, свернутой в виде кольца, циркулирует вода со скоростью v. Диаметр трубки d. С какой силой растянута резиновая трубка? Диаметр трубки много меньше радиуса кольца. Плотность воды ρ.

4. Насос представляет собой расположенный горизонтально цилиндр с поршнем площадью S_1 и выходным отверстием площадью S_2, расположенным на оси цилиндра. Определите скорость истечения струи жидкости из насоса, если поршень под действием силы F перемещается с постоянной скоростью. Плотность жидкости ρ.

5. В сосуде, дно которого образует угол α с горизонтом, стоит куб с ребром a, сделанный из материала плотностью ρ (рис. 2). Верхнее ребро куба находится на глубине h. Жидкость под основание куба не подтекает. Атмосферное давление p, плотность жидкости ρ_0. Найдите силу, с которой куб действует на дно сосуда.

6. В открытые сообщающиеся сосуды с площадью поперечного сечения S налита ртуть массой m. Столбик ртути в одном из сосудов вывели из положения равновесия, вследствие чего ртуть начала колебаться. Найдите период колебаний. Плотность ртути ρ.

7. Чтобы изотермически уменьшить объем газа в цилиндре с поршнем в n раз, на поршень поместили груз массой m. Какой массы груз следует добавить, чтобы объем газа изотермически уменьшился еще в k раз?

8. В системе, показанной на рисунке 3, два металлических шарика массой m каждый имеют одинаковые по модулю и противоположные по знаку заряды q. В начальном положении расстояние между шариками равно r_0 и изолирующая пружина жесткостью k растянута на величину x_0. Масса пружинки пренебрежимо мала. Какую работу надо совершить, чтобы медленно поднять верхний шарик до такого положения, при котором нижний шарик начнет опускаться?

9. Прямой провод, сопротивление которого на единицу длины равно $\Delta R=0{,}5$ Ом/м, согнут под углом $2\alpha=60°$

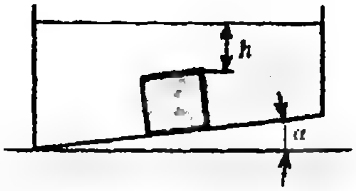


Рис. 2.

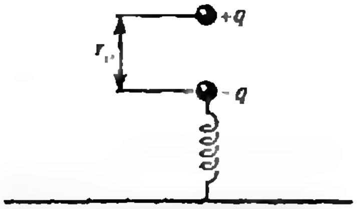


Рис. 3.

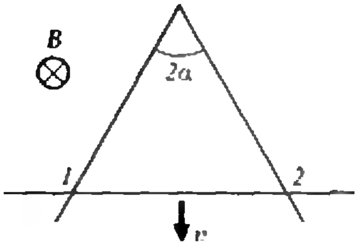


Рис. 4.

(рис. 4). Перемычка из такого же провода, расположенная перпендикулярно к биссектрисе угла 2α, образует с согнутым проводом замкнутый треугольный контур. Этот контур помещен в однородное магнитное поле индукцией $B=0{,}1$ Тл, перпендикулярное его плоскости. Найдите направление и силу тока, текущего в контуре, когда перемычка движется с постоянной скоростью $v=4$ м/с. Сопротивлением в контактах *1* и *2* пренебречь.

10. Человек смотрит на рыбку, находящуюся в диаметрально противоположной от него точке шарового аквариума радиусом R. На сколько смещено при этом изображение рыбки относительно самой рыбки? Показатель преломления воды $n=4/3$.

Публикацию подготовили С. Преображенский, В. Романов, И. Русанов, С. Тихомиров, Ю. Хватов

Санкт-Петербергский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция

$$f(x)=\sqrt{ax-1}-\sqrt{5-x}\,.$$

а) Найдите область определения функции f.

б) При $a=2$ решите уравнение $f(x)=\sqrt{x}$.

в) При $a=5$ решите неравенство $f(x)<-2$.

2. Дана функция

$$f(x)=\log_{1/3}(x+3)-\log_3(2-x).$$

а) Решите уравнение $f(x)=2\log_{1/3}2$.

б) Найдите $f((\sqrt{13}-1)/2)$.

в) Решите неравенство $f(x)\geqslant 0$.

г) Найдите множество значений функции f.

3. В острый угол величиной 2α с вершиной в точке A вписана окружность радиусом 1 с центром O. Пусть B — точка касания окружности с одной из сторон угла, а C — точка пересечения прямой BO с другой стороной. Обозначим через $S(\alpha)$ площадь треугольника ABC.

а) Докажите, что

$$S(\alpha)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha}{2\operatorname{tg}^2\alpha}\,.$$

б) При каком α площадь треугольника AOB в 8 раз меньше, чем $S(\alpha)$?

в) Найдите наименьшее значение площади $S(\alpha)$.

Вариант 2

1. Точка движется по оси абсцисс из начала координат вправо до точки $A(x;\,0)$ со скоростью $1/3$, а затем по прямой до точки $B(2;1)$ со скоростью $1/5$. Обозначим через $t(x)$ время движения по всему пути.

а) Докажите, что

$$t(x)=3x+5\sqrt{x^2-4x+5}.$$

б) При каких x время движения меньше 11?

в) При каких c уравнение $t(x)=c$ имеет ровно одно решение?

г) При каком x время движения наименьшее?

2. Дана функция

$$f(x)=\cos^2 x-2(1-a)\cos x-4a.$$

а) При $a=1/4$ решите уравнение $f(x)=0$.

б) При $a=1/2$ найдите множество значений функции f.

в) При каких a неравенство $f(x)\geqslant 0$ верно для всех значений x?

3. Дана функция

$$f(x)=3^{2x+1}-8\cdot 6^x+4^{x+1}.$$

а) Вычислите $f(1/(\log_2 3-1))$.

б) Решите неравенство $f(x)<0$.

в) Решите уравнение $f(x+1)=5f(x)$.

Вариант 3

1. Парабола $y=-x^2+px+q$ пересекает ось абсцисс в точках $A\ (-1;\ 0)$ и $B\ (b;\ 0)$, $b>-1$. Рассмотрим треугольник ABC, где C — вершина параболы. Обозначим через h высоту треугольника, опущенную из вершины C, а через S — площадь треугольника ABC.

а) Докажите, что в условии задачи разность $p-q$ постоянна, и вычислите ее.

б) При каких значениях p ордината точки C равна 9?

в) Найдите зависимость площади S от величины p.

г) Какие значения может принимать величина $S+1/h$?

2. Рассмотрим треугольник, лежащий в первом квадранте, образованный осями координат и прямой $y=(3-a)x+a\ (a>3)$. Обозначим через h высоту этого треугольника, проведенную из начала координат.

а) Докажите, что $h=a/\sqrt{a^2-6a+10}$.

б) При каких a высота h равна 2?

в) Найдите наибольшее значение высоты h.

3. Дана функция

$$f(x)=\cos^3 x+\sin^4 x.$$

а) Решите уравнение $f(x)=1$.

б) Докажите тождество

$$f(x)-f(\pi/2-x)=(\cos x-\sin x)(1-\cos x-\sin x)^2/2.$$

в) Решите уравнение $f(x)=f(\pi/2-x)$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Гладкий легкий горизонтальный стержень прикреплен к вертикальной оси, проходящей через его конец. На стержне находится муфта массой $m=100$ г, соединенная пружиной длиной $l=12$ см с осью. Жесткость пружины $k=5$ Н/см.

а) Какую работу надо совершить, чтобы раскрутить эту систему до частоты вращения $n=10$ об/с?

б) Зависят ли работа и мощность при раскручивании от длительности процесса?

2. Шарик массой $M=200$ г подвешен на шнуре длиной $l=1{,}6$ м. Этот маятник отводят от положения равновесия на угол $\alpha_0=60°$ и отпускают. В момент прохождения шариком положения равновесия в него ударяет пуля массой $m=5$ г, летевшая горизонтально навстречу шарику со скоростью $v_1=150$ м/с, пробивает его и вылетает горизонтально со скоростью $v_2=100$ м/с.

а) На какой максимальный угол отклонится маятник после этого?

б) Можно ли подбором массы и скорости пули добиться того, чтобы угол максимального отклонения остался тем же, что и до удара?

3. В сосуде объемом $V=30$ л содержится идеальный газ при температуре $t=0$ °С. Плотность газа при нормальных условиях равна $\rho_0=1{,}3$ мг/см^3. После того как часть газа была выпущена, давление понизилось на $\Delta p=78$ кПа.

а) Найдите массу выпущенного газа.

б) Совершал ли газ при этом работу?

4. Калориметр содержал $m_в=500$ г воды и $m_л=300$ г льда, находящихся в термодинамическом равновесии. Кусок металла массой $m_м=1$ кг вынули из печи при температуре $t_м=240$ °С и быстро перенесли в калориметр. В результате весь лед растаял, но температура не изменилась. Удельная теплоемкость воды $c_в=4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг.

а) Какова была бы температура в калориметре, если бы масса металла была в два раза больше?

б) Изменяется ли в процессе внутренняя энергия системы «вода — лед — металл»?

5. Аккумулятор заряжается от источника напряжением $U=12$ В, при этом половина потребляемой мощности расходуется на тепло.

а) Определите ЭДС аккумулятора.

б) Какие электрические параметры аккумулятора изменяются в процессе его зарядки?

6. Четыре точечных заряда, равные $q=20$ мкКл каждый, расположены в вершинах квадрата со стороной $r=5$ см.

а) Какую работу надо совершить, чтобы расположить заряды вдоль одной прямой, лежащей в плоскости квадрата, на расстояниях r между соседними зарядами?

б) Одинаковой ли будет потенциальная энергия обеих систем?

7. Плоский контур, образованный замкнутым проводником, находится в однородном магнитном поле, индукция которого равна $B=3$ мТл и перпендикулярна плоскости контура. Площадь контура изменяют по закону $S=S_0(1-bt)$, где $S_0=0{,}5$ м^2, $b=0{,}2$ с$^{-1}$, t — время.

а) Определите ток, протекающий по контуру, если сопротивление проводника $R=30$ Ом.

б) Будет ли индуцируемый в контуре

ток препятствовать деформации контура?

8. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha=30°$, лежит квадратная проволочная рамка со стороной $l=15$ см. Рамка находится в вертикальном магнитном поле с индукцией $B=15$ Тл. Масса рамки $m=40$ г.

а) Какой минимальный ток нужно пропустить по рамке, чтобы она перевернулась, считая, что трение не позволяет ей скользить по плоскости?

б) Изменится ли этот ток, если рамка будет такой же площади, но круглой?

9. На поверхности озера, имеющего глубину $h=2$ м, находится круглый плот радиусом $r=8$ м. Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

а) Найдите радиус полной тени от плота на дне озера при освещении воды рассеянным светом.

б) Что увидит водолаз, стоящий на дне точно под центром плота, при рассматривании поверхности воды за пределами плота?

10. Две линзы с фокусными расстояниями $F=16$ см каждая имеют общую главную оптическую ось и расположены на двойном фокусном расстоянии друг от друга. Светящаяся точка находится на главной оптической оси линз на расстоянии $d=40$ см перед одной из них.

а) Найдите положение изображения точки в этой системе.

б) Изменится ли положение изображения, если пространство между линзами заполнить водой?

Публикацию подготовили Ю. Богачев, И. Деянов, А. Коточигов, М. Марамзина, А. Степанов

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена

Математика

Математический факультет

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$(a^{-1/2}-1)\cdot(a-2a^{0{,}5}+1)^{-1/2}$$

и найдите его значение при $a=0{,}16$.

2. Что больше:

$$\log_{0{,}5}\frac{x-1}{x} \quad \text{или} \quad \log_{1991}1?$$

Ответ обоснуйте.

3. Найдите значения k, при которых уравнение

$$3x^2-2kx-k+6=0$$

не имеет корней.

4. Постройте график функции

$$y=\sin\frac{\pi}{2}\cdot|\cos x|.$$

5. Решите неравенство

$$5^{-3x-6{,}5}>\frac{0{,}2^{x(x+5)}}{5^{0{,}5}}.$$

6. Решите уравнение

$$\left|\frac{x-3}{x+1}\right|=1.$$

7. У кассира набралось 9 рублей пятьюдесятью монетами по 20 и 15 копеек. Сколько у него было монет по 20 копеек и сколько — по 15? Решите задачу арифметическим способом.

8. Длины параллельных сторон трапеции равны 25 и 4, а длины непараллельных сторон — 20 и 13. Найдите высоту трапеции.

9. Один из катетов равнобедренного прямоугольного треугольника лежит в плоскости α, а другой образует с ней угол, равный 45°. Найдите угол, который образует гипотенуза с плоскостью α.

10. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 60°. Через вершину основания параллельно противолежащей ей диагонали проведена секущая плоскость так, что высота пирамиды делится точкой пересечения с этой плоскостью в отношении 1:2 (считая от основания). Найдите площадь сечения.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$(4-4b^{0{,}5}+b)^{1/2}\cdot(1-4b^{-1})^{-1}$$

и найдите его значение при $b=6{,}25$.

2. Что больше:

$$\log_{0{,}5}\frac{x}{x-1} \quad \text{или} \quad \log_{1917}1?$$

Ответ обоснуйте.

3. Найдите значения p, при которых уравнение

$$3x^2-2px-p+6=0$$

имеет два корня.

4. Постройте график функции

$$y=\cos\pi\cdot|\sin x|.$$

5. Решите неравенство

$$2^{-2x-2,5}<\frac{0,5^{x(x+3)}}{2^{0,5}}.$$

6. Решите уравнение

$$\left|\frac{x-1}{x+3}\right|=1.$$

7. На платформу погрузили 70 сосновых и еловых бревен общим весом 165 ц. Сосновое бревно весило 210 кг, а еловое — 250 кг. Сколько было тех и других бревен в отдельности? Решите задачу арифметическим способом.

8. Найдите площадь равнобочной трапеции, у которой высота равна 10, а диагонали взаимно перпендикулярны.

9. Катет прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90^\circ$) лежит на ребре двугранного угла величиной 30°, образованного этим треугольником и данной плоскостью α. Найдите расстояние от вершины B до плоскости α, если $AC=8$, $AB=3\cdot BC$.

10. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 10, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен 60°. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно к противолежащему ребру.

Задачи устного экзамена

1. Докажите, что

$$\sin 87^\circ-\sin 59^\circ-\sin 93^\circ+\sin 61^\circ=\sin 1^\circ.$$

2. Существует ли значение произведения и, если существует, чему оно равно:

$$\lg(\sin 0,1\pi)\cdot\lg(\sin 0,2\pi)\cdot\lg(\sin 0,3\pi)\cdots\lg(\sin 0,9\pi)?$$

3. Решите уравнение:

а) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$;

б) $\log_2\log_2(5x-1)=1+\log_2\log_2 x$;

в) $\dfrac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}}=5\cdot 0,04^{x-1}$.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{y+1}=1\dfrac{1}{6},\\[2mm] \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{y+1}=1\dfrac{1}{6}.\end{cases}$$

5. Решите неравенство:

а) $\log_{x-3}(x^2-4x+3)<0$;

б) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{2x-4x^2+2}>0,2^{-3-2x}$;

в) $\left|\dfrac{3|x|+2}{|x|-1}\right|<3$.

6. Основания трапеции равны 24 и 48. Определите длину отрезка, заключенного внутри трапеции, параллельного основаниям и проходящего через точку пересечения ее диагоналей.

7. Основанием пирамиды служит ромб со стороной равной 6 и острым углом 30°. Все двугранные углы при основании равны. Боковая поверхность пирамиды равна 36. Найдите (в градусах) величину двугранного угла при основании.

8. Известно, что две взаимно перпендикулярные образующие конуса делят окружность его основания на дуги 120° и 240°. Найдите объем конуса, если его высота равна H.

9. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны a и b ($a>b$), двугранный угол при ребре большего основания равен φ. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

10. Докажите, что объем треугольной пирамиды, отсекаемой от данного параллелепипеда плоскостью, проходящей через концы трех ребер, выходящих из одной вершины, не зависит от выбора этой вершины.

Публикацию подготовила З. Новосельцева

Ответы, указания, решения

т-Петербургский
дарственный университет

Математика

Вариант 1

1. $101=1+100$.
2. $9+4\sqrt{5}$; $9-4\sqrt{5}$.
3. $a\geqslant 3$. **Указание.** Выполнив замену $y=\log_a x$, решите первое неравенство.
4. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\left(2\pi-8\arccos\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.
5. $\dfrac{\pi}{48}(\sqrt{3}-1)^3$.

Вариант 2

1. $x=\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$, $y=-\dfrac{\pi}{6}$; $x=-\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}$, $y=-\dfrac{\pi}{6}$.
2. $x\in(-\infty;\,0]\cup\left[\dfrac{5}{7};\,1\right]$.
3. $x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{3}+\pi k$; $k\in \mathbf{Z}$.
4. $a\leqslant 4(3-\sqrt{6})$. **Указание.** Выполните замену $y=2\cdot 2^x+3\cdot 2^{-x}$.
5. Если $h>2r$, решений нет, если же $h\leqslant 2r$, то $S=h^2$ либо $S=2r^2+h^2/2$ — в зависимости от расположения квадрата относительно цилиндра.

Физика

Физический факультет

1. $V_1/V=(\rho_2-\rho)/(\rho_2-\rho_1)$.
2. $H=v_0^2/(2g(1-\mu\,\mathrm{ctg}\,\alpha))$.
3. См. рис. 1.
4. $A=RT_3(1-\sqrt{T_1/T_3})^2$.
5. $\rho_m=\rho_к\varepsilon/(\varepsilon-1)$, где $\rho_к$ — плотность, ε — диэлектрическая проницаемость керосина.
6. $v_{\min}=\sqrt{\dfrac{eU}{md}\,\dfrac{l(l/2+L)}{R}}$ при условии $\dfrac{l+2L}{2R}>\dfrac{l}{d}$,

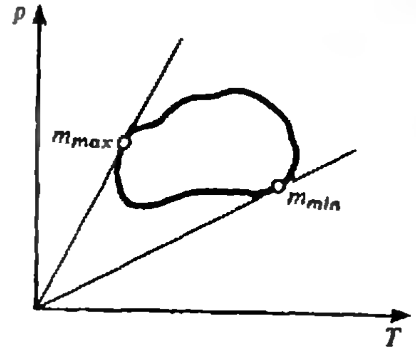


Рис. 1.

$v_{\min}=\sqrt{\dfrac{eU}{md}\,\dfrac{l^2}{d}}$ при условии $\dfrac{l+2L}{2R}<\dfrac{l}{d}$.

7. $H=hn=1{,}2$ м, где $n=1{,}33$ — показатель преломления воды.
8. Перед собирающей линзой на расстоянии $d=F(l+F)/l=36$ см.

матико-механический факультет
культет прикладной математики — процессов управления

1. $l=\sqrt{2}\,v_0\tau$.
2. Сила равна $F_{\min}=mg/(2\sqrt{2})$ и приложена перпендикулярно диагонали куба; $\mu_{\min}=1/3$.
3. $h=p_0(n-1)/(\rho g)$, где p_0 — атмосферное давление, ρ — плотность воды.
4. $\Delta m=\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{100\,\%}\,\dfrac{p_н VM}{RT}=0{,}747$ кг, где $M=18$ г/моль — молярная масса воды, $R=8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная.
5. $U=\mathscr{E}+(\mathscr{E}_0-\mathscr{E})r/(R+r)=27{,}5$ В.
6. $P=IU(1-I/I_0)=96$ Вт.
7. $\alpha=\arcsin(n_2/\sqrt{n_1^2+n_2^2})$.
8. $v'=vF/(d-F)=4$ см/с.

Геологический факультет

1. $\mu_{\min}=1$.
2. $l_{1,2}=\dfrac{mg\cos\alpha\pm F_{тр}}{m\omega^2\sin^2\alpha}$ (два значения расстояния шарика от начала стержня связаны с неопределенностью направления силы трения, заданной в условии).
3. $p_2=2p_1T_2/T_1=40\,000$ Н/м^2.
4. $\Delta V/V_1=(T_2-T_1)/T_1=0{,}04=4\,\%$.
5. На резисторе сопротивлением R_1.
6. $\Delta f=f_0I\tau/Q$.
7. $\alpha=2\arccos(L/(2a))$.
8. $d=\dfrac{l}{\sin\alpha}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}-\dfrac{1}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)=2{,}5$ см.

т-Петербургский государственный
ический университет

Математика

Вариант 1

1. $D(f)=(0;\,8)\cup(8;\,+\infty)$; $f([0{,}25;\,0{,}5])=[4;\,32]$.
2. $x=\dfrac{1}{2\log_2 3-1}$, $y=\dfrac{2}{2\log_2 3-1}$.

Указание. Сложите уравнения системы и, пользуясь свойствами логарифмов, получите, что $y=2x$.

3. $[\log_{13} 5;\,1]$.
4. 1.

5. 1:2; 1:1; 1:3.

Указание. Воспользуйтесь тем, что у коллинеарных векторов одноименные координаты пропорциональны.

Вариант 2

1. -2; 2.
2. $x\in[-5;\ -4/5]\cup[2;\ +\infty]$.
3. -4, 2, -1 при $a=-8$. **Указание.** Обозначив корни уравнения через x_1, x_2, x_3 и через q — знаменатель прогрессии, запишите равенство $x^3+3x^2-6x+a=\left(x-\dfrac{x_2}{q}\right)(x-x_2)(x-x_2q)$; раскрыв скобки, приравняйте коэффициенты при одинаковых степенях x.
4. $a\in(-12/5;\ 0]$. **Указание.** Так как неравенство должно выполняться при любых x, то, в частности, оно должно быть верным при $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, откуда получаем ограничение на a. Считая $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, разделим обе части неравенства на $\cos^2 x$ и обозначим $\operatorname{tg} x=z$. В результате приходим к системе неравенств относительно z и a.
5. 3:1. **Указание.** Обозначим через O_1 и r центр и радиус первой сферы, а O_2 и R — второй (для определенности можно считать $r\leqslant R$). Пусть A_1 и B_1 — точки касания соответственно первой и второй сфер с гранями двугранного угла, отличные от A и B.

Ближайшая цель — вычисление длины отрезка AB. Обозначим его d. Заметив, что d — диагональ равнобочной трапеции A_1AB_1B, найдите прежде всего ее стороны. Боковая сторона трапеции, определяемая из четырехугольника $A_1O_1O_2B$, равна $2\sqrt{rR}$. Проведя через O_1 плоскость, перпендикулярную ребру двугранного угла, убедитесь, что $\angle O_1A_1A=2\pi/3$. Учитывая, что $O_1A_1=O_1A=r$, найдите основания трапеции: $A_1A=r\sqrt{3}$, $B_1B=R\sqrt{3}$. Затем докажите, что интересующая нас величина d выражается равенством $d=\sqrt{7Rr}$.

Вычислите теперь длину отрезка AK. С этой целью рассмотрите сечение первой сферы плоскостью, определяемой точками A, B и A_1. По отношению к окружности, по которой сфера пересекается с этой плоскостью, A_1B — касательная, а AB — секущая. Воспользуйтесь известной из планиметрии теоремой относительно этих отрезков и убедитесь, что $BK=\dfrac{4}{7}d$, а $AK=\dfrac{3}{7}d$. Аналогично, $BL=AK=\dfrac{3}{7}d$, т. е. $KL=\dfrac{1}{7}d$ и $AK:KL=3:1$.

Вариант 3

1. $\dfrac{33}{20}$.
2. $[0;\ 1]\cup[4;\ +\infty)$. **Указание.** Покажите, что неравенство можно преобразовать к виду

$$(\sqrt{x}-2)(2^x-2)\left(2^x-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0.$$

Воспользуйтесь методом интервалов.

3. $\dfrac{1}{2}x+3$, $-\dfrac{1}{2}x-1$. **Указание.** В соответствии с условием

$$1{,}5x^2+15x+26=(ax+b)^3+(cx+d)^3.$$

Правую часть этого равенства преобразуйте, раскрыв скобки и приведя подобные члены. Затем, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящих в левой и правой частях равенства, получите систему уравнений, связывающих неизвестные a, b, c, d.
4. **Указание.** Если три ребра пирамиды, являющиеся ребрами прямых двугранных углов, выходят из одной вершины, то отрезки, соединяющие середины любых двух противоположных ребер, оказываются равными. (Для доказательства проведите плоскость, проходящую через середины любых двух пар противоположных ребер, и убедитесь в том, что сечение пирамиды такой плоскостью будет прямоугольником.) Но это невозможно, поскольку, согласно условию, у пирамиды по крайней мере два из трех таких расстояний различны.

Остается случай, когда из одной вершины выходят только два ребра, являющихся ребрами прямых двугранных углов, а третье такое ребро имеет общую вершину лишь с одним из двух первых. Такой пирамидой является пирамида $SABC$, у которой основание ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом B, а боковое ребро SA перпендикулярно основанию. Воспользуйтесь методом координат: в качестве начала координат возьмите точку A и направьте ось Ax параллельно BC, а оси Ay и Az, соответственно,— вдоль ребер AB и AS. Пусть $BC=x$, $AB=y$, $AS=z$. Найдите координаты точек K, L, M, N, P, Q — середин ребер BC, AS, AB, CS, AC, BS, а затем — длины отрезков KL, MN, PQ: Убедитесь, что $PQ=MN<KL$. Заметив, что большее ребро пирамиды есть SC, докажите, что $SC^2=KL^2+PQ^2$.

5. $a=-1$. **Указание.** Положив $\operatorname{ctg} x=z$, докажите, что второе уравнение равносильно уравнению $z=-1$. Разделив первое из указанных в условии уравнений на $\sin^3 x$, убедитесь, что оно может быть записано в виде

$$3-a(2a+1)z^3+2a^2z(1+z^2)=0, \qquad (\bullet)$$

где $z=\operatorname{ctg} x$. Так как это уравнение должно быть равносильно уравнению $z=-1$, то при $z=-1$ уравнение $(\bullet)$ должно превращаться в верное равенство. Это позволяет найти значения a. В соответствии с условием задачи, нужно проверить, будет ли при найденных значениях уравнение $(\bullet)$ равносильно уравнению $z=-1$.

Вариант 4

1. $\sqrt[3]{\dfrac{5}{9}}$. 2. $(-\infty;\ 0]\cup[\log_6 5;\ 1)$.

3. $\left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$; $\left(-\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Указание. Найдя $x=x_k$ и $y=y_n$ (k, $n\in Z$) из системы, подставьте их в выражение x^2+y^2-

$-4y=x^2+(y-z)^2-4$. Но $x^2+(y-2)^2-4$ имеет наименьшее значение, когда минимальны первые два слагаемых. Поэтому нужно подобрать целые k и n так, чтобы $|x_k|$ и $|y_n-2|$ были минимальными.

4. $\dfrac{(R+r)^2}{2(R+r+\sqrt{R^2+6Rr+r^2})}$. Указание. Рассмотрите сечения пар «параллельных» цилиндров плоскостями, перпендикулярными их осям и проходящими через центр искомой сферы.
5. $a=-2$ и $a=-1$. План решения. Сначала убедитесь, что система линейных уравнений несовместна при $a=-2$ и имеет единственное решение при $a\neq-2$. Покажите, что последнее уравнение второй системы при $a=-2$ не имеет решений и потому вторая система несовместна. Обращая внимание на то, что в каждое из уравнений нелинейной системы неизвестная y входит лишь в четной степени, докажите, что эта система может иметь единственное решение только вида $(x_0;\ 0)$. Поэтому при $a\neq-2$, подставив в первое уравнение нелинейной системы $y=0$, найдите значения x, а при этих значениях (и при $y=0$) из второго уравнения найдите значения a. Установите, при каких значениях a решения обеих систем совпадают.

Физика

1. $l=8h\sin\alpha$.
2. $h=Mv^2/(2g(m+M))$.
3. $F=\rho\pi d^2v^2/4$.
4. $v=\sqrt{2FS_1/(\rho(S_1^2-S_2^2))}$
5. Перпендикулярная дну сосуда составляющая силы равна $F=\rho_0ga^3(\rho\cos\alpha/\rho_0+1/2\sin\alpha+h/a)+pa^2$, параллельная — $F_1=(\rho-\rho_0)ga^3\sin\alpha$.
6. $T=2\pi\sqrt{m/(2\rho Sg)}$.
7. $\Delta m=mn(k-1)/(n-1)$.
8. $A=(kr_0-kx_0/2-2mg)x_0$.
9. $I=Bv\sin\alpha/(\Delta R(1+\sin\alpha))=0{,}27$ А, ток обтекает контур против часовой стрелки.
10. $x=2R(n-1)/(2-n)=R$.

[redacted]кт-Петербургский тротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. а) $(-\infty\ \ 1/a]$ при $a<0$; $\varnothing$ при $0\leqslant a<1/5$; $[1/a;\ 5]$ при $a\geqslant1/5$.
б) $x=9/2$. в) $x\in[1/5;\ (13-\sqrt{124})/9]$.
2. а) $x=1$ или $x=-2$. б) -1. в) $x\in(-3;\ (-1-\sqrt{21}/2]\cup[(-1+\sqrt{21}/2;\ 2)$. г) $[-2\log_3 5/2;\ +\infty)$. Указание. Сначала найдите множество значений функции $g(x)=(x+3)(2-x)$ на области определения функции f.
3. б) $\alpha=\operatorname{arctg}(\sqrt{3}/2)$. г) $3\sqrt{3}/2$. Указание. Нетрудно заметить (и к этому подталкивает решение пункта б), что $S(\alpha)=\dfrac{1}{t(1-t^2)}$, где $t=\operatorname{tg}\alpha$. Тогда $f_{\min}=1/g_{\max}$, где $g(t)=t(1-t^2)$, а $t\in(0;\ 1)$.

Вариант 2

1. б) $x\in(1/8;\ 2)$. в) $c=10$ или $c>5\sqrt{5}$. г) $x=5/4$. Указание. Для решения пунктов в), г) проще всего исследовать функцию $f(x)$ с помощью производной при $x\geqslant0$ (так как по условию точка движется вправо).
2. а) $x=\pm2\pi/3+2\pi k$, $k\in Z$. б) $[-9/4;\ 0]$. Указание. Найдите множество значений функции $g(t)=t^2-t-2$, где $t=\cos x\in[-1;\ 1]$. в) $a\leqslant-1/2$. Указание. Условие $f(x)\geqslant0$ равносильно тому, что $(\cos x-2)(\cos x+2a)\geqslant0$, откуда при $a\leqslant-\dfrac{1}{2}\cos x$ для всех x.

3. а) 0. Указание. $1/(\log_2 3-1)=\log_{3/2}2$. Затем вынесите 4^x за скобку. б) $x\in(-1;\ \log_{3/2}2)$. в) $x=0$. Указание. Выполните замену $t=(3/2)^x$.

Вариант 3

1. а) $p-q=-1$. б) $p=4$. в) $S=(p/2+1)^3$. г) $[5/\sqrt[5]{108};\ +\infty)$. Указание. Найдите множество значений функции $g(t)=S+1/h=t^3+t^{-2}$, где $t=p/2+1$, при $t>0$ (что следует из условия $b>-1$).
2. б) $a=4+2\sqrt{6}/3$. в) $\sqrt{10}$. Указание. Наиболее простые вычисления получатся, если рассмотреть функцию $g(t)=1/h^2=1-6t+10t^2$, где $t=1/a\in(0;\ 1/3)$. Тогда (т. к. $h>0$) $h_{\max}=1/\sqrt{g_{\min}}$.
3. а) $x=2\pi k$, $x=\pi/2+\pi k$, $k\in Z$. в) $x=\pi/4+\pi k$, $x=2\pi k$ или $x=\pi/2+2\pi k$, $k\in Z$. Указание. Используйте тождество из пункта б).

Физика

1. а) $A=2\pi^2n^2l^2mk(k+4\pi^2n^2m)/(k-4\pi^2n^2m)^2\approx113$ Дж. б) Работа не зависит, а мощность зависит.
2. а) $\alpha_{\max}=\arccos\left(1-\dfrac{(u-m(v_1-v_2)/M)^2}{2gl}\right)=40°$, где $u=\sqrt{2gl(1-\cos\alpha_0)}$ — скорость шарика в момент прохождения положения равновесия. б) Можно, если импульс, переданный пулей шарику, будет равен (по модулю) удвоенному импульсу шарика: $mv_1-mv_2=2Mu$.
3. а) $\Delta m=\rho_0V\Delta p/p_0=3\cdot10^{-2}$ кг, где $p_0=10^5$ Па — нормальное давление. б) Да, так как произошло изменение объема газа.
4. а) $t=m_{\text{л}}\lambda t_{\text{м}}/(c_{\text{в}}(m_{\text{в}}+m_{\text{л}})t_{\text{м}}+2m_{\text{л}}\lambda\approx24$ °C. б) Нет.
5. а) $E=U/2=6$ В. б) Уменьшается внутреннее сопротивление.
6. а) $A=(\sqrt{2}-1/3)q^2/(4\pi\varepsilon_0r)\approx76{,}8$ Дж, где $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная. б) Нет, так как полем совершается работа по перемещению зарядов.
7. а) $I=BS_0b/R=10^{-5}$ А. б) Да, из-за сил Ампера, направленных противоположно перемещениям элементов контура.
8. а) $I_{\min}=mg\operatorname{ctg}\alpha/(2lB)=0{,}15$ А. б) Ток в рамке возрастет.
9. а) $R=r-h/\sqrt{n^2-1}\approx5{,}8$ м. б) Водолаз увидит изображение дна, вследствие эффекта полного отражения.
10. а) $f=d-2F=8$ см. б) Да, так как изменятся фокусные расстояния линз.

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 2,5. 2. $\log_{0,5}\frac{x-1}{x}>\log_{1991}1$ при $x>1$; $\log_{1991}1>\log_{0,5}\frac{x-1}{x}$ при $x<0$. 3. $-6<k<3$. 5. $(-\infty;\ -4)\cup(2;+\infty)$. 6. 1. 7. 20 монет по 15 копеек и 30 монет по 20 копеек. 8. 12. 9. 30°. 10. $64\sqrt{3}/3$.

Вариант 2

1. 25/18. 2. $\log_{1917}1>\log_{0,5}\frac{x}{x-1}$ при $x>1$; $\log_{0,5}\frac{x}{x-1}>\log_{1917}1$ при $x<0$. 3. $(-\infty;\ -6]\cup$ $\cup[3;\ +\infty)$.

5. $(-2;\ 1)$. 6. -1. 7. 25 сосновых и 45 еловых бревен. 8. 100. 9. $\sqrt{2}$. 10. $\frac{100}{3}\sqrt{3}$.

Задачи устного экзамена

2. 0. 3. а) $\frac{\pi}{2}k$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\ (k\in Z)$; б) $(5-\sqrt{21})/2$, $(5+\sqrt{21})/2$; в) 3. 4. (3; 2). 5. а) $(2+\sqrt{2};\ 4)$; б) $\left(-\infty;\ \frac{1+\sqrt{6}}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{1+\sqrt{6}}{2};\ +\infty\right)$; в) $(-1;\ -1/6)\cup(1/6;\ 1)$.

6. 32. 7. 60°. 8. $\frac{2}{3}\pi H^3$. 9. $\sqrt{3}(a^2-b^2)/(4\cos\varphi)$.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 3)

1. Деду 66 лет, внуку 11 лет.
2. Пусть в первый день картошка стоила x рублей за килограмм, молоко — y рублей за литр и яйца — z рублей за десяток. Тогда вся покупка в первый день стоила $x+y+z$ рублей, во второй день $3x+4y+5z=60$ рублей, а в третий $6x+5y+4z=66$ рублей. Сложив полученные уравнения, получим $9(x+y+z)=126$ рублей, откуда $x+y+z=14$ рублей.
3. $135964\times5=679820$. (Указание: заметьте сначала, что C может равняться лишь 0 или 9.)
4. Заметим, что условия задачи выполнимы лишь в том случае, если указанные суммы лежат в противоположных углах шахматной доски. Тогда заполнение доски производится однозначно (рис. 2), и искомая сумма равна 160 копеек.
5. Обозначим радиусы данных концентрических окружностей через R и r, а радиус построенной окружности через a. Из прямоугольного треугольника OAB (рис. 3) получаем, что $a^2=R^2-r^2$, поэтому $\pi a^2=\pi R^2-\pi r^2$. Но слева стоит площадь построенного круга, а справа — разность площадей данных кругов, т. е. площадь кольца между ними.

3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11
5	6	7	8	9	10	11	12
6	7	8	9	10	11	12	13
7	8	9	10	11	12	13	14
8	9	10	11	12	13	14	15
9	10	11	12	13	14	15	16
10	11	12	13	14	15	16	17

Рис. 2.

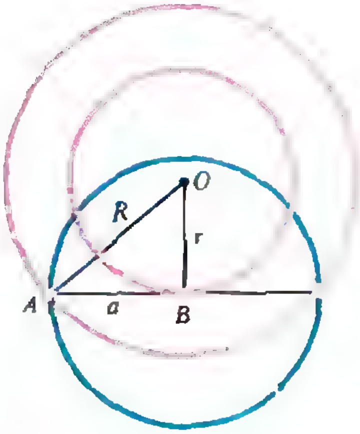


Рис. 3.

Конкурс «Математика 6—8»
(см. «Квант» № 12 за 1991 г.)

10$^{\bullet}$. Заметим, во-первых, что в каждом убитом может находиться не более 6 пуль, а ровно 6 пуль может быть лишь в случае, когда его «убийцы» расположены в вершинах правильного шестиугольника и убитый находится в его центре. Убитый гангстер, назовем его A, и сам стреляет в одного из этих шести убийц.

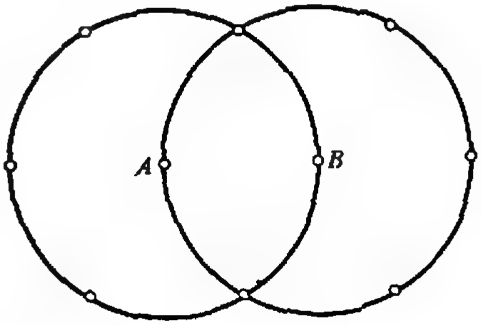


Рис. 4.

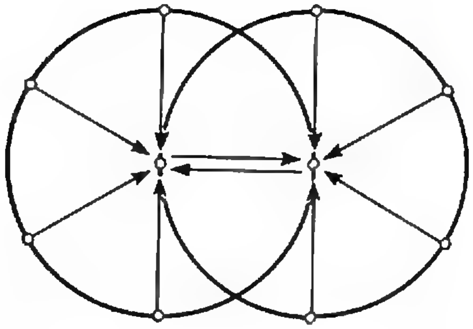


Рис. 5.

назовем его *B*. Нетрудно показать, что если в *A* шесть пуль, то в *B* не более четырех и четыре будет лишь в случае, изображенном на рисунке 4. Поскольку было выпущено 50 пуль, а в каждом убитом не более 6 пуль, то убито не меньше девяти гангстеров. Если убито ровно 9 гангстеров, то из них не меньше пяти убито шестью пулями. Но тогда должно быть еще 5 убитых гангстеров, что противоречит предположению, что было убито ровно девять. Следовательно, их убито не меньше десяти. Ситуация, в которой оказывается ровно 10 убитых гангстеров, изображена на рисунке 5 (гангстеры разбиваются на 5 групп по 10 человек, и в каждой группе оказывается двое убитых).

11. Обозначив стороны трех квадратов через x, y и z, как на рисунке 6, можно выразить через них стороны остальных квадратов, что и сделано на этом рисунке. Поскольку длины верхнего и нижнего оснований равны, то получим соотношение: $11x+3y=7x+16y-z$. А из равенства боковых сторон следует, что $8x+8y-3z=6x+5y+z$. Упрощая уравнения, получим: $z=13y-4x$ и $4z=2x+3y$. Исключая z, получим: $18x=49y$. Так как числа 18 и 49 взаимно просты, то наименьшими натуральными числами x и y будут 49 и 18. При этом $z=38$. Таким образом, стороны прямоугольника оказываются равными 422 и 593.

12. Ответ: $21649\times513239=11111111111$. Стоит отметить, что число, состоящее из одиннадцати единиц, единственным образом раскладывается в произведение. Этот факт помог многим быстрее прийти к ответу.

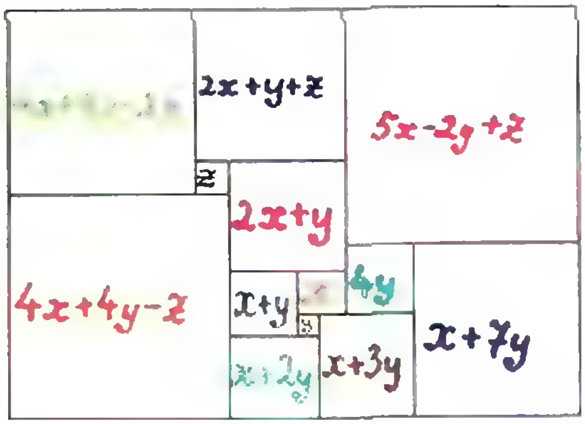


Рис. 6.

Квант

Главный редактор — академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович,
Ю. Лысов, Т. Петрова, А. Сосинский,
А. Стасенко, С. Табачников, В. Тихомирова,
В. Уроев, А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, Л. Кардасевич,
С. Коновилов, Е. Коршунова, А. Котова,
А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Г. Антонов, Е. Барк, С. Лухин, Э. Назаров,
П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Т. Вайсбегр

103006, Москва К-6, ул. Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»,
тел. 250-33-54, факс 251-55-57

Сдано в набор 30.01.92. Подписано к печати 16.04.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,31.
Тираж 88 692 экз. Заказ 81. Цена 1 р. 10 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

СЛОНЫ-ХАМЕЛЕОНЫ

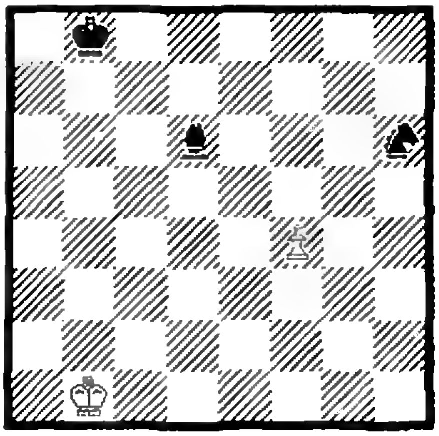
Шахматы — игра неисчерпаемая, сомнения тут нет, но все же иногда становится немного скучновато делать одни и те же ходы одними и теми же фигурами. Поэтому особо изобретательные люди стремятся придумать что-нибудь оригинальное, внести в правила игры какие-то нововведения, тем самым нарушая наши старые привычки, изменяя стандартные способы перемещения фигур, а иногда и саму цель игры.

Вот совсем новая игра, которую предложил Вадим Петросян. Новая игра отличается от старой некоторыми дополнительными возможностями перемещения фигур, да и то не всех. Ладье, кроме обычных прямолинейных ходов, разрешается переходить на соседние поля по диагонали (без взятия), а слону, помимо диагональных ходов, можно пойти на соседние поля по вертикали или горизонтали (тоже без взятия).

Для ферзя и короля никаких новшеств не вводится, а вот коню разрешается, кроме стандартного хода буквой «Г», пойти на одно поле в любом направлении (опять-таки без взятия), т. е. он чувствует себя еще и королем. Пешкам можно не только бить по диагонали, но и ходить, могут они и сдвинуться вбок по горизонтали на одно поле. Двойных ходов у пешек нет, отменяется и правило взятия на проходе. Наконец, в новой игре отсутствует рокировка.

Свою игру В. Петросян назвал «супершахматы», намекая на то, что она более высокого порядка, чем обычные шахматы. И в самом деле, фигуры здесь более раскрепощены, их маневры еще загадочнее и неожиданнее, чем в традиционной игре. Например, белопольных и чернопольных слонов здесь вообще нет, они превратились в хамелеонов и стали универсалами.

Для иллюстрации рассмотрим один простенький пример. В обычных шахматах белым тут, как говорится, делать нечего: их единственная пешка теряется, слон и конь без труда справляются с неприятельским королем. Но в супершахматах пешка — большая шалунья, того и гляди, проскочит в ферзи.



1. f4—g5! Пешка имеет право пойти по диагонали, чем и пользуется. ***1...Kh6—g6! 2. g5—f6.*** И белые, и черные делают ходы, разрешенные в супершахматах. **2...Cd6—e6!** Пешка блокирована, и дальше проблем с нею не будет.

Подобных забавных примеров можно привести множество. В супершахматах приходится перестраивать все — дебютную теорию, законы тактики и стратегии, и, главное, теперь совершенно иначе выглядит эндшпиль.

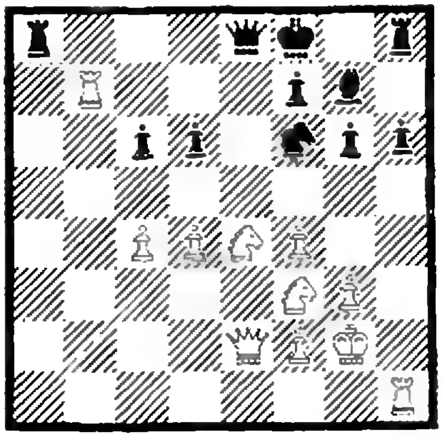
Любопытно, что автор игры, кандидат философских наук В. Петросян, увлек своей игрой сотрудников Фонда философской инициативы «Апейрон», и эта организация провела несколько турниров. В одном из них за победу сражались гроссмейстеры М. Таль, Ю. Авербах, Е. Васюков и И. Зайцев. Победителем вышел многолетний секундант А. Карпова гроссмейстер И. Зайцев, выиграв все три партии. Вот одна из них.

И. Зайцев — Ю. Авербах

1. h2—g3 a7—b6 2. g2—f3. *Пешки направляются к центру, в обычной игре они стараются делать это при взятии.* **2...g7—g6 3. f3—f4 Cf8—g7 4. b2—c3 d7—d6 5. e2—e3 Kb8—c6 6. c3—d4 d6—c5 7. c2—c3 Cc8—e6 8. a2—a3 Kc6—a5 9. Cc1—c2.** Слон меняет окраску, чтобы прикрыть поле c2 от вторжения. Однако у черных был сильный ответ 9...c5—c4! с угрозой c4—b3!

9...Kg8—f6? 10. d2—d3 (предупреждая указанный маневр) ***10...Kf6—d7.*** По мнению Зайцева, черным все же стоило развить ту же атакующую линию на внедрение пешки: 10...b6—b5 с идеей 11...c5—c4, 12...c4—b3 либо 11...b5—a4, 12...a4—b3.

11. Лa1—b2. Теперь ход b6—b5 окончательно предупрежден. **11...c5:d4 12. e3:d4 b6—c5 13. Kg1—f3 Ce6—d5 14. d3—e4! Cd5—c4 15. a2—b3!** Белые избавились от всех слабостей и готовы к решающим действиям. **15...Cc4:f1 16. Kpe1:f1 c5:d4 17. c3:d4 Ka5—c6 18. Cc2—c3!** Слон возвращает свой исходный цвет! **18...Kc6—b5 19. Cc3—c4!** Слон — настоящий хамелеон, перекрашивается, сколько ему вздумается. **19...Kb5—d6 20. Kb1—d2 Kd6:c4 21. b3:c4 b7—c6 22. e4—e5 c7—d6 23. e5:d6 e7:d6 24. Kd2—e4 Kd7—f6 25. Фd1—e2 Kpe8—f8 26. Лb2—b7 h7—h6 27. Kpf1—g2 Фd8—e8.** В супершахматах рокировки запрещены, но короли кое-как уже пристроились. Пешки белых активнее, и это решает дело.

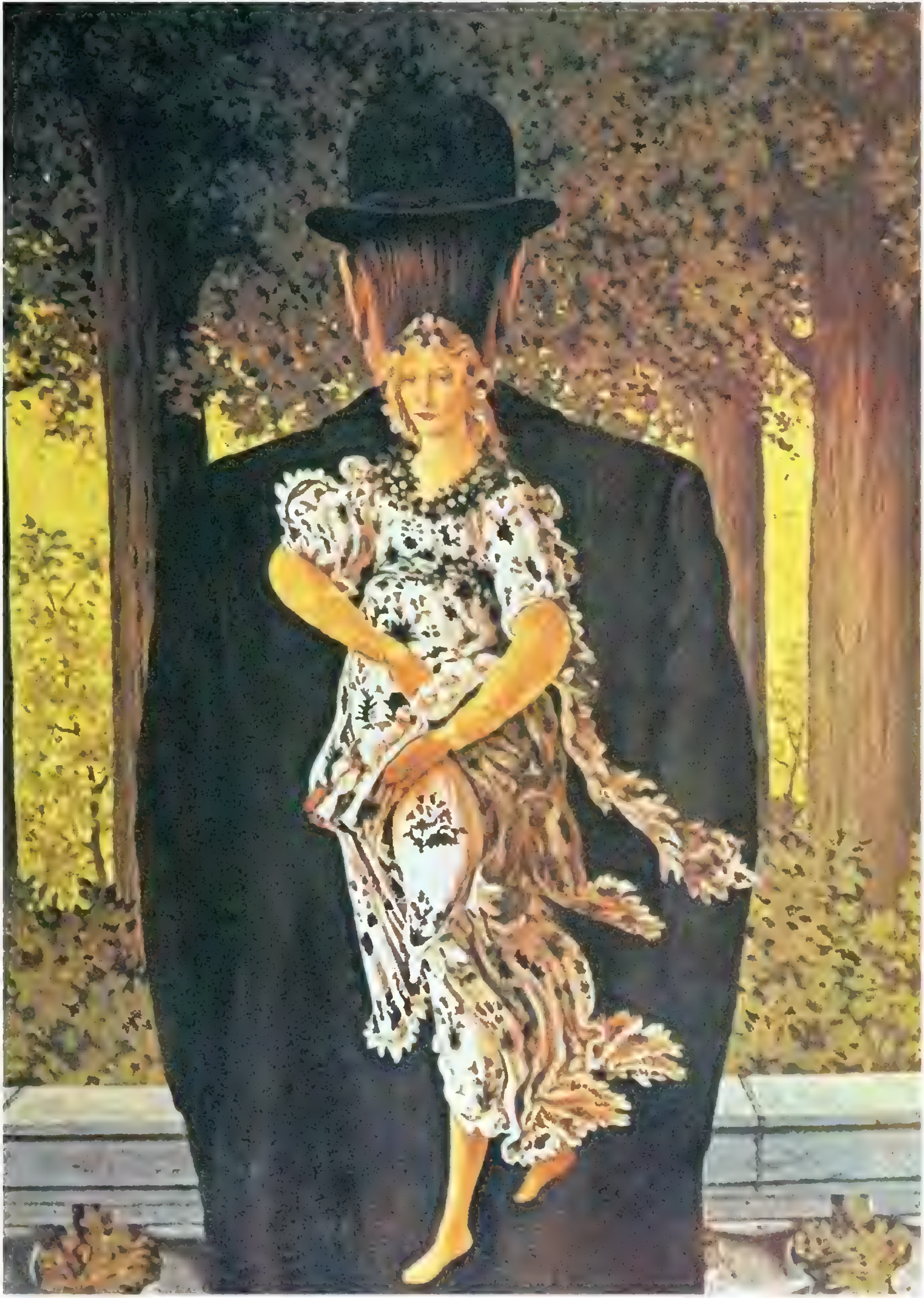


28. f4—e5! Kf6:e4 29. Фe2:e4 Kpf8—g8 30. c4—d5! c6:d5 31. Фe4:d5 d6—e6! Таким способом удается предотвратить страшную угрозу Лb7:f7.

32. Фd5—c4 Лa8—c8 33. Лb7—c7 Лc8:c7 34. Фc4:c7 Фe8—a8 35. e5:d6. Сразу решало 35. d4—c5! Kpg8—h7 38. c5—c6 Лh8—c8 37. c6—b7!

35...Kpg8—*h*7 36. d6—c6! Лh8—f8 37. c6—b7 Фa8—b8 38. Лh1—c1. Черные сдались, поскольку нет защиты от b7—c8Ф.

Е. Гик



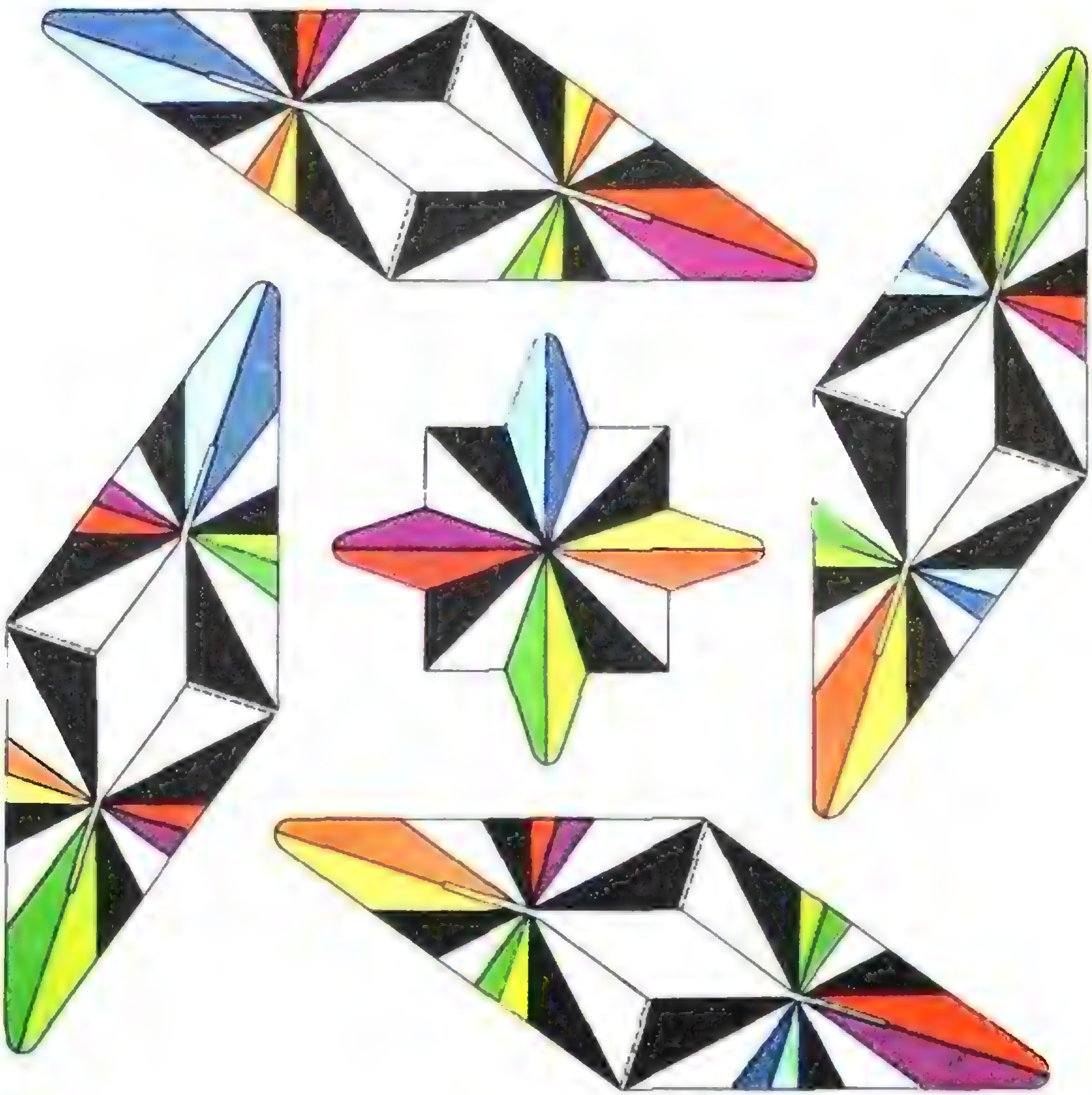
1 р. 10 к.
Индекс 70465

ГОЛОВОЛОМКА «ЗВЕЗДА»

Знаете, что такое хорошая головоломка? Ответ, который нередко приходится слышать, звучит так: «Хорошая головоломка та, которая выглядит простой, но которую очень трудно решить». Попробуйте проверить себя (и это правило) на новой головоломке «Звезда».

Она состоит из четырех похожих на букву «Л» элементов. Требуется переплести их между собой, чтобы получить розетку, показанную на рисунке. Попытайтесь сначала сложить розетку, не обращая внимания на распределение цветов. Четыре элемента головоломки вы можете вырезать по выкройке журнала. Перед сборкой выкройки согните пополам, но не склеивайте половинки. Внутрь розетки нужно еще спрятать квадратный листочек бумаги. Сторона этого листочка равна ширине основания Л-образного элемента.

А. Грабарчук



НОМЕР
5

Квант
5 1992

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал*

*Учредители —
Президиум
Российской академии наук,
Президиум
Академии педагогических наук
и коллектив редакции
журнала «Квант»*

*Москва, «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы*

В номере:

2 *Ю. Соловьев.* Открытие Вселенной
10 *А. Стасенко.* Самолет в озоне
17 Орбиты, которые мы выбираем

Задачник «Кванта»

23 Задачи М1341—М1345, Ф1348—Ф1352
25 Решения задач М1311—М1315, Ф1328—Ф1332

«Квант» для младших школьников

33 Задачи
34 *Том Тит.* Простые затеи

Информатика

38 *Л. Штернберг.* Несколько тактов из жизни центрального процессора

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»
Физика 9—11:

42 Кое-что о силе тяги
44 Вариационные принципы
46 Избранные школьные задачи по физике

Математический кружок

48 *Р. Смаллиан.* Остров Ваал

Р — значит ракета

52 *А. Коржуев.* Движения спутников и их возмущения

Информация

56 Новый прием в ВЗМШ — на отделение «Физика»
57 ЗИФМШ объявляет прием

Олимпиады

60 Канадские математические соревнования

65 **Варианты вступительных экзаменов 1991 г.**

74 **Ответы, указания, решения**

Нам пишут *(59, 64)*

«Квант» улыбается *(55)*

Наша обложка

1 *Тор — любимая фигура топологов. За что они его любят, вы узнаете из нашего «Калейдоскопа».*
2 *Иллюстрация русского художника А. Н. Бенуа (1870—1960) к поэме А. С. Пушкина «Медный всадник». Каким образом конь удерживается в равновесии? Младшим школьникам ответить на этот вопрос поможет маленький опыт из «Простых затей» (с. 34).*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка «Тик-так».*

© «Квант», 1992

ОТКРЫТИЕ ВСЕЛЕННОЙ

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

Из всех картин природы, развертывающихся перед человеческими глазами, самая величественная — картина звездного неба. С древнейших времен эта картина будила человеческое воображение, вызывая к жизни то могучее интеллектуальное течение, которое мы теперь называем наукой. О том, как человек проникал в тайну мироздания, в тайну движения небесных тел — наш рассказ.

Первые воззрения древних на мироздание основывались на непосредственно видимом. Для древних египтян и вавилонян Вселенная отождествлялась с Землей, которая представлялась громадным диском, плавающим по беспредельному океану. Небо они представляли опрокинутой чашей, опирающейся на плоскость, с вкрапленными во внутреннюю поверхность чаши звездами.

Упорядоченные конфигурации звезд называются созвездиями. Созвездия почти не меняются день ото дня, год от года и даже век от века. За ночь звезды поворачиваются относительно некоторой неподвижной точки, находящейся ныне вблизи Полярной звезды, будто чаша вращается как единое целое вокруг оси, проходящей через эту точку и глаз наблюдателя. Тщательные наблюдения показывают, что чаша совершает один оборот за 23 часа 56 минут.

Из-за вращения чаши некоторые звезды уходят за горизонт на западе, тогда как другие восходят на востоке. Это наблюдение наводит на мысль, что чаша представляет собой часть полной сферы, причем звезды располагаются на ее поверхности. Эта сфера называется небесной сферой или сферой неподвижных звезд. Две неподвижные точки, в которых небесная сфера пересекает ось вращения, называются полюсами мира. Воображаемая окружность на небесной сфере, точки которой равноудалены от обоих полюсов, называется небесным экватором.

Шарообразная Земля

Итак, наблюдения за суточным движением звезд привели древних астрономов к представлению о небесной сфере. Сделать вывод о том, что Земля имеет форму шара, оказалось труднее. Мысль о шарообразности Земли высказали древнегреческие ученые в начале V века до новой эры. К этой мысли они пришли на основании рассказов путешественников, которые заметили, что высота северного полюса мира возрастает по мере перемещения к северу и уменьшается при движении в южном направлении (рис. 1).

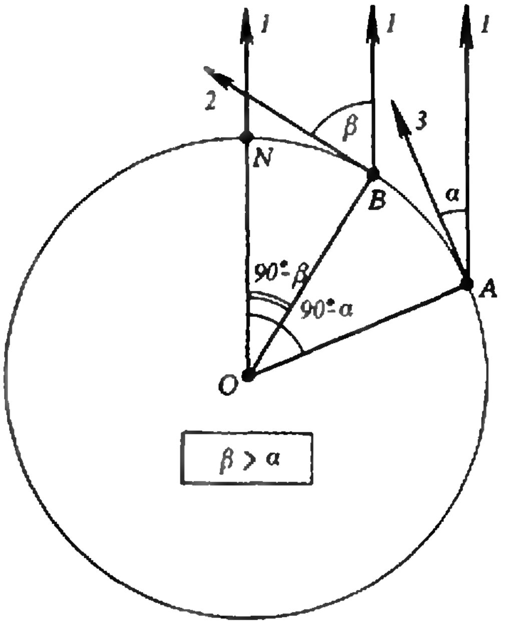


Рис. 1. 1 — направление на северный полюс мира; 2 — направление на горизонт в точке B; 3 — направление на горизонт в точке A.

Первое настоящее измерение радиуса Земли было проведено египетским греком Эратосфеном (276—195 гг. до н. э.), уроженцем города Сиена (ныне Асуан) на юге Египта. Еще будучи подростком он заметил, что в Сиене ежегодно 21 июня в полдень Солнце находится точно над головой, и вертикальные стволы деревьев не отбрасывают теней. Позже в Александрии, расположенной на севере Египта, он обнаружил, что тени здесь в указанное время не исчезают, и в гениальном озарении понял, что причина этому — кривизна поверхности Земли. Александрия находится на 480 миль севернее Сиены, и когда Солнце в зените над Сиеной, над Александрией оно должно располагаться на некотором угловом расстоянии от зенита. Этот угол можно измерить по тени вертикального ствола дерева или колонны в Александрии (рис. 2). Угол определяется по высоте дерева или колонны и измеренной длине тени в Александрии в момент, когда в Сиене тень не отбрасывается (полдень 21 июня). Углы α и β равны как внутренние накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых. Измеренное значение составляло α=7°, следовательно, угол в 7° с вершиной в центре Земли стягивался на поверхности дугой в 480 миль. Поскольку в окружности 360°, длина окружности Земли по меридиану должна составлять 24 000 миль, а ее радиус — около 4000 миль (точные современные значения составляют 24 989 миль для длины окружности и 3950 миль для радиуса).

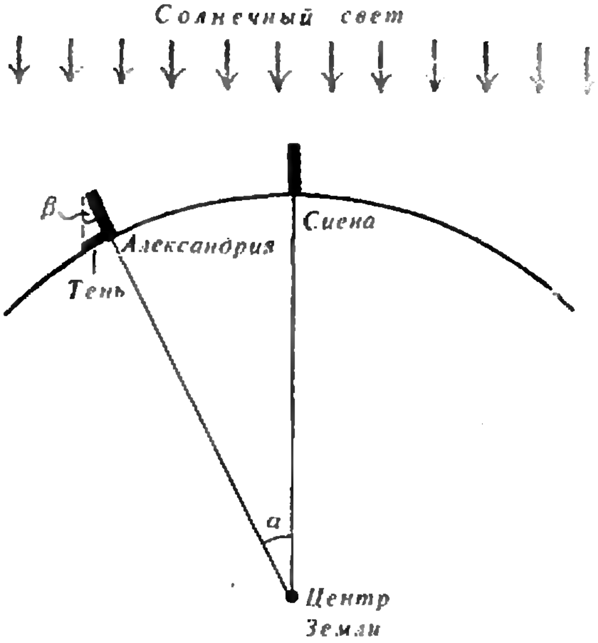


Рис. 2.

Идея шарообразной Земли позволила упростить геометрию мироздания. Естественно было считать, что земная и небесная сферы концентричны, а ось вращения небесной сферы служит продолжением полярной оси Земли.

Блуждающие звезды

Кроме неподвижных звезд, на небесной сфере можно наблюдать тела, положение которых меняется день ото дня. Такие тела называются планетами. В переводе с древнегреческого планета — «блуждающая звезда». С древнейших времен было известно семь таких «блуждающих звезд»: Луна, Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер и Сатурн.

Чтобы понять, как движется Солнце по небесной сфере, вспомним, что сутки (24 часа) — это время между двумя его последовательными кульминациями. Тот факт, что небесная сфера совершает полный оборот вокруг оси за время чуть меньшее суток (23 часа 56 минут), означает, что Солнце перемещается по небесной сфере в направлении, противоположном вращению небесной сферы. Поэтому восход Солнца ежедневно запаздывает по сравнению с восходом звезд на 4 минуты. Отмечая ежедневное положение Солнца относительно звезд в момент восхода, можно проследить его траекторию на небесной сфере. Оказывается, что эта траектория представляет собой еще одну окружность, центр которой совпадает с центром Земли, а плоскость наклонена под углом 23°30′ к плоскости небесного экватора. По этой окружности, называемой эклиптикой, Солнце движется в направлении с запада на восток с почти постоянной угловой скоростью, равной примерно 1°

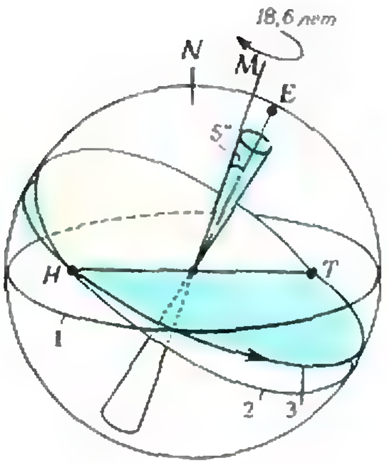


Рис. 3. 1 — экватор; 2 — эклиптика; 3 — путь Луны за 27 суток. Траектория Луны представляет собой большой круг на небесной сфере, наклоненный под углом 5° к эклиптике. Полярная ось ОМ, перпендикулярная к лунной орбите, описывает конус вокруг оси ОЕ, перпендикулярной к плоскости эклиптики, за 18,6 лет.

в сутки, совершая полный оборот за 365 дней и примерно 6 часов.

Луна также непрерывно перемещается относительно звезд. Ее траектория представляет собой окружность, в центре которой находится Земля. Плоскость этой окружности наклонена к эклиптике под углом 5°. Луна почти равномерно движется вдоль своей траектории в том же направлении, что и Солнце, т. е. обратно направлению суточного вращения небесной сферы, совершая полный оборот за время немногим более 27 суток. Подобно движению Солнца, движение Луны приводит к тому, что ее восход ежедневно запаздывает относительно восхода звезд, но уже не на четыре минуты, как у Солнца, а почти на целый час (рис. 3).

Пять остальных «блуждающих звезд» также движутся по небесной сфере, однако их перемещение гораздо сложнее, чем движение Солнца и Луны (рис. 4). Древние астрономы разделили эти пять планет по своим видимым движениям на две группы: нижние (Меркурий, Венера) и верхние (Марс, Юпитер и Сатурн). Движения нижних и верхних планет по сфере неподвижных звезд существенно различаются.

Меркурий и Венера находятся на небе, не удаляясь слишком далеко от Солнца (28° для Меркурия и 47° для Венеры). Наибольшее угловое удаление планеты от Солнца к востоку называется ее наибольшей восточной элонгацией, к западу — наибольшей западной элонгацией. При наибольшей восточной элонгации планета видна на западе в лучах вечерней зари вскоре после захода Солнца и заходит через некоторое время после него. Затем, попятным движением (т. е. с востока на запад), сначала медленно, а потом все быстрее, планета начинает приближаться к Солнцу, скрывается в его лучах и перестает быть видимой. В это время наступает нижнее соединение планеты с Солнцем. Спустя некоторое время после нижнего соединения планета вновь становится видимой, но теперь уже на востоке, незадолго перед восходом Солнца. В это время, продолжая попятное движение, она постепенно удаляется от Солнца. Замедлив скорость попятного движения и достигнув наибольшей западной элонгации, планета останавливается и меняет направление своего движения на прямое (с запада на восток). Вначале она движется медленно, затем ее движение становится более быстрым. Удаление ее от Солнца уменьшается и, наконец, она скрывается в утренних лучах Солнца — наступает ее верхнее соединение с Солнцем. Спустя некоторое время она снова видна на западе в лучах вечерней зари. Продолжая прямое движение, планета замедляет свою скорость. Достигнув предельного восточного удаления, т. е. наибольшей восточной элонгации, планета останавливается, меняет направление своего движения на попятное, и все повторяется сначала. Период одного такого «колебания» составляет для Меркурия 88 суток, а для Венеры — 225 суток.

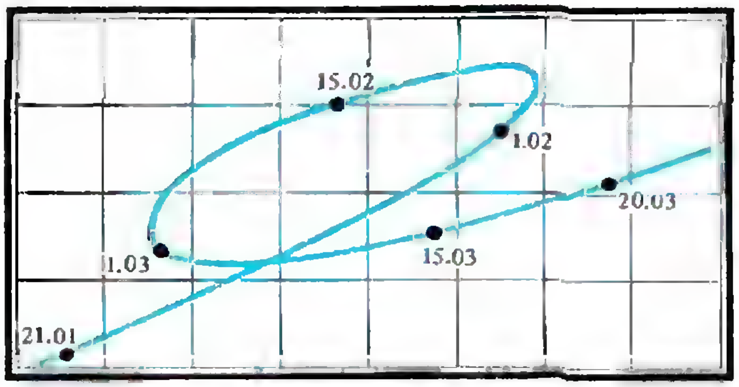
Видимые движения верхних планет происходят иначе. Когда верхняя планета видна после захода Солнца в западной части неба, она перемещается среди звезд прямым движением, т. е. с запада на восток, как и Солнце. Но скорость ее движения меньше, чем у Солнца, которое постепенно нагоняет планету, и она на некоторое время перестает быть видимой, т. е. восходит и заходит почти одновременно с Солнцем. Затем, когда Солнце обгонит планету, она становится видимой на востоке перед восходом Солнца. Скорость ее прямого движения постепенно уменьшается, планета останавливается и затем начинает перемещаться среди звезд попятным движением, с востока на запад. *Через некоторое время планета* снова останавливается, меняет направление своего движения на прямое, снова ее с запада нагоняет Солнце и она опять перестает быть видимой — и все явления повторяются в том же порядке.

Первые модели мира

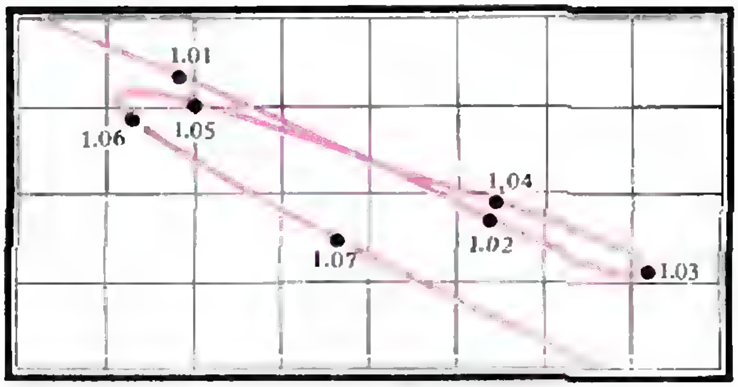
Эвдокс. Первоначальная модель мироздания была очень проста. Длительные наблюдения привели древнегреческих ученых к убеждению, что наряду с Землей шарообразными являются и другие планеты. Более того, с течением времени для двух небесных светил, которые казались самыми большими — Солнца и Луны — было получено так много данных, что их стали считать телами, до известной степени родственными Земле. Не было никаких причин считать другие «блуждающие звезды» непохожими на Солнце и Луну. Стало быть, все они более-менее подобны Земле, а различия в их наблюдаемых размерах *объясняются различным их удалением от Земли.*

Но ведь эти громадные тела, совершающие вечный полет над нашими головами, должны быть достаточно прочно укреплены. Небесная сфера для этого не подходила: планеты движутся независимо от нее. Поэтому греки вообразили семь новых сфер, по одной для каждой планеты. Эти сферы меньше, чем сфера неподвижных звезд, и концентричны с ней. Все семь планетных сфер участвуют в движении сферы неподвижных

Рис. 4. а) Видимое движение Меркурия.



б) Видимое движение Марса.



звезд, обращающейся раз в сутки и, кроме того, совершают еще и независимые вращения.

В дальнейшем из этой модели Пифагор развил идею о музыке сфер: каждая из семи планетных сфер сравнивалась с одним из тонов октавы; восьмой тон представляла сфера неподвижных звезд. Пифагор считал, что колоссальные полые шары, к которым прикреплены такие большие тела, как Солнце и Луна (да и другие планеты), при вращении должны издавать звук, как вращающиеся колеса какого-нибудь механического аппарата. Получающиеся при этом различные тона соединяются в чудесную мелодию, могучие звуки которой наполняют всю Вселенную. И только мы, несовершенные жители Земли, не можем слышать этой небесной музыки, составляющей вечное наслаждение олимпийских богов.

После того как были приобретены дальнейшие знания относительно движения небесных светил, потребовалось соответствующим образом пополнить идею о сферах, составляющих основу порядка Вселенной. В мировоззрении древних философов Греции считалось непоколебимым фактом, что Земля есть центр мира, главное тело мироздания. Поэтому все многочисленные усложнения, которые обнаружили древние ученые,— неравномерные движения планет, попятные движения и т. д.,— требовалось объяснять только введением новых сфер, которые общим движением влияли бы на одно и то же небесное светило. Знаменитый древнегреческий ученый Эвдокс (408—355 гг. до н. э.) построил систему мира, состоящую из 27 сфер: по три для Солнца и Луны, по четыре для пяти остальных планет и большой сферы неподвижных звезд. Однако вскоре выяснилось, что и 27 сфер недостаточно для описания видимого движения планет. Поэтому вскоре последователь Эвдокса афинянин Калипп присоединил к эвдоксовым еще 22 сферы. С течением времени небесная машина становилась все сложнее и сложнее, так что в конце концов настойчиво выступила необходимость более простого и ясного описания.

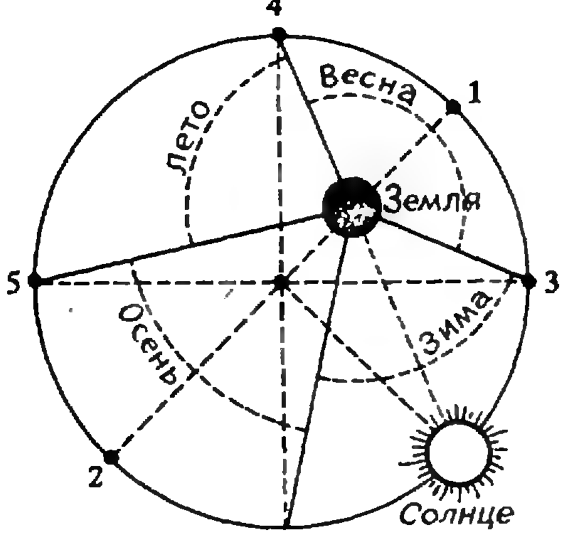


Рис. 5. 1 — перигей; 2 — апогей; 3 — весеннее равноденствие; 4 — летнее солнцестояние; 5 — осеннее равноденствие.

Гиппарх. В основании всех древних воззрений на мир лежал принцип равномерного движения по окружностям. Впервые этот принцип был поколеблен александрийским ученым Гиппархом (II век до н. э.), открывшим, что длины времен года неодинаковы. Гиппарх первым нашел перигей и апогей Солнца и установил, что вблизи первого оно движется быстрее, чем вблизи второго. Но аксиома о равномерном движении слишком глубоко вошла в плоть и кровь античной науки, и Гиппарх не решился уничтожить ее.

Чтобы объяснить свои открытия, Гиппарх избрал иной выход. Допустим, что Солнце движется с постоянной скоростью по окружности, но центр этой окружности не совпадает с центром Земли, а лежит вне его, где-нибудь в свободном пространстве. Тогда, действительно, нам должно казаться, что Солнце движется неравномерно — быстрее, когда оно идет по части круга, к которой Земля расположена ближе, и медленнее — в противоположной части. Рисунок 5 поясняет этот механизм. Центр движения Солнца находится здесь в точке пересечения пунктирных линий, сплошные линии сходятся в центре Земли. Путем проб можно найти подходящее место для точки, находясь в которой наблюдатель будет видеть упомянутые выше особенности движения Солнца, хотя на самом деле оно совершается равномерно по кругу. Линию, соединяющую перигей и апогей, Гиппарх назвал линией апсид. Отношение измеренного по ней расстояния от центра солнечной орбиты до центра Земли к радиусу орбиты было названо им эксцентриситетом орбиты. Эти названия удержались в астрономическом языке до настоящего времени.

По аналогии с солнечной, центр лунной орбиты Гиппарх также поместил вне Земли. Он вычислил для нее направление линии апсид, эксцентриситет, перигей и апогей. Движения Солнца и Луны Гиппарх определил с удивительной для его времени точностью. Например, по данным, полученным Гиппархом, можно было бы с точностью до одного дня вычислить даты наступления полнолуний даже для нашего времени (более чем на 2000 лет вперед!). Великий александрийский астроном начал также исследовать движения других планет, что представляло более значительные трудности. Но огромный шаг вперед в этом направлении удалось сделать только его земляку и последователю Клавдию Птолемею (II век новой эры).

Система мира Птолемея

Птолемеева система мира, которая царила, не оспариваемая никем, около полутора тысяч лет, была основана на наблюдениях и вычислениях Гиппарха. Птолемей изложил свою систему мироздания в знаменитом сочинении «Мегале синтаксис» («Великое построение»), более известном под арабским названием «Альмагест». До конца средневековья этот труд почитался почти наравне с божественным откровением. Сомнение в словах «Альмагеста» считалось преступлением.

В основе системы мира Птолемея лежат четыре постулата:

I. Земля находится в центре Вселенной.

II. Земля неподвижна.

III. Все небесные тела движутся вокруг Земли.

IV. Движение небесных тел происходит по окружностям с постоянной скоростью, т. е. равномерно.

Птолемей положил в основу своей системы эксцентрические круги Гиппарха. Однако, согласно Птолемею, все планеты, за исключением Солнца, не обращаются непосредственно по этим кругам — по ним движется центр другого круга, и только по нему обращается планета (рис. 6). Круги, по которым обращаются планеты, называются эпициклами; круги, по которым движутся центры эпициклов — деферентами. Деферент Солнца, деференты и эпициклы других планет лежат внутри сферы, на поверхности

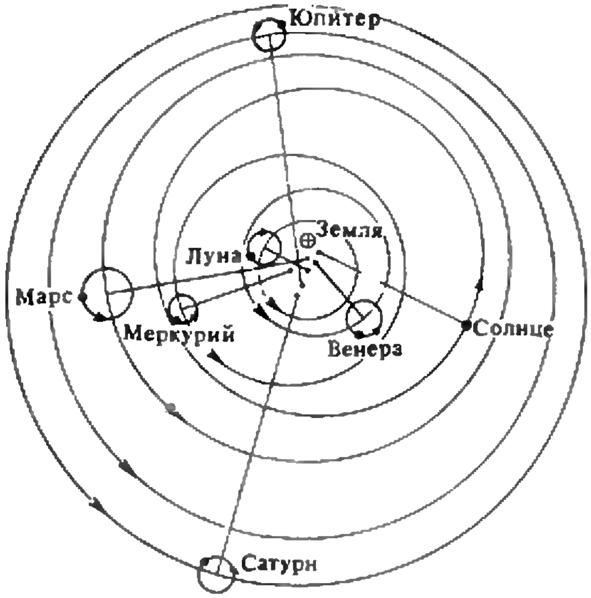


Рис. 6. Система мира Птолемея.

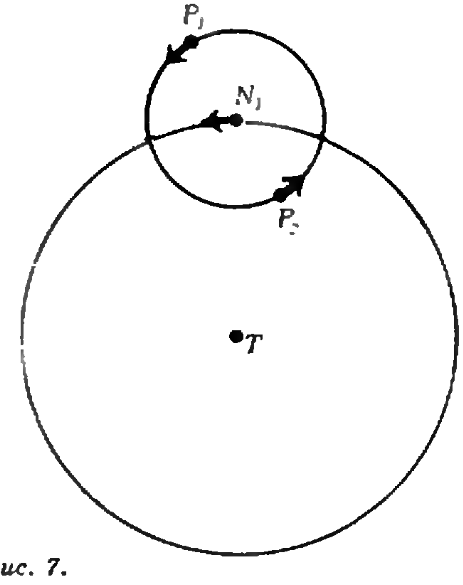


Рис. 7.

которой расположены «неподвижные звезды».

Суточное движение всех светил объяснялось вращением всей Вселенной как единого целого вокруг неподвижной Земли. Прямые и попятные движения планет объяснялись следующим образом.

Пусть в определенный момент времени планета находится на эпицикле в точке P_1 (рис. 7), а центр эпицикла — на деференте в точке N_1. В процессе равномерного кругового движения обеих точек — планеты с угловой скоростью α вокруг точки N_1 и самой точки N_1 как центра эпицикла с угловой скоростью ω вокруг Земли — планета опишет петлю, которую наблюдатель видит в проекции на небесную сферу. Причина образования петли очевидна: в точке P_1 движения по эпициклу и по деференту направлены в одну сторону — справа налево. Описав дугу в 180°, планета движется по эпициклу слева направо. При определенном соотношении между α и ω направление видимого движения в положении, близком P_2, изменяется — планета здесь совершает попятное движение.

Для каждой планеты Птолемей подобрал относительные размеры радиусов эпицикла и деферента, положения центров деферентов и скорости движения планет по эпициклам и деферентам так, чтобы движение получалось близким к реально наблюдаемому. Это оказалось возможным при выполнении некоторых условий, которые Птолемей принял в качестве постулатов. Они сводились к следующему:

1) центры эпициклов нижних планет лежат на направлении от Земли к Солнцу;

2) у всех верхних планет этому направлению параллельны радиусы эпициклов, проведенные в точку положения планеты.

Таким образом, направление на Солнце в системе мира Птолемея оказывалось преимущественным.

Система мира Птолемея не только давала качественное объяснение видимым движениям планет, но и позволяла вычислить их положение на будущее с довольно высокой точностью. По мере повышения точности наблюдений возникали разногласия их с теорией, которые устранялись путем усложнения системы. Например, некоторые «неправильности» в видимых движениях планет, открытые позднейшими наблюдениями, объяснялись тем, что вокруг центра первого эпицикла обращается не планета, а центр второго эпицикла, по окружности которого уже движется планета. Когда и такое построение для какой-либо планеты оказывалось недостаточным, вводили третий, четвертый и т. д. эпициклы, пока положение планеты на окружности последнего из них не давало более или менее сносного согласия с наблюдением. К началу XVI столетия система Птолемея содержала в общей сложности 40 кругов.

Возвратимся еще раз к «Альмагесту» Птолемея и в небольшой таблице приведем числа, которые дал этот великий александрийский ученый для планетных движений по эпициклам и для движений самих эпициклов по деферентам:

Планеты	Суточное движение по эпициклам	Суточное движение центра эпицикла по деференту	Суммарное движение
Солнце	0°0′00,0″	0°59′8,3″	0°59′8,3″
Меркурий	3°6′21,4″	0°59′8,3″	4°5′32,4″
Венера	0°36′59,4″	0°59′8,3″	1°36′7,7″
Марс	0°27′41,7″	0°31′26,6″	0°59′8,3″
Юпитер	0°54′9,0″	0°4′58,3″	0°59′8,3″
Сатурн	0°57′7,7″	0°2′0,6″	0°59′8,3″

В этой таблице бросается в глаза тот поразительный факт, что центр эпицикла у нижних планет (Меркурия и Венеры) движется с той же скоростью, что и Солнце вокруг Земли. Для верхних планет — Марса, Юпитера и Сатурна — эти числа различаются, но суммы обоих движений дают ту самую величину движения Солнца. Следовательно, движение Солнца заключается во всех планетных движениях. Конечно, такое явление должно было казаться чрезвычайно странным. Сам собою возникает вопрос, не лежит ли в основе этих одинаковых числовых величин какая-нибудь общая причина?

Нет сомнения, что многие мыслители древности и средневековья ставили такой вопрос. Например, античный астроном Аристарх утверждал центральное положение Солнца в системе мира. Однако первым человеком, который дерзнул строго математически разработать идею о том, что все планеты обращаются вокруг Солнца, был гениальный польский астроном Николай Коперник (1473—1543).

Система мира Коперника

Книга Коперника «Об обращениях небесных сфер» — труд всей его жизни — была опубликована в 1543 году незадолго до смерти ученого. В этом сочинении Коперник разработал идею о движении Земли и положил начало новой астрономии. Созданная им система мира называется гелиоцентрической. В ее основе лежат следующие утверждения:

1) в центре мира находится Солнце, а не Земля;

2) шарообразная Земля вращается вокруг своей оси, и это вращение объясняет кажущееся суточное движение всех светил;

3) Земля, как и все другие планеты, обращается вокруг Солнца, и это обращение объясняет видимое движение Солнца среди звезд;

4) все движения представляются в виде комбинации равномерных круговых движений;

5) видимые прямые и попятные движения планет объясняются движением Земли.

Кроме того, Коперник считал, что Луна движется вокруг Земли и как спутник вместе с Землей — вокруг Солнца.

Постулат о равномерном движении по окружностям заставил Коперника подобно Птолемею ввести эпициклы и сместить центры окружностей-деферентов относительно центра Солнца. В итоге модель Коперника выглядела не менее сложно, чем модель Птолемея: достаточно сказать, что она содержала 48 кругов вместо 40 кругов в геоцентрической модели. Не отличалась она и большей точностью. Однако в ней было зерно научной истины, сделавшее ее фундаментом новой астрономии.

По иронии судьбы, подтвердить вывод Коперника о том, что Земля вращается вокруг Солнца, выпало на долю датского ученого Тихо Браге (1546—1601), который имел весьма веские основания не принимать гелиоцентрическую систему. Главный довод Тихо Браге против системы Коперника заключался в следующем: если бы Земля вращалась вокруг Солнца, то и Венера, и Меркурий имели бы фазы, как Луна, чего никто из серьезных астрономов никогда не наблюдал. Доводы Браге звучали убедительно, и хотя предсказываемые фазы, как теперь хорошо известно, действительно существуют, несовершенство оптических инструментов не позволяло их обнаружить. И все же именно точные наблюдения Браге за положением планет в конце концов подтвердили точку зрения Коперника. Данные, полученные Браге, позволили его ученику Иоганну Кеплеру (в итоге восьмилетней работы) объявить, что орбиты планет представляют собой эллипсы, в одном из фокусов которых находится Солнце, и что в каждую единицу времени радиус-вектор планеты заметает одинаковую площадь. Так рухнула Пифагорова гармония круговых орбит вокруг богом данного особого положения нашей планеты. Законы Кеплера в свою очередь (в большей степени, чем легендарное падающее яблоко) явились фундаментом, на котором покоится закон всемирного тяготения Ньютона, ставший почти на три столетия основой физики и космологии.

САМОЛЕТ В ОЗОНЕ

Доктор технических наук
А. СТАСЕНКО

> *На высотах 20—50 км расположен озонный слой... В отсутствие озонного «экрана», защищающего нас от ультрафиолетового излучения, в больших дозах вредного для здоровья, жизнь на Земле в современных ее формах оказалась бы невозможной.*
>
> Энциклопедический словарь юного физика: Атмосфера

Грибы в сметане, ананасы в шампанском, килька в томатном соусе — все это где-то уже было. Но — самолет? в озоне? В чем дело?

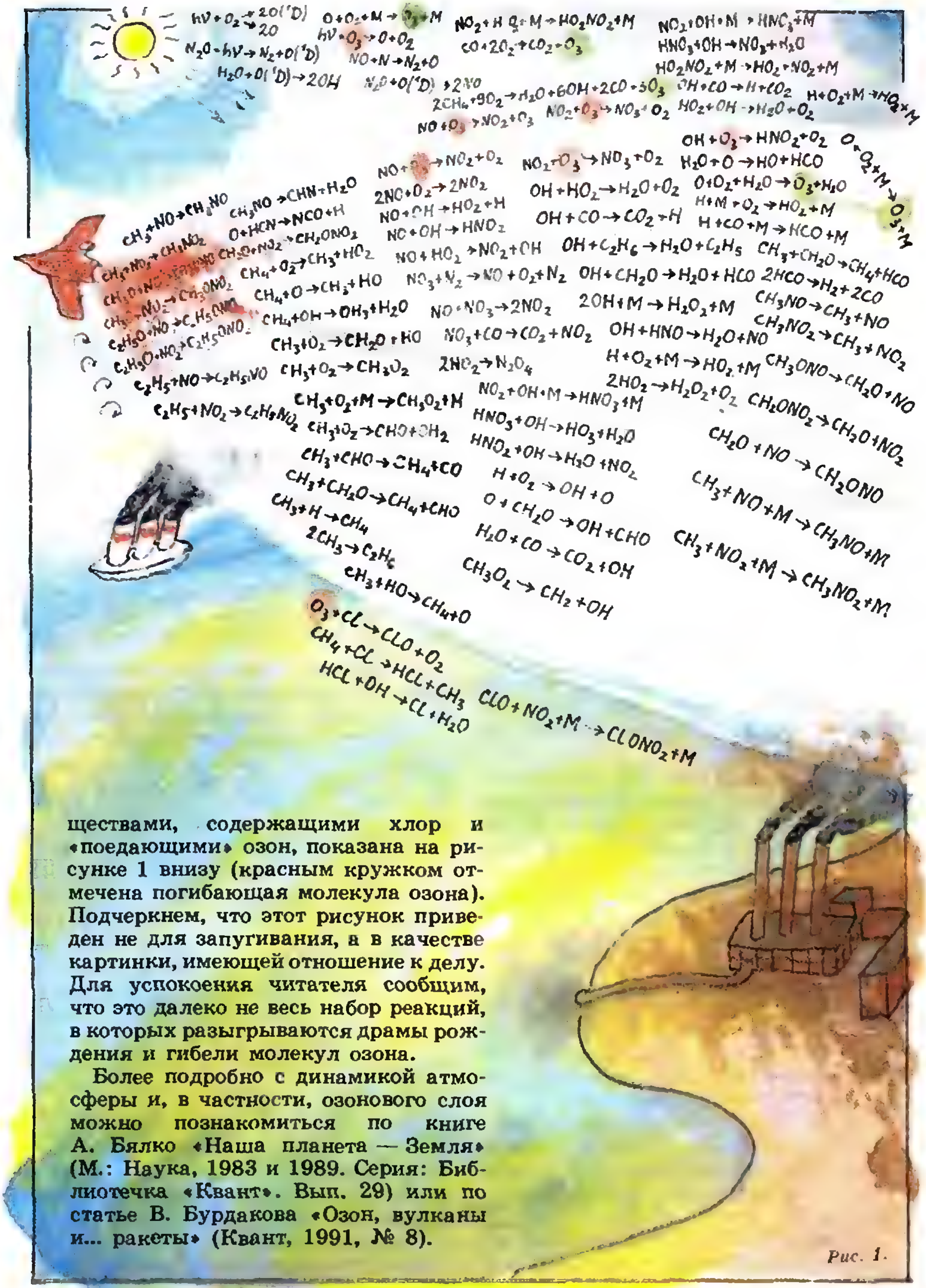
Начнем по порядку. В атмосфере, в которой мы ходим в школу, разговариваем, летаем, которой дышим и которая состоит в основном из азота и кислорода, есть еще так называемые малые газы, роль которых отнюдь не мала.

Одним из важнейших малых газов атмосферы является озон. Его химический символ O_3, в отличие от обычного кислорода O_2. После грозы, в хвойном лесу, во время работы домашнего озонатора этот газ легко и приятно щекочет нос (озон как раз и означает по-гречески «пахнущий»). Но важнейшая его роль состоит в том, что он не пропускает к поверхности Земли определенную часть спектра излучения Солнца, лежащую в ультрафиолетовой области и вредную для живых организмов. Тут уместно напомнить, что видимый нами свет заключен в интервале длин волн (приблизительно) от 0,35 до 0,7 мкм (микрометров); и еще — что совсем уж уместно в журнале «Квант» — что энергия кванта излучения прямо пропорциональна его частоте и обратно — длине волны.

Собственно говоря, сам озон и образуется в основном благодаря ультрафиолетовому излучению, но еще меньших длин волн (менее 0,2 мкм), энергия квантов которого достаточна, чтобы разбить довольно прочную молекулу кислорода на два атома. Эти атомы затем «прилипают» к еще двум молекулам кислорода. Так из трех молекул O_2 образуются две молекулы O_3. Эти последние обладают меньшей «прочностью» (энергией связи), чем молекулы кислорода, поэтому их способны разрушить кванты с несколько большей длиной волны (от 0,22 до 0,29 мкм), но тоже лежащей в ультрафиолетовой области спектра. Таким образом, кислород и озон вместе поглощают почти весь ультрафиолет Солнца, оставляя достаточно только для шоколадного загара. Но доля энергии, лежащей в узком спектральном интервале излучения, поглощаемого озоном, втрое больше, чем во всей остальной коротковолновой части спектра, и, кроме озона, с ней некому было бы справиться. Поэтому именно озон упоминается с благодарностью как основной спаситель от чрезмерного воздействия ультрафиолета на живые организмы Земли.

Конечно, изложенный механизм образования озона является сильно упрощенным. На разных высотах идут различные процессы, и в «производстве» озона (как и в его распаде) принимают участие многие вещества. На рисунке 1 в верхней части показана система других реакций в атмосфере, тоже дающая озон (отмечен зелеными кружками).

В недавнее время ученые, а за ними журналисты, а за ними и все человечество были встревожены «озоновой дырой» над Антарктидой. В результате приняты международные соглашения, запрещающие производство некоторых соединений, вредных для озона, например фреонов, содержащих хлор (Cl) и бурлящих в наших бытовых холодильниках и аэрозольных баллончиках. Система реакций между ве-


hV+O2→2O(1D)
→2O
N2O+hV→N2+O(1D)
H2O+O(1D)→2OH
O+O2+M→O3+M
hV+O3→O+O2
NO+N→N2+O
N2O+O(1D)→2NO
NO2+HO2+M→HO2NO2+M
CO+2O2→CO2+O3
2CH4+9O2→H2O+6OH+2CO+3O3
NO+O3→NO2+O3
NO2+O3→NO3+O2
NO2+OH+M→HNO3+M
HNO3+OH→NO3+H2O
HO2NO2+M→HO2+NO2+M
OH+CO→H+CO2
HO2+OH→H2O+O2
H+O2+M→HO2+M
OH+O3→HNO2+O2
H2O+O→HO+HCO
O+O2+H2O→O3+H2O
H+M+O2→HO2+M
H+CO+M→HCO+M
O+O2+M→O3+M
NO+O3→NO2+O2
2NO+O2→2NO2
NO+OH→HO2+H
NO+OH→HNO2
NO+HO2→NO2+OH
NO3+N2→NO+O2+N2
NO+NO3→2NO2
NO3+CO→CO2+NO2
2NO2→N2O4
NO2+O3→NO3+O2
OH+HO2→H2O+O2
OH+CO→CO2+H
OH+C2H6→H2O+C2H5
OH+CH2O→H2O+HCO
2OH+M→H2O2+M
OH+HNO→H2O+NO
H+O2+M→HO2+M
2HO2→H2O2+O2
CH3+CH2O→CH4+HCO
2HCO→H2+2CO
CH3NO→CH3+NO
CH3NO2→CH3+NO2
CH3ONO→CH2O+NO
CH2ONO2→CH2O+NO2
CH3+NO→CH3NO
CH3NO→CHN+H2O
O+HCN→NCO+H
CH3+NO2→CH3NO2
CH2O+NO2→CH2ONO2
CH4+O2→CH3+HO2
CH3O+NO2→CH3ONO2
CH4+O→CH3+HO
CH4+OH→OH3+H2O
C2H5O+NO→C2H5ONO
C2H5O+NO2→C2H5ONO2
CH3+O2→CH2O+HO
C2H5+NO→C2H5NO
CH3+O2→CH3O2
C2H5+NO2→C2H5NO2
CH3+O2+M→CH3O2+M
CH3+O2→CHO+OH2
CH3+CHO→CH4+CO
CH3+CH2O→CH4+CHO
CH3+H→CH4
2CH3→C2H6
CH3+HO→CH4+O
NO2+OH+M→HNO3+M
HNO3+OH→HO3+H2O
HNO2+OH→H2O+NO2
H+O2→OH+O
O+CH2O→OH+CHO
H2O+CO→CO2+OH
CH3O2→CH2+OH
CH2O+NO→CH2ONO
CH3+NO+M→CH3NO+M
CH3+NO2+M→CH3NO2+M
O3+CL→CLO+O2
CH4+CL→HCL+CH3
HCL+OH→CL+H2O
CLO+NO2+M→CLONO2+M

ществами, содержащими хлор и «поедающими» озон, показана на рисунке 1 внизу (красным кружком отмечена погибающая молекула озона). Подчеркнем, что этот рисунок приведен не для запугивания, а в качестве картинки, имеющей отношение к делу. Для успокоения читателя сообщим, что это далеко не весь набор реакций, в которых разыгрываются драмы рождения и гибели молекул озона.

Более подробно с динамикой атмосферы и, в частности, озонового слоя можно познакомиться по книге А. Бялко «Наша планета — Земля» (М.: Наука, 1983 и 1989. Серия: Библиотечка «Квант». Вып. 29) или по статье В. Бурдакова «Озон, вулканы и... ракеты» (Квант, 1991, № 8).

Рис. 1.

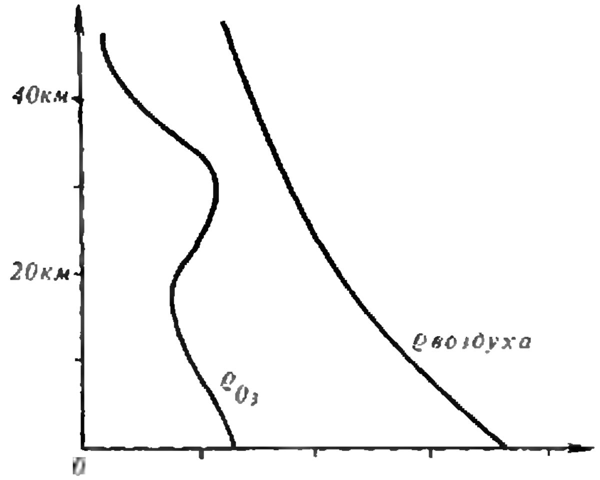


Рис. 2.

Напомним лишь самое необходимое для наших целей.

Прежде всего, суммарная плотность атмосферы, этой смеси многих газов, монотонно убывает с высотой.

Если бы температура атмосферы была постоянна и равна T, то, как известно, плотность и давление газа с молярной массой M изменялись бы с высотой y согласно так называемой барометрической формуле Больцмана

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0} = e^{-Mgy/(RT)} \qquad (1)$$

(индекс 0 соответствует значению на уровне моря).

А вот плотность озона изменяется немонотонно и достигает наибольшего значения на высоте ~20—30 км (рис. 2), в зависимости от географической координаты места, времени года и суток. Разумеется, эта немонотонность почти не сказывается на высотном изменении суммарной плотности смеси атмосферных газов, так как плотность озона на много порядков меньше суммарной. Но ведь именно на этих высотах и должны будут летать самолеты ближайшего будущего. Казалось бы, пролетел — и до свидания. Вспомним древнерусскую загадку о следе лодки на воде: «Режу, режу — боли нету; еду, еду — следу нету». Однако это изречение совсем неприменимо к самолету с экологической точки зрения.

На рисунке 1 (в центральной части) условно изображена струя двигателя самолета и выписаны системы реакций, происходящих в ней. Напомним, что это сделано не для устрашения читателя — даже те, кто решает эту систему на компьютерах, не всё знают о коэффициентах этих реакций. И даже студентам Московского физико-технического института (не то что школьникам!) однажды на лекции было сказано: «Что такое химический потенциал, я вам говорить не буду, чтобы не замутить ваше чистое сознание» (из газеты МФТИ «За науку», 1989, 26 мая). Так что этой картинкой можно просто полюбоваться. Главное вот в чем: самолеты будут доставлять всю эту кучу веществ, можно сказать, в самое сердце озонного слоя — как раз на те высоты, где его концентрация наибольшая. И ведь это будет самая мирная гражданская авиация; в ее самолетах будут сидеть менеджеры, коммивояжеры с наработанными консенсусами в портфелях; туристы и родственники, летящие на другие континенты; школьники по обмену и т. д. Следовательно, с этой авиацией не справится никакое разоружение.

А чтобы эта коммерческая авиация была экономически выгодной, таких самолетов должно быть не один-два, а не менее нескольких сотен. В целом авиация будет сжигать в атмосфере 50—100 миллионов тонн горючего в год, что, кроме всего прочего, приведет к образованию порядка миллиона тонн окислов азота NO, NO_2, ... — для краткости набор окислов азота обозначают NO_x. (Оказывается, в высокотемпературных зонах авиационных двигателей «горит» — окисляется — даже азот — газ, «не поддерживающий жизни», согласно буквальному смыслу по-гречески.) Часть выброшенных веществ вредна для озона, и среди них приоритетное место отводится как раз этим окислам азота (в соответствующих реакциях озон выделен красным на рисунке 1). Эти реакции непосредственно приводят к «поеданию» озона. Правда, как видно из того же рисунка, есть и реакции, создающие озон,— как в самой струе, так и в атмосфере (они выделены зеленым). Так что выброс дополнительных количеств окислов азота может сместить установившееся равновесие в сторону меньшего содержания озона, и было бы очень заманчиво как-то уменьшить концентрацию NO_x. Но как?

Для этого нужно тщательно исследовать, что такое струя и след летательного аппарата.

Одинокая круглая струя

Зачем реактивному самолету струя? А затем, что именно она содержит направленный назад поток импульса, необходимый для получения реактивной тяги. Самолет «заглатывает» набегающий на него воздух, одну пятую часть его (кислород) использует для сжигания топлива (как правило, это керосин) и всю нагретую смесь выбрасывает назад, получая при этом силу тяги. При сгорании керосина (или любого углеводорода) в присутствии азота и образуется смесь газов, между которыми идут реакции, часть которых указана на рисунке 1. Если топливом будет служить водород, то в струе, конечно, не будет радикалов, содержащих углерод (C). Но окислы азота все равно появятся и будут портить озон атмосферы.

Но сейчас давайте рассмотрим механику струи. Будем обозначать скорость струи относительно самолета буквой u; скорость выброса струи из двигателя — u_a (индекс «a» — от немецкого Ausgang — выход), а скорость струи на большом расстоянии от самолета — u_∞ (она равна скорости атмосферы относительно самолета, т. е. просто скорости самого самолета). Ворвавшись в атмосферу со скоростью, равной по модулю $|u_a - u_\infty|$, струя вскоре будет двигаться относительно атмосферы с небольшой (и все уменьшающейся) скоростью $|u - u_\infty| \ll u_a, u_\infty$. При этом ее движении к газу струи будут подмешиваться все новые порции атмосферного воздуха. В этой новой смеси концентрация первоначальных газов будет плавно спадать от оси струи к периферии (рисунок 3, кривая $C(r)$). Приблизительно так же будет спадать в радиальном направлении и скорость $u(r) - u_\infty$, так что слои струи, движущиеся на разном расстоянии от оси, будут «тереться» друг о друга. Причем более удаленные от оси слои будут тормозить более близкие. Грамотный студент уже мог бы сказать это короче: происходит радиальный перенос осевой компоненты импульса. И он непре-

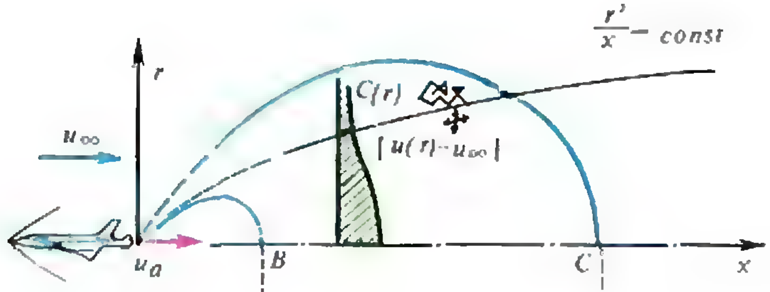


Рис. 3.

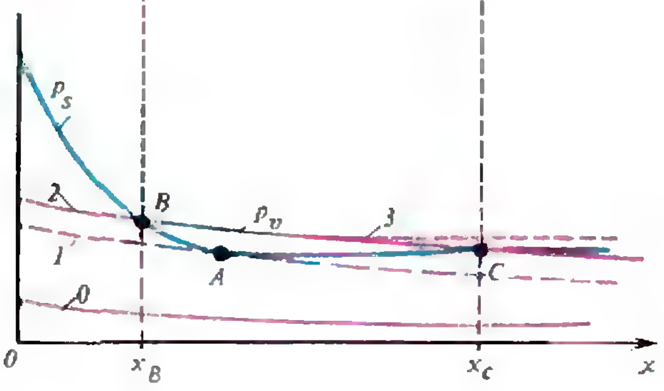


Рис. 4.

менно ввел бы коэффициент вязкости, а для описания переноса массы — коэффициент диффузии, а для переноса тепла — коэффициент теплопроводности. На то он и грамотный. Но мы попытаемся описать эти явления проще.

Перенос всех указанных характеристик, в том числе и движение частиц струи в радиальном направлении от оси, описывается в терминах случайных блужданий. Этот класс движений хорошо рассмотрен, например, в курсе физики Р. Фейнмана на примере известной задачи о пьяном матросе, который на каждом перекрестке незнакомого города выбирает наобум, равновероятно, одно из четырех направлений (вправо, влево, вперед, назад). Напомним вкратце суть явления. Частица, попав в какую-либо точку (рис. 3), после взаимодействия там с другой частицей может двигаться равновероятно в любую сторону. Но, пройдя характерное расстояние l, она должна встретиться с очередной частицей и еще раз случайным образом изменить направление движения.

Можно показать, что каждый шаг увеличивает квадрат расстояния в среднем на l^2. Пусть некоторой точке соответствует N уже пройденных шагов и радиус-вектор $\vec{r}_N$. В эту точку частица попала откуда-то из предыдущей точки $\vec{r}_{N-1}=\vec{r}_N-\vec{l}$ (обратим внимание, что эта запись говорит о том, что векторы $\vec{r}_{N-1}$ и $\vec{l}$ не обязательно параллельны). Возведем в квадрат:

$$r_N^2=(\vec{r}_{N-1}+\vec{l})^2=r_{N-1}^2+l^2+2\vec{r}_{N-1}\cdot\vec{l}.$$

Для одной выделенной частицы ее движение будет, конечно, строго детерминированным — это ее собственная история, и ее траектория будет какой-то ломаной линией. Но поскольку нас интересует среднее значение координат громадного множества частиц, мы сложим эти квадраты смещений и разделим на это множество. Так получим среднее значение. При этом окажется, что в последнем слагаемом будут одинаково часто встречаться смещения $\vec{l}$ как вдоль $\vec{r}_{N-1}$, так и в противоположном направлении. При осреднении по великому множеству частиц окажется, что

$$\langle r_N^2\rangle=\langle r_{N-1}^2\rangle+l^2+0.$$

Тогда, начиная с $N=1$, можно по индукции получить

$$\langle r_N^2\rangle=Nl^2,$$

т. е. средний квадрат смещения частицы при случайном блуждании пропорционален N (значит, среднеквадратичное смещение $\sqrt{\langle r_N^2\rangle}$ пропорционально $\sqrt{N}$, а не N, как было бы при прямом движении).

Если скорость частиц между столкновениями равна v, то время, потребное для одного шага, равно $\tau=l/v$, и, следовательно, число шагов за время t равно $N=t/\tau$. Окончательно получим (обозначив теперь r_N просто r)

$$\langle r^2\rangle=tlv.$$

Величину D, пропорциональную произведению lv, называют коэффициентом диффузии. Точный результат для нашего случая выглядит так:

$$\langle r^2\rangle=4Dt. \qquad (2)$$

Обозначим концентрацию каких-либо частиц в струе через n (м$^{-3}$) — например, это могут быть частицы сажи. Если ее умножить на скорость полета, получим плотность потока этих частиц в системе координат, связанной с самолетом: nu_∞ (1/(м$^2\cdot$ с)) (здесь мы считаем, что скорость движения струи относительно атмосферы уже пренебрежимо мала по сравнению с u_∞). Теперь умножим обе части равенства (2) на эту плотность потока да еще на число π. Получим

$$\pi\langle r^2\rangle nu_\infty=4\pi Du_\infty tn.$$

Но левая часть этого нового равенства — полный поток всех частиц через круг площади $\pi\langle r^2\rangle$. И если частицы не слипаются друг с другом, не дробятся, т. е. их полное количество никак не изменяется, то левая часть постоянна. А в правой части имеем $u_\infty t=x$ — расстояние от самолета. Следовательно,

$$n\sim\frac{1}{x}. \qquad (3)$$

Итак, мы почти знаем «устройство» струи в системе координат, связанной с самолетом. Частицы струи диффундируют в радиальном направлении и уносятся назад от самолета с почти постоянной скоростью $u_\infty = x/t$. Таким образом, они в среднем движутся по параболам $x \sim r^2$. Из-за этого концентрация на оси падает гиперболически (формула (3)).

Кто понимает в этом деле, сразу сообразит, что зависимость концентрации от обеих координат можно записать в виде

$$n(x, r) \sim \frac{1}{x/u_\infty} e^{-r^2/(4Dx/u_\infty)} \qquad (4)$$

(напомним, что x/u_∞ есть время t).

И точно так же будут изменяться теплосодержание, импульс:

$$\frac{n(x, r)}{n_a} = C(x, r) = \frac{T(x, r) - T_\infty}{T_a - T_\infty} \approx \frac{u(x, r) - u_\infty}{u_a - u_\infty}. \qquad (4')$$

Но эти две последние строчки формул (4) и (4′) не очень-то и понадобятся нам в дальнейшем. Разве только вот из них можно получить уравнение линий, на которых все указанные в (4′) безразмерные параметры принимают постоянное значение, например 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} и т. д., т. е. линий, на которых струя «разбавлена» атмосферным воздухом до концентрации в одну десятую, сотую, тысячную и т. д. от первоначальной. Эти линии имеют характерный вид, показанный на рисунке 3.

Капли за кормой

Теперь определим условия, при которых в струе может начаться конденсация паров воды. Очевидно, струя должна прежде всего достаточно охладиться. Но этого мало для того, чтобы началась конденсация. Нужно еще чтобы паров при этом было не слишком мало — нужно чтобы образовался пересыщенный пар,— тогда только «выпадет роса». Точнее говоря, давление паров воды в некоторой точке струи p_v должно быть не меньше, чем давление насыщенных паров p_s (индекс «v» — от английского vapour — пар, а «s» — от английского saturated — насыщенный). Как изменяется в пространстве p_v, мы уже знаем из вышесказанного.

А как изменяется p_s? Тут уместно обратиться к уравнению (1). Ведь там в показателе экспоненты стоит отношение двух энергий: потенциальной энергии молекулы (или одного моля — М) на высоте y над поверхностью моря к ее характерной тепловой энергии kT при температуре T (или RT для моля): $mgy/kT = Mgy/RT$. Оказывается, эта формула есть частный случай более общего утверждения Больцмана: если система, содержащая множество одинаковых частиц, находится в термодинамическом равновесии и если при этом молекулы могут обладать какими-то уровнями энергии (например, E_1 и E_2), то отношение числа молекул на этих уровнях должно равняться

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{e^{-E_2/kT}}{e^{-E_1/kT}} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}.$$

Но что такое испарение, как не процесс «вытаскивания» молекулы из жидкости в газ? Известно понятие удельной теплоты испарения L (Дж/кг) — энергии, которую нужно затратить на то, чтобы «вытащить» из жидкости один килограмм пара (или в расчете на один моль — ML (Дж/моль)). Этой энергией можно характеризовать глубину той потенциальной ямы, на дне которой находятся молекулы жидкости и из которой их нужно «достать» и превратить таким образом в газ. Следовательно, согласно Больцману и по аналогии с формулой (1), можно записать отношение плотностей насыщенного пара и жидкости в виде $\rho_\kappa/\rho^\circ \sim e^{-L/(RT)}$ или для давления

$$p_s = p^\circ e^{-L/(RT)}. \qquad (5)$$

Заметим, что эта зависимость от температуры (экспоненциальная!) гораздо более резкая, чем гиперболическое ($\sim 1/x$) уменьшение параметров струи вдоль ее оси (выражения (3) и (4)).

Нарисуем теперь изменение вдоль оси струи давления паров воды p_v и давления их насыщения p_s. Можно будет увидеть несколько ситуаций (рис. 4). Кривая *0* — паров всюду в струе меньше, чем нужно для насыщения. Кривая *1* — только в одной точке *A* достигается условие росы и капли испаряются, так и не начав расти. Кривая 2 пересекает кривую насыщения в двух точках — *B* и *C*;

между этими точками давление пара больше, чем это нужно для насыщения; значит, между этими точками возможно образование капель. Но, начав расти в точке B, они за точкой C могут исчезнуть, если давление паров воды в струе станет меньше давления насыщения за счет того, что они диффундируют из струи в «сухую» атмосферу. Кривая 3 — в самой атмосфере есть достаточное количество паров, близких к насыщению: $p_{v\infty} \approx p_s(T_\infty)$, но они не конденсируются, например, потому что нет посторонних частиц — «затравочных» центров. А струя как раз содержит такие частицы, и пар, начав конденсироваться на них в точке B, уже не будет испаряться, так что капли не только не будут исчезать, но, может быть, даже продолжат свой рост за счет пара атмосферы, если $p_{v\infty} > p_s(T_\infty)$.

Рассмотрим случай, когда весь водяной пар, образовавшийся в двигателе, сконденсировался в виде капель. Известно, что из сопла в струю выбрасывается множество мелких частиц сажи — несгоревшего углерода. Согласно измерениям, их плотность на срезе сопла изменяется от 10^{13} до 10^{17} $1/м^3$. А когда есть посторонние частицы, пар конденсируется именно на них, не дожидаясь, пока будет достигнуто значительное пересыщение (и, значит, переохлаждение). Вспомним, что в ожидании ночных заморозков по этой причине в полях и садах жгли костры: пар конденсировался на частицах дыма, в атмосферу выбрасывалось фазовое тепло и оно-то не давало замерзнуть растениям.

Итак, на каждой частичке сажи сконденсируется «своя порция» водяного пара. Отсюда легко получить характерный размер водяной капли:

$$\frac{4}{3}\pi\rho^\circ a^3 n_a = \rho_v^a, \quad a = \sqrt[3]{\frac{3\rho_v^a}{4\pi n_a \rho^\circ}}. \qquad (6)$$

Тут мы пренебрегли собственным объемом самой частички сажи, считая это ядро конденсации очень маленьким.

Теперь сделаем численные оценки, ибо, как говорит древнерусская поговорка, теория без оценок — что щи без соли. Пусть на той высоте, где летит самолет, давление и плотность атмосферы на порядок меньше их значений на уровне моря (при желании можно воспользоваться формулой (1)). Пусть температура газов на срезе сопла втрое больше, чем в окружающей атмосфере; значит, плотность струи втрое меньше: $\rho_a = \frac{\rho_\infty}{3} = \frac{\rho_0}{30}$ (мы здесь еще предположили, что давление в струе в точности равно окружающему — тогда струя не разбрызгивается в стороны и не сжимается к оси,— так называемый расчетный режим). Но водяной пар, конечно, составляет некую часть в смеси газов струи (ведь там и азот атмосферы, который почти не горит, и углекислый газ и многое другое, опять же см. рисунок 1). Пусть концентрация пара составляет 5 % = 1/20; итак, примем $\rho_v^a = \frac{\rho_a}{20} = \frac{\rho_0}{600} \approx 2 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3. Пусть плотность частиц сажи — ядер конденсации — $n_a \sim 10^{13}$ м$^{-3}$.

Тогда для размера капли из (6) получим

$$a = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{13} \cdot 10^3}} \approx 0{,}5 \text{ мкм}.$$

За самолетом часто видны белые следы, состоящие из этих капелек и тянущиеся иногда на сотни километров.

Но при чем здесь озон?

(Окончание следует)

ОРБИТЫ, КОТОРЫЕ МЫ ВЫБИРАЕМ

(беседа с В. Бурдаковым и К. Феоктистовым)

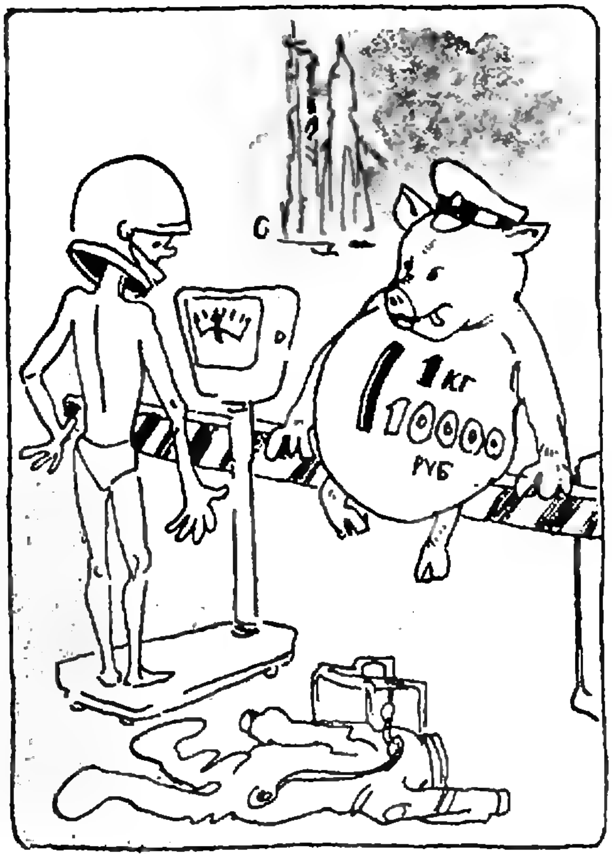
В. Н.: Долгое время с планетой Марс были связаны, возможно, последние надежды на обнаружение жизни в пределах Солнечной системы. Видимо, поэтому исследования Марса занимают особое место в космических программах. Вы уже говорили о тех проектах, которые рассматривались в первые годы практической космонавтики. Какое место занимает Марс в нынешних космических программах? Реальна ли в обозримом будущем пилотируемая экспедиция на Марс? Или она еще пока из арсенала фантастики?

В. Б: Для ученых Марс остается таким же притягательным, как и многие годы назад, несмотря на то, что пока действительно не удалось обнаружить на этой планете жизнь. В 1994 году в соответствии с проектом «Марс-94» планету должны достичь автоматические аппараты. По программе предполагается изучение почвы на глубине до 5—10 метров. Будут проводиться измерения температуры, влажности и т. д. Кроме того, будет изучаться тектоническая активность. По результатам сейсмических исследований можно сделать вывод, существует ли жизнь, в том числе разумная, под поверхностью планеты.

Проект «Марс-94» вообще очень интересен и насыщен исследованиями. Планируется доставка приборов для обнаружения биологических объектов или признаков их жизнедеятельности. В состав марсианских аппаратов будут входить марсоходы, аэростатные зонды (ночью они будут опускаться на поверхность, а днем подниматься за счет нагрева).

Что же касается пилотируемой экспедиции, то она может быть оправдана, с моей точки зрения, только в том случае, если будет реальный шанс обнаружить разумную жизнь. Такая жизнь может существовать, по-моему, в глубинах планеты или в разломах. За счет меньшего притяжения разломы на Марсе могут достигать глубины 12 километров (на Земле они не превышают 4—5 км). Так вот, эти места, а также каверны, образованные в результате таяния льда — а его на планете очень много, защищены от ультрафиолетового солнечного излучения, достигающего поверхности Марса из-за отсутствия в атмосфере озона, и вполне могут быть пристанищем для живых организмов. Причем, я уверен, простейшие организмы там имеются. Ну а более сложные, вплоть до разумных — это мечта...

Окончание. Начало см. в № 4.



К. Ф.: Я не понял, вы считаете, что вашей уверенности достаточно для того, чтобы создать марсианскую экспедицию?

В. Б.: Нет, конечно. Эти аргументы достаточны для запуска беспилотных аппаратов. Для пилотируемой экспедиции больше подойдут цели, аналогичные тем, что двигали лунный проект.

К. Ф.: На Луну экспедиция была послана для того, чтобы продемонстрировать технические возможности одной из самых крупных стран мира.

В. Н.: Насколько я помню, тогда целей было три — научная, техническая и политическая.

К. Ф.: Какие цели? Если лететь на Марс, то только для того, чтобы искать жизнь. Казалось бы, совсем недавно Горбачев предлагал Рейгану вместе лететь на Марс. Комитет какой-то в Америке собирался, какие-то соображения высказывались, как делать экспедицию. Записывались долгосрочные решения и т. д. Но вот вопрос — стоит ли начинать проектировать такую экспедицию?

В. Б.: У американцев, в частности у Карла Сагана (известный американский ученый-астрофизик.— *Прим. ред.*), есть целый ряд обоснований их предложений. Мое мнение — такую экспедицию нужно разрабатывать уже сегодня. Рассматривать возможности и преимущества человека в решении определенных задач, необходимую подготовку, критерии отбора...

Что же до 2023 года, а именно на этот срок ориентирован проект, разрабатываемый в НПО «Энергия», то я не уверен, что к этому сроку мы будем готовы решить какие-либо серьезные задачи. Скорее всего, это будут просто политические, престижные цели.

В. Н.: Не будет технических возможностей?

В. Б.: Технические будут, но будем ли мы готовы решать фундаментальные задачи? Я просто не знаю пока, в чем они будут заключаться.

К. Ф.: Но нельзя затевать экспедицию до тех пор, пока не будет уверенности в ее успехе с точки зрения поисков жизни. Если придерживаться мнения, что где-то в расщелине или нише она есть, то должна быть разработана стратегия, куда, в какой район посылать, какими средствами располагать. Для этого надо заранее провести разведку с помощью автоматов.

Совершенно бессмысленно что-то затевать, пока не появилась четкая концепция экспедиции хоть с какими-нибудь шансами на успех. Просто высадившись в любой наперед заданной точке, наверняка ничего не найдешь. Это чистая спекуляция с целью получить деньги из чужого кармана на предприятие, которое обречено скорее всего на провал.

В. Б.: Чудо, конечно, может быть, но в него трудно верится. Это напоминает шутку про нашу перестройку: русские, мол, всегда были склонны считать, что смерч, пронесшийся над свалкой, может оставить после себя «Боинг-747», поскольку все нужные материалы там имеются...

В. Н.: Можно ли сбрасывать со счетов такой результат, как сопутствующее развитие разных отраслей промышленности, науки? Или консолидация государств ради достижения общей цели? Ну и наконец, у каждого поколения, наверное, должен быть свой Колумб?

К. Ф.: Безусловно, это все очень важно, но не первостепенно. Притом сейчас, когда кончилось противостояние и мы поняли, что американцы нам не враги, а они перестали считать врагами нас, нет никакого смысла тратить сотни миллиардов долларов для еще большего сближения. Есть более эффективные возможности использования таких крупных сумм.

В. Б.: Например, для создания первых опытных космических электростанций...

В. Н.: Ну что ж, если с Марсом разобрались, перейдем к следующему вопросу. Многим известен роман о космической одиссее 2001 года. Написан он несколько десятков лет назад. На ваш сегодняшний взгляд, какие цели будут актуальными для космонавтики начала следующего века?

В. Б.: Думаю, что на первый план выйдет поиск источников энергии. Раньше я уже говорил о пяти факторах, определяющих качество жизни любого организма или сообщества. Энергетика занимает среди них, пожалуй, центральное место. Так вот, ее состояние кризисное уже сегодня, а в следующем столетии кризис будет углубляться. Отсюда вывод — необходим поиск новых энергоносителей, но уже не на Земле, где проблема энергетическая стоит рядом с экологической, а в космосе. У нас есть практически неиссякаемый источник — наше Солнце. Его и надо использовать, причем не на самой планете, где атмосфера является помехой, а на орбите.

Хочу подчеркнуть, что строительство солнечных электростанций в космосе не только возможно, но, повидимому, и неизбежно. Сюда же надо выносить и особо вредное производство. Особенно — энергоемкое. Мощные источники энергии позволят развивать и научный потенциал космических станций, а значит, шире станут возможности исследования Земли и дальнего космоса.

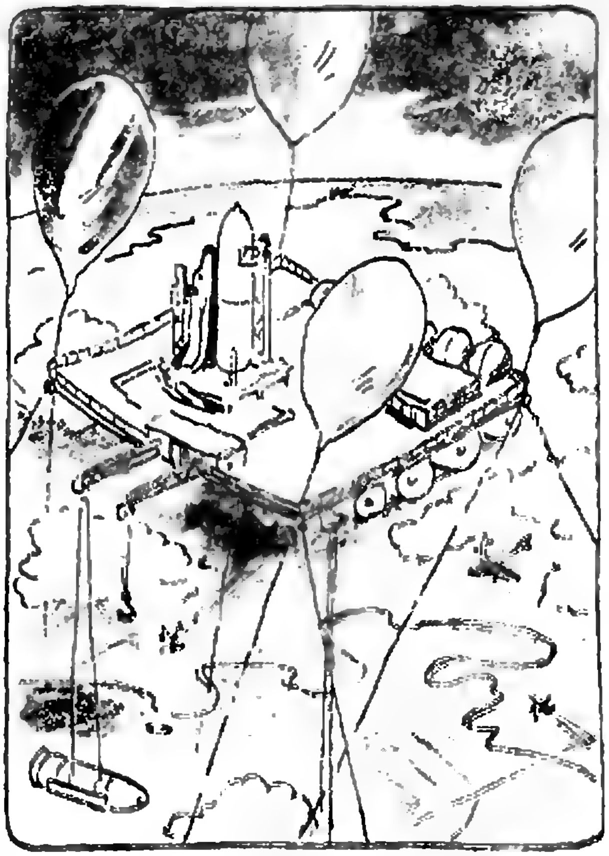
Таким образом, на первое место я бы поставил энергетику, на второе — информатику.

В. Н.: Но энергетика — это ведь не просто спутник или даже много спутников...

В. Б.: Энергетическое хозяйство Земли!

В. Н.: Поясните. Что для этого нужно на орбите? 100, 1000 или десятки тысяч тонн? Для того чтобы не просто продемонстрировать возможности, а практически решить проблему.

В. Б.: Как и в любой задаче, решение должно начаться с первого шага... Первая атомная электростанция в Обнинске давала всего лишь 5000 киловатт. Сейчас доля атомной энергетики равна 20 %. Через 30—40 лет космический «вклад» должен составить 15—20 %. Что касается затрат, то по оценкам специалистов ЦНИИМАШ (головного научно-исследовательского института в космической отрасли.— *Прим. ред.*), для строительства опытной солнечной электростанции потребуется вывести на низкую орбиту около 300 тонн.



К. Ф.: С учетом того, что суммарная мощность земных электростанций сегодня равна одному миллиарду киловатт, чтобы получить 15—20 %, потребуется довольно много времени и средств.

В. Б.: Конечно. Перейдем к информатике — теле- и радиоканалам, телефонным линиям и т. д. В настоящее время это ведущая отрасль, с реальной отдачей, причем с очень высоким КПД. Сейчас мы имеем целый набор спутников связи: «Экран», «Молния», «Горизонт», «Альтаир»... К сожалению, наращивание идет не столько качественное, сколь количественное. Запускаем следующий спутник, а предыдущий заканчивает работу из-за неполадок или ограниченного ресурса. Причин этому много, в том числе технология производства. Например, уровень запыленности в цехах недопустимо высок. Дорогостоящие космические аппараты работают меньше трех лет, хотя должны они работать как минимум 15—20. Кстати, и космические электростанции должны работать не менее 30 лет, иначе окупаться они не будут никогда.

Третье направление — технология. Имеется в виду получение тех материалов, изготовление которых на Земле либо невозможно, либо слишком дорого. Это полупроводники, биопрепараты и т. д., но для промышленного производства потребуется опять-таки энергетика.

Четвертое — транспорт. Космический самолет, использующий двигатели на водороде, экологически чистый, многоразовый — вот будущее воздушного транспорта. Он же может осуществлять связь между низкими и высокими околоземными орбитами. Такой транспорт уже разрабатывают и НАСА, и западноевропейские страны.

Кстати, об экологии. Она стала уже не только земной, но и околоземной проблемой. На этот счет принимаются решения даже на уровне ООН. На орбите столько мусора (осколки спутников и их фрагменты, вплоть до кусочков краски), что из-за него из строя выходят аппараты стоимостью в сотни миллионов рублей или долларов. На геостационарной орбите существуют два кладбища. Попадая туда, мусор остается там навсегда.

Ну и конечно, атмосфера. Любой запуск космической ракеты портит ее. Губится озонный слой. Наращивая количество пусков, мы наносим непоправимый ущерб жизни на Земле. Известно, что снижение концентрации озона всего лишь на один процент приводит к увеличению раковых заболеваний на 6 % и на еще больший процент — аллергических.

Нужна экологическая служба на орбите. В ее задачи будет входить не только наблюдение за местами экологических катастроф на поверхности Земли, но и контроль за количеством запусков. Вообще все средства выведения на орбиту должны получать сертификат безопасности. Например, такую-то ракету, можно запускать 5 раз в году, а другую — всего лишь раз. Иначе мы загубим жизнь на своей планете. Круглосуточное наблюдение за состоянием экологии — это и есть пятое глобальное направление в использовании космической техники.

К. Ф.: Я полагаю, что не стоит начинать строить экспериментальную электростанцию на орбите, а следует все вопросы сначала хорошенько проработать на земле. Пока полной ясности здесь нет. Необходимо разработать новые солнечные батареи, дешевые многоразовые ракеты-носители, систему роботов и т. д. Я согласен, что энерегетика — актуальный вопрос. Но будет ли реализовано то, о чем здесь говорилось, в начале XXI века? Я в этом сомневаюсь. Во всяком случае, исследования позволят сделать вывод, стоит ли этим заниматься...

Насчет информатики, думаю, все ясно. Нам просто необходимо ликвидировать отставание по спутниковой связи. К важнейшим нужно отнести не только информационные вопросы, но и исследование природных ресурсов, метеопрогнозы и другие. Кроме того, в начале следующего века пора начать создание международной системы контроля за происходящим на поверхности Земли, в ее атмосфере.

В. Б.: В экологическом плане?

К. Ф.: Нет, я имею в виду международную «антихусейновскую» систему...

В. Б.: Это экология.

К. Ф.: Ну хорошо. Возможность предупреждения агрессии. Я также надеюсь, что в будущем веке хватит разума и любопытства заниматься изучением Вселенной, т. е. строить большие астрофизические инструменты, работающие в разных диапазонах. Например, километровые радиотелескопы, которые бы выводились на околосолнечные орбиты для получения большего разрешения. С их помощью можно было бы исследовать центр Галактики и другие объекты.

В. Н.: Попробуем заглянуть еще на пятьдесят лет вперед, в 2051 год. Видите ли вы что-нибудь кардинально новое в объектах исследования и освоения, в средствах?

К. Ф.: В технических средствах, я считаю, можно будет добиться резкого снижения затрат на выведение на орбиту. Может быть, с помощью воздушно-космического самолета. Решение задачи будет зависеть от возможности создания прямоточного двигателя, работающего на скорости до 25 «мах»*). Все, что нам известно сегодня, говорит о том, что нельзя. Но НАСА взялось за решение этой проблемы. Есть конкретная техническая задача, и над ней работают. Хотя и не пишут — как, есть ли просвет.

Если грузоподъемность составит порядка 40 тонн, то такую стоимость можно будет получить. Либо надо делать то, что я предлагал — одноступенчатую многоразовую ракету суперхитрой конструкции. Очень легкой, с традиционным двигателем, большой удельной тягой, примерно 480 с.

В. Н.: А можно ли ожидать появления каких-либо принципиально новых средств доставки на орбиту?

В. Б.: Я пока не вижу возможностей удешевления пусков на порядок или даже еще больше. Экономию можно получить за счет оптимизации баллистической схемы (например, выводить на промежуточную орбиту 90×60 км, вместо круговой с высотой 200 км). Есть новые разработки построения ступеней, есть варианты типа «из пушки на Луну». При этом «ствол» заглубляется в землю. Мы уже говорили о самолетных схемах, использовании крыльев, усовершенствованных двигателях... Все это даст экономию, но не на порядок. Кроме того, называя затраты, сейчас нельзя не учитывать экологический ущерб. Во сколько, например, обойдется уничтожение 5000 тонн озона?

К. Ф.: В моем проекте — водород и кислород, т. е. вода, а это безобиднее большинства современных компонентов.

В. Н.: А что вы скажете о полезных нагрузках, о задачах, которые будут стоять перед пользователями космической техники в 2051 году?

---

*) «Мах» — точнее, число Маха — безразмерная характеристика течения сжимаемого газа, равная отношению скорости течения к скорости звука в той же точке потока.

К. Ф.: Я считаю, что одной из главных программ, способной удовлетворить человеческое любопытство, станет строительство космических радиотелескопов диаметром от 1 до 10 км для обследования Вселенной с целью поисков сигналов от других цивилизаций. А если говорить о прикладных вещах, то — создание на геостационарной орбите крупнейших энергетических систем.

В. Б.: Плюс строительство первой станции-поселения в космосе.

К. Ф.: К этому я отношусь очень скептически, хотя построить на орбите Лас-Вегас какой-нибудь нетрудно. И даже, наверное, будет пользоваться успехом. Но космическое поселение потребует чудовищных мощностей.

В. Б.: Ну, может, не в 2051 году, но когда-то это все же будет...

К. Ф.: Чтобы справиться с этой задачей, необходимо сначала создать армию роботов, которые бы работали в космосе вместо людей и делали такое, что нам и не снится.

В. Б.: Это из области мечты.

К. Ф.: Согласен, но их можно пустить на поток. И они построят все, что надо, если только не взбунтуются. Беда же в том, что все равно это будет просто банка. Пусть большая, километров на 15, но банка. А человек не может жить в банке всю жизнь. Там не будет рощ, лужаек, ручьев. Плотность заселения раза в три превысит плотность заселения Москвы.

В. Н.: Но живут же на крайнем севере, на антарктических базах...

К. Ф.: Да, но они имеют возможность хоть раз в год или в три года уехать в отпуск.

В. Н.: И оттуда будут приезжать.

К. Ф.: Тогда необходимо понять, что они будут там делать? Ведь за счет космоса проблему перенаселения все равно не решить.

В. Н.: А как с Луной? Вернемся ли мы к ее исследованию и освоению?

К. Ф.: Обязательно! Вот как раз в эти сроки.

В. Н.: И последний вопрос — полет к звездам.

В. Б.: Это реально, где-то в эти же сроки. Беспилотный полет.

В. Н.: А технически это как можно будет осуществить?

В. Б.: При помощи термоядерного прямоточного двигателя. Скорости досветовые. Несколько поколений людей будут наблюдать за этим полетом. Что касается пилотируемого полета, то это лет через сто и без надежд на возвращение. Но желающие найдутся.

К. Ф.: Это недостойный человека вариант, и инженеры принимать таких решений не могут. Я пришел к заключению, что полет человека к звездам невозможен. Но это не значит, что нет воможностей для межзвездных путешествий. Можно передавать информацию и получать ее, т. е. осуществлять информационное путешествие. Собственно, этим мы занимаемся каждый день, садясь перед телевизором. Это самый естественный способ — установить связь с другими цивилизациями и обмениваться информацией. Для этого сначала надо найти маяки, которые расставили другие цивилизации. Если не найдем, следующим шагом станет разводка зондов с приемопередающими станциями. На это уйдут тысячи, сотни тысяч, может, миллионы лет.

В. Н.: А путешествие человека?

К. Ф.: По моим расчетам, не получается. И прежде всего из-за времени. Но даже если бы человек долетел и вернулся, что он найдет на Земле через тысячи лет? Это будет совсем другая планета, совсем другие люди, другая жизнь...

В. Б.: Найдутся люди, готовые ради новых знаний полететь куда угодно.

К. Ф.: За свой счет? Сколько угодно!

В. Б.: А если не за свой?

К. Ф.: А вот за чужой — ни в коем случае. Человечество не имеет право поощрять камикадзе. Это безнравственно.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1341 — М1345, Ф1348 — Ф1352

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 июля 1992 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1341» или «Ф1348». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1341. Пусть m, n и k — натуральные числа, причем $m>n$. Какое из двух чисел больше —

а) $\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{m+\ldots}}}$ или $\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{n+\ldots}}}$

б) $\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n}}}}$ или $\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{m+\ldots+\sqrt{m}}}}$

(в каждом числе — k знаков корня)?

Л. Курляндчик, В. Сендеров

М1342. Напишем строчку из n чисел от 1 до n. Под ней напишем вторую строчку из n чисел: сначала — числа, стоящие в первой строчке на нечетных местах (по порядку), а затем числа, стоящие на четных местах (тоже по порядку). Далее будем писать следующие строчки по тому же правилу до тех пор, пока на некотором шаге не получится m-я строчка, совпадающая с первоначальной. Докажите, что такая строчка встретится и $m \leqslant n$.

Я. Брискин

М1343. Три хорды окружности γ попарно пересекаются в точках A, B, C. Построим еще три окружности: одна касается сторон угла CAB и окружности γ (изнутри) в точке A_1, вторая — сторон угла ABC и окружности γ (изнутри) в точке B_1, третья — сторон угла ACB и окружности γ (изнутри) в точке C_1. Докажите, что три отрезка AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (рис. 1).

И. Шарыгин

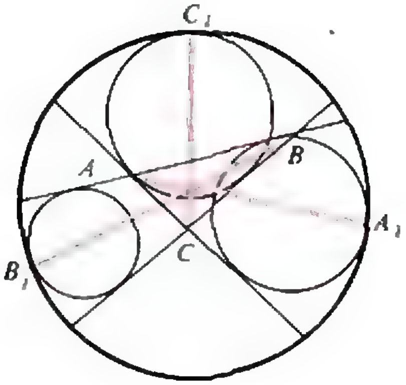


Рис. 1.

М1344. Том Сойер красит забор, состоящий из длинной (бесконечной) последовательности прямоугольных досок разной высоты и ширины. Каждая доска на 1 % уже, чем предыдущая, и выше предыдущей (однако не выше 2 м). Том начинает с первой доски и затем, если доска выше предыдущей более чем на 2 %, красит ее, а в противном случае — пропускает.

а) Докажите, что он покрасит не менее 40 % площади забора.
б) Можно ли утверждать, что он покрасит не менее половины площади забора?

А. Григорьян

М1345. На гиперболе $y=1/x$ взяты две точки $M(x_0;\ y_0)$ и $N(-x_0;\ -y_0)$, симметричные относительно начала координат. Окружность с центром M, проходящая через точку N, пересекает гиперболу еще в трех точках. Докажите, что эти точки лежат в вершинах правильного треугольника.

Ф1348*. Однородный резиновый шнур длиной L прикреплен одним концом к стене. Другой его конец в некоторый момент времени начинают двигать вдоль шнура со скоростью v, равномерно растягивая его при этом. В тот же момент от закрепленного конца вдоль шнура начинает двигаться жук, скорость которого относительно опоры (шнура) постоянна и равна v. При каких условиях жук сможет добраться до конца шнура? За какое время он это сделает? На каком максимальном расстоянии от подвижного конца шнура он окажется во время движения? Считайте, что шнур деформируется без разрыва.

Ф1349. На гладкий вертикальный стержень насажены тяжелая шайба массой M и легкая шайба массой $m=M/1000$. Легкой шайбе сообщают скорость, равную v и направленную так, как показано на рисунке 2. На какой высоте над подставкой может находиться тяжелая шайба, не смещаясь заметно вверх или вниз? Каким будет период малых колебаний такого «поршня», если его сместить из этого равновесного положения? Все удары считать абсолютно упругими.

А. Андрианов

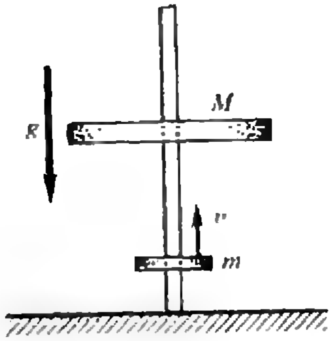


Рис. 2.

Ф1350. На бирже «АНФИСА» 1917 брокерских и 1992 хакерских места. Между каждой парой БМ включен резистор сопротивлением 1 кОм, между каждой парой ХМ — резистор сопротивлением 2 кОм, между каждым БМ и ХМ — 4 кОм. Чему равно сопротивление, измеренное между двумя БМ? Между двумя ХМ? Между БМ и ХМ?

И. Потеряйко

Ф1351. Медный диск массой M и диаметром D может свободно вращаться вокруг закрепленной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости диска. Центр и край диска соединены резистором сопротивлением R при помощи скользящих контактов. Вся система помещена в однородное магнитное поле $\vec{B}$, параллельное оси диска. Диск раскручивают до угловой скорости ω_0 и отпускают. Сколько оборотов сделает диск до полной остановки? Теперь последовательно с резистором включим батарею напряжением U_0. За какое время диск раскрутится из состояния покоя до угловой скорости ω_0?

М. Цыпин

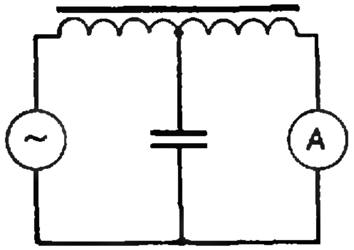


Рис. 3.

Ф1352. Катушка индуктивностью $L=1$ Гн намотана на тороидальный сердечник с большой магнитной проницаемостью. Катушку подключают к выходу генератора звуковой частоты последовательно с амперметром переменного тока (рис. 3). Конденсатор емкостью $C=1$ мкФ подключен к отводу от середины катушки. Найдите амплитуду тока через амперметр в зависимости от частоты ω генератора и сдвиг фаз между этим током и напряжением генератора. То же — для тока, потребляемого схемой от генератора. Амплитуда напряжения генератора $U_0=1$ В. Сопротивления амперметра и источника считать малыми.

А. Зильберман

Решения задач

М1311 — М1315, Ф1328 — Ф1332

***М1311.** Треугольник имеет целые длины сторон x, y, z, причем известно, что длина одной из его высот равна сумме длин двух других высот. Докажите, что $x^2+y^2+z^2$ — квадрат целого числа.*

Пусть z — наименьшая из сторон треугольника ABC, S — его площадь. Тогда

$$\frac{2S}{z}=\frac{2S}{x}+\frac{2S}{y},$$

т. е. $xy-xz-yz=0$.
Но при выполнении этого условия

$$x^2+y^2+z^2=(x+y-z)^2,$$

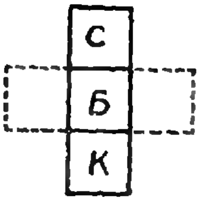
т. е. является квадратом целого числа.

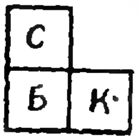
Д. Фомин

***М1312.** Поля доски $n\times n$ раскрашены в три цвета — синий, белый, красный, причем известно, что рядом с каждой синей клеткой есть (граничащая по стороне) белая, рядом с белой — красная и рядом с красной — синяя. Докажите для количества k клеток одного — скажем, синего — цвета оценки: а) $k\leqslant 2n^2/3$; б) $k\geqslant n^2/11$.*

Пусть С, Б, К — количества синих, белых и красных клеток соответственно. Докажем требуемые оценки для числа С синих клеток. Прежде всего заметим, что $\text{С}\leqslant 3\text{Б}$. Для доказательства этого возьмем какую-нибудь белую клетку и отметим все синие клетки, к ней примыкающие, затем возьмем другую белую клетку и отметим примыкающие к ней и ранее не отмеченные синие клетки и так далее, пока не исчерпаем все белые клетки. Поскольку к каждой белой клетке примыкает красная, каждый раз отмечается не более 3-х синих клеток. Но это и означает, что $\text{С}\leqslant 3\text{Б}$. Аналогично доказывается, что $\text{Б}\leqslant 3\text{К}$, $\text{К}\leqslant 3\text{С}$.

Возьмем теперь произвольную синюю клетку x_1 и построим какую-нибудь цепочку, состоящую из белой клетки x_2, примыкающей к x_1, и красной клетки x_3, примыкающей к x_2, причем, если есть возможность, будем выбирать цепочку-«уголок» («уголок» не получается лишь тогда, когда ни одна из клеток, отмеченных на рисунке звездочкой, не является красной).





В каждой «прямой» цепочке отметим белую клетку, а в каждом «уголке» — красную. Общее количество цепочек равно числу синих клеток. Количество отмеченных по нашему правилу белых клеток равно числу «прямых» цепочек. Каждая красная клетка, входящая в выбранные нами «уголки», может быть отмечена не более 4-х раз (она принадлежит не более, чем четырем «уголкам»). Отсюда следует, что

$$С \leqslant Б+4К. \qquad (*)$$

Аналогично $Б \leqslant К+4С$, $К \leqslant С+4Б$. Складывая неравенство $С \leqslant 3Б$ с неравенством (*), получаем

$$2С \leqslant 4(Б+К),$$

или

$$3С \leqslant 2(Б+К+С)=2n^2,$$

что доказывает пункт а).

Наконец, из неравенств

$$Б \leqslant К+4С \quad \text{и} \quad К \leqslant 3С$$

следует, что

$$Б \leqslant 7С,\ Б+К \leqslant 10С,$$

и окончательно $n^2=Б+К+С \leqslant 11С$, т. е. доказано и утверждение пункта б).

Отметим еще, что доказанные нами оценки точны в том смысле, что число 2/3 не может быть заменено ни на какое меньшее, а 1/11 — на большее.

Ф. Назаров

М1313. *Найдите 8 натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_8$ таких, что*

$$\sqrt{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_1-1}}+\sqrt{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_2-1}}+\ldots+\sqrt{\sqrt{a_8}-\sqrt{a_8-1}}=2.$$

Ответ: Такими числами являются, например, числа

$$a_k=(2k+1)^2 \quad \text{при} \quad k=1,\ 2,\ \ldots\ 8.$$

Для доказательства достаточно заметить, что

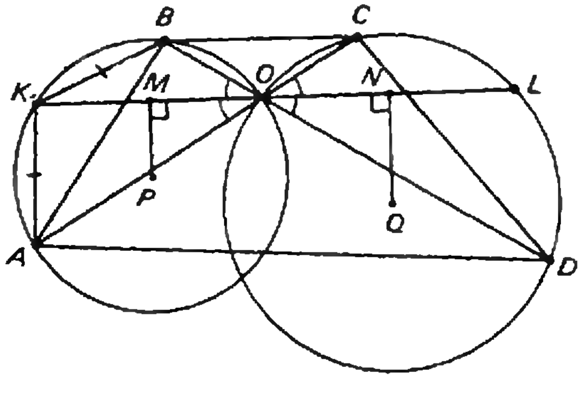
$$\sqrt{a_k}-\sqrt{a_k-1}=2k+1-2\sqrt{k^2+k}=(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})^2$$

Л. Курляндчик

М1314. *$ABCD$ — выпуклый четырехугольник, диагонали которого пересекаются в точке O. Пусть P и Q — центры окружностей, описанных около треугольников ABO и CDO. Докажите, что*

$$AB+CD \leqslant 4PQ.$$

Пусть O — точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$. Проведем прямую, делящую углы BOA и COD пополам и пересекающую окружности, описанные около треугольников AOB и COD в точках K и L соответственно (см. рисунок).



Пусть PM и QN — перпендикуляры, опущенные из точек P и Q на прямую KL.

Так как сумма углов KBO и KAO равна 180°, один из этих двух углов не является острым. Будем для определенности считать, что таким углом является угол KBO.

Из треугольника KBO получаем, что $KO>KB$. А так как треугольник AKB — равнобедренный,

$$2KB=KB+KA>AB.$$

Итак, $2KO>AB$. Аналогично доказывается, что $2LO>CD$.

Но тогда

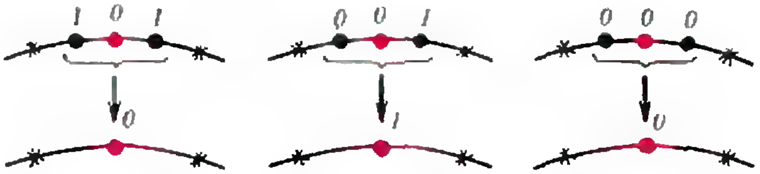
$$4PQ\geqslant 4MN=2KL=2KO+2LO>AB+CD.$$

Ф. Назаров

M1315. На окружности расставляются целые числа. Разрешается стереть любое четное число, а вместо двух соседних с ним чисел записать их сумму (отчего количество чисел уменьшается на два). Такие операции проводятся, пока это возможно, т. е. пока не останется ни одного четного числа, либо останется одно или два числа. Докажите, что количество оставшихся чисел зависит лишь от исходной расстановки, но не от порядка действий.

Так как в данной задаче существенна только четность расставляемых чисел, заменим четные числа нулями, а нечетные единицами, и будем при этом считать, что $1+1=0$ (сложение по модулю 2).

Таким образом, описанное в условии преобразование расстановки нулей и единиц будет выглядеть так, как показано на рисунке.



Предположим сначала, что число нулей в исходной расстановке A из n нулей и единиц нечетно. Тогда, как бы мы ни действовали, после каждой операции остается нечетное количество нулей (это количество либо не меняется, либо уменьшается на 2). Это значит, что процесс прекратится, когда на окружности останутся два числа (если n четно) и одно число (если n нечетно).

Если количество нулей в исходной расстановке четно, сотрем все возможные пары рядом стоящих нулей. Получится новая расстановка, состоящая из четного числа $2k$ идущих подряд серий единиц, причем между любыми двумя соседними сериями стоит один 0. Пусть a_1, a_2, ..., a_{2k} — количества единиц в этих сериях, посчитанных по часовой стрелке, начиная от произвольного нуля. Положим

$$D(A)=|a_1-a_2+\ldots+a_{k-1}-a_k|;$$

при наших преобразованиях исходной расстановки число $D(A)$ не меняется. В самом деле, если в операции участвуют 2 подряд стоящих нуля, ни одно из чисел a_i не может измениться. Если в преобразовании участвует «одинокий» нуль, т. е. при преобразовании ...101...→...0..., количество единиц в каждой из двух соседних серий уменьшается на 1, так что и в этом случае $D(A)$ не меняется.

В конце концов (каждый раз общее количество нулей и единиц уменьшается на 2) процесс закончится, т. е. на окружности останутся одни единицы, и при этом $D(A)$ окажется равным их количеству. Таким образом, для любой исходной расстановки чисел, мы можем определить, что останется на окружности после наших преобразований.

Д. Фомин

Ф1328. *Клин массой M с длиной наклонной грани L и углом при основании α покоится на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 1). К верхней точке клина прикреплен конец очень тонкой ленты, масса которой $m=M/3$, а длина L. Ленту заворачивают в клубок, после чего систему отпускают. Найдите максимальную скорость клина. Трением можно пренебречь.*

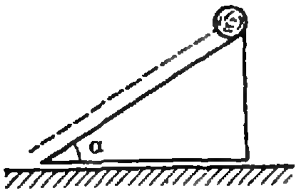


Рис. 1.

Решение этой задачи довольно громоздко.

Введем обозначения. Пусть в некоторый момент времени точка касания клубка поверхности клина находится на расстоянии l от нижней точки (рис. 2) и $l/L=x$. Тогда масса остатка клубка равна mx, а масса размотавшейся ленты — неподвижной относительно клина — $m(1-x)$. Обозначим скорость клина u, скорость центра клубка относительно клина v (рис. 3).

Диаметр клубка в верхней точке клина не задан в условии задачи. Учет изменения этого диаметра и связанного с ним дополнительного понижения центра тяжести клубка сильно усложнил бы решение задачи. Будем считать, что диаметр клубка мал (т. е. лента имеет большую плотность) и пренебрежем его изменением.

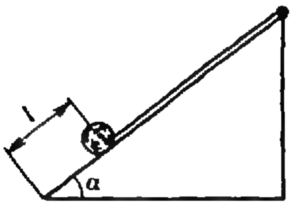


Рис. 2.

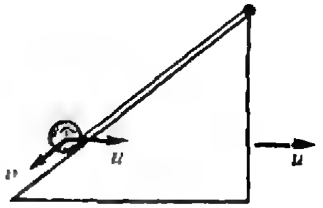


Рис. 3.

Для решения воспользуемся законами сохранения импульса и энергии. Выразим уменьшение потенциальной энергии через x:

$$\Delta E_p = mxg(L-l)\sin\alpha + 1/2m(1-x)g(L-l)\sin\alpha = 1/2m(1-x^2)gL\sin\alpha.$$

Теперь запишем закон сохранения импульса и выразим v через u:

$$Mu + m(1-x)u - mx(v\cos\alpha - u) = 0 \Rightarrow v = u(M+m)/(mx\cos\alpha).$$

Для нахождения кинетической энергии системы учтем, что клубок, в отличие от клина и размотавшейся части ленты, движется не только поступательно, но еще и вращается. Угловая скорость определяется относительным движением клубка: $\omega=v/r$, где r — его радиус. Считая клубок цилиндром, запишем «вращательную добавку» к кинетической энергии поступательного движения в виде

$$E_{k\,\text{вр}}=1/4mxv^2.$$

Тогда полная кинетическая энергия системы равна

$$E_k=E_{k\,\text{пост}}+E_{k\,\text{вр}}=\frac{(M+m(1-x))u^2}{2}+$$

$$+\frac{mx(v^2+u^2-2uv\cos\alpha)}{2}+\frac{mxv^2}{4}=$$

$$=\frac{(M+m)u^2}{2}\left(\frac{1,5(M+m)}{m\cos^2\alpha}\frac{1}{x}-1\right).$$

Теперь запишем закон сохранения энергии и выразим скорость клина через x:

$$\Delta E_p=E_k\Rightarrow u^2=\frac{mgL\sin\alpha}{M+m}\,\frac{1-x^2}{A/x-1},$$

где

$$A=\frac{1,5(M+m)}{m\cos^2\alpha}=\frac{6}{\cos^2\alpha}.$$

Исследуем полученное выражение. Видно, что при $x\approx1$ (в самом начале пути) и при $x\to0$ (в конце) скорость клина обращается в ноль, значит, можно надеяться обнаружить значение x_m, при котором скорость клина максимальна. Для нахождения максимума приравняем нулю производную по x и получим уравнение

$$2x_m^3-3Ax_m^2+A=0, \text{ или } 3x_m^2-1=\frac{2}{A}x_m^3.$$

В принципе кубическое уравнение можно решить аналитически, можно решить его приближенно — на ЭВМ или с помощью калькулятора, задавая различные углы α. Но можно поступить и иначе: поскольку $A>6$, при $x_m<1$ (а это всегда выполняется) можно приближенно считать

$$x_m\approx\frac{1}{\sqrt{3}}\approx0,58.$$

(Численный расчет показывает, что при изменении A от минимального значения 6 до весьма больших значений получается, что x_m изменяется от 0,6 до 0,58.)

После несложных преобразований максимальную скорость u_m можно выразить через x_m:

$$u_m^2=\frac{4}{3}\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 gL\cos^2\alpha\sin\alpha\cdot x_m^3.$$

Этим выражением можно и ограничиться, а можно подставить в него значения m/M и x_m. Численный расчет для $\alpha=30°$ и $L=0,1$ м, например, дает

$$u_m\approx0,08 \text{ м/с}.$$

Интересный вопрос возникает при анализе кинетической энергии — куда она пропадает после того, как весь клубок размотается? Подумайте об этом самостоятельно. П о д с к а з к а: скорость клубка перед этим очень велика, и стоит рассмотреть движение самого конца ленты в момент окончания процесса.

А. Зильберман

Ф1329. *В цилиндре под поршнем находится ν молей ненасыщенного водяного пара при температуре T_0. При медленном изобарическом охлаждении цилиндра половина пара сконденсировалась, а внутренняя энергия содержимого цилиндра уменьшилась на ΔU. Какое количество теплоты пришлось при этом отвести от содержимого цилиндра, если температура в нем уменьшилась на ΔT? Объемом воды по сравнению с объемом пара можно пренебречь.*

По закону сохранения энергии отведенное количество теплоты Q равно сумме уменьшения внутренней энергии ΔU системы «жидкость — пар» и работы A внешних сил над системой.

Переход пара из начального состояния в конечное происходит в два этапа. На первом этапе его температура при постоянном давлении уменьшается на ΔT, после чего пар становится насыщенным. На втором этапе насыщенный пар при постоянном давлении и температуре $T_0-\Delta T$ частично конденсируется. Легко видеть, что на обоих этапах внешняя сила производит положительную работу. Ее можно найти из уравнений состояния пара в начальном и конечном состояниях. В начале ненасыщенный пар при давлении p_0 занимает объем V_0, так что

$$p_0V_0=\nu RT_0,$$

где R — универсальная газовая постоянная. В конечном состоянии $\nu/2$ молей насыщенного пара и воды занимают объем V при температуре $T_0-\Delta T$. Если пренебречь объемом, занимаемым водой, то для насыщенного пара имеет место равенство

$$p_0V=\nu/2R(T_0-\Delta T).$$

Тогда для работы внешней силы находим

$$A=p_0(V_0-V)=\nu/2R(T_0+\Delta T).$$

Внутренняя энергия системы является функцией состояния, поэтому можно не интересоваться ее промежуточными изменениями на указанных выше этапах охлаждения пара, а полное уменьшение по условию задачи равно ΔU.

Таким образом, окончательно получаем, что от системы необходимо отвести количество теплоты

$$Q=\Delta U+A=\Delta U+\nu/2R(T_0+\Delta T).$$

А. Шеронов

Ф1330. *К батарейке с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением подключены последовательно друг другу два одинаковых миллиамперметра, которые показывают ток $I_1=1$ мА. Параллельно одному из них подключают вольтметр, при этом показания этого миллиамперметра уменьшаются до $I_2=0{,}8$ мА, а вольтметр показывает напряжение*

Батарейка имеет пренебрежимо малое сопротивление, значит, ее напряжение остается неизменным. Сумма напряжений на миллиамперметрах как раз равна этому напряжению, следовательно, уменьшение напряжения на одном из них компенсируется увеличением на другом. Итак, второй миллиамперметр покажет ток

$$I_2'=1{,}2\ \text{мА}.$$

(Интересно, что если бы миллиамперметры в условии задачи были названы вольтметрами — а это вполне соответствует действительности, вольтметр ведь измеряет именно текущий по нему ток,— ответ был бы очевиден.)

$U=0{,}3$ В. Что показывает второй миллиамперметр? Чему равно напряжение батарейки? Каковы сопротивления приборов?

Теперь видно, что ток через вольтметр составляет 1,2 мА—0,8 мА=0,4 мА, поэтому его сопротивление равно

$$R_V=\frac{0{,}3\ \text{В}}{0{,}4\ \text{А}}=0{,}75\ \text{кОм}.$$

Параллельно вольтметру включен один из миллиамперметров, по которому течет вдвое больший ток, значит, его сопротивление вдвое меньше:

$$R_{\text{mA}}=0{,}375\ \text{кОм}.$$

Напряжение на этом миллиамперметре (его показывает вольтметр) 0,3 В, а второй прибор показывает ток в 1,5 раза больше, значит, напряжение на нем 0,45 В. Итак, напряжение батарейки равно

$$U_{\text{бат}}=0{,}3\ \text{В}+0{,}45\ \text{В}=0{,}75\ \text{В}.$$

Внимание: так приборы можно включать только «на бумаге» — не подключайте миллиамперметры прямо к источнику!

Р. Александров

***Ф1331.** К источнику с напряжением $U=10$ В подключили последовательно соединенные катушку индуктивностью $L_0=0{,}1$ Гн и резистор сопротивлением $R=10$ Ом. Через некоторое время ток в цепи установился. После этого начинают вдвигать и выдвигать сердечник катушки таким образом, чтобы индуктивность изменялась по закону $L=L_0(1+0{,}1\sin\omega t)$. При этом в цепи появляется переменная составляющая тока. Найдите амплитуду этой составляющей на частоте $\omega=1$ рад/с. Какой станет амплитуда, если вдвигать и выдвигать сердечник в 10 000 раз чаще?*

Для цепи, содержащей катушку индуктивностью L и резистор сопротивлением R, время установления тока (его называют временем релаксации) равно $\tau=L/R$. При наших параметрах цепи это среднее время (индуктивность периодически изменяется) и $\tau\approx L_0/R\sim10^{-2}$ с.

В первом случае изменение индуктивности происходит с периодом $T_1=2\pi/\omega=6{,}28$ с. Это время гораздо больше τ, и изменение индуктивности происходит так медленно, что при каждом ее значении ток в цепи успевает установиться. (Такие процессы называются квазистатическими, т. е. почти статическими.) Поэтому в первом приближении можно считать, что в нашем случае ток остается постоянным и равным (как в статическом режиме) U/R. На основании закона Ома, для нашей цепи можно записать

$$I_1\frac{dL}{dt}+I_1R=U.$$

После подстановки выражения для L получаем, что

$$I_1=\frac{U}{R(1+(0{,}1L_0\omega/R)\cos\omega t)}\approx\frac{U}{R}\left(1-\frac{0{,}1L_0\omega}{R}\cos\omega t\right).$$

Амплитуда переменной составляющей тока равна

$$I_{m1}=0{,}1L_0\omega U/R^2=10^{-3}\text{А}.$$

Во втором случае период изменения индуктивности $T_2=2\pi/(10^4\omega)=6{,}28\cdot10^{-4}\ \text{с}\ll\tau$, и изменение индуктивности происходит так быстро, что в первом приближении можно считать магнитный поток, пронизывающий катушку, постоянным:

$$\Phi=LI_2=L_0I_0=L_0U/R=\text{const}.$$

Из этого условия следует, что

$$I_2=\frac{L_0U}{LR}=\frac{L_0U}{L_0(1+0{,}1\sin 10^4\omega t)R}\approx\frac{U}{R}(1-0{,}1\sin 10^4\omega t).$$

Амплитуда переменной составляющей тока равна

$$I_{m2}\approx 0{,}1U/R=0{,}1\ \text{А}.$$

Если в первом случае (низкие частоты) амплитуда переменной составляющей тока линейно растет с частотой изменения индуктивности, то при больших частотах она уже не зависит от частоты.

В. Можаев

Ф1332. *Падающий на тонкую линзу луч пересекает главную оптическую ось под углом $\alpha=4°$ на расстоянии $d=12$ см от линзы и выходит из нее под углом $\beta=8°$ к главной оптической оси. Найдите фокусное расстояние линзы.*

Возможны два случая.

1) Линза собирающая. Построив ход луча через линзу (рис. 1), получаем следующее соотношение:

$$d\,\mathrm{tg}\,\alpha=F\,\mathrm{tg}\,\alpha+F\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Отсюда находим

$$F=\frac{d}{1+\mathrm{tg}\,\beta/\mathrm{tg}\,\alpha}=4\ \text{см}.$$

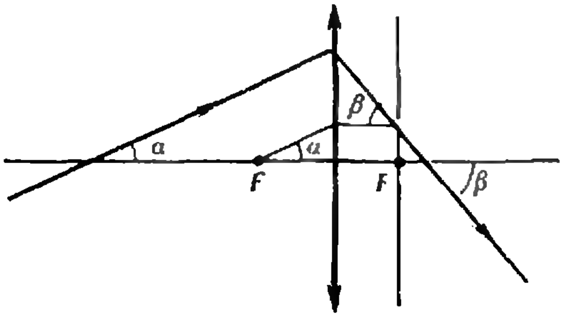


Рис. 1.

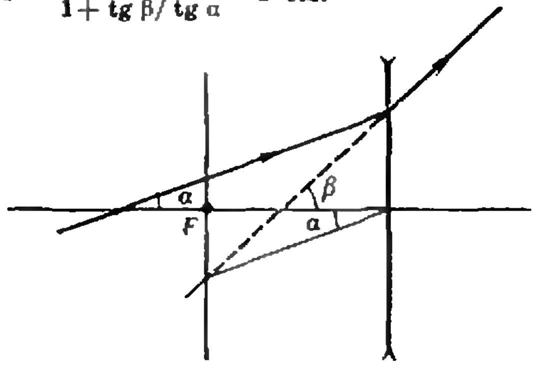


Рис. 2.

2) Линза рассеивающая. Поступая аналогично, получим (см. рис. 2)

$$F\,\mathrm{tg}\,\beta=F\,\mathrm{tg}\,\alpha+d\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

откуда

$$F=\frac{d}{\mathrm{tg}\,\beta/\mathrm{tg}\,\alpha-1}=12\ \text{см},$$

т. е. луч выходит из фокуса линзы.

В. Дерябкин

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Семь томов энциклопедического словаря стоят в следующем порядке: 1, 5, 6, 2, 4, 3, 7. Расставьте их в порядке возрастания номеров, применив несколько раз следующую операцию: перестановку трех рядом стоящих томов в начало, в конец или между двумя другими томами, не меняя порядка этих трех томов.

2. Решите арифметический ребус-палиндром. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

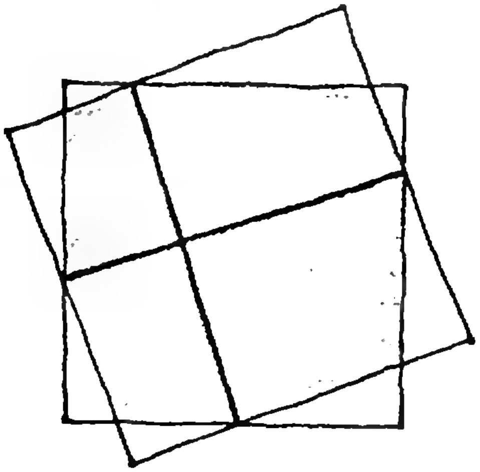
ТОРГ×Г=ГРОТ

3. Когда я положил в ящик стола связку ключей, то количество ключей в ящике возросло не более чем на треть. Когда мой брат положил туда и свою такую же связку ключей, то их число возросло еще не менее чем на четверть. Если бы в каждой связке было одним ключом больше, то слово «четверть» следовало бы заменить на «40 %» (слово «треть» также пришлось бы заменить). Сколько ключей лежало в ящике стола первоначально?

Хорошие ключики — всё открывают...

4. Число 321 — составное, но если заменить цифру 2 на цифру 3, оно станет простым числом 331. Найдите наименьшее составное число, которое остается составным, если в нем произвольно заменить одну из цифр.

5. Два квадрата в пересечении дают восьмиугольник (см. рисунок). Две диагонали этого восьмиугольника делят его на четыре четырехугольника. Докажите, что эти диагонали перпендикулярны.



Эти задачи нам предложили А. Савин, С. Баженов, И. Акулич, В. Произволов. Задача 4 принадлежит польскому математику В. Серпинскому.

ПРОСТЫЕ ЗАТЕИ

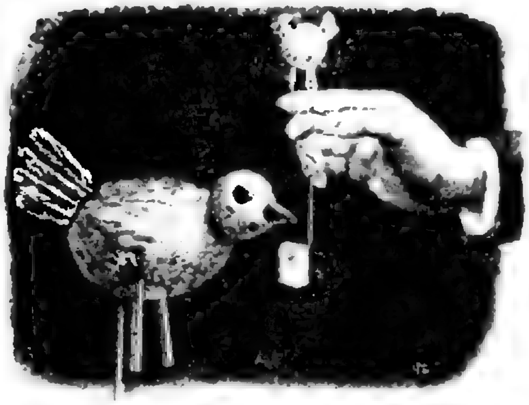
Сегодня мы возвращаемся к книге Тома Тита «Научные развлечения», отрывки из которой мы уже публиковали (см. «Квант» № 8 за 1991 год), и предлагаем вам несколько простых и интересных опытов.

ТОМ ТИТ

Птичка на ветке

Этот птенец отлично стоит на двух лапках, потому что центр тяжести его опущен ниже точек опоры.

Тело птенчика сделано из опорожненной яичной скорлупки; отверстие в скорлупке мы заткнули хлебным шариком — это голова. Шляпки гвоздей или спичечные головки — глаза; клюв у птенца деревянный. Голову нужно вылепить так, чтобы она, как пробка, вошла в отверстие скорлупы; когда она высохнет, ее можно прочно приклеить сургучом.



Несколько перьев можно приклеить к яйцу, чтобы получился хвост. Две спички, приклеенные сургучом,— это лапки. Птичку можно раскрасить или же оклеить мелко настриженной шерстью, похожей на легкий пушок.

Проволоку, на которой укреплен противовес, нужно согнуть с обоих концов под прямым углом, чтобы получилось два крючка, примерно по 2 см каждый. Один крючок нужно укрепить в нижней части скорлупки, позади лапок, залив его изнутри сургучом (прежде чем будет установлена голова). Другой крючок нужно пропустить через дырочку в куске сахара или в каком-нибудь другом грузиле. Теперь птичка будет отлично сидеть на пальце. А если посадить ее на ветку в саду, она будет покачиваться на ветру, как живая.

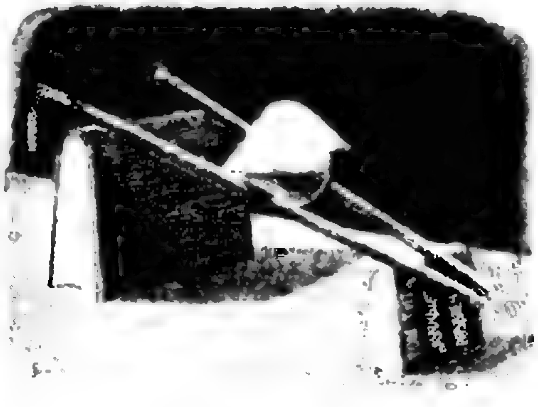
Вверх по скату

Этот опыт с первого взгляда противоречит закону тяготения.

Склей основаниями два картонных конуса. Устрой наклонную поскость, положив две палки на две книги разной высоты. Не забудь их раздвинуть, чтобы расстояние между палками на большой книге было больше, чем расстояние между палками на маленькой книге.

Положи теперь свою картонную фигуру на палки. Зрителю покажется, что конусы катятся кверху.

Он ошибется, конечно, потому что палки раздвинуты под углом, и ось конусов, на которой находится их центр тяжести, не повышается, а понижается. Так что на самом деле конусы будут катиться не кверху, а книзу.



Спички-лакомки

В миску с водой положи несколько спичек. Расположи их звездой, а в центре звездочки дотронься до воды заостренным кусочком мыла; спички тотчас же разбегутся в стороны: мыло приводит их в ужас, как кое-кого из знакомых моих ребят.

Чтобы собрать беглецов, окуни в воду в центре кусок сахара. Спички — большие лакомки; они тотчас же подбегут поближе и соберутся вокруг него.

Вместо спичек можно пустить на воду маленьких рыбок, вырезанных из дерева. Тогда этот опыт будет еще забавней.

Удивительный подсвечник

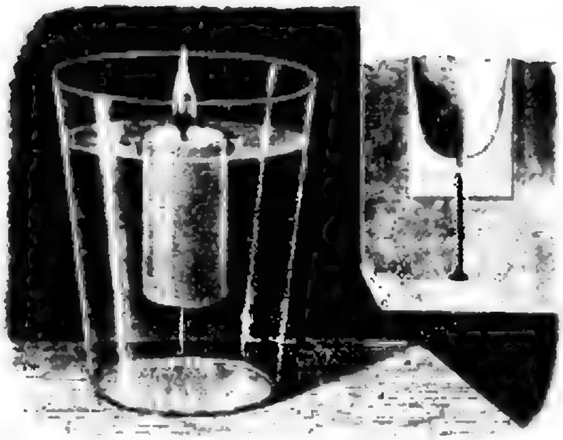
Не правда ли, удивительный подсвечник — стакан воды? А этот подсвечник совсем не плох.

Утяжели конец свечи гвоздем. Рассчитай величину гвоздя так, чтобы свеча вся погрузилась в воду, только фитиль и самый краещек стеарина должны выступать над водой.

Зажги теперь фитиль — и можешь смело держать пари, что твоя свеча выгорит до конца.

— Позволь,— скажут тебе,— ведь через одну минуту свеча догорит до воды и погаснет!

— В том-то и дело,— ответишь ты,— что свеча с каждой минутой короче. А раз короче, значит и легче. Раз легче, значит, она всплывет.



И правда, свеча твоя будет понемножку всплывать, причем охлажденный водой стеарин у края свечи будет таять медленней, чем стеарин, окружающий фитиль. Поэтому вокруг фитиля образуется довольно глубокая воронка; она показана у нас на рисунке справа. Эта пустота в свою очередь облегчает свечу, потому-то наша свеча и сгорит до конца.

Упрямая пробка

Возьми пробку поуже, чем горлышко бутылки, такую, которая свободно вошла бы в бутылку, не прикоснувшись к стенкам горлышка. Положи ее в горлышко, у самого края, и предложи товарищу загнать ее в бутылку сильным дуновением. Это кажется очень просто. Твой товарищ будет дуть на маленькую пробку изо всех сил, но пробка будет

выскакивать из горлышка тем энергичней, чем сильнее будет дуновение. Товарищ попробует подуть тихонько, но упрямая пробка все равно не войдет в бутылку.

Дело в том, что во время дуновения некоторое количество воздуха попадает в бутылу; воздух в бутылке сжимается и выталкивает пробку из горлышка. Есть, однако, несколько способов сладить с упрямицей; вот два из них:

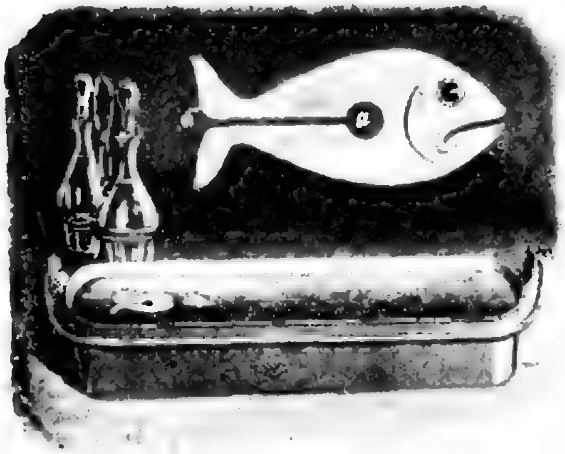
1. Вместо того чтобы вдувать воздух в бутылку, попробуй втянуть в себя воздух из бутылки; тогда, как только ты отведешь губы от горлышка, входящий в бутылку воздух втолкнет в нее пробку.

2. Через трубочку макаронины или соломинку подуй точно на основание пробки — и она тотчас же скользнет в бутылку.

И в том и в другом случае бутылка внутри должна быть совершенно сухой, чтобы пробка не прилипала к стенкам.

Бумажная рыбка

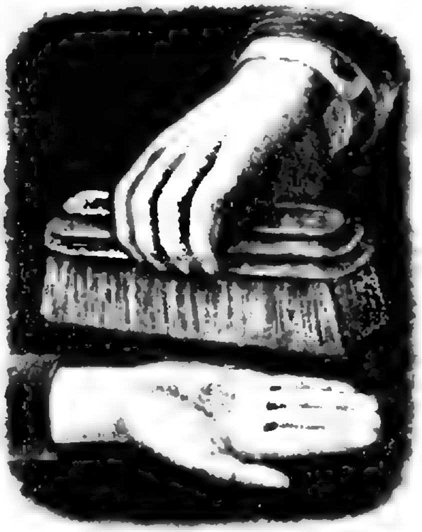
Вырежь из бумаги рыбку — вот ее изображение в натуральную величину. В центре вырежь круглое отверстие *а*, сообщающееся с хвостом узким каналом *аб*; налей воду в таз и положи рыбку на воду так, чтобы нижняя сторона ее вся была смочена, а верхняя — вся совершенно суха. Капни осторожно большую каплю масла в отверстие *а*; масло, стремясь распространиться по поверхности воды, потечет по каналу *аб*, и вследствие реакции рыбка начнет двигаться в противоположную сторону, т. е. вперед.



Ну-ка смахни!

Вытяни ладонь и положи на нее гривенник или две копейки.

Попроси кого-нибудь из приятелей взять платяную щетку и смахнуть с твоей руки гривенник.



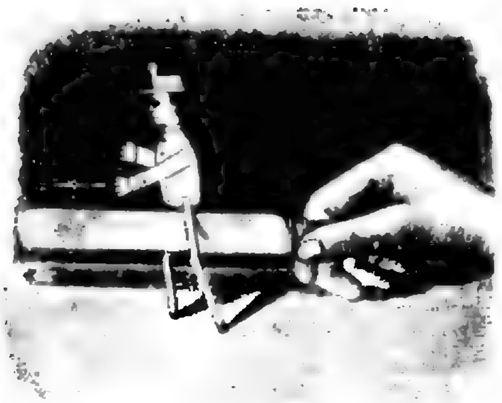
— Это дело нехитрое, — скажет твой приятель.

Но он будет зря трудиться: монетка будет преспокойно лежать, как приклеенная.

Конечно, ты предупреди приятеля, что ударять по руке щеткой нельзя, нельзя сцарапывать гривенник концом щетки. Пусть он чистит твою руку точно так же, как чистят платье.

Беспокойный всадник

Расщепи конец одной спички, конец другой остругай клинышком и, вставив клинышек в расщеп, соедини спички наподобие латинской буквы V с очень острым углом; посади эти две спички верхом на лезвие ножа, головками книзу. Возьми нож в руку и, крепко прижимая руку к столу, старайся держать спички на ноже так, чтобы они только чуть-чуть касались головками стола.



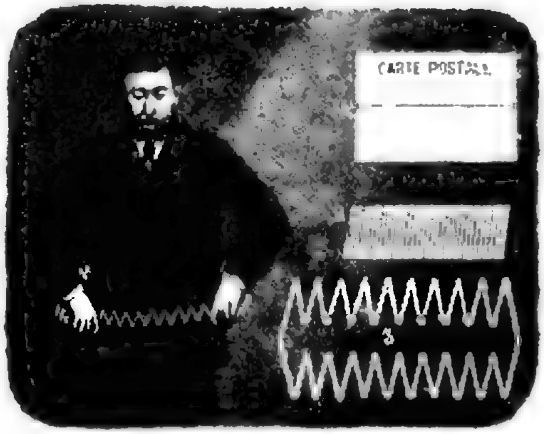
К великому твоему удивлению, спички сдвинутся с места и зашагают вдоль лезвия ножа! Это происходит потому, что твоя рука непрерывно производит невольные, не заметные для глаза движения.

Если ты надломишь спички посредине, чтобы они похожи были на ноги всадника, а в расщеп спички вставишь фигурку, вырезанную из плотной бумаги, твой беспокойный всадник будет без всякой видимой причины разъезжать взад и вперед по ножу.

Как пролезть сквозь открытку

Совсем нетрудно пролезть сквозь почтовую карточку; можно пролезть даже сквозь игральную карту.

Возьми открытку, сделай на ней продольный прорез, чуть-чуть не доводя его до краев (1). Сложи теперь открытку по этому прорезу и сделай ножницами поперечные надрезы (2).



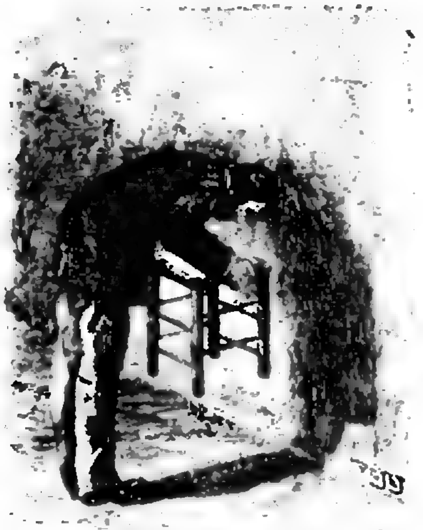
Если теперь ты раскроешь открытку и осторожно потянешь за ее концы, она превратится в длинную извилистую ленту (3), замкнутую в кольцо; сквозь это кольцо ты пролезешь без всякого труда, как в широкий обруч.

Тяжелый табурет

Поставь табурет на пол у стены; отодвинь носки ног от стены на расстояние, равное удвоенной ширине табурета. Наклонись и возьмись руками за края табурета, потом прислони голову к стене.

В этой позе подыми табурет с пола и затем выпрямись. Только не вздумай попробовать это упражнение на скользком паркете, потому что тут недолго и шею сломать.

Ты убедишься, что центр тяжести твоего тела переместился таким образом, что выпрямиться почти невозможно, не опустив табурета на пол и не найдя в нем точки опоры.



Несколько тактов из жизни центрального процессора

Научно-популярная пьеса из жизни микросхем

Л. ШТЕРНБЕРГ

Действующие лица:

Тактовый генератор — устройство, выдающее с определенной частотой импульсы, синхронизирующие работу остальных устройств. Период между двумя импульсами называется «тик».

Устройство управления (УУ) — устройство, которое всем руководит.

Дешифратор адреса программной памяти (ДшАПП))* — устройство, которое получает на вход адрес, а на выходе, ведущем к ячейке памяти с указанным адресом, появляется сигнал, разрешающий чтение-запись в эту ячейку.

Дешифратор адреса регистра (ДшАР) — то же, но применительно к памяти из адресуемых регистров.

Дешифратор операций (ДшОп) — устройство, которое по коду операции включает блок, выполняющий эту операцию.

Счетчик адреса команды (СчАК) — регистр, содержащий номер (адрес) очередной команды*).

Операции (строго говоря, исполнители операций) — устройства, которые собственно перерабатывают информацию.

Регистры, стеки, биты и т. д.

Место действия — микросхема под крышкой калькулятора.
Время действия — после нажатия клавиши «С/П».
Пьеса работает в автоматическом режиме.

Вступление

На микросхеме появляются триггеры, регистры, сумматоры и прочие. Они рассаживаются по местам, соединяются между собой, подключаются к источнику питания...

ПУСК!!!

Звучат сигналы тактового генератора...

Такт 1

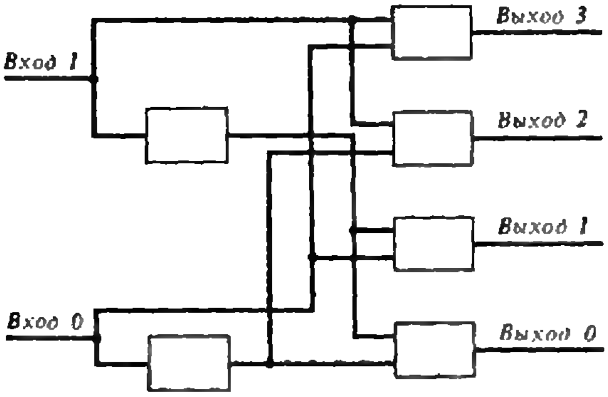
Идет чтение-запись

Тик 1. С первым тиком тактового генератора Устройство Управления отправляется в Программную Память и требует, чтобы ему выдали команду. Страж Программной Памяти — ДшАПП смотрит на Счетчик адреса команды и открывает нужную ячейку памяти, от его взгляда значение в СчАК увеличивается на единицу.

Тик 2. Команда получена и аккуратно уложена в Регистр Команд, только что же означает эта цифирь? Чтобы в ней разобраться, нужен специалист. И вот к Регистру Команд вызывается ДшОП — он знает все команды наизусть, за это его и прозвали Дешифратором Операций. Но узкая специализация заразила и его: оказывается, он разбирается только в первой цифре. Впрочем, и этого достаточно. ДшОп уже подал сигнал: «Команда «х-П»! На выход!».

Тик 3. На сцене появляется исполнитель операции звписи в регистр. Без лишних слов он хватает вторую половину содержимого Регистра Команд и направляется с ней в Регистровую Память.

Тик 4. Увидев предъявленный ему адрес, хранитель Регистровой Памяти ДшАР любезно открывает нужный регистр.



---

*) Дешифратор — это устройство, имеющее один вход и несколько выходов: на вход поступает номер, на выходе с соответствующим номером появляется сигнал. (Вход может иметь одну шину, куда последовательно поступают двоичные цифры номера, или несколько шин, куда все двоичные цифры поступают одновременно — именно схема такого дешифратора на 4 выхода показана на рисунке.)

*) Счетчиком называется устройство, содержащее регистр, который изменяет свое значение на единицу при каждом обращении к нему.

Тик 5. Импульс на вход «сброс»*) — и в регистре пусто. Импульс на шину записи, соединяющую адресуемые регистры с регистром X,— и содержимое X запомнено в адресуемом регистре,**) Все — команда работу закончила, о чем и доложено УУ.

Такт 2

Выполняются операции

Тик 1 и 2 проходят так же. Получив сообщение, что команда записи окончила работу, УУ отправляется в Программную Память и получает следующую команду. Но когда ДшОп видит первую цифру команды «1» или «2» и вызывает исполнителя, то на его зов является не исполнитель, а староста группы исполнителей, имеющих одну и ту же первую цифру.

Тик 3. Со второй цифрой кода команды разбирается староста группы исполнителей, который сам является таким же дешифратором, как и ДшОп, только рангом пониже. Он-то и выясняет, кто именно из его бригады должен сейчас работать, и включает его.

Тик 4. На сцене появляется одна из одноместных Операций, и, ни у кого ничего не спрашивая (она все знает сама), направляется к стеку. Выдернув из него содержимое регистра X (стек при этом сдвигается) и разместив это содержимое в X1, она приступает к работе.

Тик 5, 6, 7... Мерно тикает тактовый генератор, а на сцене трудится Операция. Трудиться она может долго — это зависит от того, какая Операция и какое число. Наконец, управившись с делом, она заталкивает результат в стек и удаляется.

Тик 4, 5, 6, 7... (другой вариант). На сцене появляется двухместная Операция. Так же перетащив содержимое X в X1, она начинает трудиться над содержимым X1 и новым содержимым X, куда пришло значение, ранее находившееся в У. Вытащив из стека новое содержимое X (стек еще раз сдвигается) и обработав его вместе с содержимым X1, она заталкивает результат в стек.

Такт 3

Работают команды переходов

Тик 1, 2, 3. Все происходит как всегда. Появляются и приступают к работе исполнители команд переходов.

Тик 4. Большинство исполнителей этой группы сразу же идут к Дешифратору Адреса Программной Памяти и просят дать им очередное слово из памяти — они считают его адресом перехода.

Тик 5. Получив адрес, исполнитель «ВП», пользуясь тем, что на него никто не смотрит, тут же засылает этот адрес в СчАК. То-то будет интересно, когда ДшАПП снова посмотрит на СчАК, чтобы достать очередную команду.

Но если «ВП» доберется до счетчика адреса в любых условиях, то исполнитель «FX⩾0» боится темноты: пока не осветит ему дорогу загоревшийся в регистре X знак «минус», к СчАКу он не пойдет.

Такты 4, 5, 6...

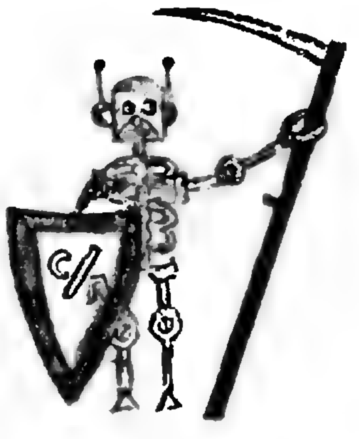
Так и течет жизнь в микропроцессоре — тик за тиком, такт за тактом... Бездельничает «К НОП», по два раза за такт ходят к ДшАРу команды косвенной адресации, меняются данные в регистрах... И шло бы так, пока не иссяк источник питания, но вот

Такт... надцатый

На 4-м тике выползает из своей норы команда «С/П». Убедившись, что помешать ей никто не может, она подкрадывается к тактовому генератору и... выключает его!

Занавес (простите, останов)

Умолкают чудные звуки тактового генератора, и только на регистре X зеленым светом горит результат.



---

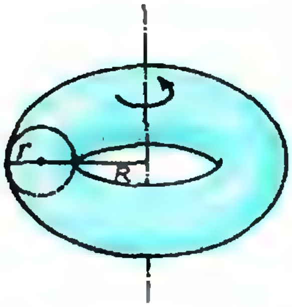
*) Об устройстве регистра и о входах «сброс» и «запись» можно прочитать, например, в «Кванте» № 4 за 1986 год.

**) Кстати, шина записи одна на все адресуемые регистры, но чтобы произошла запись, нужно, чтобы регистр был «открыт»: на вход регистра поступает информационный сигнал и сигнал от ДшАР, объединенные схемой «И»,— это и разрешает запись только в тот регистр, который выбран дешифратором адреса регистра.

Тор

С тором мы знакомимся в раннем детстве, когда жуем бублик. Потом он появляется перед нами в виде велосипедной или автомобильной камеры, обручального кольца или кольца дыма, выпускаемого искусным курильщиком.

Математически совершенный тор определяется как тело, образованное вращением круга вокруг прямой, лежащей в его плоскости и не пересекающей его.



Объем такого кольца нашел еще Иоганн Кеплер. Он писал в своей знаменитой книге «Стереометрия винных бочек»:

«Всякое кольцо кругового или эллиптического сечения равновелико цилиндру с высотой, равной длине окружности, которую описывает центр вращающейся фигуры, и с основанием, равным сечению кольца».

Полное название этой книги весьма пышно, что соответствовало тогдашней моде: «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки, с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии. Сочинение Иоганна Кеплера, математика императора Цезаря Матвея I и его верных чинов Верхней Австрии с цезарской привилегией на 25 лет».

Исходя из формулы Кеплера, мы получаем, что объем тора, с радиусом образующего круга r и расстоянием от центра этого круга до оси вращения R, равен

$$V=2\pi^2r^2R.$$

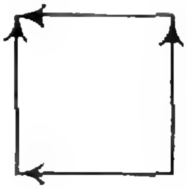
Площадь поверхности тора равна $4\pi^2Rr$, т. е. произведению длин двух окружностей: образующей этот тор и той, которую описывает ее центр при вращении вокруг оси.

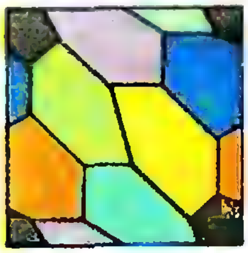
Тором называют не только само тело, но и его поверхность. Эту поверхность особенно любят топологи — математики, изучающие те свойства фигур, что не меняются при непрерывных деформациях. С точки зрения топологии тор — наиболее простая поверхность, отличная от сферы (а отличается бублик тем, что имеет дырку). Геометрические различия между сферой и тором могут быть выражены и алгебраически. Еще Леонард Эйлер заметил, что для любого многогранника, топологически эквивалентного сфере, выполняется соотношение:

$$\text{В}-\text{Р}+\text{Г}=2,$$

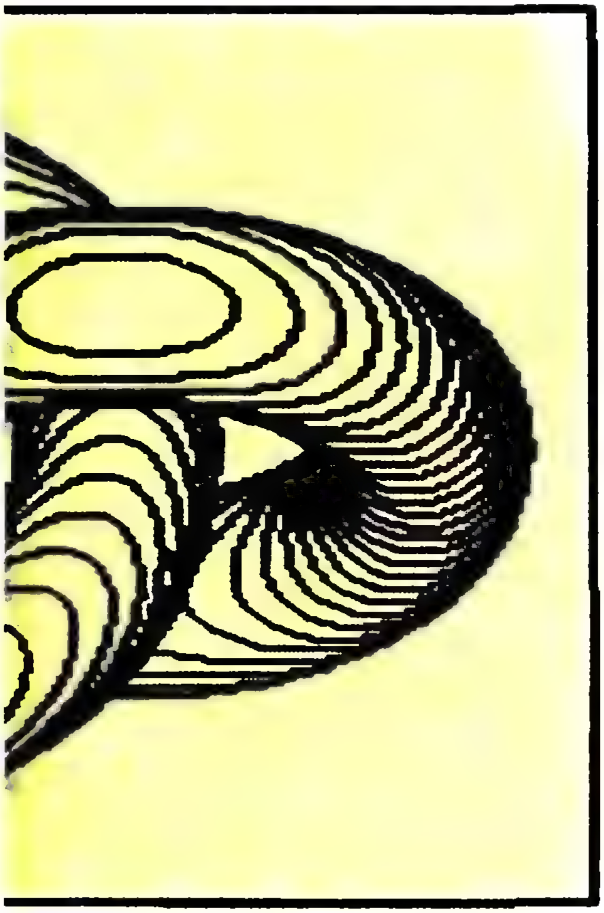
где В — количество его вершин, Р — количество ребер и Г — количество граней. Например, у куба 8 вершин, 12 ребер и 6 граней: $8-12+6=2$; у n-угольной пирамиды $(n+1)$ вершина, $2n$ ребер и $(n+1)$ грань: $(n+1)-2n+(n+1)=2$. А вот у многогранников, эквивалентных тору, соответствующая сумма (она называется *эйлеровой характеристикой*) равна не двум, а нулю.

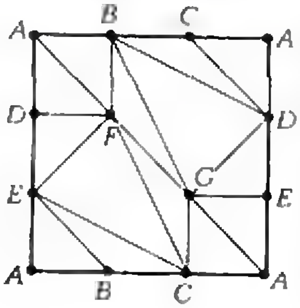
Свойства поверхности тора очень удобно изучать на его развертке — квадрате, у которого противоположные стороны считаются склеенными.



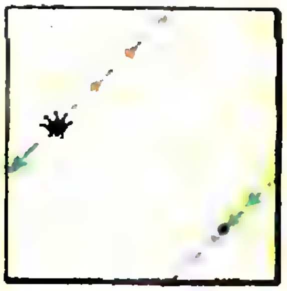


Среди многогранников, эквивалентных сфере и имеющих лишь треугольные грани, наименьшее число граней (4) имеет тетраэдр. А вот среди эквивалентных тору многогранников, у которых все грани — треугольники, наименьшее число граней (14) имеет тот, развертка которого изображена на рисунке. Если на этом рисунке соединить отрезками центры треугольников, имеющих общую границу, то получим карту разбиения поверхности тора на 7 частей (стран), каждые две из которых имеют общую границу.





Представим себе, что у шахматной доски склеены границы. Тогда исчезнут «краевые» и «угловые» клетки — все клетки станут равноправны. Какое раздолье слонам, ладьям и ферзям! Слон или ферзь с поля b5 может попасть на поле g2, к тому же двумя путями; а король с ладьей или с ферзем не смогут дать мат одинокому королю противника.

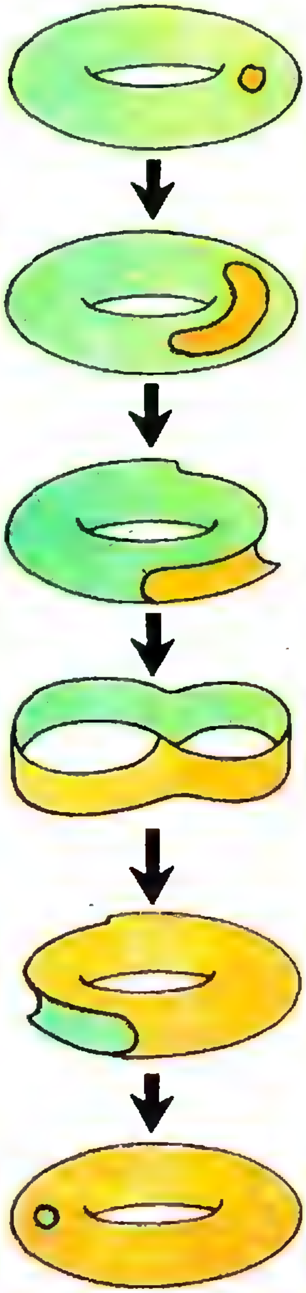


А попробуйте-ка сыграть на торе в «крестики-нолики». Кто выиграет? Заметьте, что в позиции на рисунке тот из игроков, что ходит первым, уже поставил три крестика в одну линию.

X		
	O	X
	X	O

А что будет, если пустить по поверхности тора шарик? Оказывается, среди его траекторий будут замкнутые (как путь ферзя на тороидальной доске), а будут и бесконечно длинные — «обматывающие» этот тор.

В заключение... вывернем тор наизнанку. Нетрудно вывернуть камеру футбольного мяча через дырку в этой камере, если резина хорошо растягивается. Кажется, однако, что с велосипедной камерой невозможно произвести такую операцию. Тем не менее это осуществимо, и процесс выворачивания тора вы можете увидеть на картинке.



Материал подготовил А. Савин

Школа в „Кванте"

Физика 9 — 11

Публикуемая ниже заметка «Кое-что о силе тяги» предназначена девятиклассникам, заметка «Вариационные принципы» — одиннадцатиклассникам.
Кроме того, мы продолжаем публикацию «Избранных школьных задач по физике».

Кое-что о силе тяги

В задачах по механике, особенно из раздела «Механическая мощность», часто встречается величина, называемая силой тяги — поезда, автомобиля, самолета, велосипеда и т. п. Что это за сила? Какова ее природа?

Иногда можно услышать ответ, что, поскольку автомобиль, например, приводится в движение двигателем, то и сила тяги действует со стороны двигателя. Это, конечно, не так. Внутренние силы, действующие со стороны одной части системы на другую, не могут изменить скорость системы как целого — это противоречило бы закону сохранения импульса. Тогда становится ясно, что надо рассматривать силы, действующие на транспортное средство извне, со стороны внешнего мира. Так, в случае автомобиля или поезда сила тяги — это сила трения покоя, действующая на ведущие колеса со стороны дороги, в случае самолета — сила реакции отбрасываемого назад воздуха. Правда, для того чтобы сила трения покоя была направлена вперед, двигатель должен вращать колеса в нужном направлении, заставляя их как бы цепляться за дорогу и создавать силу тяги. Так что без двигателя действительно далеко не уедешь...

Зачем же вводить некую силу тяги, а не писать прямо «сила трения покоя» или «сила реакции воздуха»? Оказывается, удобно все силы, действующие на транспортное средство со стороны окружающих тел, разделить на две части: одну часть назвать силой тяги $F_т$, а другую — силой сопротивления $F_с$. В этом случае, во-первых, приобретают универсальный вид уравнения движения.

Так, для автомобиля, поднимающегося в гору с уклоном α, запишем

$$F_т - F_с - mg\sin\alpha = ma. \qquad (1)$$

Во-вторых, через силу тяги весьма просто выражается полезная механическая мощность:

$$P_{пол} = F_т v, \qquad (2)$$

где v — скорость транспортного средства. (Как будет показано дальше, эту формулу можно считать в каком-то смысле определением полезной мощности транспортного средства.) Формулы (1) и (2) вместе позволяют понять многие процессы, происходящие при разгоне или движении транспортных средств.

Например, автомобилисты знают, что при разгоне автомобиля по горизонтальной дороге невыгодно включать большую мощность на малых скоростях. И действительно — когда сила тяги, равная $P_{пол}/v$, достигнет максимальной силы трения покоя μN, начнется пробуксовка колес, что является крайне нежелательным. А максимальную мощность P_{max} можно использовать только при достижении скорости $v_0 = P_{max}/(\mu N)$, а до этого мощность надо плавно наращивать. Наверное, большинство из вас все это хорошо понимают и так, и взяться за написание этой заметки меня заставило совсем другое. Дело в том, что формула для полезной мощности (2), соответствуя внешне определению механической мощности и поэтому не привлекая особого внимания, содержит в себе неожиданный парадокс. Должен признаться, что сам я долгое время не обращал на него никакого внимания. В чем же он заключается?

Как уже говорилось, сила тяги автомобиля, например, есть не что иное, как сила трения покоя, приложенная со стороны дороги к нижним точкам ведущих колес. Но эти точки (разумеется, если колеса не проскальзывают) касаются дороги, т. е. имеют скорость, равную нулю. Значит, работа силы трения покоя, а следовательно, и работа силы тяги, равна нулю!

В первый момент, когда я это понял, у меня возникло ощущение легкого испуга. Нет, я не испугался за закон сохранения энергии — энергия совсем не обязательно должна поступать в систему извне. Хотя внутренние силы, возникающие при работе двигателя, не способны изменить импульс системы, они вполне могут изменить ее энергию. Например, если в двигателе используется энергия сгорания топлива, то часть этой энергии при работе двигателя теряется, а часть превращается в полезную механическую энергию. А вот при отсутствии в системе двигателя, поставляющего необходимую энергию, внешняя сила тяги должна быть «устроена» так, чтобы самой совершать работу. (Пример: при буксировке автомобиля с выключенным двигателем роль силы тяги играет сила натяжения троса.)

Неприятность заключалась в другом — универсальная формула (2) потеряла свою очевидность. Стало неясно, можно ли ее в таком простом виде использовать для решения различных задач или придется в каждом случае специально вычислять полезную мощность, опираясь на конкретное устройство двигателя.

Рассмотрим, например, игрушечный автомобиль, где источником энергии является энергия упругой деформации пружины. Для упрощения пренебрежем массой колес и пружины. Полезную работу в этом случае совершает сила, приложенная к корпусу автомобиля, которая равна сумме силы $\vec{F}_0$, действующей на ось колеса, и силы натяжения $\vec{F}_н$, действующей на стенку корпуса; следовательно,

$$P_{пол} = (F_0 - F_н)v.$$

Так как масса колеса равна нулю, сумма всех действующих на него сил равна нулю, т. е.

$$F_0 = F_т + F_н.$$

Поэтому $P_{пол}$, как и в формуле (2), оказывается равной произведению $F_т v$. В чем же дело? Может быть, это случайность?

Чтобы понять причину такого совпадения, задумаемся о том, что мы называем полезной механической работой при движении транспортного средства любой природы в общем случае. Во-первых, это работа против сил сопротивления $A_1 = F_{\text{с}}\Delta l$, во-вторых, работа по увеличению кинетической энергии поступательного движения $A_2 = mv_2^2/2 - mv_1^2/2$ и, в-третьих, работа по изменению потенциальной энергии $A_3 = mg\Delta h$. К потерянной энергии относят тепловые потери в механизме, кинетическую энергию вращения колес, движения шатунов, поршней и т. д., другими словами — все, что не входит в энергию поступательного движения транспортного средства как целого.

Теперь — немного математики. Умножим обе части формулы (1) на Δl. Учитывая, что $ma\Delta l = mv_2^2/2 - mv_1^2/2$, а $mg\Delta l \sin\alpha = mg\Delta h$, запишем

$$F_{\text{т}}\Delta l = F_{\text{с}}\Delta l + (mv_2^2/2 - mv_1^2/2) + mg\Delta h.$$

Получается, что величина, формально составленная как работа силы тяги $F_{\text{т}}$ на пути Δl (на самом деле сила тяги работы не совершает), в точности равна полезной работе $A_1 + A_2 + A_3$. Следовательно, полезную мощность можно смело вычислять по формуле (2)!

Итак, мы выяснили, что сила тяги, определенная как внешняя сила, входящая в уравнение движения (1), работы не совершает, так как она приложена к неподвижной точке колеса. Кроме того, та часть работы двигателя, которую называют полезной, равна работе силы тяги, как если бы она была приложена не к неподвижной точке, а к движущемуся корпусу транспортного средства. Но самое главное — мы еще раз убедились в том, что за привычными и обыкновенными, на первый взгляд, понятиями часто скрываются неожиданные вопросы и парадоксы, над которыми полезно и интересно поразмышлять.

А. Черноуцан

Вариационные принципы

Сталкивались ли вы когда-нибудь с двумя различными — но правильными! — описаниями одного и того же физического явления? Если нет, то так называемые вариационные принципы, играющие очень важную роль в современной физике, могут послужить хорошей тому иллюстрацией.

Вариационные принципы имеют многовековую историю. Вот лишь некоторые ее этапы.

Герон Александрийский (I век н. э.), популяризатор науки, инженер, изобретатель автомата для продажи священной воды, таксометра, паровой турбины и других любопытных устройств, сформулировал следующий оптический постулат: «Скажу, что из всех лучей, падающих из данной точки и отражающихся в данную точку, минимальны те, которые от плоских и сферических зеркал отражаются под равными углами». Надо полагать, что это одна из первых формулировок вариационного принципа.

Для плоского зеркала справедливость своего постулата Герон доказал с помощью простого геометрического построения. Пусть A — источник света, B — глаз, MD — зеркало, AFB — действительный путь света, AKB — какой-либо другой возможный путь света, испытавшего отражение (рис. 1). Продолжим луч BF до встречи в точке L с продолжением перпендикуляра AM. Так как угол падения AFG равен углу отражения GFB, то $AM = ML$ и, следовательно, $AF = FL$. Тогда $AF + FB = BF + FL$, т. е. AFB — кратчайший путь. Для сферических зеркал постулат Герона не всегда верен — в некоторых случаях путь света оказывается минимальным, а в некоторых — максимальным.

В XVII веке знаменитый математик П. Ферма (по профессии юрист) сформулировал принцип, представляющий обобщение утверждения Герона. Согласно этому принципу, свет всегда идет по пути, требующему для своего

Публикацию этой заметки подготовил С. Филонович.

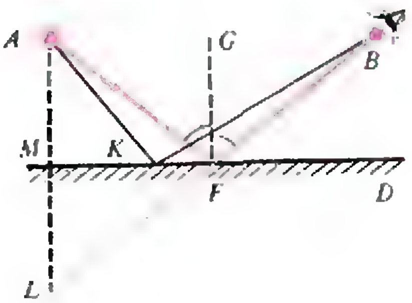


Рис. 1.

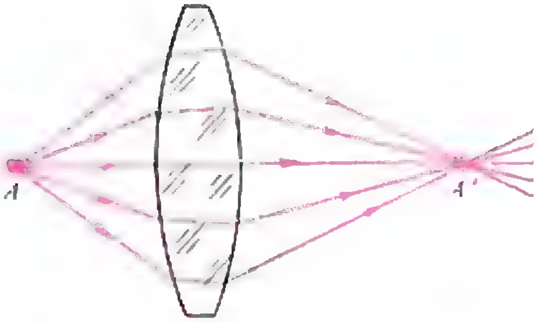


Рис. 2.

прохождения минимальное время. Очевидно, что для случая отражения света принцип Ферма эквивалентен постулату Герона. Принцип Ферма сохраняет справедливость и для случая преломления света на границе раздела двух сред, тогда как постулат Герона здесь становится неприменимым. Это можно доказать, используя закон преломления света. Заметим, что если обратить последовательность рассуждений, то из принципа Ферма нетрудно вывести законы отражения и преломления света. По существу это и оправдывает применение к утверждению Ферма термина «принцип», а к утверждению Герона — «постулат».

Важно подчеркнуть, что Ферма считал скорость света в более плотной среде меньшей, чем в менее плотной. А вот современник Ферма, философ и математик Р. Декарт исходил из противоположного соотношения скоростей. Он вывел закон преломления, рассматривая свет как поток частиц, подчиняющихся законам механики. Между Ферма и Декартом возникла острая полемика, продолжавшаяся до самой смерти Декарта. Строго говоря, до опытов Фуко по прямому измерению скорости света в различных средах (середина XIX века) правота Ферма не имела прямых доказательств.

На первый взгляд, получение действительных изображений в оптических системах противоречит принципу Ферма — ведь между точкой (A) и ее изображением, например в линзе (A'), проходит бесконечное число лучей различной формы и длины (рис. 2). Однако все дело заключается в том, что время прохождения светом всех лучей одно и то же. В стекле линзы свет идет медленнее, чем в воздухе, поэтому, хотя крайние лучи имеют бо́льшую длину, чем центральные, времена их прохождения выравниваются. Из требований равенства этих времен можно непосредственно получить формулу линзы, не используя при этом закона преломления света.

Итак, на примере законов распространения света можно проиллюстрировать основную идею вариационного принципа. Она состоит в следующем: физические явления происходят таким образом, что некоторая величина, при рассмотрении явления в целом, принимает экстремальное — максимальное или минимальное — значение.*)

В механике вариационные принципы ведут свою историю с конца XVII века, когда И. Бернулли опубликовал заметку, озаглавленную «Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики». Это была задача о брахистохроне, или кривой наискорейшего спуска: даны две точки в вертикальной плоскости, надо найти вид кривой линии, спускаясь по которой (без трения) тяжелое тело прошло бы путь между этими точками за наименьшее время. Решение этой «столь прекрасной и до сих пор неслыханной задачи» было дано самим Бернулли, а также Г. Лейбницем, И. Ньютоном и другими учеными. Бернулли в своем решении исходил из аналогии между распространением луча света в среде с непрерывно изменяющимися по высоте показателем преломления и движением тела под действием силы тяжести. Луч в такой среде имеет криволинейную форму, аналогичную траектории движения тела.

---

*) Заметим, что, в отличие от знакомых старшеклассникам дифференциальных методов нахождения экстремума функции, вариационный метод — интегральный, поскольку связан с поисками функции, интеграл которой на определенных участках принимает экстремальное значение.

Работа Бернулли послужила началом весьма плодотворных аналогий между оптикой и механикой, приведших позднее к результатам, которые легли в основу современной физики.

Следующий шаг по пути развития вариационных принципов механики сделал в первой половине XVIII века П. Мопертюи, в молодости служивший драгунским офицером, а позднее назначенный прусским королем Фридрихом II президентом Берлинской Академии наук.

Мопертюи, подобно Декарту, рассматривал свет как поток частиц, подчиняющихся законам механики, но при этом выдвинул новую идею — так называемый принцип наименьшего действия. Согласно этому принципу, для реального пути света «количество действия должно быть наименьшим». Под «действием» Мопертюи понимал произведение скорости на путь. Потребовав для частиц света минимальности действия, он вывел законы отражения и преломления. Причем Мопертюи использовал соотношение для скоростей света в различных средах такое же, как и Декарт, т. е. противоположное соотношению Ферма. (История принципа Мопертюи еще раз показывает, что к правильному результату можно прийти и на основе неверных посылок. В данном случае ошибкой было уподобление света материальным частицам классической механики.)

Великие математики и механики Л. Эйлер, Ж. Лагранж и У. Гамильтон придали понятию «действие» то содержание, которое используется и в настоящее время. Произведение скорости на путь легко преобразовать в произведение квадрата скорости на время, а если ввести еще постоянный множитель, равный массе тела, деленной на два, то мы получим произведение кинетической энергии на время. Это и есть современное определение понятия «действие» в отсутствие сил. При наличии же сил «действие» равно среднему значению разности между кинетической и потенциальной энергиями, умноженному на время движения. Был создан специальный математический аппарат для решения задач, связанных с применением принципа наименьшего действия. Этот аппарат получил название вариационного исчисления.

Понятие «действие» приобрело в физике особое значение после введения М. Планком, основателем квантовой физики, понятия кванта действия, равного фундаментальной постоянной h. Наличие h в каком-либо физическом соотношении свидетельствует о том, что оно может быть выведено только из квантовых представлений. Сопоставление принципов Ферма и Мопертюи натолкнуло Л. де Бройля на идею о наличии у частиц вещества волновых свойств, что вскоре было подтверждено на опыте. Формула для длины волны де Бройля содержит постоянную h.

В связи с идеей де Бройля, один из создателей квантовой механики Э. Шредингер провел глубокий анализ вариационных принципов оптики и механики, приведший к составлению знаменитого уравнения квантовой механики, носящего теперь его имя.

В наши дни вариационные принципы широко применяются не только в оптике и механике, но также и в электродинамике и термодинамике.

В. Фабрикант

Избранные школьные задачи по физике

9 класс*)

1. Веревка длиной l и массой m находится на гладкой горизонтальной поверхности и вращается вокруг одного из своих концов с угловой скоростью ω. Чему равно натяже-

---

*) Задачи на колебания см. также в «Избранных школьных задачах по физике» (11 класс), опубликованных в «Кванте» № 9 за 1991 год.

ние веревки на расстоянии x от свободного конца?

2. Два бруска массой m каждый, лежащие на горизонтальной поверхности, соединены недеформированной пружиной жесткостью k. Коэффициент трения между брусками и поверхностью μ. Какую скорость надо сообщить одному из брусков вдоль пружины, чтобы он, растянув пружину, смог сдвинуть второй брусок?

3. Движущийся снаряд разорвался на два осколка, которые разлетелись под углом $\alpha=60^\circ$. Один осколок имеет массу $m_1=20$ кг и скорость $v_1=100$ м/с, другой — массу $m_2=80$ кг и скорость $v_2=25$ м/с. Чему равна энергия, выделившаяся при разрыве снаряда?

4. Два одинаковых упругих шарика подвешены к одной точке на нитях длиной $l=1$ м каждая. Шарики отводят в противоположные стороны на один и тот же малый угол и отпускают по очереди: сначала один, а потом другой — в тот момент, когда первый проходит положение равновесия (рис. 1). Найдите интервал времени между последовательными ударами шариков.

5. Доска, на которой лежит брусок, совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости (рис. 2). Амплитуда колебаний равна A, коэффициент трения между доской и бруском μ. Какому условию должна удовлетворять частота колебаний, чтобы брусок не скользил по доске?

10 класс

6. Стержень длиной l и массой m подвешен к потолку на двух легких проводах одинаковой длины. Провода закреплены на концах стержня и параллельны друг другу. Система находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Чему будет равно натяжение каждого провода, если через стержень пропустить ток силой I?

7. По круглому витку радиусом R течет ток I. Найдите силу натяжения, возникающую в витке под действием внешнего однородного магнитного поля, вектор индукции которого $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости витка.

8. Электрон движется в однородном электрическом поле и в некоторый момент времени влетает в полупространство, в котором существует однородное магнитное поле. Вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ параллелен вектору напряженности электрического поля $\vec{E}$. В начальный момент скорость электрона перпендикулярна как границе полупространства, так и направлениям полей, и равна v_0. Через какое время электрон вылетит из магнитного поля? Чему будет равна его скорость в этот момент?

9. Виток с током помещают в однородное магнитное поле и освобождают, после чего он приходит в состояние устойчивого равновесия (рис. 3, *а*). Что будет с витком, если его развернуть на 180° (рис. 3, *б*)?

10. В однородном магнитном поле, вектор индукции $\vec{B}$ которого параллелен оси Z, в направлении оси X движется проводящий куб. Стороны куба параллельны осям координат, его скорость равна v. Чему равна и как направлена напряженность электрического поля, возникающего внутри куба при его движении?

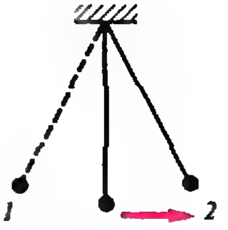


Рис. 1.

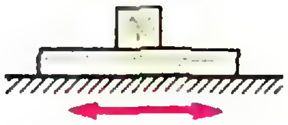


Рис. 2.

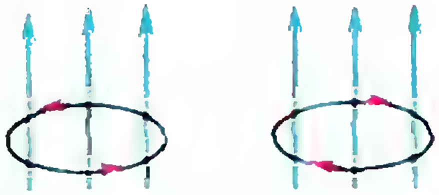


Рис. 3. *а)* *б)*

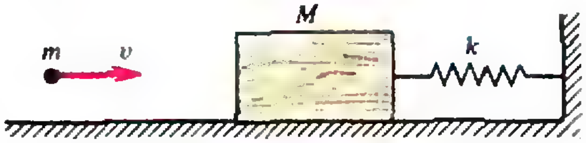


Рис. 4.

11 класс (повторение)

11. Сосуд с водой уравновешен на одной из чашек рычажных весов. В сосуд опускают подвешенный на нити металлический брусок массой m так, что он оказывается полностью погруженным в воду, но не касается стенок и дна сосуда. Какой груз и на какую чашку надо положить, чтобы восстановить равновесие? Плотность металла $\rho_м$, воды $\rho_в$.

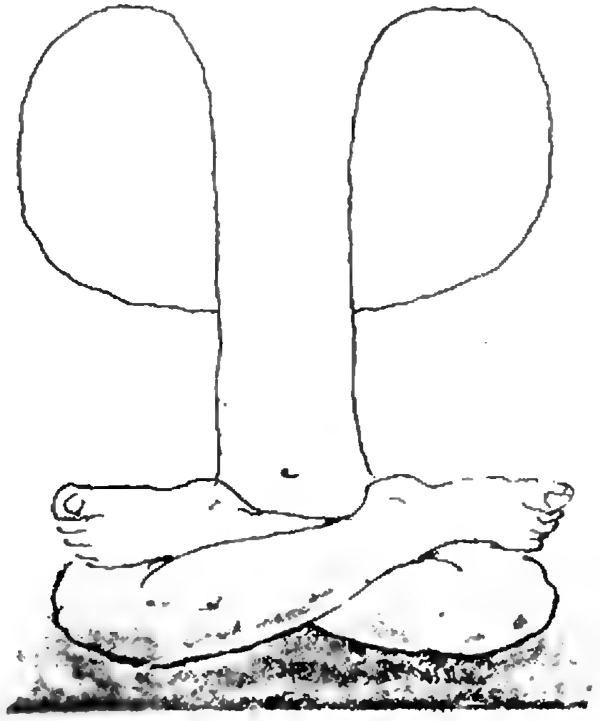
12. Пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v, застревает в бруске массой M (рис. 4). Брусок лежит на гладкой горизонтальной плоскости и соединен с вертикальной стенкой пружиной жесткостью k. Найдите наибольшую деформацию пружины.

13. Объем газа линейно увеличился от $V_1=1$ л до $V_2=2$ л, при этом его давление уменьшилось от $p_1=2$ атм до $p_2=1$ атм. Какое количество теплоты было подведено к газу в этом процессе?

14. Два одинаковых конденсатора соединили параллельно, зарядили до напряжения U_0 и отключили от источника. Каким стало напряжение на конденсаторах, когда в один из них ввели пластину с диэлектрической проницаемостью ε, заполняющую весь объем конденсатора?

15. Кольцо радиусом R расположено в однородном магнитном поле с индукцией B перпендикулярно линиям поля. Какой заряд пройдет по кольцу при выключении поля? Сопротивление кольца r.

Публикацию подготовил А. Черноуцан



Математический кружок

В третьем номере нашего журнала вы могли прочесть начало этой главы из книги Р. Смаллиана «Как же называется эта книга?». Сейчас мы предлагаем вам окончание удивительной истории о некоем философе, пожелавшем узнать, почему существует нечто, а не ничто. Оказалось, что лишь на острове Ваал, затерянном в океане, мудрые жрецы могут ответить на этот Вопрос Вопросов. Население острова делится на рыцарей, говорящих всегда чистую правду, и лжецов, которые всегда лгут. И вот философ достиг таинственного острова...

Остров Ваал

Р. СМАЛЛИАН

Часть вторая

Ответ на Вопрос Вопросов

Из всех островов рыцарей и лжецов остров Ваал — самый необычайный и достопримечательный. Он населен людьми и обезьянами. Обезьяны говорят человеческим языком, причем весьма бегло. Каждая обезьяна, как и каждый человек,— либо рыцарь, либо лжец.

В самом центре острова стоит капище Ваала — один из самых замечательных храмов мира. Все высшие жрецы обладают глубочайшими познаниями в метафизике, а во внутреннем святилище храма один из жрецов, по слухам, знает ответ на глубочайшую тайну Вселенной: почему существует нечто, а не ничто.

Стремящимся приобщиться к Священному знанию разрешается войти во Внутреннее святилище, если они сумеют с честью выдержать три тура испытаний. Я сумел украдкой выведать все тайны жрецов: чтобы проникнуть в храм Ваала, мне пришлось загримироваться под обезьяну! Должен сказать, что я рисковал не на шутку. Трудно даже представить себе, какому наказанию подвергли бы служители Ваала пришельца, дерзнувшего обманом проникнуть в святая святых храма. Они не просто обратили бы злоумышленника в ничто, а изменили бы законы Вселенной так, чтобы он никогда не мог бы возродиться и в будущем!

Но вернемся к нашему повествованию. Выбрав правильную карту, наш философ благополучно добрался до острова Ваал и согласился подвергнуть себя испытаниям. Первый тур испытаний проводился в течение трех дней в огромном помещении, известном под названием Наружного святилища. В центре святилища на золотом троне восседала закутанная в драгоценное покрывало фигура: то ли человек, то ли обезьяна, то ли рыцарь, то ли лжец. Таинственная фигура изрекала одно-единственное заклинание, по которому философ должен был определить, кто сидел на троне (человек или обезьяна) и кем он был (рыцарем или лжецом).

Первое испытание
Сидящий на троне произнес заклинание: *«Я либо лжец, либо обезьяна».*

Кто он?

Второе испытание
Сидящий на троне произнес заклинание: *«Я лжец и обезьяна».*

Кто он?

Третье испытание

Сидящий на троне произнес заклинание: *«Не верно, что я обезьяна и рыцарь»*.

Кто он?

Философ успешно прошел все три испытания первого тура и был допущен ко второму туру. На этот раз испытания проводились также в течение трех дней в другом помещении, не уступающем по размерам первому и известном под названием Среднего святилища. В центре святилища на платиновых тронах восседали две фигуры, закутанные в драгоценные покрывала. Сидевшие на троне произносили по одному заклинанию, а философ должен был установить, кто изрек каждое заклинание: человек или обезьяна, рыцарь или лжец. Для удобства мы обозначим сидевших на троне *A* и *B*.

Четвертое испытание

A: По крайней мере один из нас обезьяна.

B: По крайней мере один из нас лжец.

Кто такие *A* и *B*?

Пятое испытание

A: Мы оба обезьяны.
B: Мы оба лжецы.

Кто такие *A* и *B*?

Шестое испытание

A: B — лжец и обезьяна.
B: A — рыцарь.

Кто такие *A* и *B*?

Наш философ успешно выдержал все три испытания второго тура и был допущен к третьему туру, состоявшему из одного-единственного, хотя и сложного испытания.

Как избежать пасти дракона

Из среднего святилища можно выйти через четыре двери *X*, *Y*, *Z* и *W*. По крайней мере одна из них ведет во Внутреннее святилище. Того, кто выходит через другую дверь, пожирает огнедышащий дракон.

В Среднем святилище во время испытания находятся восемь жрецов *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* и *H*, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Нашему философу жрецы сообщили следующее.

A: X — дверь, ведущая во Внутреннее святилище.

B: По крайней мере одна из дверей Y и Z ведет во Внутреннее святилище.

C: A и B — рыцари.

D: Обе двери X и Y ведут во Внутреннее святилище.

E: Обе двери X и Z ведут во Внутреннее святилище.

F: Либо D, либо E — рыцарь.

G: Если C — рыцарь, то A — рыцарь.

H: Если G и я сам — рыцари, то A — рыцарь.

Какую дверь следует выбрать философу?

Чтобы найти нужную дверь, советуем вам доказать сначала, что *G* — рыцарь.

Здесь мы сталкиваемся с необходимостью исследовать формулу «Если *A*, то *B*». Высказывание такого вида истинно, если: 1) *A* истинно и *B* истинно; 2) *A* ложно. Из ложной посылки следует что угодно! Это может показаться невероятным, но вспомните: вам наверняка не раз случалось употреблять высказывания такого типа с ложной посылкой, например, «если 2×2=5, то я — папа римский». Попробуйте сказать, что это утверждение ложно! Оно означает лишь, что дважды два не равно пяти и вы не папа римский, следовательно, оно истинно!

Ложным же выражение вида «если *A*, то *B*» оказывается в единственном случае — когда *A* истинно, а *B* — ложно.

Во Внутреннем святилище

Наш философ сумел выбрать нужную дверь и благополучно очутился во Внутреннем святилище. Там на двух тронах, усыпанных бриллиантами, восседали два жреца (более великих жрецов не было в целом мире!). Возможно, что одному из них был известен ответ на Вопрос Вопросов: «Почему существует нечто, а не ничто?»

Нужно ли говорить, что каждый из двух великих жрецов был либо рыцарем, либо лжецом (были ли жрецы людьми или обезьянами, не существенно). Поэтому мы не можем сказать заранее о каждом из жрецов, рыцарь он или лжец и знает ли он ответ на Вопрос Вопросов. При виде философа жрецы произнесли следующие заклинания.

Первый жрец. Я лжец и не знаю, почему существует нечто, а не ничто.

Второй жрец. Я рыцарь и не знаю, почему существует нечто, а не ничто.

Знал ли в действительности кто-нибудь из жрецов, почему существует нечто, а не ничто?

Есть ответ!

Сейчас вы наконец узнаете правильный ответ на Вопрос Вопросов.

Одному из жрецов был известен правильный ответ на Вопрос Вопросов, и, когда философ спросил у него: «Почему существует нечто, а не ничто?» — он ответил так: «Существует нечто, а не ничто».

Какое поразительное заключение следует из такого ответа?

Решения

Первое испытание

Прежде всего, произнесший заклинание не лжец, поскольку в этом случае его утверждение оказалось бы истиной. Значит, он рыцарь; но тогда первое из его высказываний ложно, следовательно, второе — истинно. Итак, он обезьяна и рыцарь.

Второе испытание

Рыцарь не мог бы сказать о себе: «Я лжец», иначе заклинание оказалось бы ложным утверждением. Итак, он лжец; но тогда он не обезьяна, иначе его слова оказались бы правдой. Поэтому он человек и лжец.

Третье испытание

Заклинание, произнесенное незнакомцем, означает: «или я не обезьяна, или я не рыцарь». Если бы он был лжецом, заклинание оказалось бы истиной. Поэтому незнакомец — рыцарь. Но в таком случае он не обезьяна. Значит, он человек и рыцарь.

Четвертое испытание

Прежде всего, B — не лжец, иначе его слова оказались бы правдой, чего с лжецами не случается. Итак, B — рыцарь. Но тогда A — лжец, и его заявление ложно. Значит, A — человек и лжец, B — человек и рыцарь.

Пятое испытание

B — заведомый лжец (рыцарь не может сказать: «Мы оба лжецы»). Поскольку его заявление ложно, один из сидящих на тронах рыцарь, и это не B. Значит, A говорит правду, и они оба обезьяны. Итак, A — обезьяна и рыцарь, B — обезьяна и лжец.

Шестое испытание

Предположим, что B был бы рыцарем. Тогда A также был бы рыцарем (так как B утверждает, что A — рыцарь), и, следовательно, B должен бы быть лжецом и обезьяной. Полученное противоречие показывает, что B — лжец. Из его утверждения мы заключаем, что A также лжец. Так как первое утверждение, высказанное A, ложно, то не верно, что B — лжец и обезьяна, поэтому B — человек и лжец. Из второго утверждения, высказанного A, следует, что A — обезьяна. Итак, A — обезьяна и лжец.

Как избежать пасти дракона

Прежде всего докажем, что G — рыцарь. Для этого достаточно доказать, что его утверждение истинно, т. е. что если C — рыцарь, то F также рыцарь.

Итак, предположим, что C — рыцарь. Тогда A и B — оба рыцари. Следовательно, X — дверь, ведущая во Внутреннее святилище, и либо дверь Y, либо дверь Z ведет во Внутреннее святилище. Если верно, что дверь X ведет во Внутреннее святилище, то D — рыцарь. Если же верно, что дверь Z ведет во Внутреннее святилище, то E — рыцарь. Поэтому либо D, либо E — рыцарь. Но это значит, что утверждение *F* истинно, и он — тоже рыцарь. Таким образом, из предположения, что *C* — рыцарь, действительно следует, что *F* — рыцарь и *G* говорит чистую правду.

Разберемся теперь с высказыванием *H*. Допустим, что он — рыцарь. Тогда верно то, что *G* и *H* оба рыцари, следовательно, *A* тоже является рыцарем. Выходит, что если *H* — рыцарь, то *A* — рыцарь, т. е. высказывание *H* истинно и он действительно рыцарь. Поскольку он утверждает, что *A* — рыцарь, то это так и есть.

Итак, мы установили, что *A* — рыцарь. Следовательно, дверь *X* действительно ведет во Внутреннее святилище, и нашему философу надлежит выбрать дверь *X*.

Во Внутреннем святилище!

Первый жрец не может быть рыцарем, он должен быть лжецом. Поскольку его высказывание ложно, то не верно, что он лжец и не знает ответа на Вопрос Вопросов. Но он лжец, поэтому первая часть его утверждения истинна. Значит, вторая должна быть ложной, т. е. первый жрец знает ответ. Итак, первый жрец — лжец и знает ответ на Вопрос Вопросов.

Относительно второго жреца нельзя сказать ничего определенного. Он либо рыцарь, не знающий ответа на Вопрос Вопросов, либо лжец. Во всяком случае (и это имеет решающее значение, как вы вскоре убедитесь!), если он знает ответ на Вопрос Вопросов, то он лжец.

Есть ответ!

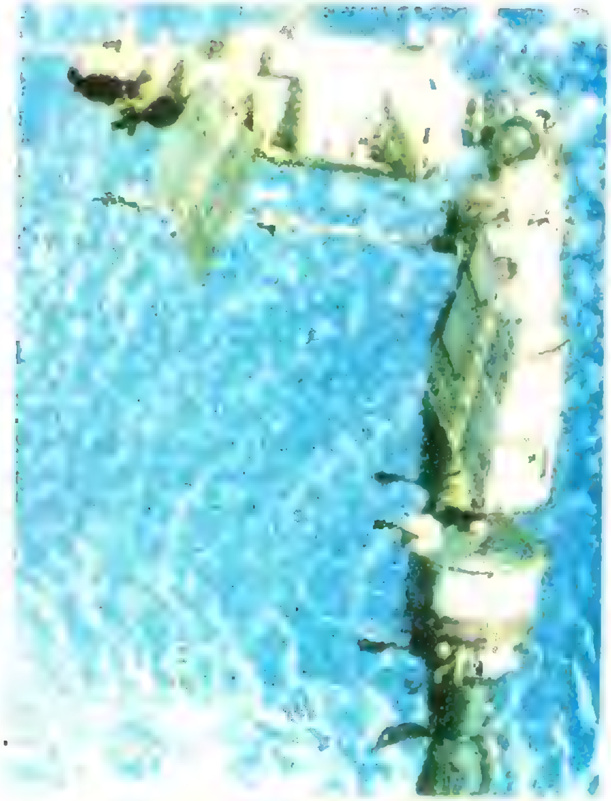
Из решения предыдущей задачи нам известно, что первый жрец знает ответ на Вопрос Вопросов и лжет, а второй жрец, если он знает ответ на Вопрос Вопросов,— лжец. По условиям задачи тот из жрецов, кто изрек: «Существует нечто, а не ничто», знал правильный ответ. Следовательно, тот, кто дал такой ответ, лжец, и высказанное им утверждение ложно. Никакого «нечто» не существует!

Итак, в результате самоотверженного поиска ответа на Вопрос Вопросов, которому наш философ посвятил всю свою жизнь, выяснилось неожиданно, что ничего не существует. Должно быть, в этот ответ вкралась какая-то ошибка: если из ничего ничего не возникает, то откуда взялся жрец, высказавший подобное утверждение?

Более правильное заключение, к которому можно прийти на основании полученного ответа, состоит в том, что остров Ваал, описанный здесь, не может существовать. Считаю своим долгом обратить внимание читателя на одну тонкость. Я отнюдь не утверждаю, что остров Ваал *не существует* (это было более или менее ясно с самого начала). Я высказываю более сильное логически неопровержимое утверждение: остров Ваал *не может существовать*. Действительно, если бы остров Ваал существовал, и история, которую я вам поведал, была бы истинной, то, как было показано, отсюда следовало бы, что ничто не существует. Следовательно, не существовало бы и острова Ваал, и мы пришли бы к противоречию. Значит, остров Ваал не может существовать.

Самое любопытное во всей истории — это то, что вплоть до последней задачи все, о чем я рассказывал вам, сколь бы неправдоподобно оно ни звучало, было логически вполне допустимо. Но стоило мне сообщить вас условия последней задачи, как соломинка переломила спину верблюду!

Перевод с английского Ю. Данилова



Р-значит ракета

Движения спутников и их возмущения

А. КОРЖУЕВ

Решение задачи о движении искусственных спутников Земли (ИСЗ) осложняется многими факторами. В частности — необходимостью учета различных возмущений, т. е. отклонений в движении тел, предписанном законами гравитации. Сегодня мы поговорим о некоторых причинах этих возмущений и сделаем соответствующие количественные оценки.

Сопротивление атмосферы. Для спутников обычной конструкции оно играет существенную роль до высот порядка 500 км. Для спутников-баллонов больших размеров, но малой массы оно влияет до высот порядка 1500 км.

Основной причиной сопротивления атмосферы являются столкновения спутника с молекулами газа, вследствие чего изменяется импульс молекул, а следовательно, и импульс самого спутника. Оценим величину силы сопротивления.

Будем считать, что спутник имеет поперечное сечение S и движется со скоростью v. Тогда число ударов молекул газа о его обшивку за единицу времени равно

$$\frac{N}{\Delta t}=\frac{nSv\Delta t}{\Delta t}=nSv,$$

где n — концентрация газа, т. е. число частиц в единице объема, $Sv\Delta t$ — объем пространства, «вырезаемый» движущимся спутником за время Δt. При столкновении импульс каждой молекулы (считаем удар неупругим) изменяется на величину порядка m_0v, где m_0 — масса частицы. Разделив полное изменение импульса газа на время Δt, мы получим силу сопротивления:

$$F_{\text{сопр}}\approx\frac{m_0vN}{\Delta t}=m_0nSv^2=\rho Sv^2$$

(произведение массы частицы на концентрацию равняется плотности газа ρ). Заметим, что результат точного расчета отличается от нашего лишь безразмерным коэффициентом, близким к 1.

Под действием силы сопротивления спутник испытывает тормозящее ускорение

$$a_{\text{сопр}}=\frac{F_{\text{сопр}}}{m}\approx\frac{\rho Sv^2}{m}.$$

Сделаем количественные оценки для спутника массой $m\approx100$ кг и поперечным сечением $S\approx1$ м^2, движущегося с первой космической скоростью $v\approx8$ км/с по круговой орбите на высоте $h\approx150$ км над земной поверхностью, где плотность воздуха $\rho\approx10^{-9}$ кг/м^3. Сила сопротивления для такого спутника будет величиной порядка $7\cdot10^{-2}$ Н, а испытываемое им тормозящее ускорение — $a_{\text{сопр}}\approx\approx7\cdot10^{-4}$ м/с^2. Это примерно в 10^4 раз меньше ускорения, сообщаемого спутнику силой тяготения, и, тем не менее, длительное действие силы сопротивления приводит к весьма существенным изменениям параметров траекторий движения спутников.

Поскольку плотность атмосферы убывает с высотой, наиболее ощутимое торможение спутник испытывает вблизи перигея. Пройдя участок траектории AB, спутник уменьшит свою скорость и следующий оборот совершит по другой траектории (рис. 1). В частности, изменится его высота в апогее, и новая орбита окажется менее вытянутой. Далее постепенно будет уменьшаться и высота перигея.

Таким образом, с каждым новым оборотом спутник будет двигаться все ближе и ближе к поверхности Земли. Вместе с тем уменьшается и период обращения спутника. Оценим — на сколько, но сначала найдем период невозмущенного обращения спутника по круговой орбите вблизи Земли. Согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{mv^2}{R}=G\frac{mM}{R^2},$$

где R — радиус орбиты, $M\approx 6\times 10^{24}$ кг — масса Земли, $G=6{,}67\times 10^{-11}$ м$^3\cdot$ кг$^{-1}\cdot$ с$^{-2}$ — гравитационная постоянная. Отсюда для периода вращения $T=2\pi R/v$ получаем

$$T=2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}.$$

Приняв для оценки $R\approx 7\cdot 10^3$ км, имеем $T\approx 1{,}6$ ч.

Заметим, что при торможении спутника уменьшается радиус его орбиты, следовательно, уменьшается и период обращения. Однако скорость движения по орбите при этом возрастает. Любопытно, не правда ли,— торможение приводит к росту скорости. Сделаем оценку в простейшем случае — при движении по круговой орбите. Механическая энергия спутника равна сумме его потенциальной энергии и кинетической:

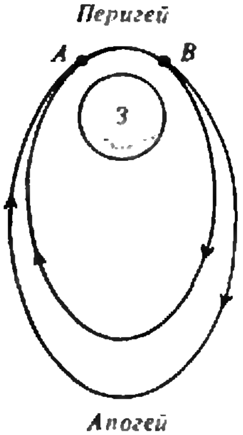


Рис. 1.

$$E=E_p+E_k=-\frac{GmM}{R}+\frac{mv^2}{2}=$$

$$=-\frac{GmM}{2R}=-\frac{mv^2}{2}.$$

Торможение уменьшает значение E, а значит, уменьшает значение R (обратите внимание на знак E) и увеличивает v. Изменение энергии за малый промежуток времени Δt равно работе сил сопротивления:

$$\Delta E=-\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right)=-F_{\text{сопр}}v\Delta t.$$

При $\Delta v\ll v$

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right)=\frac{m}{2}\Delta(v^2)=\frac{m}{2}((v+\Delta v)^2-v^2)\approx$$

$$\approx\frac{m}{2}2v\Delta v=mv\Delta v,$$

тогда

$$F_{\text{сопр}}v\Delta t\approx mv\Delta v,$$

или

$$\Delta v\approx a_{\text{сопр}}\Delta t.$$

Считая, что активное торможение (вблизи перигея) будет происходить около 10 мин, для изменения скорости получим

$$\Delta v\approx a_{\text{сопр}}\Delta t\approx 0{,}4\ \text{м/с},$$

а для изменения периода —

$$\Delta T=\frac{2\pi R}{v}-\frac{2\pi R}{v+\Delta v}=\frac{2\pi R}{v}\left(1-\frac{1}{1+\Delta v/v}\right)\approx$$

$$\approx\frac{2\pi R\Delta v}{v^2}\approx 0{,}3\ \text{с}.$$

На самом деле изменение периода будет несколько бо́льшим, так как мы не учитываем снижения спутника, хотя и небольшого (около 1 км за 1 оборот). Однако по порядку величины данная цифра совпадает с реальной. Так, для первого советского ИСЗ вдвое меньшего диаметра, летавшего на высотах, где плотность была на порядок меньше, изменение периода за 1 оборот составило 1,75 с.

Из приведенных рассуждений видно, что для расчета влияния атмосферы на параметры орбиты необходимо знать плотность атмосферы на различных высотах (до запусков ИСЗ эти данные были весьма приблизительными). Кроме того, нельзя не учитывать колебаний плотности атмосферы в течение суток — днем плотность атмосферы несколько выше, чем ночью (особенно это заметно на высотах порядка 40 км и выше). Происходят также и более медленные колебания плотности атмосферы, связанные с усилением солнечной активности, когда испускаются корпускулярные потоки, нарушающие обычные параметры земной атмосферы.

Вместе с тем, нельзя не сказать и о возможности решения обратной задачи — исследования изменений плотности земной атмосферы по результатам анализа движения ИСЗ.

Сжатие Земли. Обсудим еще одну причину возмущений движений спутников, которая связана с отличием формы Земли от шарообразной. Как известно, экваториальный радиус Земли $R_{\text{экв}}$ не равен ее полярному радиусу $R_{\text{пол}}$. Величина

$$\varepsilon = \frac{R_{\text{экв}} - R_{\text{пол}}}{R_{\text{экв}}} \approx \frac{1}{300}$$

называется сжатием Земли.

Если Землю считать шарообразной, то, согласно закону всемирного тяготения, тело массой m, находящееся на расстоянии r от центра Земли, притягивается к ней с силой $F = GmM/r^2$. Как показывают расчеты, с учетом земного сжатия выражение для этой силы можно записать в виде

$$F \approx GmM\left(\frac{1}{r^2} + \frac{3\varepsilon R^2_{\text{экв}}}{5r^4}(1 - 3\sin^2\varphi)\right),$$

где φ — географическая широта места на Земле, над которым находится наше тело (рис. 2). Поправка возникает, очевидно, из-за потери полем тяготения Земли сферической симметрии (рис. 3).

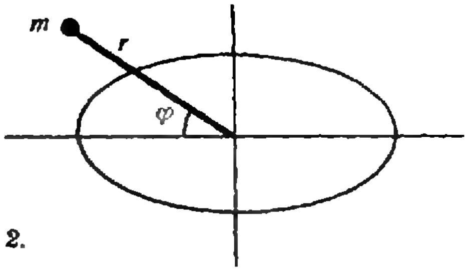


Рис. 2.

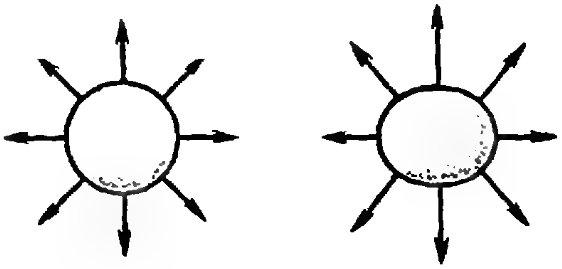


Рис. 3.

Дополнительное ускорение, обусловленное сжатием Земли, равно

$$a_{\text{сж}} \approx \frac{3\varepsilon GMR^2_{\text{экв}}}{5r^4}(1 - 3\sin^2\varphi).$$

Проведем численную оценку. Приняв $h \approx 200$ км и считая, что спутник находится в экваториальной плоскости, получим $a_{\text{сж}} \approx 0{,}01$ м/с^2, что примерно в 10^3 раз меньше ускорения силы тяготения, но значительно больше ускорения, сообщаемого силой сопротивления атмосферы. Однако, как это ни покажется парадоксальным, существенных изменений линейных размеров орбит спутников при этом не происходит. Это связано с тем, что при движении в гравитационном поле, даже сферически несимметричном, полная механическая энергия спутника практически не изменяется.

Заметим, кстати, что и в этом случае ИСЗ помогли решить обратную задачу — определить сжатие Земли, вернее уточнить его значение, полученное ранее «некосмическими» способами.

Давление солнечного излучения. И наконец, еще об одной причине возмущений. Она касается больших по размерам, но малых по массе спутников.

Оценим величину солнечного давления. Пусть на спутник с поперечным сечением S падает N фотонов в секунду. Если они поглощаются поверхностью спутника, то каждую секунду передают ему импульс, равный $N\mathcal{E}/c$, где $\mathcal{E}$ — энергия одного фотона, c — скорость света. Если же фотоны отражаются от поверхности спутника, то передают ему вдвое больший импульс. Этим и обусловлено давление света на спутник.

Солнце излучает по всем направлениям в единицу времени энергию, равную $L=4\cdot10^{26}$ Вт. Если окружить Солнце сферой радиусом r', равным расстоянию от него до спутника, то площадь поверхности этой сферы составит $4\pi r'^2$. Значит, на спутник будет попадать доля излучения Солнца, равная $S/(4\pi r'^2)$ (рис. 4). Тогда сила давления светового излучения, действующая на спутник, будет равна

$$F_{\text{изл}}\approx\frac{LS}{4\pi r'^2 c},$$

а ускорение, которое эта сила сообщает спутнику, —

$$a_{\text{изл}}=\frac{F_{\text{изл}}}{m}\approx\frac{LS}{4\pi m r'^2 c}.$$

Так, для спутника массой $m\approx70$ кг и сечением $S\approx1000$ м^2, находящегося на расстоянии $r'\approx1{,}5\cdot10^{11}$ м от Солнца, получим $a_{\text{изл}}\approx5\cdot10^{-5}$ м/с^2.

Как легко видеть, величина $a_{\text{изл}}$ гораздо меньше ускорения $a_{\text{сопр}}$, обусловленного сопротивлением атмосферы, и $a_{\text{сж}}$, связанного со сжатием Земли. Однако этот эффект все же проявляет себя — он вызывает периодические колебания параметров орбит, например высоты перигея и апогея.

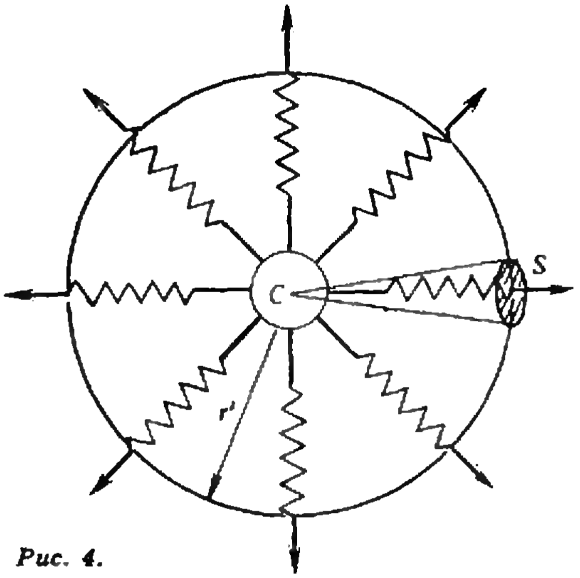


Рис. 4.

Таковы важнейшие факторы, вызывающие возмущения в движении спутников. Для еще более точного решения задачи необходимо учитывать и неоднородность Земли, и сложный характер ее собственного вращения, и многое — многое другое, что составляет сейчас предмет исследований небесной механики.

„Квант" улыбается

Мини-рассказы

Фантастический рассказ для телепатов

Ну, вы-то сами знаете, что я имеем в виду.

Е. М. Блейк

Надпись на краю Вселенной

Верх.   Не кантовать!

Д. Акерсон

Отказ

Уважаемый
мистер Торсби,
редакция благодарит Вас
за возможность
познакомиться с рукописью
Вашего романа
«Последний человек на Земле».
К сожалению,
роман не может быть
издан у нас,
так как мы печатаем
только
фантастические произведения.
Желаем успехов.
Рукопись возвращаем.
С уважением, издатели.

К. В. Маканн

Перевод с английского
А. Корженевского

Информация

Новый прием в ВЗМШ — на отделение «Физика»

Всесоюзная заочная многопредметная школа (ВЗМШ*) открывает в этом учебном году еще одно отделение — физическое. Цель его — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику, в первую очередь — приобрести навыки в решении задач. Обучение на физическом отделении ВЗМШ, безусловно, поможет при сдаче вступительных экзаменов по физике в МГУ и другие высшие учебные заведения.

Прием на отделение «Физика» производится по результатам решения вступительной работы, публикуемой ниже. Принимаются учащиеся 10 и 11 классов, независимо от места жительства. Курс рассчитан на два года, однако одиннадцатиклассники могут обучаться одновременно в 10 и 11 классах (для этого необходимо прислать решение вступительной работы для 11 класса и два комплекта анкет — для 10 и 11 классов).

Решение вступительной работы вышлите простым письмом или бандеролью по адресу: *119823, Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ, отделение «Физика»*. Пожалуйста, сделайте на конверте пометку «на прием» и укажите класс (10 или 11), в который вы поступаете. Кроме вступительной работы, в конверт вложите два экземпляра анкеты (для каждого класса), разборчиво написанной на карточках размером 7×12 см по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	Кузнецов Иван Петрович
Класс	11
Подробный домашний адрес	240816, г. Калуга, ул. Строителей, д. 8, кв. 99
Номер (или название) школы и ее почтовый адрес	школа № 10, 240819, г. Калуга, ул. Лесная, д. 6

Последний срок отправки вступительной работы — *1 августа 1992 года* (по почтовому штемпелю). Для поступления не обязательно правильно решить все задачи. Проверенные работы обратно не высылаются.

Решение приемной комиссии, а для тех, кто выдержит конкурс, также методические разработки и контрольные работы будут высланы до 15 сентября 1992 года. В программу обучения входит изучение методических пособий и дополнительной литературы и выполнение пяти контрольных работ в каждом классе. Работы проверяются и подробно рецензируются преподавателями ВЗМШ, студентами и аспирантами физического факультета МГУ, а затем вместе с рецензиями возвращаются учащимся. Решение о переводе из 10 класса в 11 и об итоговой оценке производится по результатам выполнения контрольных работ. Успешно прошедшие курс обучения получают свидетельство об окончании ВЗМШ.

Обучение ведется на русском языке, поэтому все контрольные работы, включая и вступительную, должны быть написаны по-русски.

---

*) Подробнее об этой школе рассказывалось в первом номере «Кванта» за этот год.

Вступительная работа

Поступающие в 10 класс решают задачи 1—4, а поступающие в 11 класс — задачи 3—6.

1. Найдите ускорение грузов в системе, изображенной на рисунке 1. Блоки невесомы, нити невесомы и нерастяжимы.

2. На столе стоит перевернутая воронка, в которую медленно наливается вода (рис. 2). Высота широкой части воронки H, радиус основания R. Края воронки вначале плотно прилегают к поверхности стола, но, когда уровень воды в воронке достигает $H/2$, вода начинает вытекать из-под нее. Какова масса воронки? Плотность воды ρ.

3. Тело соскальзывает без начальной скорости с наклонной плоскости высотой H и углом при основании α (рис. 3). Коэффициент трения тела о плоскость зависит от высоты h по закону $\mu(h)=\mu_0(1-h/H)$. Соскользнув с плоскости, тело падает на горизонтальную поверхность с коэффициентом трения μ_0 и скользит по ней до остановки. Какой путь пройдет тело по горизонтальной поверхности? Зазор между наклонной плоскостью и поверхностью много меньше H, но больше размеров тела.

4. Человек поднимается по лестнице, стоящей вертикально около стены. Когда человек

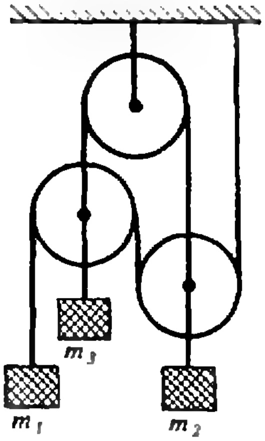


Рис. 1.

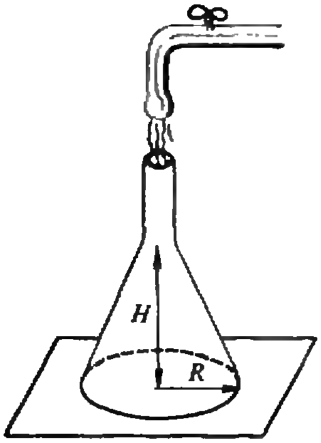


Рис. 2.

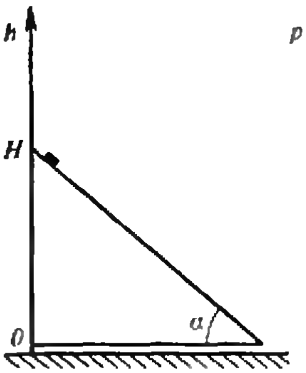


Рис. 3.

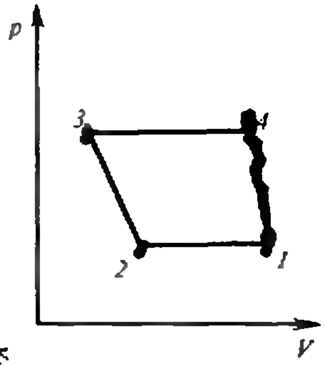


Рис. 4.

поднялся до верха, лестница начинает падать, причем ее нижний конец остается неподвижным. Оцените, в каком случае человек при приземлении будет иметь меньшую скорость: если он спрыгнет сразу, как только лестница начнет падать, или если до конца будет держаться за лестницу.

5. Один моль идеального одноатомного газа участвует в циклическом процессе, изображенном на рисунке 4. Известно, что $T_1=2T_2$, $T_4=3T_3$, $T_2=T_3=300$ К, $V_2=2V_3$. Найдите работу, совершаемую газом за 1 цикл.

6. Какое количество теплоты выделится при подключении конденсатора емкостью C, заряженного до напряжения U, к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$?

ЗИФМШ объявляет прием

Заочная инженерная физико - математическая школа (ЗИФМШ) объявляет прием учащихся в 9, 10, 11 классы и в 11 спецкласс на 1992/93 учебный год. Главная цель школы — развить инженерный склад мышления, помочь учащимся глубже изучить математику и физику в объеме школьной программы, лучше подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, прежде всего в Петербургский институт инженеров железнодорожного транспорта им. акад. В. Н. Образцова (ПИИЖТ).

Прием в ЗИФМШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. После номера каждой задачи в скобках указано, для какого класса она предназначена (например, задача 4 входит в конкурсное задание для 9 и 10 классов). Задание для каждого класса состоит из шести задач, но для зачисления в ЗИФМШ достаточно решить бо́льшую их часть.

В этом году в ЗИФМШ открыт также 11 спецкласс, выпускники которого рекомендуются для поступления в Группы целевой инженерной подготовки студентов, готовящие инженеров - исследователей для проектирования скоростных железнодорожных магистралей со скоростью движения до 500 км/ч. Для поступления в этот класс необходимо решить 6 задач для 11 класса и 4 дополнительные задачи (отмеченные в скобках — 11 с. кл.).

Решения вступительного задания необходимо прислать до 1 августа по адресу: 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., д. 9, ПИИЖТ, ЗИФМШ, на конкурс. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 9×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	Сидоров Иван Петрович
Класс (номер класса указывается на 1 сентября 1992 года)	9
Подробный домашний адрес	524806, г. Тверь, ул. Садовая, д. 5, кв. 7
Номер и адрес школы (или СПТУ)	школа № 5, г. Тверь, ул. Зеленая, д. 7
ФИО и профессия родителей	мать — Сидорова Анна Ивановна, врач отец — Сидоров Петр Ильич, электромонтер

Если у вас в семье есть железнодорожники или вы учитесь в железнодорожной школе, отметьте это.

Зачисленным в ЗИФМШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания, решенные задания оцениваются и рецензируются. Успешно закончившие ЗИФМШ получают удостоверение и имеют преимущество при поступлении в ПИИЖТ.

При ЗИФМШ действуют группы «Коллективный ученик». Прием в группы проводится без конкурса, достаточно заявления учителя математики или физики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться. Заявление должно быть заверено директором школы (или СПТУ) и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик» может оплачиваться школами по представлению ЗИФМШ как факультативные занятия.

Несколько слов о ПИИЖТ. Институт готовит инженеров-строителей, инженеров-электромехаников, инженеров-электриков, инженеров-механиков, инженеров-экономистов, инженеров-системотехников (по специальности ЭВМ), инженеров путей сообщения для работы на железнодорожном транспорте и в других отраслях народного хозяйства.

Вступительное задание

1 (9 кл.). Сколько процентов золота содержится в слитке сплава золота (плотностью 19,3 г/см^3) и серебра (плотностью 10,5 г/см^3), если вес слитка в воздухе 2,94 Н, а в воде 2,69 Н?

2 (9 кл.). При постройке сруба необходимо, чтобы два бревна одной и той же длины образовывали противоположные стороны прямоугольника. Как проверить выполнение этого условия, располагая веревкой и не имея рулетки?

3 (9, 10 кл.). Поезд длиной 225 м, движущийся с постоянной скоростью, проходит мимо телеграфного столба за 15 с. Сколько времени пройдет от момента вхождения тепловоза в туннель длиной 450 м до момента выхода из туннеля последнего вагона?

4 (9, 10 кл.). Два работника получали одинаковую зарплату. Первому из них повысили зарплату на 100 %, а второму — дважды на 50 %. Сколько процентов составляет новая зарплата второго работника относительно новой зарплаты первого работника?

5 (9, 10, 11 кл.). В двух закрытых ящиках, соединенных один с другим через клеммы двухпроводной линией, помещены соответственно источник питания и резистор. Как с помощью вольтметра определить, в каком из ящиков находится источник питания, не размыкая электрическую цепь?

6 (9, 10, 11 кл.). При каких значениях параметра a уравнение $(a-3)x^2-2ax+3a-6=0$ будет иметь два решения?

7 (10, 11 кл.). Почему по скользкой дороге рекомендуется ходить короткими шагами?

8 (10, 11 кл.). Из города A в город B вышел пассажирский поезд. Одновременно с ним из B в A вышел товарный поезд. Скорость каждого на всем участке движения постоянна. Через 2 ч после того, как поезда встретились, расстояние между ними составило 280 км. Пассажирский поезд прибыл к месту назначения через 9 ч, а товарный — через 16 ч после встречи. Какое время находился в пути каждый поезд?

9 (11 кл.). Трамвайный вагон массой 12,5 т, имевший скорость 28,8 км/ч, тормозит и останавливается. На сколько повысится температура его 8 чугунных тормозных колодок, если масса каждой колодки 9 кг и на их нагревание затрачивается 60 % кинетической энергии вагона?

10 (11 кл.). Упростите выражение

$$\sin^2\alpha\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(1-\frac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right).$$

Дополнительные задачи для 11 спецкласса

11 (11 с. кл.). Оцените, хватит ли мощности гидроэлектростанции, чтобы испарить всю воду, проходящую через ее турбины.

12 (11 с. кл.). В герметичном контейнере высотной ракеты сначала давление было равно p_0. Во сколько раз увеличилась температура внутри ракеты, если при ее вертикальном взлете с постоянным ускорением g находящийся в контейнере ртутный барометр стал показывать 0,6 p_0?

13 (11 с. кл.). Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2.$$

14 (11 с. кл.). Изобразите на плоскости множество точек M $(x;\ y)$, для которых

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4x, \\ |y|\geqslant|2-x|, \end{cases}$$

и вычислите площадь соответствующей фигуры.

Заочная математическая школа при экспериментальной школе «КОВЧЕГ»

набирает учащихся 7-х и 8-х классов.
Принимаются все желающие. Обучение платное: 150 руб. в месяц.
Для поступления в школу вам необходимо до 15 сентября
прислать заявление о приеме с указанием вашего адреса и номера класса.
Подробная информация и первое задание высылаются бесплатно.

Наш адрес: 117071, Москва, ул. Орджоникидзе, 14 — 99, ЗМШ.

Нам пишут

Еще одна формула линзы

Как известно, линза — прозрачное тело, ограниченное двумя преломляющими световые лучи поверхностями,— является одним из основных элементов любой оптической системы. Зная фокусное расстояние линзы и положение источника света, с помощью формулы линзы можно определить положение изображения источника.

Наиболее простой вид это соотношение имеет для тонкой сферической линзы, когда толщина линзы мала по сравнению с радиусами кривизны ее преломляющих поверхностей. Так, если d — расстояние от предмета до линзы, f — расстояние от линзы до изображения, а F — фокусное расстояние линзы, то справедливо соотношение

$$1/d+1/f=1/F.$$

Такой вид формулы линзы принадлежит Декарту (1596—1650).

Если обозначить a — расстояние от предмета до переднего фокуса линзы, а b — расстояние от изображения до заднего фокуса, то формулу линзы можно записать так:

$$ab=F^2.$$

Эта формула известна как формула Ньютона (1642—1727).

Вашему вниманию предлагается еще одна формула, полученная автором заметки и имеющая тоже очень простой вид:

$$F=(AB)/(A-B).$$

Здесь A — расстояние от предмета до точки на оптической оси, находящейся на двойном фокусном расстоянии перед линзой, а B — расстояние от изображения до точки, расположенной на двойном фокусном расстоянии за линзой.

Самое интересное, что все три формулы можно объединить в одну общую формулу, связывающую фокусное расстояние линзы и расстояния до предмета и изображения. Покажем это.

Измерение расстояний до предмета (A) и до изображения (B) из точек на главной оптической оси, которые есть целое (n) кратное фокусного расстояния линзы (F), приводит к следующему соотношению:

$$F^2(2n-n^2)-F(n-1)\times\times(A-B)+AB=0. \quad (1)$$

Уравнение (1) можно получить с помощью построения, например для случая, когда предмет находится за двойным фокусным расстоянием, а его действительное изображение находится между двойным фокусом и фокусом на главной оптической оси линзы. Теперь свяжем расстояния A и B с расстояниями, используемыми в формулах Декарта и Ньютона:

$$d=nf+A, \quad (2)$$

$$f=nF-B. \quad (3)$$

$$a=(n-1)F+A, \quad (4)$$

$$b=(n-1)F-B. \quad (5)$$

В уравнении (1) только при $n=0,1$ или 2 линейный или квадратичный члены элегантно упрощаются, приводя к изящной формуле.

Так, при $n=0$ расстояния до предмета и изображения измеряются от линзы, что приводит к выражению

$$F=(AB)/(B-A).$$

Применив формулы (2) и (3), получим известную формулу Декарта

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}.$$

При подстановке $n=1$ в уравнение (1) расстояния до предмета и изображения измеряются от фокуса. Упрощение и перестановка членов дают уравнение

$$F^2=-AB.$$

Используя формулы (4) и (5), получим формулу Ньютона

$$F^2=ab.$$

Если в уравнение (1) подставить $n=2$, упомянутая «точка отсчета» сдвигается на двойное фокусное расстояние от линзы, что приводит к выражению

$$F=(AB)/(A-B),$$

которое и представляет собой новую формулу линзы.

В. Ананта Нарайянан, профессор физики, США

Олимпиады

Канадские математические соревнования

Наш журнал регулярно публикует задачи Всесоюзной олимпиады школьников, Международной олимпиады, национальных и межнациональных олимпиад. Это — соревнования высокого уровня, в каждом из них участвуют школьники, уже отобранные в результате предыдущих соревнований. Однако в тени остаются самые массовые, школьные олимпиады. Как правило, задачи для них учителя подбирают из старых запасов. В нашей стране в 60-е годы проходили заочные физико-математические олимпиады, адресованные всем школьникам, интересующимся этими науками, но в дальнейшем такая форма проведения соревнований была незаслуженно забыта. В то же время в ряде стран, начавших проводить математические олимпиады лишь недавно (США, Канада, Австралия) большое внимание уделяется именно этому первому — школьному — этапу олимпиад. Он проходит одновременно во всех школах страны. Задание имеет вид теста, т. е. к каждой задаче даются несколько вариантов ответа, и нужно выбрать среди них правильный. В качестве примера приводим задание математической олимпиады Канады. В этом номере мы публикуем задачи для 8 и 9 классов, что соответствует 7 и 8 классам нашей школы, задачи для других классов появятся в следующих номерах.

Инструкция к заданию сообщает следующее:

— разрешается использовать бумагу для черновика и больше ничего;

— каждый вопрос имеет пять возможных ответов, обозначенных буквами *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Лишь один из них правильный. Когда вы выберете свой вариант ответа, поставьте соответствующую букву в вашем листе с ответами;

— за неправильные ответы вы получаете штрафные очки. Если вы не подумали над вопросом, неразумно пытаться угадать верный ответ;

— ваши очки=30+(количество очков за правильные ответы) — (накопившиеся штрафные очки);

— чертежи нарисованы без соблюдения масштаба и приводятся лишь как приложения.

Попробуйте выполнить это задание за указанное время. Быть может, вы на час почувствуете себя канадцем?

Gauss Contest (Grade 8)*)

Время 1: час

Часть А

(по 4 очка за задачу)

1. Выражение $24+8:4\times2-1$ равно

(*A*) 51; (*B*) 27; (*C*) 24; (*D*) 15; (*E*) 3.

2. Среднее арифметическое чисел 6,2 и 0,62 равно

(*A*) 3,069; (*B*) 3,131; (*C*) 3,41; (*D*) 3,72; (*E*) 6,2.

3. Если $4x=24$, то $10x$ равно

(*A*) 6; (*B*) 40; (*C*) 60; (*D*) 96; (*E*) 240.

4. Выражение $(3\frac{1}{3})^2$ равно

(*A*) $11\frac{1}{9}$; (*B*) $9\frac{1}{9}$; (*C*) $6\frac{2}{3}$; (*D*) $\frac{100}{3}$; (*E*) $\frac{101}{9}$.

5. Из пяти чисел -27; $-3{,}5$; -692; $-0{,}1$; -10 наибольшим является

(*A*) -27; (*B*) $-3{,}5$; (*C*) -692; (*D*) $-0{,}1$; (*E*) -10.

6. Джилл использует в среднем 20 литров бензина в неделю. Она платит по 48 центов за литр. Следовательно, ее ежегодные затраты на бензин (в долларах) составляют примерно

(*A*) 100; (*B*) 300; (*C*) 500; (*D*) 600; (*E*) 1000.

7. Число 1 одновременно квадрат целого числа и куб целого числа. Другое такое число

(*A*) 41; (*B*) 87; (*C*) 27; (*D*) 49; (*E*) 64.

8. Периметр прямоугольника равен 64 см, его длина равна 20 см. Площадь прямоугольника (в квадратных сантиметрах) равна

(*A*) 1280; (*B*) 880; (*C*) 240; (*D*) 120; (*E*) 44.

9. Мой богатый дядюшка подарил мне один доллар в мой первый день рождения. В каждый следующий день рождения он удваивал свой подарок. На следующий день после моего восьмого дня рождения общая сумма денег, подаренных мне дядюшкой, была равна (в долларах)

(*A*) 81; (*B*) 36; (*C*) 127; (*D*) 128; (*E*) 255.

---

*) Гауссовы соревнования. Класс 8.

10. Заметим, что $\frac{1}{9}=0{,}1111\ldots$, $\frac{32}{99}=0{,}3232\ldots$ и $\frac{785}{999}=0{,}785785\ldots$ Используя этот образец, заключаем, что $0{,}41144114\ldots$ равно

(*A*) $\frac{41}{99}$; (*B*) $\frac{411}{999}$; (*C*) $\frac{4114}{9999}$; (*D*) $\frac{41144}{99999}$; (*E*) $\frac{411441}{999999}$.

Часть В

(по 5 очков за задачу)

11. Когда Карл Фридрих Гаусс был юношей, он открыл, что сумма S первых n натуральных чисел задается формулой

$$S=\frac{n(n+1)}{2}$$

Сумма первых 30 натуральных чисел равна

(*A*) 240; (*B*) 465; (*C*) 901; (*D*) 930; (*E*) 232,5.

12. Шери решила в этом году пять тестов. Ее оценки были $\frac{47}{50}$, $\frac{23}{25}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{60}{75}$ и 85 %. Тест, который она выполнила лучше всего, был тот, за который она получила

(*A*) $\frac{47}{50}$; (*B*) $\frac{23}{25}$; (*C*) $\frac{8}{10}$; (*D*) $\frac{60}{75}$; (*E*) 85 %.

13. Парусник вышел из дока и проплыл 12 км на запад, затем 9 км на север. В этот момент кратчайшее расстояние до дока (в километрах) было

(*A*) 3; (*B*) 15; (*C*) 21; (*D*) 108; (*E*) 225.

14. Сумма цифр в разряде десятков во всех двузначных числах равна

(*A*) 45; (*B*) 90; (*C*) 100; (*D*) 450; (*E*) 550.

15. Камера фотографирует метровую палку около кирпичной стены. На полученной картинке палка имеет длину 2 см, а стена — высоту 4,5 см. Настоящая высота стены (в сантиметрах) равна

(*A*) 450; (*B*) 225; (*C*) 45; (*D*) 22,5; (*E*) 4,5.

16. Выражение $1-2+3-4+5-6+\ldots-100$ равно

(*A*) -50; (*B*) -49; (*C*) 0; (*D*) -100; (*E*) -150.

17. Сумма двух целых чисел равна -4. Их произведение равно -21. Большее из этих чисел

(*A*) -7; (*B*) -3; (*C*) -1; (*D*) 3; (*E*) 7.

18. Допустим, один американский доллар стоит на 30 % больше, чем один канадский доллар. Американский турист в Канаде заплатил за 35-долларовый сувенир тридцать американских долларов. Сдача, в канадских долларах, равна

(*A*) 4,00; (*B*) 5,00; (*C*) 9,00; (*D*) 10,50; (*E*) 11,70.

10		
9		*13*
14	*N*	

Рис. 1.

19. Площадь поверхности куба равна 24 см^2. Его объем (в кубических сантиметрах) равен

(*A*) 8^3; (*B*) 6^3; (*C*) 27; (*D*) 240; (*E*) 8.

20. Если общая стоимость P единиц товара составляет Q долларов, то стоимость R единиц того же товара составляет (в долларах)

(*A*) PQR; (*B*) $\frac{P}{QR}$; (*C*) $\frac{PR}{Q}$; (*D*) $\frac{QR}{P}$; (*E*) $\frac{R}{PQ}$.

Часть С

(по 6 очков за задачу)

21. В магическом квадрате, изображенном на рисунке 1, сумма чисел в каждом ряду, колонке и на диагонали должна быть одинаковой. Число N равно

(*A*) 7; (*B*) 8; (*C*) 11; (*D*) 19; (*E*) 33.

22. Из 33 учеников в классе 18 состоят в математическом клубе, 17 — в спортивном клубе и 4 нигде не состоят. Число учеников, посещающих оба клуба, равно

(*A*) 2; (*B*) 5; (*C*) 6; (*D*) 29; (*E*) 33.

23. На рисунке 2 показан треугольник, в котором из двух вершин проведены по две линии, пересекающие противоположную сторону. Тем самым треугольник разбит на девять неперекрывающихся частей. Если проведено двенадцать линий — шесть из вершины A и шесть из вершины B — число неперекрывающихся частей, на которые разбит треугольник, равно

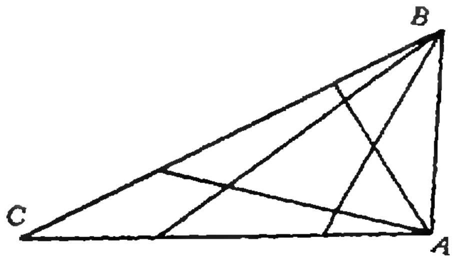


Рис. 2.

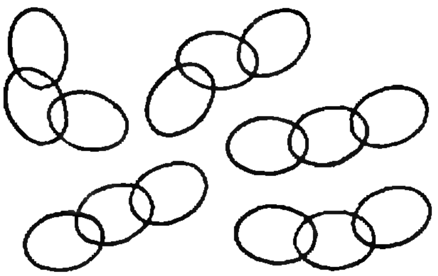


Рис. 3.

(*A*) 16; (*B*) 25; (*C*) 36; (*D*) 42; (*E*) 49.

24. На рисунке 3 вы видите пять кусков цепи, каждый из трех звеньев. Пусть отделить звено от цепи стоит 10 центов, а сварить звено стоит 25 центов. Тогда самая дешевая цепь максимальной длины стоит (в долларах)

(*A*) 0,70; (*B*) 0,95; (*C*) 1,05; (*D*) 1,40; (*E*) 1,95.

25. Двое мужчины и два мальчика хотят переплыть реку. Их маленькое каноэ может выдержать лишь одного мужчину или двух мальчиков. Чтобы всем четверым перебраться на другой берег, лодке придется пересечь реку не менее

(*A*) 5; (*B*) 6; (*C*) 7; (*D*) 8; (*E*) 9 раз.

Pascal contest (Grade 9)

Время: 1 час

Часть А

(по 4 очка за задачу)

1. Выражение $\frac{\sqrt{16+9}}{\sqrt{16}}$ равно

(*A*) $\frac{4}{5}$; (*B*) $\frac{7}{4}$; (*C*) 3; (*D*) 4; (*E*) $\sqrt{10}$.

2. Длины сторон треугольника — 66, 10 и 11. Равносторонний треугольник с тем же периметром имеет длину стороны

(*A*) 6; (*B*) 9; (*C*) 10; (*D*) 11; (*E*) 27.

3. Если $x=1$ и $y=-3$, то $\frac{x+y}{x^2-y^2}$ равно

(*A*) $\frac{1}{4}$; (*B*) $-\frac{1}{5}$; (*C*) $\frac{2}{5}$; (*D*) $-\frac{2}{5}$; (*E*) $-\frac{1}{4}$.

4. Прямой забор имеет длину 60 м. Если столбы отстоят один от другого на 4 м, и по концам забора стоит по одному столбу, то общее число столбов

(*A*) 13; (*B*) 14; (*C*) 15; (*D*) 16; (*E*) 17.

5. Из пяти следующих чисел: 1,1; 1,01; 1,001; 1,0101; 1,00101 меньшее

(*A*) 1,1; (*B*) 1,01; (*C*) 1,001; (*D*) 1,0101; (*E*) 1,00101.

6. Наиболее точное приближение числа 0,435:0,0821 из приведенных — это

(*A*) 0,002; (*B*) 0,2; (*C*) 0,5; (*D*) 5; (*E*) 50.

7. Если $3x+2=y$, то x выражается через y как

(*A*) $y-2$; (*B*) $y-5$; (*C*) $\frac{y+2}{3}$; (*D*) $\frac{y-2}{-3}$; (*E*) $\frac{y-2}{3}$.

8. На рисунке 4 угол *PQR* равен 90°, а угол *RQS* на 50° больше, чем угол *PQS*. Тогда величина угла *PQS* в градусах равна

(*A*) 70; (*B*) 50; (*C*) 45; (*D*) 40; (*E*) 20.

9. У Джоан есть сто карточек, пронумерованных последовательно числами от 1 до 100. Она составляет пары карточек с суммой номеров, равной 50, например 12 и 38. Число таких пар равно

(*A*) 20; (*B*) 24; (*C*) 25; (*D*) 49; (*E*) 50.

10. Периметр данной фигуры (рис. 5) равен

(*A*) 38; (*B*) 41; (*C*) 46; (*D*) 50; (*E*) 59.

Часть В

(по 5 очков за задачу)

11. Наибольший целый делитель числа 1001, кроме него самого, есть

(*A*) 77; (*B*) 91; (*C*) 101; (*D*) 143; (*E*) 151.

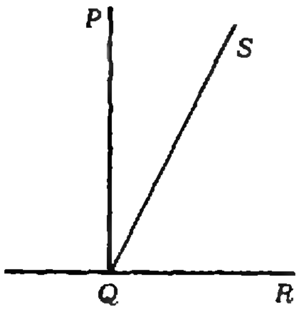


Рис. 4.

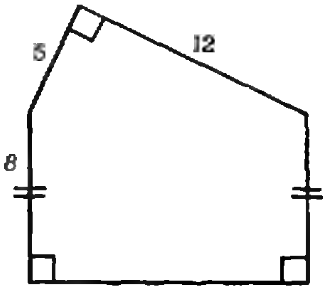


Рис. 5.

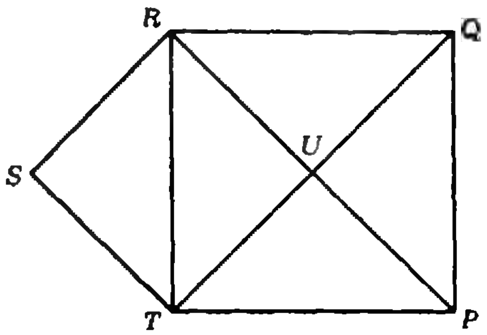


Рис. 6.

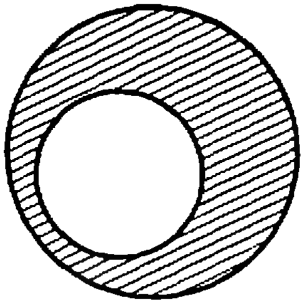


Рис. 7.

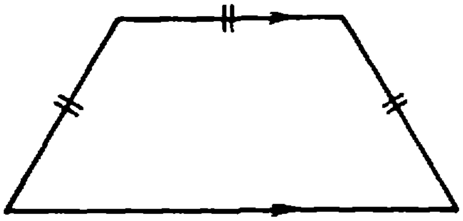


Рис. 8.

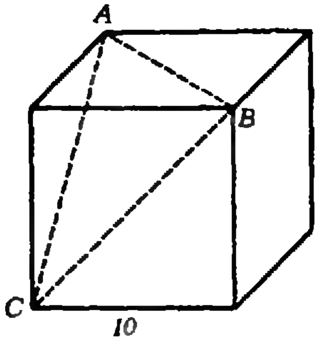
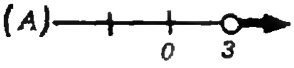


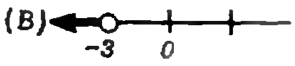
Рис. 9.

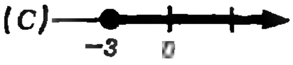
12. Фигура на рисунке 6 должна быть нарисована без отрыва карандаша от бумаги так, чтобы ни одна из линий не была проведена дважды. Если начать с точки *P*, то закончить придется в точке

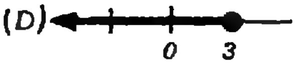
(*A*) *U*; (*B*) *T*; (*C*) *R*; (*D*) *Q*; (*E*) *P*.

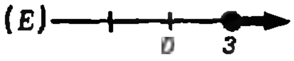
13. Один из следующих графиков изображает решение в действительных числах неравенства $5-2x \leqslant 11$. Это —











14. Разделив число x на 6, получим остаток 3. Тогда остаток от деления $3x$ на 6 равен

(*A*) 4; (*B*) 3; (*C*) 2; (*D*) 1; (*E*) 0.

15. Если $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n}+1$, то n равно

(*A*) $\frac{12}{5}$; (*B*) $\frac{5}{12}$; (*C*) $\frac{12}{11}$; (*D*) $\frac{11}{12}$; (*E*) 5.

16. Среднее десяти чисел равно 20. Если одно из чисел убрать, среднее оставшихся будет равно 19. Убранное число равно

(*A*) 10; (*B*) 19; (*C*) 20; (*D*) 29; (*E*) 39.

17. Если $(a, b) \square (c, d)=ac+bd$ и $(x, 3) \square (-2, 5)=3$, то x равно

(*A*) -9; (*B*) -6; (*C*) $\frac{9}{5}$; (*D*) $\frac{13}{3}$; (*E*) 6.

18. На рисунке 7 радиус большего круга вдвое больше радиуса меньшего круга. Отношение площадей заштрихованной к незаштрихованной фигур равно

(*A*) 2:1; (*B*) 3:1; (*C*) 4:1; (*D*) 5:1;
(*E*) 1:1.

19. Выражение

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right)+$$

$$+\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{6}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$
$$+\left(\frac{7}{8}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{8}{9}+\frac{1}{10}\right)$$

равно

(*A*) $7\frac{1}{10}$; (*B*) 8; (*C*) $8\frac{1}{2}$; (*D*) $8\frac{1}{10}$; (*E*) $9\frac{1}{2}$.

20. Если $x:y=3:2$ и $x+3y=27$, то меньшее из чисел x и y равно

(*A*) 3; (*B*) $\frac{54}{11}$; (*C*) 6; (*D*) 9; (*E*) 18.

Часть C

(по 6 очков за задачу)

21. У данной трапеции (рис. 8) три стороны равны, а основание на 2 единицы меньше суммы остальных трех сторон. Если расстояние между параллельными сторонами 5 единиц, то площадь трапеции (в квадратных единицах) равна

(*A*) 5; (*B*) 35; (*C*) 45; (*D*) 125; (*E*) 185.

22. Если произведение $(4^5)(5^{13})$ записано одним числом, то количество цифр в нем равно

(*A*) 12; (*B*) 13; (*C*) 16; (*D*) 17; (*E*) 18.

23. Бетти навестила свою подругу Кейт и затем вернулась домой той же дорогой. Она всегда ходит со скоростью 2 км/ч, когда поднимается в гору, 6 км/ч, когда идет под гору, и 3 км/ч по ровному месту. Если ее прогулка заняла 6 часов, то общее расстояние, которое она прошла (в километрах) равно

(*A*) 9; (*B*) 12; (*C*) 18; (*D*) 22; (*E*) 36.

24. Куб с ребром 10 разрезан на две части секущей плоскостью, содержащей точки *A*, *B*, *C* (рис. 9). Объем меньшей части равен

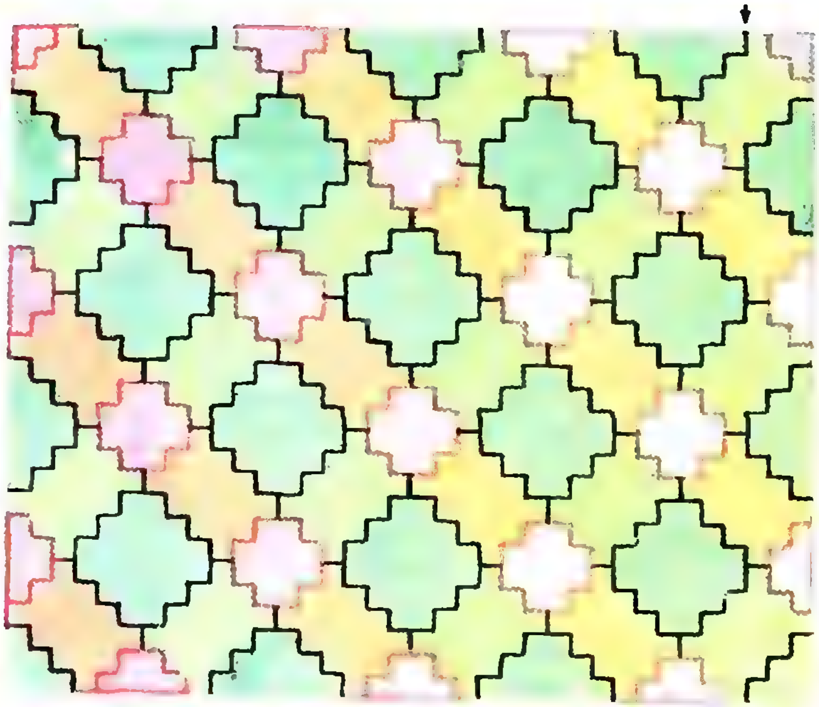
(*A*) $200\sqrt{2}$; (*B*) $100\sqrt{2}$; (*C*) $333\frac{1}{3}$;
(*D*) 250; (*E*) $166\frac{2}{3}$.

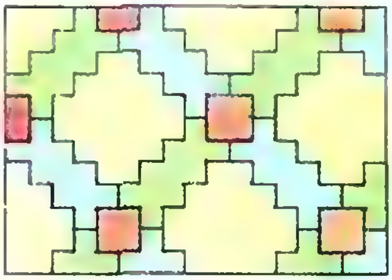
25. Рассмотрим все возможные трехзначные числа, содержащие только нечетные цифры. Сумма всех этих чисел равна

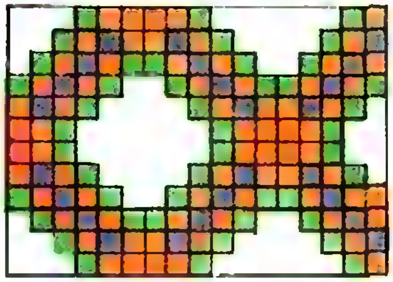
(*A*) 69 375; (*B*) 19 375; (*C*) 625^4;
(*D*) 78 125; (*E*) 125.

Нам пишут

Алгоритм «Стежок»

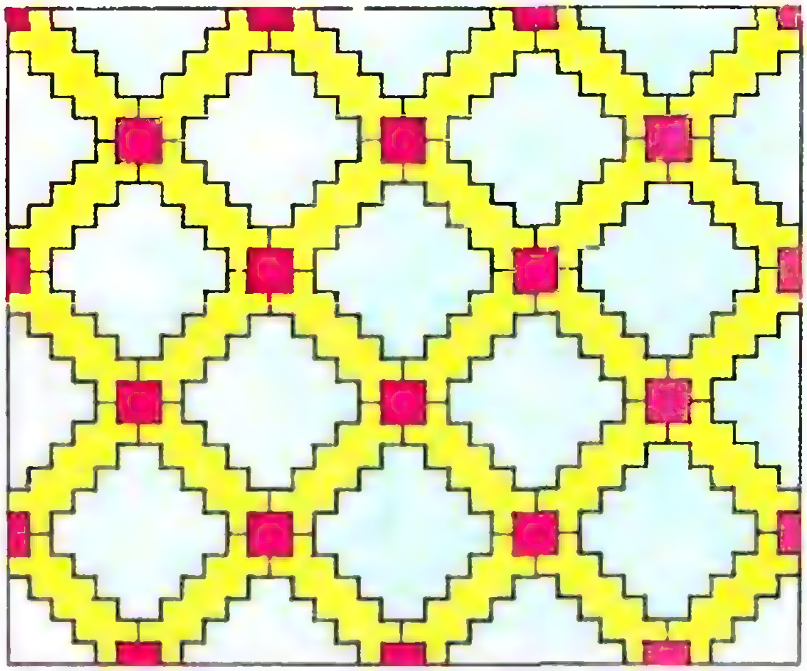






Этот алгоритм сочетает в себе простоту и изящество. Он удивительно прост в реализации, но порождает красивые и разнообразные структуры — орнаменты.

Суть алгоритма в следующем. Нарисуем на клетчатой бумаге прямоугольник размером m×n клеток. Выбрав какой-нибудь узел решетки на нижней стороне прямоугольника, проведем отрезок по стороне клеточки вверх до следующего узла, затем — вправо, потом — опять вверх и так далее. Если мы добрались до границы прямоугольника и нет возможности проложить «стежок» в нужную сторону, прокладываем его в противоположном направлении (нельзя двигаться вверх — пойдем вниз, нельзя вправо — пойдем влево). Процесс продолжается до тех пор, пока не произойдет «зацикливание», т. е. повторный выход на уже проложенный «стежок».



Таким способом можно «вышивать» не только прямоугольные «коврики», но и фигуры более сложных очертаний (попробуйте придумать примеры). Можно ли получить интересные орнаменты, если менять длину «стежка», количество шагов по разным направлениям, порядок и способ изменения направлений?

Попробуйте составить программу для ЭВМ, реализующую этот алгоритм.

А. Жуков

Государственная академия нефти и газа им. И. М. Губкина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{a-9/16}{\sqrt{a}-0{,}75}-\frac{a\sqrt{a}-27/64}{a+0{,}75\sqrt{a}+9/16}.$$

2. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt{3(11-x)}>5-x.$$

3. Сумма 7-го и 16-го членов арифметической прогрессии равна 11. Найдите сумму первых 22 членов прогрессии.

4. Решите уравнение

$$|-x^2-16|=8x.$$

5. Решите уравнение

$$3^{x+1}-3^x=54.$$

6. Вычислите

$$\log_{81}4+\log_9(3/2).$$

7. Вычислите

$$\cos 92^\circ\cos 2^\circ+0{,}5\sin 4^\circ+1.$$

8. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения

$$\operatorname{tg}(55^\circ+x)+\operatorname{tg}(35^\circ-x)=2.$$

9. К параболам $y=x^2+5x+8$ и $y=x^2+7x+12$ проведена общая касательная. Найдите абсциссу середины отрезка, соединяющего точки касания.

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$1+\log_{0{,}25}\log_{39}x+\log_{0{,}5}\log_{\sqrt{39}}x>0?$$

11. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно $\sqrt{6}$, радиус окружности, описанной около основания, равен $\sqrt{2}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

12. В треугольнике *ABC* из вершины *B* проведены высота *BD* и биссектриса *BL*. Найдите площадь треугольника *BLD*, если известны длины сторон треугольника *ABC*: *AB*=6,5, *BC*=7,5, *AC*=7.

Вариант 2

1. Упростите выражение и вычислите при $a=1/17$, $c=1+\sqrt{7}$:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{3}\,c^2}{\sqrt{3}\,ac-a^2}-\frac{a}{\sqrt{3}\,c-a}\right)\frac{a}{a+\sqrt{3}\,c}.$$

2. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\sqrt{3(x+9)}>3+x.$$

3. Сумма 9-го и 21-го членов арифметической прогрессии равна 16. Найдите 15-й член этой прогрессии.

4. Решите уравнение

$$0{,}6|x-0{,}3|=x^2+0{,}27.$$

5. Решите уравнение

$$(\sqrt{13})^{x+10}:8^{x+10}=\frac{13}{64}.$$

6. Вычислите

$$\log_{2^7\sqrt[5]{2}}\sqrt[10]{8}.$$

7. Вычислите

$$\frac{\sin^2 190^\circ-\cos^2 10^\circ}{4\cos 20^\circ}.$$

8. В правильной четырехугольной пирамиде боковая грань составляет с плоскостью основания угол $\pi/3$. Радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, равен $\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

9. Найдите площадь треугольника, образованного осью ординат, касательной к кривой $y=3x(108-x^2)$, проведенной в точке максимума, и касательной к этой же кривой, проведенной в точке с абсциссой $x=4$.

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_3\left(\frac{4x-9}{2x+5}+1{,}5\right)<1?$$

11. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения

$$\sin x\,(4\cos x+3\sqrt{6})+3\sqrt{6}\cos x+8=0.$$

12. Внутри параллелограмма расположены две одинаковые окружности радиусом 6, каждая из которых касается боковой стороны параллелограмма, обоих оснований и второй окружности. Боковая сторона делится точкой касания в отношении 9:4. Найдите площадь параллелограмма.

Физика

Письменный экзамен

В каждом варианте 4 задачи из 12 были относительно более сложными и при подсчете баллов оценивались в 2 раза «дороже». Такие задачи здесь отмечены звездочками.

Вариант 1

1. Автомобиль, двигаясь равномерно со скоростью $v=45$ км/ч, в течение $t_1=10$ с прошел путь такой же, как автобус, двигавшийся в том же направлении с постоянной скоростью, за время $t_2=$ $=15$ с. Какова их относительная скорость (в км/ч)?

2. Лифт при разгоне и при торможении движется с одним и тем же по модулю ускорением. Чему равна его величина (в м/с^2), если вес человека, находящегося в лифте, в первом и втором случаях отличается в $\alpha=3$ раза?

3*. Первое тело массой $m_1=2$ кг, движущееся со скоростью $v=1$ м/с, налетает на второе тело массой $m_2=6$ кг, покоящееся на горизонтальной поверхности. Сила, возникающая при взаимодействии тел, линейно возрастает от нуля до величины $F=10$ Н за время $\tau=0{,}1$ с, а затем линейно убывает до нуля за такое же время. Во сколько раз скорость первого тела после удара будет больше скорости второго тела? Удар центральный.

4. Груз начинают поднимать вертикально вверх с постоянным ускорением. Во сколько раз работа, совершенная за первую секунду движения, меньше работы за следующую, вторую секунду?

5*. Две стороны проволочной рамки, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной $l=1$ м, сделаны из алюминиевой проволоки, а третья — из медной такого же диаметра. На каком расстоянии (в см), отсчитываемом от середины медной проволоки в направлении перпендикуляра к ней, находится центр тяжести системы? Плотность медной проволоки в 3 раза больше плотности алюминиевой.

6. Из сосуда откачали некоторое количество воздуха и закрыли его пробкой. Затем сосуд опустили в воду горлышком вниз на глубину $h=1$ м и пробку вынули. Сосуд заполнился на $\alpha=9/10$ своего объема. Каково было давление (в кПа) в сосуде после откачки? Атмосферное давление $p_0=100$ кПа, плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3*).

7. Газ, совершающий цикл Карно в тепловой машине, отдает холодильнику $\eta=40\,\%$ количества теплоты, полученного от нагревателя. Чему равна при этом температура (в К) нагревателя, если температура холодильника $t_x=$ $=27$ °C?

8*. Два одинаковых небольших шарика, имеющих одинаковые заряды $q=400$ нКл, соединены легкой пружиной и находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Шарики колеблются так, что расстояние между ними меняется от l до $4l$. Найдите жесткость пружины (в Н/м), если ее длина в свободном состоянии равна $2l=4$ см. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона равен $k=9\cdot10^9$ м/Ф. (Пружина незаряжена и электроизолирована от шариков.)

9. На сколько одинаковых частей нужно разрезать однородный проводник сопротивлением $R=36$ Ом, чтобы, соединив эти части параллельно, получить сопротивление $r=1$ Ом?

10*. Электронно-лучевую трубку с отключенной управляющей системой помещают в однородное магнитное поле, перпендикулярное скорости движения электронов. При этом след пучка электронов на экране, удаленном на $l=14$ см от места вылета электронов, смещается на $d=2$ см. Какова скорость (в км/с) электронов, если индукция магнитного поля $B=25$ мкТл? Удельный заряд электрона $e/m=1{,}8\cdot10^{11}$ Кл/кг.

11. В колебательном контуре параллельно конденсатору присоединили другой конденсатор емкостью в $\alpha=3$ раза большей, после чего частота колебаний контура уменьшилась на $\Delta\nu=300$ Гц. Найдите первоначальную частоту колебаний контура.

12. При увеличении частоты падающего на металл света в $m=2$ раза задерживающее напряжение для фотоэлектронов увеличивается в $n=5$ раз. Частота первоначально падающего света $\nu=$ $=5\cdot10^{14}$ Гц. Определите длину волны (в нм) света, соответствующую красной границе для этого металла. Скорость света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с.

Вариант 2

1. Мяч брошен с некоторой высоты вертикально вниз со скоростью $v_0=5$ м/с. Какова средняя скорость движения мяча за первые $t=4$ с движения?

2*. На тонкой нити подвешен шарик массой $m=\sqrt{3}$ кг. Нить приводят в горизонтальное положение и отпускают. Чему будет равно натяжение нити в тот момент, когда ускорение шарика будет направлено горизонтально?

---

*) Здесь и далее ускорение силы тяжести принять равным $g=10$ м/с^2.

3. Из винтовки массой $m=5$ кг производится выстрел. Во сколько раз больше будет скорость отдачи винтовки, не прижатой к плечу стрелка, по сравнению со скоростью отдачи в случае, когда стрелок крепко прижимает винтовку к плечу? Масса стрелка $M=80$ кг.

4*. Теплоход тянет баржу со скоростью $v_1=9$ км/ч. При этом натяжение буксирного каната $T=120$ кН, а мощность двигателя $N=400$ кВт. Какова будет скорость (в км/ч) буксира, если он будет плыть без баржи при такой же мощности двигателя? Силу сопротивления воды считать прямо пропорциональной скорости движения.

5. Тонкая однородная палочка шарнирно укреплена за верхний конец. Нижняя часть палочки погружена в воду, причем равновесие достигается тогда, когда палочка расположена наклонно к поверхности воды и в воде находится половина палочки. Какова плотность материала, из которого сделана палочка? Плотность воды $\rho_в=1000$ кг/м^3.

6. Газ находится в вертикальном цилиндре под поршнем массой $m=5$ кг. Какой массы груз надо положить на поршень, чтобы он остался в прежнем положении, когда абсолютная температура газа будет увеличена в $\alpha=2$ раза? Атмосферное давление $p_0=100$ кПа, площадь поршня $S=10$ см^2.

7. В изотермическом процессе газ совершил работу $A=1000$ Дж. На сколько увеличится внутренняя энергия этого газа, если ему сообщить количество теплоты, вдвое большее, чем в первом процессе, а процесс проводить изохорически?

8. Два одинаковых положительных заряда находятся на некотором расстоянии друг от друга. Во сколько раз увеличится сила, действующая на один из зарядов, если на середине прямой, соединяющей заряды, поместить третий, такой же по величине, но противоположный по знаку заряд? (Заряды считать точечными.)

9*. В сеть включены параллельно электрические чайник и кастрюля, потребляющие мощности $P_1=300$ Вт и $P_2=600$ Вт соответственно. Вода в них закипает одновременно через $\tau=20$ мин. На сколько минут позже закипит вода в кастрюле, чем в чайнике, если их включить в ту же сеть последовательно?

10. Ток силой $I_1=4$ А, протекающий по контуру, создает магнитный поток

Если
ты искренне любишь физику
и математику
(а как же иначе —
ведь ты читаешь «Квант»),
хочешь
заниматься научной работой,

но!

тебя привлекает
и инженерное,
практическое воплощение
научных идей,
путь «от идеи к жизни»,

короче:

если ты не уверен,
кем ты хочешь стать —
ученым, инженером
или и тем и другим,

ты — наш человек!!!

Тебе надо поступать
в Государственную академию
нефти и газа им. И. М. Губкина,
на специальность 0906

«Физические процессы горного
и нефтегазового производства».

Войди в нашу дверь —
и через 5,5 лет ты выйдешь
высококлассным
инженером-исследователем,
будешь вести интересную
научную работу,
закладывать идеи
в принципиально новые,
экологически чистые
и эффективные технологии
(и видеть, как они
воплощаются в жизнь!).
Ты будешь прекрасно знать
математику, физику, гидромеханику,
владеть персональной ЭВМ
любого класса лучше,
чем электробритвой. Тебя будут
ждать во всех НИИ —
как отраслевых,
так и академических.
С тобой будут советоваться
министры и депутаты,
иностранцы и кооператоры,
ведь ты — Новый человек!
А в годы обучения
ты будешь вести интересную
студенческую жизнь,
общаться с талантливыми
студентами, остроумными
преподавателями,
обаятельными деканами —
о чем еще можно мечтать?

Мы ждем тебя!

Адрес академии: 117296,
г. Москва, Ленинский пр., 65.
Справки по телефону
приемной комиссии: 135-83-06.

$\Phi_1=0{,}1$ мВб. Ток равномерно уменьшается до $I_2=2$ А за время $\tau=0{,}002$ с. Найдите величину ЭДС самоиндукции (в мВ), которая возникает в контуре в этом случае.

11. При включении первичной обмотки трансформатора в сеть переменного тока во вторичной обмотке возникает напряжение $U_1=30$ В. При включении в эту же сеть вторичной обмотки на клеммах первичной возникает напряжение $U_2=120$ В. Во сколько раз число витков первичной обмотки больше числа витков вторичной обмотки?

12*. На рассеивающую линзу падает сходящийся пучок лучей. После прохождения через линзу лучи пересекаются в точке на главной оптической оси, отстоящей на $l=15$ см от линзы. Если линзу убрать, точка пересечения лучей переместится на $a=3$ см ближе к линзе. Каково фокусное расстояние (в см) линзы?

Публикацию подготовили
Л. Володина, Б. Писаревский

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1*)

1 (3). Решите уравнение

$$4^x+2^{x-2}-12=0.$$

2 (6). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x y+\log_y x=\dfrac{5}{2}, \\ xy=27. \end{cases}$$

3 (6). Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\sin^2 x+\sin 2x-1}{\cos^2 x-\sin 2x+1}.$$

4 (9). При каких значениях m неравенство

$$\frac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3}<1$$

выполняется для любых x?

5 (12). Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 45, а сумма первых шести членов равна 189. Первый член арифметической прогрессии, все члены которой являются натуральными числами, равен первому члену геометрической прогрессии, сумма первых 11 членов арифметической прогрессии меньше 260, а сумма первых 19 членов больше 710. Найдите пятый член арифметической прогрессии.

6 (12). В равнобедренной трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 14, а длина основания BC — 2. Окружность касается сторон AB, BC и CD, причем боковая сторона делится точкой касания в отношении 1:9, считая от меньшего основания. Найдите радиус окружности.

Вариант 2

1 (3). Решите уравнение

$$|2-x|=5-4x.$$

2 (6). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x+2^{y+1}=7, \\ 2y+2-\log_2(9^x+7)=0. \end{cases}$$

3 (6). Решите уравнение

$$(\sin x+\cos x)^4+(\sin x-\cos x)^4=$$
$$=3-\sin 4x.$$

4 (9). При каких значениях a корни уравнения

$$x^2-(3a+1)x+(2a^2+4a-6)=0$$

меньше -1?

5 (12). Из города A в город B, находящийся на расстоянии 210 км от A, с постоянной скоростью v выходит автобус. Через 30 мин вслед за ним из A со скоростью 80 км/ч выезжает автомобиль, который, догнав автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определите все те значения v, при которых автомобиль возвращается в город A позднее, чем автобус приходит в город B.

6 (12). В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведена полуокружность радиусом 2, центр которой лежит на стороне AC и которая касается сторон AB и BC. Полуокружность радиусом 1 касается этой полуокружности и стороны AB, а центр ее также лежит на стороне AC. Найдите длины сторон треугольника.

---

*) В скобках после номера задачи указано количество баллов, присуждавшихся за ее полное решение.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Газ находится в сосуде при давлении $p_1=2$ МПа и температуре $t_1=27\ ^\circ$C. После нагревания на $\Delta t=50\ ^\circ$C в сосуде осталась только половина газа (по массе). Определите установившееся давление.

2. К батарейке с ЭДС $\mathcal{E}=3$ В подключили резистор сопротивлением $R=20$ Ом. Напряжение на резисторе оказалось равным $U=2$ В. Определите ток короткого замыкания.

3. Какую работу необходимо совершить, чтобы вывести на круговую орбиту, проходящую вблизи поверхности Земли, спутник массой $m=500$ кг? Радиус Земли $R=6400$ км.

4. В колебательном контуре происходят свободные гармонические колебания. Зная, что максимальный заряд конденсатора $q_m=1$ мкКл, а максимальный ток в контуре $I_m=10$ А, определите собственную частоту колебаний контура.

5. Мячик брошен горизонтально с высоты $h=20$ м со скоростью $v=10$ м/с. Упав на землю и отразившись от нее, мячик ударился о вертикальную стенку, расположенную на расстоянии $l=35$ м по горизонтали от места бросания. Все удары упругие. Определите максимальную высоту подъема мяча после удара о стенку и место его второго падения на землю.

6. Оптическая система состоит из двух линз с фокусным расстоянием $F=30$ см каждая, расположенных на расстоянии $l=15$ см друг от друга. При каких положениях предмета система дает мнимое изображение?

Вариант 2

1. Свободные заряды $q_1=4$ нКл и $q_2=-1$ нКл находятся на расстоянии $l=1$ м друг от друга. Где и какой заряд нужно поместить, чтобы вся система зарядов находилась в равновесии?

2. Отражающая поверхность зеркала составляет с плоскостью стола угол $\alpha=135^\circ$. По направлению к зеркалу по столу катится шар со скоростью $v=2$ м/с. В каком направлении и с какой скоростью движется изображение шара?

3. Минимальное время разгона автомобиля до скорости $v=72$ км/ч при трогании с места равно $t=5$ с. Найдите коэффициент трения между колесами и дорогой и наименьший тормозной путь автомобиля, набравшего эту скорость, до остановки.

4. В откачанный и герметически закрытый сосуд емкостью $V=10$ л поместили $m=5$ г воды, после чего сосуд прогрели до $t=100\ ^\circ$C. Какая масса воды испарилась? Молярная масса воды $M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

5. Гвоздь длиной $l=80$ мм забит в доску шестью ударами молотка массой $m=0{,}5$ кг. Какая сила необходима для вытаскивания гвоздя из доски, если скорость молотка непосредственно перед ударом равна $v=2$ м/с? Массой гвоздя можно пренебречь.

6. Груз массой $m=0{,}2$ кг, подвешенный на пружине жесткостью $k=20$ Н/м, лежит на подставке так, что пружина не деформирована. Подставку убирают. Запишите закон движения груза и найдите его максимальную скорость.

Публикацию подготовили
Р. Ведерников, М. Либерзон, А. Симонов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Один рабочий взялся выполнить заказ за 16 дней при условии, что в течение 9 дней ему будет помогать второй рабочий. Если бы этот заказ был поручен каждому рабочему отдельно, то для его выполнения первому потребовалось бы на 7 дней больше, чем второму. За сколько дней каждый из них может выполнить заказ?

2. Найдите все решения уравнения

$$\sin 3\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\cos 4x,$$

принадлежащие отрезку $[\pi/2;\ \pi]$.

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg(3x^2-9x+7)}{\lg(x-1)}=2.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{15}{2-5^x}+5^x<0.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x+\sqrt{y}=1, \\ a+3-\sqrt{y}=\frac{1}{2}(a-x)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Основанием пирамиды $SABCD$ служит прямоугольник со сторонами $AB=4$ и $AD=12$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину S, центр симметрии основания O и точку N, лежащую на ребре BC, если $SA=3$, $SB=5$ и $SO=7$? На какие части делит точка N ребро BC в этом случае?

Вариант 2

1. Два автомобиля должны были перевезти некоторый груз в течение 20 ч. Однако работу смог начать только один автомобиль; до прибытия второго автомобиля он перевез 80 % груза. Остальное перевез второй автомобиль, и весь груз был перевезен таким образом за 36 ч. Сколько времени нужно было бы каждому автомобилю в отдельности для перевозки всего груза?

2. Решите уравнение

$$\sin 3x-\sin 7x=\sqrt{3}\cos 5x.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{1+\log_2(6x+5)}{2+\log_2(x+1)}=2.$$

4. Решите неравенство

$$5\cdot 2^{2x+1}-21\cdot 10^x>2\cdot 5^{2x+1}.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=a, \\ 2+\log_2 y=\log_2\left(1+\frac{2}{x}\right) \end{cases}$$

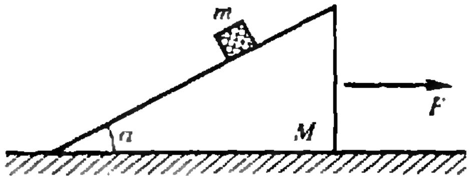
имеет решение.

6. Правильная треугольная пирамида, вписанная в сферу радиуса R, пересекается плоскостью, проходящей через медианы боковой грани и основания, выходящие из одной вершины. При какой высоте пирамиды площадь сечения пирамиды этой плоскостью будет наибольшей?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Гимнаст висит на канате, перекинутом через блок. К другому концу каната привязан противовес массой m. В начальный момент система покоилась. Затем гимнаст стал скользить по канату вниз. В момент времени t скорость противовеса была больше скорости человека относительно земли на величину v. Пренебрегая массой каната и блока, найдите силу трения, возникающую при спуске гимнаста. Масса гимнаста M.



2. На гладкой горизонтальной поверхности находится призма массой M с углом α, а на ней — брусок массой m (см. рисунок). Коэффициент трения между призмой и бруском μ ($\mu>\operatorname{tg}\alpha$). В момент $t=0$ на призму начала действовать горизонтальная сила, зависящая от времени по закону $F=bt$, где b — постоянная. Найдите путь, пройденный призмой до момента начала скольжения бруска по призме.

3. Один конец каната удерживают на некоторой высоте, а второй его конец касается земли. В момент времени $t=0$ канат отпускают, и он начинает свободно падать. Определите силу давления каната на землю как функцию времени. Масса единицы длины каната Δm.

4. В закрытом сосуде находится идеальный газ. Как изменится его давление, если средняя скорость его молекул увеличится на 20 %?

5. В сосуде находится озон при температуре $t_1=527$ °C. Через некоторое время он полностью превращается в кислород, а температура в сосуде падает до $t_2=127$ °C. На сколько процентов изменилось при этом давление газа?

6. Небольшой шарик массой $m=21$ г, подвешенный на нерастяжимой изолирующей нити на высоте $h=12$ см от большой горизонтальной проводящей плоскости, совершает малые колебания. После того как ему сообщили некоторый заряд q, период колебаний изменился в $n=2$ раза. Найдите q.

7. Тонкое проволочное кольцо радиусом R имеет электрический заряд $+Q$. Как будет двигаться точечное тело массой m, имеющее заряд $-q$, если в начальный момент оно покоилось в некоторой точке на оси кольца на расстоянии $x\ll R$ от его центра? Кольцо неподвижно.

8. Между предметом и экраном, положения которых неизменны, помещают тонкую собирающую линзу. Перемещая линзу, находят два положения, при которых линза дает на экране четкое

изображение предмета. Найдите поперечный размер предмета, если при одном положении линзы размер изображения h_1, а при другом h_2.

9. Каким импульсом обладает электрон, движущийся со скоростью $v=0,8\ c$?

10. Определите период полураспада радона, если за $t=1$ сутки из $N_0=10^6$ атомов распадается $\Delta N=175\,000$ атомов.

Публикацию подготовили
Л. Паршев, Ю. Струков

Московский институт электронной техники

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Вычислите

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 100^\circ}+\frac{1}{\cos 260^\circ}.$$

2. Решите уравнение

$$\mathrm{tg}\, x\ \mathrm{tg}\, 2x=1.$$

3. Решите уравнение

$$\log_2(x-4)-\log_4 x=0,5.$$

4. Решите неравенство

$$2^{x+1}-4^x<1.$$

5. Двое рабочих вместе выполняют некоторую работу за 20 дней. За сколько дней выполнит ту же работу первый рабочий, работая один, если производительность труда второго рабочего на 5 % выше, чем первого?

6. Дан правильный 30-угольник $A_1A_2\ldots$ $\ldots A_{30}$ с центром O. Найдите угол между прямыми OA_3 и A_1A_4.

7. В геометрической прогрессии b_1, b_2, ..., b_{10} $b_1b_2=2^{2/9}-1$, $b_9b_{10}=4-2^{16/9}$. Найдите сумму $b_1b_2+b_2b_3+\ldots+b_9b_{10}$.

8. Решите неравенство

$$\frac{3}{|x|}\leqslant\frac{x}{3}+2.$$

9. Три хорды шара, исходящие из одной точки на его поверхности, равны a, углы между хордами равны 60°. Найдите радиус шара.

10. При каких a уравнение $2^x+2^{3-2x}=a$ имеет хотя бы одно решение?

11. Докажите признак перпендикулярности двух плоскостей.

12. Докажите, что произведение четного числа нечетных функций является четной функцией.

Вариант 2

1. Вычислите

$$\cos^2 4^\circ+\mathrm{con}^2\, 26^\circ-\sqrt{3}\cos 4^\circ \sin 64^\circ.$$

2. Решите уравнение

$$\mathrm{tg}\, x=\mathrm{ctg}\, 4x.$$

3. Решите уравнение

$$18^x=2\cdot 6^x+3\cdot 2^x.$$

4. Решите неравенство

$$\log\ 2+\log_2 x\leqslant 2,5.$$

5. Сумма двух чисел больше их разности на 50 %. На сколько процентов сумма квадратов этих чисел больше их произведения?

6. Площадь круга, вписанного в ромб, равна половине площади ромба. Найдите синус угла при вершине ромба.

7. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна S_1, сумма следующих трех членов равна S_2. Найдите сумму 10-го, 11-го и 12-го членов прогрессии.

8. Решите неравенство

$$|x^2+4x|\geqslant 1-2x.$$

9. Тело состоит из двух конусов, имеющих общее основание и расположенных по разные стороны от плоскости основания. Найдите объем шара, вписанного в тело, если радиусы оснований конусов равны 1, а высоты 1 и 2.

10. При каких a уравнение

$$x^3+\frac{48}{x}=a$$

имеет хотя бы одно решение?

11. Выведите формулу корней квадратного уравнения.

12. Докажите, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон и удвоенным произведением оснований.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Через какое время скорость тела, которому сообщили направленную вверх по наклонной плоскости скорость, равную v, снова будет равна v? Коэффициент трения μ, наклонная плоскость образует с горизонтом угол α ($\mathrm{tg}\,\alpha>\mu$), ускорение свободного падения g. В течение всего времени движения тело находится на наклонной плоскости.

движения тело находится на наклонной плоскости.

2. Бутылка, наполненная газом, плотно закрыта легкой пробкой с площадью сечения $S=2{,}5$ см^2. До какой температуры надо нагреть газ, чтобы пробка вылетела из бутылки, если сила трения, удерживающая пробку, $F=12{,}5$ Н? Начальное давление газа в бутылке и наружное давление одинаковы и равны $p_0=100$ кПа, а начальная температура $t_0=3$ °С.

3. Проводящий шар радиусом $R=1$ м равномерно заряжен по поверхности зарядом $Q=1$ нКл. Каково минимальное расстояние между точками A и B такими, что $\varphi_A-\varphi_B=-1$ В? Какая из точек находится ближе к центру шара? Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\times10^{-12}$ Кл^2/(Н · м^2).

4. Квант с длиной волны λ вырывает с поверхности металла фотоэлектрон, который описывает в однородном магнитном поле с индукцией B окружность радиусом R. Найдите работу выхода электрона из металла. Масса электрона m, элементарный заряд e, постоянная Планка h, скорость света в вакууме c.

5. На дне сосуда, заполненного водой, лежит плоское зеркало (рис. 1). Человек, наклонившись над сосудом, видит изображение A' своего глаза A в зеркале на расстоянии $d=25$ см. Расстояние от глаза до поверхности воды $h=5$ см. Показатель преломления воды $n=4/3$. Определите глубину жидкости в сосуде.

6. Космический корабль, находящийся на околосолнечной орбите, раскрывает солнечный парус площадью 100 км^2. Найдите максимальную силу давления солнечного излучения на идеально отражающий парус, считая для простоты солнечное излучение монохроматическим. Интенсивность солнечного излучения вблизи паруса $I=1{,}4$ кВт/м^2. Скорость света в вакууме $c=3\cdot10^8$ м/с. Энергия E фотона связана с его импульсом p соотношением $E=pc$.

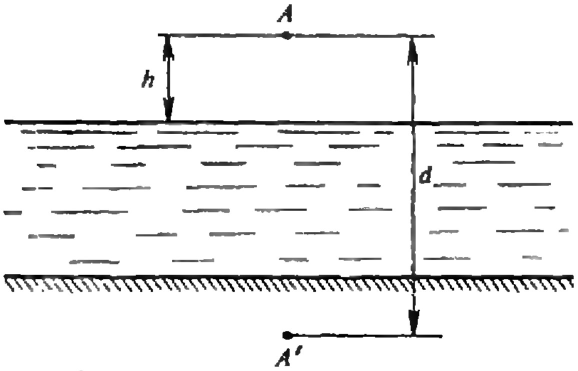


Рис. 1.

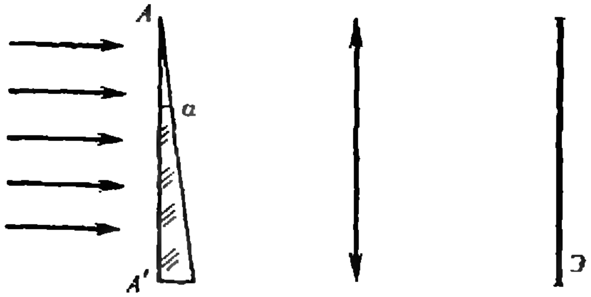


Рис. 2.

Вариант 2

1. Тело брошено со скоростью $v=150$ м/с под углом $\alpha=\operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$ к горизонту. За полетом тела наблюдают в оптическую трубу, установленную в точке бросания, при этом ось трубы в любой момент времени направлена на движущееся тело. Через какое время скорость тела будет перпендикулярна оси трубы? Считайте $g=10$ м/с^2.

2. Лазер излучает световые импульсы с энергией $W=0{,}1$ Дж. Частота повторения импульсов $\nu=10$ Гц. КПД лазера, определяемый отношением излучаемой энергии к потребляемой, составляет $\eta=0{,}01$. Какой объем воды нужно прокачать за $\tau=1$ ч через охлаждающую систему лазера, чтобы вода нагрелась не более чем на $\Delta t=10$ °С? Удельная теплоемкость воды $c=4190$ Дж/(кг · К).

3. Заряд равномерно распределен по поверхности проводящего шара с поверхностной плотностью σ. Найдите напряженность поля в точке, находящейся от поверхности шара на расстоянии, равном его диаметру. Электрическая постоянная равна ε_0.

4. От генератора с ЭДС $\mathcal{E}=250$ В и внутренним сопротивлением $r=0{,}1$ Ом необходимо протянуть к потребителю двухпроводную линию длиной $L=100$ м. Какая масса алюминия пойдет на изготовление линии, если максимальная мощность потребителя $P=22$ кВт, и он рассчитан на напряжение $U=220$ В? Удельное сопротивление алюминия $\rho=2{,}8\cdot10^{-8}$ Ом · м, плотность алюминия $\delta=2{,}7$ г/см^3.

5. На клин с малым углом $\alpha=1°$ и показателем преломления $n=1{,}5$ нормально к его поверхности AA' падает параллельный пучок света (рис. 2). За клином расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F=180$ см. Грань AA' перпендикулярна главной оптической оси линзы. В фокальной плоскости линзы находится экран $Э$. На сколько сместится светлая точка на экране, если клин убрать?

6. При единичном акте деления ядра урана выделяется энергия $W=200$ МэВ. За какой промежуток времени первоначальная загрузка урана $^{235}_{92}U$ в реакторе $m=10$ кг уменьшится на $\alpha=2\,\%$? Мощность реактора постоянна и равна $P=1$ МВт, 1 МэВ$=1{,}6\cdot10^{-13}$ Дж, постоянная Авогадро $N_A=6\cdot10^{23}$ 1/моль.

Публикацию подготовили
А. Берестов, И. Кожухов, В. Плис, А. Поспелов

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^{-1}-(x+1)^{-1}}-4^{-\log_2 8}\cdot x^4.$$

2. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\log_{\sqrt{7}}(x^2+3x+3)-2\log_{x^2+3x+3}7}.$$

3. Два велосипедиста выезжают одновременно из пункта A с различными постоянными скоростями и едут в пункт B. Достигнув его, они немедленно едут обратно. Первый велосипедист, ехавший быстрее второго, на обратном пути встретил второго на расстоянии 5 км от B. Достигнув A, первый велосипедист едет снова по направлению к B и, пройдя 40 % пути AB, встречает второго велосипедиста, возвращающегося из B. Найдите расстояние от A до B.

4. Найдите все корни уравнения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)-\operatorname{tg}x-2\operatorname{tg}2x+4\operatorname{tg}4x=$$
$$=8\cos^2 32x,$$

принадлежащие области определения функции

$$y=\log_{\pi x-2x^2}\operatorname{tg}4x.$$

5. Около правильной треугольной пирамиды с боковым ребром a описан шар. Найдите площадь поверхности шара и объем пирамиды, если боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания пирамиды угол α.

Вариант 2

1. Упростите выражения для $f(x)$ и найдите $f'(1)$, $f'(12)$, если

$$f(x)=$$
$$=\left(\frac{2x+\sqrt{3}}{2x\sqrt{3}-3}-\frac{x\sqrt{3}+4(1\ (x\sqrt{3})^{-1})}{2x^2\sqrt{3}+x-2\sqrt{3}}\right)\times$$
$$\times\left(x^2\sqrt{3}-(\sqrt{3})^{2-\log_3 4+4\log_9 x}\right).$$

2. Решите уравнение

$$x\cdot(2^x-1)=2^{x+1}-x\cdot(x-1)^2.$$

3. Числитель и знаменатель дроби — положительные целые числа, причем разность между знаменателем и кубом числителя равна 1. Если к числителю исходной дроби прибавить 1, а знаменатель оставить неизменным, то полученная дробь будет больше 1/8; если же к числителю исходной дроби прибавить число 3, а к знаменателю прибавить число 2, то полученная дробь будет меньше 1/4. Найдите исходную дробь.

4. Найдите все корни уравнения

$$2\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-x\right)+23\sin\left(\frac{25\pi}{6}+x\right)=12,$$

принадлежащие области определения функции

$$y=\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}-x\right).$$

5. Сумма объемов четырех одинаковых шаров равна половине объема пятого шара, а сумма площадей поверхностей первых четырех шаров на 10 м^2 больше половины площади поверхности пятого шара. Найдите радиус пятого шара.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Гармонические колебания. Амплитуда, период и частота колебаний. Колебания груза на пружине.

2. Можно ли в каком-либо процессе все подведенное к газу количество теплоты превратить в работу?

3. На какой глубине увидит изображение чернильного пятна, находящегося на стеклянной пластине толщиной d, человек, смотрящий на него прямо с противоположной стороны пластины (рис. 1)? Показатель преломления стекла n.

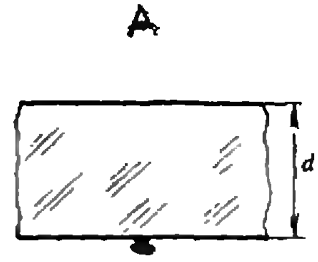


Рис. 1.

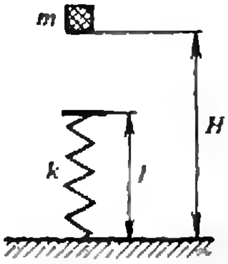


Рис. 2.

4. Цепь состоит из аккумулятора с внутренним сопротивлением $r=5$ Ом и нагрузки, сопротивление которой $R=15$ Ом. При подключении к нагрузке некоторого резистора сначала параллельно, а затем последовательно ток через этот резистор не меняется. Чему равно его сопротивление?

5. В вагоне поезда, идущего равномерно со скоростью $v=20$ м/с по горизонтальному закруглению радиусом $R=200$ м, производится взвешивание груза с помощью динамометра, подвешенного к потолку вагона. Масса груза $m=5$ кг. Определите результат взвешивания.

Вариант 2

1. Импульс тела. Закон сохранения импульса. Реактивное движение.

2. Как надо соединить спирали двух нагревателей, опущенных в стакан с водой, чтобы вода быстрее закипела?

3. В U-образной трубке постоянного сечения находится ртуть. На сколько повысится уровень в правой части трубки, если в левую налить воды столько, чтобы она образовала столб высотой $H=13{,}6$ см? Плотность ртути $\rho=13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3.

4. Невесомая пружина жесткостью k и длиной l стоит вертикально на столе (рис. 2). С высоты H над столом на нее падает небольшой груз массой m. Какова максимальная скорость груза при его движении вниз? Трением можно пренебречь.

5. Конденсатор емкостью $C_1=3$ мкФ, заряженный до разности потенциалов $U_1=100$ В, и конденсатор емкостью $C_2=4$ мкФ, заряженный до разности потенциалов $U_2=50$ В, соединили параллельно разноименно заряженными обкладками. Определите заряды на каждом конденсаторе после соединения.

Публикацию подготовили
А. Касаткин, В. Прохоренко, М. Тимошин

Ответы, указания, решения

[illegible]анные школьные задачи по физике

1. Эта задача иллюстрирует удобство применения понятия центра масс. Напомним, что ускорение центра масс любого тела массой m под действием внешних сил равно ускорению, которое под действием таких же сил приобрела бы материальная точка массой m. Применим это правило к внешнему отрезку веревки длиной x. В горизонтальной плоскости на него действует только одна сила — искомая сила натяжения T. Центр масс этого отрезка находится в его середине и движется по окружности радиусом $l-x/2$. Масса отрезка равна mx/l. Непосредственно из второго закона Ньютона получаем

$$T=(mx/l)\omega^2(l-x/2).$$

2. Второй брусок сдвинется в тот момент, когда сила упругости пружины станет равной силе трения:

$$kx=\mu mg,$$

где x — деформация пружины. Пусть в этот момент первый брусок останавливается (это соответствует минимальной начальной скорости). Тогда из закона сохранения энергии получаем

$$\frac{kx^2}{2}-\frac{mv^2}{2}=-\mu mgx,$$

откуда

$$v=\mu g\sqrt{3m/k}.$$

3. Предполагая, что вся выделившаяся при разрыве снаряда энергия E пошла на увеличение механической энергии системы, запишем

$$E=m_1v_1^2/2+m_2v_2^2/2-(m_1+m_2)v^2/2.$$

Чтобы определить начальную скорость v снаряда, запишем закон сохранения импульса в векторном виде:

$$(m_1+m_2)\vec{v}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$$

и воспользуемся теоремой косинусов (рис. 1):

$$(m_1+m_2)^2v^2=m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2+2m_1m_2v_1v_2\cos\alpha.$$

Учитывая, что $\alpha=60^\circ$, получаем

$$E=m_1m_2(v_1^2+v_2^2-v_1v_2)/(2(m_1+m_2))\approx65\ \text{кДж}.$$

4. Если за начало отсчета времени принять тот момент, когда начинает двигаться второй шарик, то уравнения движения шариков до удара имеют вид

$$x_1=x_m\sin\omega t,\qquad x_2=x_m\cos\omega t,$$

где x_1 и x_2 — координаты шариков в произвольный момент времени t, x_m — амплитуда колебаний, ω — частота колебаний. В момент встречи $x_1=x_2$, откуда для первой встречи получаем $\omega t_1=\pi/4$, или $t_1=\pi/(4\omega)$. При упругом ударе одинаковых шариков они просто обмениваются скоростями, т. е. первый шарик будет далее двигаться по закону $x_1=x_m\cos\omega t$, а второй — по закону $x_2=x_m\sin\omega t$. Моменту второй встречи соответствует следующее по порядку решение уравнения $x_1=x_2$, т. е. $\omega t_2=\pi/4+\pi$, или $t_2=t_1+\pi/\omega$. Значит, интервал между первыми двумя, а также и всеми следующими последовательными соударениями равен

$$\tau=t_2-t_1=\pi/\omega=\pi\sqrt{l/g}\approx 1\text{ с}.$$

5. Если брусок не проскальзывает, то он вместе с доской совершает гармонические колебания. При этом его смещение и ускорение изменяются по законам

$$x=A\cos\omega t,\qquad a=-\omega^2A\cos\omega t,$$

где ω — частота колебаний. Ускорение бруска создается силой трения покоя, поэтому

$$F_{\text{тр п}}=ma=-m\omega^2A\cos\omega t,$$

где m — масса бруска. Но

$$F_{\text{тр п}}<\mu mg,$$

что приводит к условию

$$\omega^2<\mu g/A.$$

6. При включении тока на стержень будет действовать горизонтально направленная сила Ампера, равная

$$F_{\text{А}}=IBl.$$

В результате провода отклонятся от вертикали, и после того, как установится равновесие, натяжение каждого провода будет равно (см. рис. 2)

$$T=1/2\sqrt{(mg)^2+(IBl)^2}.$$

7. Из равновесия участка витка длиной $l=R\alpha$ (соответствующего малому центральному углу α) под действием сил натяжения T и силы Ампера $F_{\text{А}}$ получим (см. рис. 3)

$$2T\alpha/2=F_{\text{А}}=IBR\alpha,\text{ и }T=IBR.$$

8. Движение электрона можно представить в виде суммы двух движений: равномерного движения по окружности в плоскости XY, перпендикулярной направлениям полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$, и равноускоренного движения в направлении оси Z под действием электрического поля. В проекциях на плоскость XY второй закон Ньютона имеет вид

$$ev_0B=mv_0^2/R,$$

откуда для периода обращения T получим

$$T=2\pi R/v_0=2\pi m/(eB).$$

Электрон вылетит из магнитного поля через время $t=T/2$. В этот момент проекция его скорости на ось Z будет равна

$$v_z=a_zt=eEt/m=\pi E/B,$$

а полная скорость —

$$v=\sqrt{v_0^2+v_z^2}=\sqrt{v_0^2+(\pi E/B)^2}.$$

Разумеется, написанные формулы верны лишь в том случае, если скорость электрона мала по сравнению со скоростью света.

9. После поворота виток придет в положение неустойчивого равновесия — при небольшом отклонении плоскости витка возникает момент сил, возвращающий его в положение устойчивого равновесия.

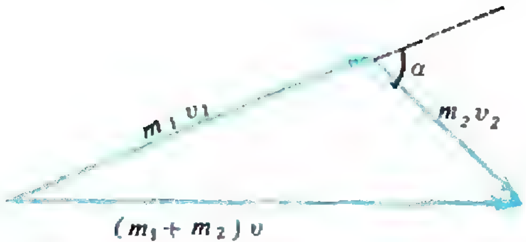


Рис. 1.

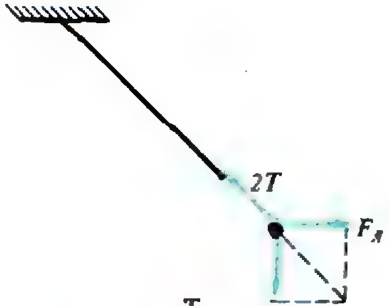


Рис. 2.

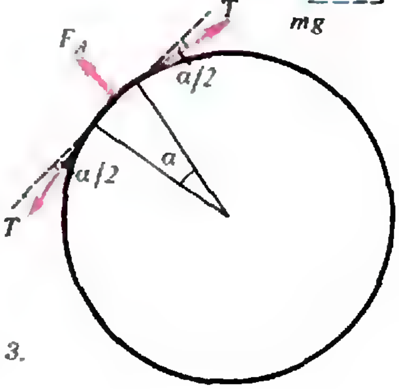


Рис. 3.

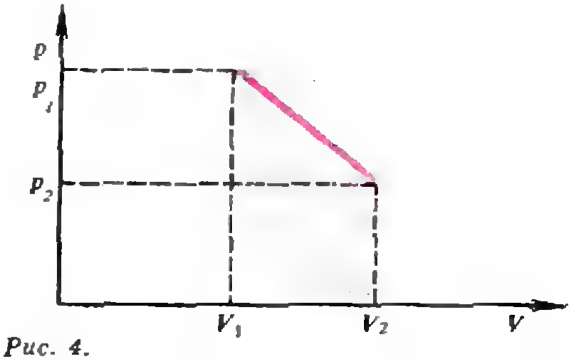


Рис. 4.

10. Однородное электрическое поле внутри проводника создается зарядами, которые появились на поверхности проводника под действием силы Лоренца в начале движения. Так как любой свободный заряд внутри проводника находится в равновесии, сила, действующая на заряд со стороны электрического поля, равна по модулю силе Лоренца:

$$qE=qvB,\text{ и }E=vB.$$

При этом напряженность поля $\vec{E}$ направлена в сторону отрицательных значений оси Y.

11. На брусок со стороны воды действует сила Архимеда, равная

$$F_A=\rho_в gV=\rho_в gm/\rho_м$$

и направленная вертикально вверх. По третьему закону Ньютона на воду со стороны бруска действует такая же сила, но направленная вниз. Значит, на другую чашку весов надо положить груз массой

$$m_г=F_A/g=m\rho_в/\rho_м.$$

12. Скорость бруска с пулей сразу после неупругого соударения найдем из закона сохранения импульса

$$mv=(M+m)u,$$

а максимальную деформацию пружины из закона сохранения энергии

$$(M+m)u^2/2=kx_m^2/2$$

Отсюда находим искомую величину:

$$x_m=\frac{mv}{M+m}\sqrt{\frac{M+m}{k}}.$$

13. Как видно из условия, конечная температура газа равна начальной, т. е. внутренняя энергия газа не изменилась. Значит, подведенное к газу количество теплоты равно работе газа в этом процессе (см. рис. 4):

$$Q=A=(p_1+p_2)(V_2-V_1)/2=150 \text{ Дж}.$$

14. Из закона сохранения электрического заряда

$$2CU_0=\varepsilon CU+CU,$$

где C — первоначальная емкость каждого конденсатора, получаем, что напряжение станет равным

$$U=2U_0/(\varepsilon+1).$$

15. В соответствии с законом электромагнитной индукции, в кольце возникнет ЭДС индукции

$$\mathcal{E}=|\Delta\Phi/\Delta t|=B\pi R^2/\Delta t$$

(Δt — время выключения поля), и по кольцу потечет ток

$$I=\mathcal{E}/r=B\pi R^2/(r\Delta t).$$

Поскольку заряд связан с током соотношением $I=q/\Delta t$, получаем

$$q=I\Delta t=B\pi R^2/r.$$

[illegible]дарственная академия нефти и газа [illegible] И. М. Губкина

Математика

Вариант 1

1. 1,5. 2. 11. 3. 121. 4. 4. 5. 3. 6. 0,5. 7. 1. 8. — 10. 9. — 2. 10. 37. 11. 1,5. 12. 2,25.

Вариант 2

1. 1. 2. —9. 3. 8. 4. —0,3. 5. —8. 6. 0,01. 7. —0,25. 8. 12. 9. 2310,4. 10. 16. 11. 195. 12. 300.

Физика

Вариант 1

1. $v_{отн}=v(1-t_1/t_2)=15$ км/ч.
2. $a=g(\alpha-1)/(\alpha+1)=5$ м/с^2.
3. $v_1/v_2=m_2(v/(F\tau)-1/m_1)=3$.
4. $A_2/A_1=3$.
5. $x=l\sqrt{3}/10=17$ см.
6. $p=(1-\alpha)(p_0+\rho gh)=11$ кПа.
7. $T_н=T_х\cdot 100\%/\eta=750$ К.
8. $k_{пр}=kq^2/(2l^3)=90$ Н/м.
9. $n=\sqrt{R/r}=6$.
10. $v=(e/m)B(d^2+l^2)/(2d)=2250$ км/с.
11. $\nu=\Delta\nu/(1-1/\sqrt{1+\alpha})=600$ Гц.
12. $\lambda_{кр}=c(n-1)/(\nu(n-m))=800$ нм.

Вариант 2

1. $v_{ср}=v_0+gt/2=25$ м/с.
2. $T=mg\sqrt{3}=30$ Н.
3. $v_1/v_2=1+M/m=17$.
4. $v_2=v_1/\sqrt{1-v_1T/N}=18$ км/ч.
5. $\rho=0,75\rho_в=750$ кг/м^3.
6. $M=(\alpha-1)(m+p_0S/g)=15$ кг.
7. $\Delta U=2A=2000$ Дж.
8. $F_2/F_1=3$.
9. $\Delta\tau=\tau(P_1+P_2)^2(1/P_1^2-1/P_2^2)=135$ мин.
10. $\mathcal{E}=\Phi_1(1-I_2/I_1)\nu=25$ мВ.
11. $n_1/n_2=\sqrt{U_2/U_1}=2$.
12. $F=l(l/a-1)=60$ см.

[illegible]овский авиационный технологический [illegible]итут им. К. Э. Циолковского

Математика

Вариант 1

1. 1. 2. (3, 9); (9, 3). 3. $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.
4. $-6<m<2$. 5. 19. 6. 2.

Вариант

1. 1. 2. (1, 1). 3. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(1\pm\sqrt{2})+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.
4. $a<-4$. 5. $v>60$ км/ч. 6. $AB=6\sqrt{2}$, $AC=8$, $BC=2\sqrt{2}$.

Физика

Вариант 1

1. $p_2=p_1(T_1+\Delta t)/(2T_1)=1,17$ МПа.
2. $I_{кз}=\mathcal{E}U/(R(\mathcal{E}-U))=0,3$ А.
3. $A=mgR/2=1,6\cdot 10^{14}$ Дж.
4. $\omega=I_0/q_m=10$[illegible] $с^{-1}$.
5. $h_{max}=h=20$ м, $x=2l-3v\sqrt{2h/g}=10$ м (от места бросания).
6. $d<F(F-l)/(2F-l)=10$ см (от первой линзы).

Вариант 2

1. Заряд $q=4$ нКл надо поместить на расстоянии $l=1$ м от заряда q_2 и на расстоянии $2l=2$ м от заряда q_1.
2. Вертикально вверх со скоростью $v=2$ м/с.
3. $\mu=v/(gt)=0,4$; $l_{min}=vt/2=50$ м.
4. Испарилась вся вода.
5. $F=6mv^2/l=150$ Н.
6. $x(t)=\frac{mg}{k}\left(1-\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)=0,1(1-\cos 10t)$; $v_m=g\sqrt{\frac{m}{k}}=1$ м/с.

[illegible]овский государственный технический [illegible]ерситет им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. 28 дней, 21 день. 2. $5\pi/8$; $7\pi/8$; $3\pi/4$. 3. 3/2. 4. $(\log_5 2;\ 1)$. **Указание.** Выполните замену $y=5^x$ и примените метод интервалов.

5. $a\in(-1;\ 5]\cup\{-5/4\}$. **Указание.** Пусть $t=\sqrt{y}$. Выразим x через t из первого уравнения системы. После подстановки во второе уравнение системы приходим к уравнению относительно t:

$$t^2+2at+(a-5)(a+1)=0. \qquad (*)$$

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда только один корень уравнения (*) неотрицателен, т. е. при $(a-5)(a+1)<0$ один корень (*) положителен, другой — отрицателен, при $a=-1$ один из корней равен 0, другой положителен, при $a=5$ — один равен нулю, другой — отрицателен. При $D/4=0$, т. е. при $a=-5/4$ уравнение (*) также имеет один положительный корень.

6. $S_{\min}=42/\sqrt{13}$, $BN=102/13$, $NC=54/13$. **Указание.** Из условия следует, что углы SAO и SAB (см. рис. 5) — прямые, так что ребро SA перпендикулярно плоскости основания. При этом грань SAB является ортогональной проекцией сечения SMN. Следовательно, площадь сечения будет наименьшей, когда будет наименьшим угол α между плоскостями SMN и SAB. Пусть секущая плоскость пересекает плоскость ASB по прямой LT. Проведем $OE\perp AB$ и $EQ\perp LT$, тогда $\angle OQE=\alpha$. Мы должны найти положение точки N, при котором угол α будет наименьшим. Легко видеть, что это будет тогда, когда точка Q совпадает с S. (В самом деле, если $Q\neq S$, то $EQ<ES$ и $\angle OSE=\alpha_1>\alpha$.) Итак, секущая плоскость пересекает плоскость ASB по прямой, перпендикулярной SE.

Поскольку $SE=\sqrt{13}$, $\cos\alpha=\sqrt{13}/7$, искомая площадь равна $42/\sqrt{13}$. Для нахождения отрезка $AM=CN$ определите длину отрезка AK, а затем воспользуйтесь подобием треугольников MKA и NKB.

Вариант 2

1. 30 ч, 60 ч.
2. $\pi(2n+1)/10$; $\pi((-1)^{n+1}+3n)/6$, $n\in Z$.
3. $-0{,}5$. 4. $(-\infty;\ -1)$.
5. $a\in(-\infty;\ -4)\cup[9/4;\ +\infty)$.
6. $(\sqrt{33}-3)R/2$. **Указание.** Пусть AD — медиана основания, AE — медиана боковой грани ASC (см. рис. 6), H — высота пирамиды. Тогда $AO^2=H(2R-H)$ (почему?). Если $EF\perp AD$, то $OF=FD$, так как $OE=DE$. Последовательно выражая через R и H отрезки OD, EK и FK, находим, что $EF=\frac{1}{4}\sqrt{H(H+6R)}$,

и, наконец,

$$S_{AED}=\frac{3}{16}\sqrt{-H^4-4H^3R+12H^2R^2}.$$

Исследуя на максимум подкоренное выражение (при $0<H<2R$), получаем ответ.

Физика

1. $F_{\text{тр}}=\frac{Mm}{M-m}\,\frac{v}{t}$.
2. $l=\frac{(M+m)^2g^3}{6b^2}\left(\frac{\mu\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\right)^3$.
3. $F=3\Delta mg^2t^2/2$.
4. $\Delta p/p=0{,}44=44\,\%$.
5. $\frac{p_1-p_2}{p_1}=1-\frac{T_2}{T_1}\,\frac{M_1}{M_2}=0{,}25=25\,\%$, т. е. давление уменьшилось на 25 % (здесь $M_1=48$ г/моль — молярная масса озона, $M_2=32$ г/моль — молярная масса кислорода).
6. $q=4h\sqrt{(n^2-1)\pi\varepsilon_0 mg}=2\cdot10^{-6}$ Кл $=2$ мкКл (здесь $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная).
7. Тело будет совершать гармонические колебания с периодом $T=4\pi\sqrt{\pi\varepsilon_0 mR^3/(Qq)}$, где ε_0 — электрическая постоянная.
8. $h=\sqrt{h_1h_2}$.

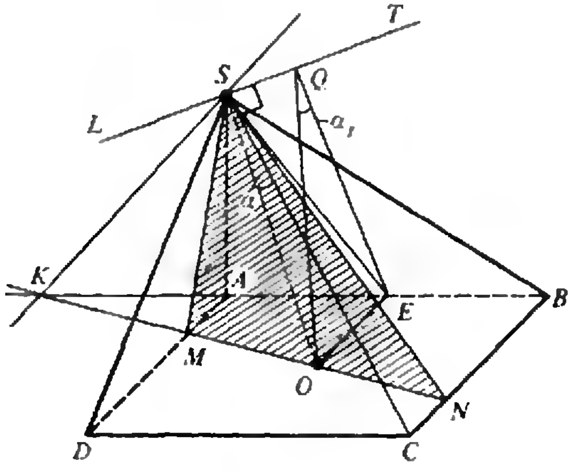


Рис. 5.

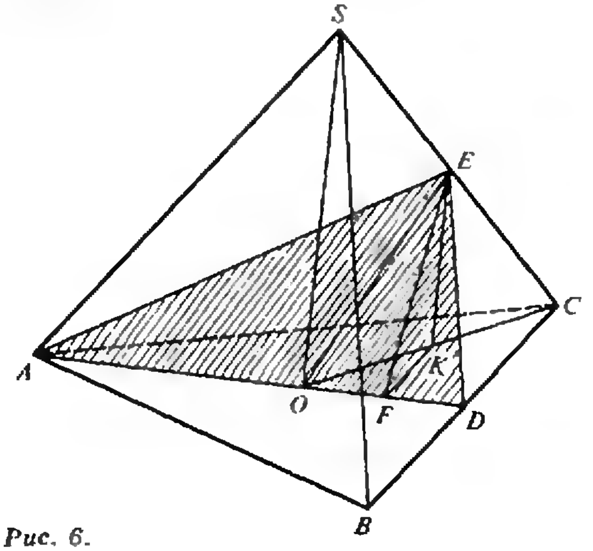


Рис. 6.

9. $p=\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{4}{3}m_0c=$
$=3{,}64\cdot10^{-22}$ кг · м/с (здесь $m_0=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг — масса покоя электрона, $c=3\cdot10^8$ м/с).

10. $T=\frac{0{,}693\ t\lg e}{\lg(N_0/(N_0-\Delta N))}\approx3{,}3\cdot10^5$ с.

Московский институт электронной техники

Математика

Вариант 1

1. -4. 2. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$. 3. 8. 4. $x\neq0$.
5. 41. 6. 84°. 7. 3. 8. $x=-3$, $x\geqslant3\sqrt{2}-3$.
9. $a\sqrt{6}/4$. 10. $a\geqslant3\sqrt[3]{2}$. Указание. Выполните замену $t=2^x$, а затем исследуйте функцию $y=t+\frac{8}{t^2}$ при $t>0$.

Вариант 2

1. 0,25. 2. $\pm\frac{\pi}{10}+\pi n,\ \pm\frac{3\pi}{10}+\pi n,\ n\in Z$.
3. 1. 4. $0<x<1$, $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant4$. 5. 420 %. 6. $2/\pi$.
7. S_2^3/S_1^2. 8. $x\leqslant-3-\sqrt{10}$, $x=-1$, $x\geqslant-3+\sqrt{10}$.
9. $\sqrt{5}-\sqrt{2}$. 10. $a\geqslant32$, $a\leqslant-32$. Указание. Найдите область значений функции $f(x)=x^3+\frac{48}{x}$.

Физика

Вариант 1

1. $t=\frac{2v\sin\alpha}{g(\sin^2\alpha-\mu^2\cos^2\alpha)}$.
2. $T=T_0(1+F/(p_0S))=405$ К, $t=132$ °C.
3. $d_A-d_B=12{,}5$ см.
4. $A=\frac{hc}{\lambda}-\frac{(eBR)^2}{2m}$.
5. $H=n(d/2-h)=10$ см.
6. $F=2IS/c\approx930$ Н.

Вариант 2

1. $t=3v\sin\alpha/(2g)\approx21$ с.
2. $V=(1-\eta)W\varkappa\tau/(\eta c\rho\Delta t)\approx8{,}5\cdot10^{-3}$ м^3.
3. $E=\sigma/(9\varepsilon_0)$.
4. $m=\frac{4\rho\delta L^2}{(\mathscr{E}-U)U/P-r}\approx15{,}1$ кг.
5. $d=F(n-1)\alpha\approx1{,}5$ см.
6. $t=(\alpha/100\,\%)mWN_A/(PM\approx190$ суток (здесь $M=235$ г/моль — молярная масса урана).

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. $-1/2$, $x\neq\pm1$. 2. $(-\infty;\ -4]\cup(-2;\ -1)\cup[1;\ +\infty)$.
3. 25 км. 4. $\pi/16$; $5\pi/16$.
5. $S=\pi a^2/\sin^2\alpha$; $V=(\sqrt{3}\ a^3\sin\alpha\cos^2\alpha)/4$.

Вариант 2

1. $f'(1)=2$; $f'(12)=24$.
2. 2. 3. 3/28. 4. $2\pi/3+2\pi k$, $k\in Z$.
5. $\sqrt{5/\pi}$ м.

Физика

Вариант 1

2. Можно, в изотермическом процессе.
3. $h=d/n$.
4. $R_1=R^2/r=45$ Ом.
5. $T=m\sqrt{g^2+(v^2/R)^2}\approx51$ Н.

Вариант 2

2. Параллельно.
3. $x=H\rho_0/(2\rho)=0{,}5$ см (здесь $\rho_0=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).
4. $v_{max}=\sqrt{2g(H-l)+mg^2/k}$.
5. $q_1'=\frac{C_1(C_1U_1-C_2U_2)}{C_1+C_2}=\frac{3}{7}\cdot10^{-4}$ Кл,

$q_2'=\frac{C_2(C_1U_1-C_2U_2)}{C_1+C_2}=\frac{4}{7}\cdot10^{-4}$ Кл.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

1. Обозначим через M количество мальчиков в классе, а через $Д$ — количество девочек. Так как каждая девочка пожала руку восьми мальчикам, то число рукопожатий девочек и мальчиков равно $8Д$, но это число равно также $6M$, т. к. каждый мальчик пожал руку шести девочкам; следовательно, $8Д=6M$. Чтобы получить количество рукопожатий между мальчиками, нужно число $8M$ разделить пополам, поскольку в каждом таком рукопожатии участвуют два мальчика, т. е. это число равно $4M$. Аналогично получаем, что число рукопожатий между девочками равно $6Д:2=3Д$. Из условия задачи следует, что $8Д+5=4M+3Д$. Присоединив к этому уравнению еще и уравнение $8Д=6M$ и решив полученную систему, найдем. $Д=15$, $M=20$.

2. $П=1$ (иначе $П\times7$ больше девяти), $Ж$ не меньше семи, но не может равняться ни семи, ни восьми. Значит, $Ж=9$ и $ПЧЕЛКА=999999:7=$ $=142857$.

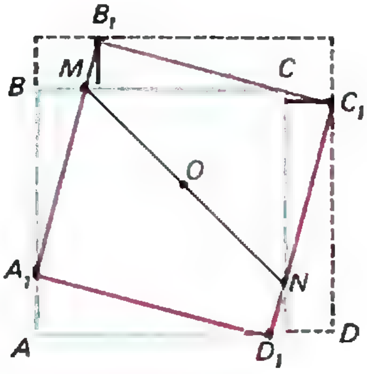


Рис. 7.

3. Указанным свойством обладают, в частности, все числа, записываемые одними девятками. Действительно, $99...9^2 = 99...9800...01$.

4. На лестничную площадку выходят квартиры с номерами 9, 10, 11, 12. Были заказаны цифры 0, 1, 1, 1, 1, 2 и 6. Цифру 6 прикрепили в перевернутом виде на дверь квартиры № 9. Заплачено было $1+1+1+1+2+6=12$ рублей.

5. Нетрудно заметить, что пунктирный прямоугольник, описанный около красного квадрата, сам является квадратом (рис. 7). Поэтому высоты подобных прямоугольных треугольников MB_1C и CC_1N, опущенные на их гипотенузы, равны. Но тогда и сами эти треугольники равны, а значит, равны и их катеты: $MB_1=CC_1$, $B_1C=C_1N$. Но тогда $ND_1=MB_1$ и $MA_1=NC_1$, откуда следует, что отрезок MN проходит через центр красного квадрата.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 4)

Вопросы и задачи

1. На 15′.

2. $\varphi=45°$.

3. Если наблюдатель находится на одном из географических полюсов Земли или светило находится в одном из полюсов мира.

4. Видимый путь Луны на небе почти совпадает с траекторией Солнца, только Луна совершает свой оборот не за год, а за месяц. Поэтому при наблюдении с полюса Луна будет на две недели появляться над горизонтом и на две недели — скрываться за ним.

5. Потому что граница дня и ночи на Венере — полуокружность, которую мы видим под углом в виде полуэллипса.

6. Да — в экваториальных странах.

7. Для наблюдателя на Луне Земля не восходит и не заходит.

8. Можно, например изучая поведение маятника.

9. На экваторе — в виде полосы, пересекающей небо через зенит; на полюсах кольцо не видно вовсе.

10. На стороне Луны, обращенной к Солнцу, будет видно полное солнечное затмение; на другой стороне — яркие звезды на черном небе.

11. Расстояние от Земли до Солнца летом больше, чем зимой, поэтому угловой размер Солнца летом чуть меньше, чем зимой. Расстояние же от Луны до Земли в среднем не зависит от сезона. Вот почему Луна чаще полностью закрывает солнечный диск именно летом.

12. Расстояния между Солнцем и Землей и Солнцем и Луной практически равны. Поэтому, если бы Луна и стена имели одинаковые коэффициенты отражения, яркость их казалась бы одинаковой. Следовательно, можно считать, что поверхность Луны состоит из темных пород.

13. Нет. С Луны видна окружающая Солнце атмосфера, наблюдаемая с Земли лишь в моменты полного солнечного затмения.

14. Световые лучи в земной атмосфере искривляются (атмосферная рефракция), поэтому в отсутствие атмосферы видимое положение каждой звезды несколько сместилось бы. Например, звезды, видимые вблизи линии горизонта, стали бы невидимыми.

15. Участие комет в суточном вращении неба.

16. На «утреннее» полушарие Земли попадают метеориты, движущиеся в основном навстречу нашей планете, а на «вечернее» полушарие — движущиеся вдогонку. Поэтому послеполуночные метеориты влетают в атмосферу с большей скоростью и, сгорая, вспыхивают ярче, чем дополуночные.

Микроопыт

Нужно спроецировать диски, удобнее солнечные, в обоих случаях на лист бумаги с помощью длиннофокусной (почему?) линзы, при этом линза и лист должны быть перпендикулярны лучам. Измеряя размеры изображений, можно убедиться, что они равны.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 1)

13. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ (рис. 8) и в нем отрезок AE, параллельный отрезку CM (точка E лежит на стороне CD). Если соединить отрезком точки E и N, то полученный прямоугольный треугольник ECN будет равен треугольнику ADE (по катетам), следовательно, равны их гипотенузы AE и EN. Углы DEA и CEN в сумме составляют прямой угол, следовательно, угол AEN — прямой и треугольник AEN — равнобедренный, прямоугольный. Значит, угол EAN равен 45°, а он равен углу между отрезками AN и CM.

14. Отметим показания часов через каждый час после полуночи: 0 ч 00 мин, 1 ч 00 мин, 1 ч 05 мин, 2 ч 05 мин, 2 ч 10 мин и т. д. Таким образом, начало нечетного часа $(2k-1)$ будет показано, как $(k-1)$ ч $5(k-1)$ мин, а начало четного часа $2k$ будет показано как k ч $5(k-1)$ мин. Через 24 часа обе стрелки вновь совпадут на цифре 12. Первый час часы показывают верное время, а затем каждый нечетный час они идут с правильными скоростями стрелок из неправильного начального положения, и, следовательно, не могут показывать верное время. Рассмотрим положения стрелок во время четного часа. Через x минут часовая стрелка будет показывать $k+x/5$ часов, а минутная — $5(k-1)+x/12$ минут. На «нормальных» часах в это время часовая

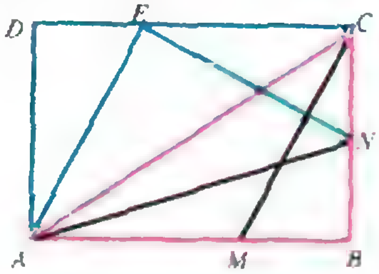


Рис. 8.

стрелка будет показывать $2k-1+x/60$ часов, а минутная x минут. Если «сумасшедшие» часы показывают верное время, то $k+x/5=2k-1+x/60$ и $5(k-1)+x/12=x$. Как это ни странно, но оба уравнения дают одно и то же решение: $x=60(k-1)/11$. Таким образом, «сумасшедшие» часы показывают верное время в течение часа с 0 ч 00 мин до 1 ч 00 мин и еще в 10 моментов времени: 3 ч 60/11 мин, 5 ч 120/11 мин, ..., 21 ч 600/11 мин.

15. Предположим, что все расстояния между собеседниками изменились. Пусть собеседники поднялись со своих мест и пошли по часовой стрелке к своим новым местам. Тогда общий путь, пройденный ими, равен целому числу полных обходов вокруг стола. Действительно, пусть первый прошел свой путь и сел на новое место, сидевший там также прошел свой путь и т. д., пока очередной собеседник не сядет на место первого, завершив целое число оборотов. Если при этом рассмотрены не все собеседники, то продолжим рассмотрение, начав с одного из нерассмотренных. С другой стороны, по предположению, все собеседники прошли разные длины путей, что возможно лишь в случае, если один собеседник остался на месте, второй прошел 1/12 полного обхода, третий 2/12 полного обхода и т. д., последний 11/12 полного обхода. Сумма этих путей равна 66/12 или 5,5 полного обхода, это противоречит доказанному утверждению, что было пройдено целое число полных оборотов. Следовательно, предположение о том, что все собеседники прошли разное расстояние, а значит, и все расстояния изменились — неверно.

Магазин «Академкнига»

предлагает сборник
издательства «Наука»

Физики о себе.— 1990.— 2 р.

В книге собраны автобиографии, характеристики, фрагменты писем, воспоминаний и другие документы ученых-физиков — действительных членов и членов-корреспондентов АН СССР — А. Ф. Йоффе, Д. С. Рождественского, Л. И. Мандельштама, С. И. Вавилова, П. Л. Капицы, И. В. Курчатова, Л. Д. Ландау и многих других.

Адрес магазина: 117393, Москва,
ул. Академика Пилюгина, д. 14, корп. 2,
магазин № 3
«Книга — почтой» «Академкнига».

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко,
С. Табачников, В. Тихомирова, В. Уроев,
А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, А. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс, И. Шарыгин,
Г. Яковлев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, Л. Кардасевич, С. Коновалов, Е. Коршунова, А. Котова, А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Г. Антонов, С. Лухин, Э. Назаров, П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор В. Сорокина

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»,
тел. 250-33-54, факс 251-65-57

Сдано в набор 02.03.92. Подписано к печати 07.05.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,68.
Тираж 88 584 экз. Заказ 233. Цена 1 р. 10 к.

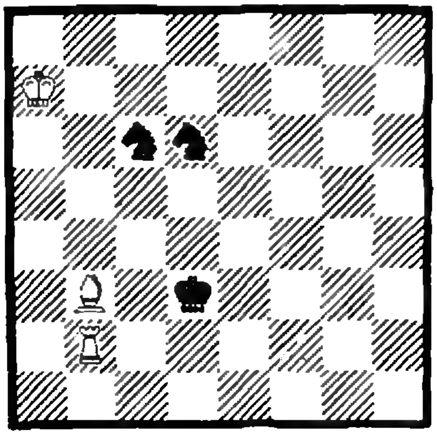
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ВСЕМ РЕКОРДАМ РЕКОРД!

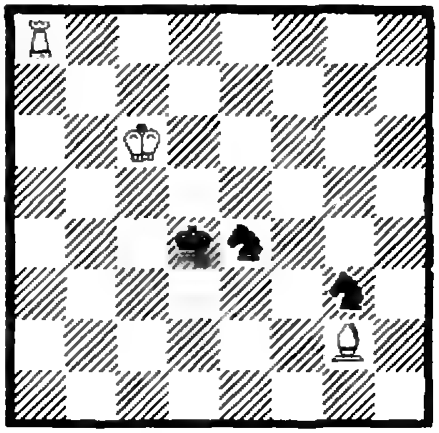
В нашей рубрике мы не раз рассказывали о достижениях компьютеров в исследовании окончаний. В «ICCA JOURNAL» (журнал международной ассоциации по компьютерным шахматам) Л. Стиллер опубликовал машинный анализ, в котором специальная программа, написанная им совместно с несколькими коллегами, разобралась в одном редком эндшпиле с весьма забавным соотношением сил: ладья и слон против двух коней.

Как оценить этот эндшпиль? Должна *ли сильнейшая сторона* (как обычно, считаем, что это белые) выиграть, ведь размен слона на коня, скорее всего, ведет к ничьей? Невозможно поверить, но компьютер обнаружил позицию, в которой при наилучших действиях обеих сторон выигрыш достигается только спустя 222 хода! Под выигрышем здесь понимается переход в получающийся при изменении материала так называемый младший эндшпиль, в котором поражение черных уже неизбежно.

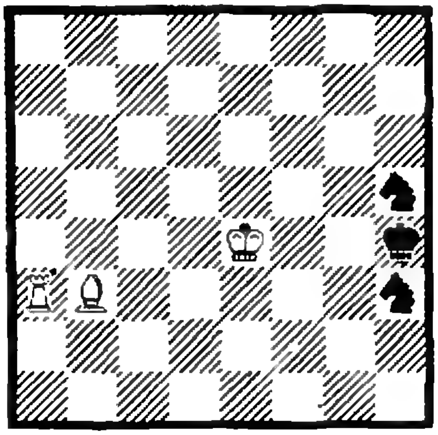


Перед нами удивительная позиция. Если обе стороны играют безошибочно (лишь иногда возможна замена ходов), то белые добиваются цели спустя две с лишним сотни ходов. Но мы пощадим читателя и приведем лишь начало и конец «партии», а внутри нее укажем лишь критические позиции.

1. Кра6 Кb4+ 2. Кра5 Кс6+ 3. Кра4 Кс4 4. Лh2 Кb5+ 5. Кра3 Кс4+ 6. Кра2 Кb4+ 7. Кра1 Кe5 8. Крb2 Кс4+ 9. Крс1 Крс3 10. Сd1 Кd3+ 11. Крb1 Кd2+ 12. Кра1 Кb3+ 13. Кра2 Кbс5 14. Кра3 Кb4 15. Лh3+ Кbd3 16. Сg4 Крd4 17. Сf5 Кf2 18. Лh6 Кfd3 19. Кра2 Крe5 20. Сg6 Крd4 21. Крb1 Крс3 22. Сh7 Крd2 23. Лh2+ Крс3 24. Сg8 Крd4 25. Крс2 Кb4+ 26. Крd1 Кe4 27. Сe6 Крe3 28. Сf5 Кd5 29. Крс1 Кd6 30. Сd7 Крd4 31. Крb2 Кe3 32. Лh4+ Крd5 33. Сa4 Кdf5 34. Лh8 Кd6 35. Лh5+ Крd4 36. Сс6 Кdс4+ 37. Крb3 Кd2+ 38. Крb4 Кe4 39. Сa8 Кс2+ 40. Крb5 Кe3 41. Крс6 Кf6 42. Лh4+ Крe5 43. Крс5 Кd7+ 44. Крb5 Кf6 45. Сh1 Кf5 46. Лa4 Кd6+ 47. Крс5 Кfe4+ 48. Крс6 Кg3 49. Сg2 Кdе4 50. Лa8 Крd4.

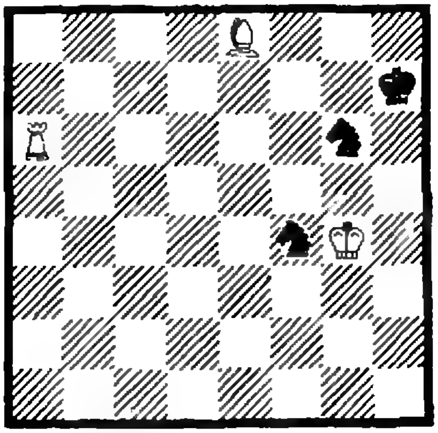


Пятьдесят ходов минуло, и если бы за игрой следил судья, он бы зафиксировал ничью. Завоевания белых не совсем ясны, разве что их король вырвался на свободу.



Последний ход черных — 209...Кh5. Похоже, что черные чувствуют себя не так независимо, как раньше, хотя черный король по-прежнему в надежном окружении своих коней. Однако белый слон находит замысловатую траекторию c2—b3—e6—f7 —e8, ведущую к цели. Красиво! Конечно, в этом эндшпиле многое восхищает и удивляет. И, уж что очевидно, подобный анализ человеку явно не под силу.

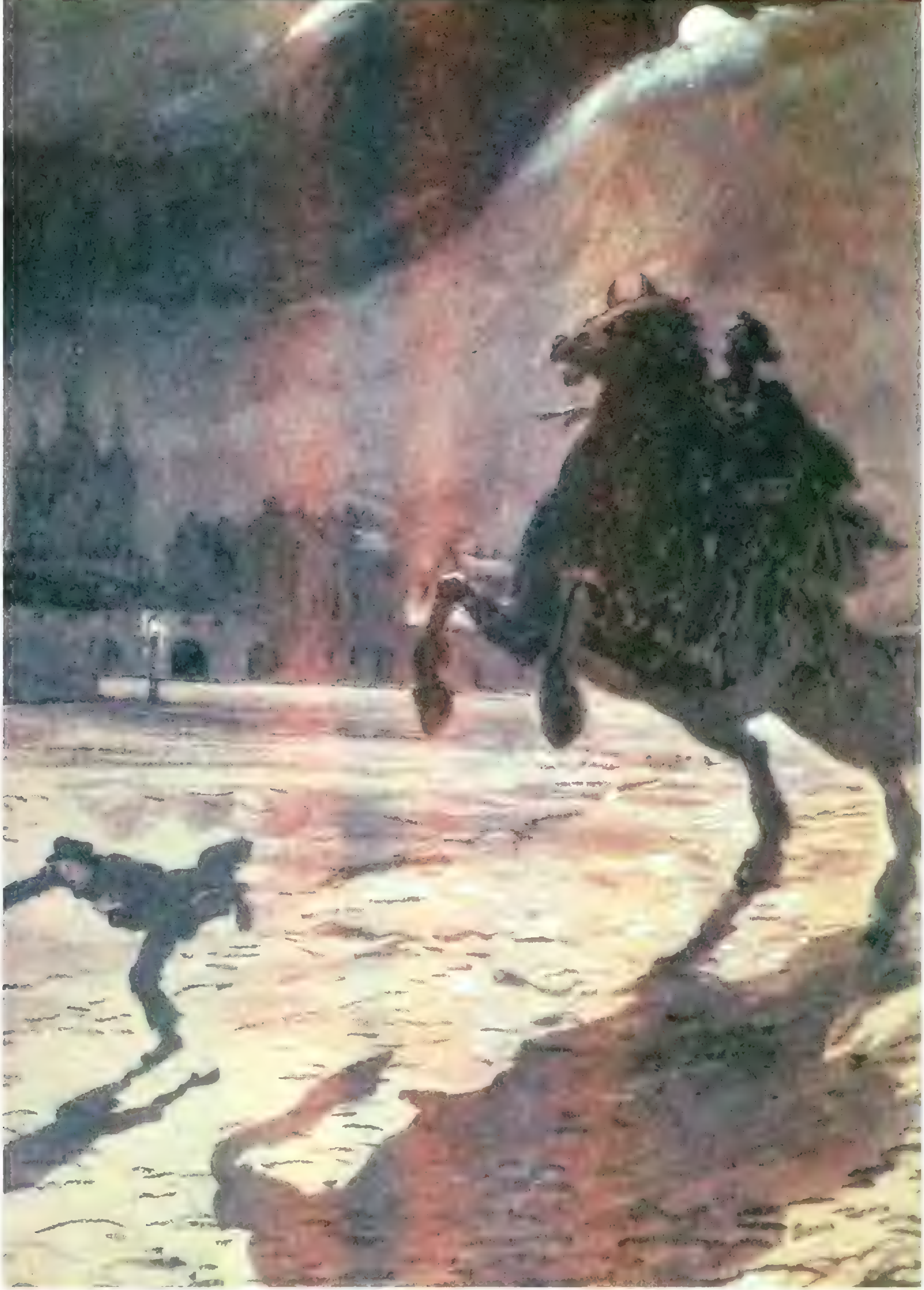
210. Лa4 Крg5 211. Крf3 Кg1+ 212. Крf2 Кh3+ 213. Крg2 К3f4+ 214. Крf3 Кh3 215. Лa5+ Крh6 216. Лa6+ Крg5 217. Сe6 К3f4 218. Лa5+ Крh6 219. Сf7 Кg6 220. Лa6 Кf4 221. Крg4 Крg7 222. Сe8 Крh7.



Исторический момент. После 223. С:g6+ К:g6 задание выполнено — в том смысле, что получается выигранный эндшпиль с белой ладьей против черного коня. Согласно «старым» анализам ЭВМ, белые ставят мат или забирают коня через 19 ходов. Кстати, с человеческой точки зрения, сразу решает 223. Крf5! и уже на следующем ходу съедается конь. Однако в этом случае «младший эндшпиль» возникает на ход позднее, и запрограммированная на скорейший переход в него машина сразу предложила размен на g6. Разумеется, этот размен возможен только сейчас, а раньше он вел к неизбежной ничьей.

У читателя может сложиться впечатление, что победа белых в таком эндшпиле — случайное явление. Но это не совсем так. Компьютер установил, что при своем ходе белые выигрывают почти всегда, а точнее в 96% позиций! Еще один вклад компьютеров в теорию шахматных окончаний!

Е. Гик



1 р. 10 к.
Индекс 70465

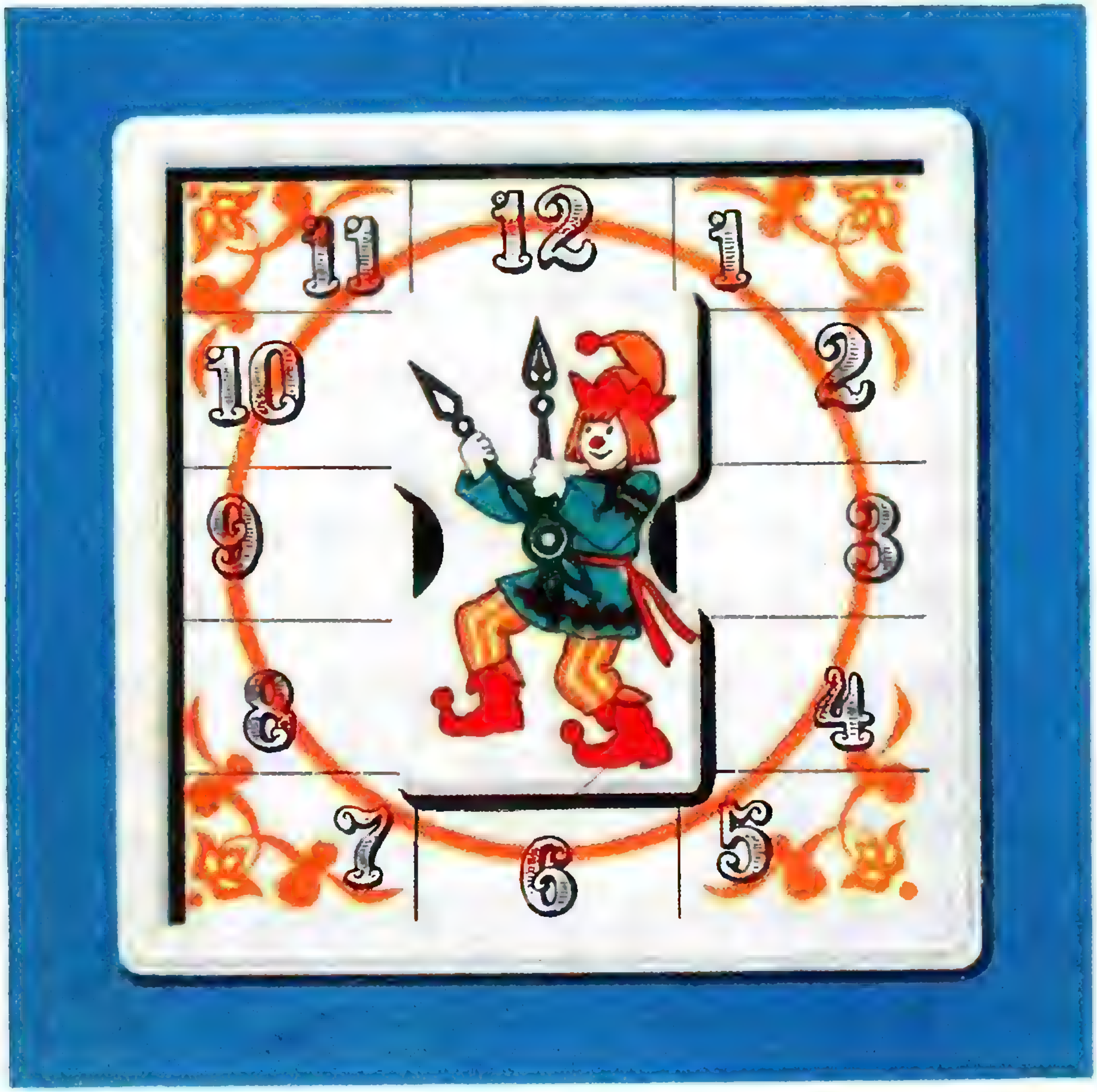
ГОЛОВОЛОМКА «ТИК-ТАК»

Участникам 1-го чемпионата мира по решению головоломок, который состоится летом этого года в Нью-Йорке, будут предложены головоломки-новинки. Одну из таких новинок придумал изобретатель Владимир Красноухов, а выпускает ее московская фирма «Автокомп», которая отправит партию логических игрушек на чемпионат.

Внешне головоломка напоминает игру «15», но гораздо сложнее ее, хотя фишек содержит меньше. Всем известные «пятнашки» легко переделать в головоломку Красноухова. Для этого возьмите 14 фишек, 12 из них постройте в виде прямоугольника 3×5 и склейте из картона коробочку соответствующего размера, в которую поместите каре из фишек.

Две оставшихся фишки приклейте ко дну коробочки внутри прямоугольного каре так, чтобы в центре поля осталось пустое место для одной фишки. За счет свободного места фишки можно перемещать, не вынимая их из коробочки. Перед игрой фишки перепутывают, а затем восстанавливают их первоначальное расположение.

Попробуйте решить задачу, которую, возможно, предложат участникам чемпионата мира: за наименьшее число ходов поменять местами четыре фишки: 3—9 и 6—12.



НОМЕР
6

Квант

1992
6

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал*

*Учредители —
Президиум
Российской академии наук,
Президиум
Академии педагогических наук
и коллектив редакции
журнала «Квант»*

*Москва, «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы*

В номере:

2 *А. Стасенко.* Самолет в озоне
8 *В. Уфнаровский.* Прогулка до теоремы Чебышёва
14 *Я. Амстиславский.* Закон Кирхгофа

Задачник «Кванта»

23 Задачи М1346—М1350, Ф1353—Ф1357
24 Решения задач М1316—М1320, Ф1333—Ф1337

«Квант» для младших школьников

35 Задачи
36 *И. Акулич.* Решение ребусов на чашечных весах

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»
Математика 9—11:

44 *В. Болтянский.* Квадратное уравнение

Лаборатория «Кванта»

48 *П. Михеев.* Физика и гитара

Информатика

50 *Б. Тарасенко.* Проблема Гольдбаха и программирование

Практикум абитуриента

54 *А. Коржуев.* Избранные задачи по термодинамике
59 *А. Егоров.* О дискриминанте

Информация

58 Олимпийские интеллектуальные игры 1993 г.

Игры и головоломки

64 Игра го

Олимпиады

67 Канадские математические соревнования

70 **Варианты вступительных экзаменов в 1991 г.**

77 **Ответы, указания, решения**

Наша анкета

7 Читатель ←——→ журнал
79 Анкета 6—92

Наша обложка

1 *Почему и как возникают на асфальте разноцветные масляные капли? Ответ — на с. 53.*
2 *Картина бельгийского художника Р. Магритта (1898—1967) навевает мысль о том, что суть человека — в разрушении природы. Так ли это на самом деле? См. статью А. Стасенко в этом номере.*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка «Ожерелье».*

© «Квант», 1992

САМОЛЕТ В ОЗОНЕ

Доктор технических наук
А. СТАСЕНКО

> *Исповедуя Бога Вседержителем и Творцом Мира, мы не можем не каяться в расхищении созданного Им, должны признать себя истребителями и разрушителями, не поддерживающими, а разрушающими порядок в природе.*
>
> Н. Ф. Федоров.
> Философия общего дела.

Напомним, что первая часть статьи* кончалась на самом интересном месте вопросом: «Но при чем здесь озон?»

Хемосорбция окислов азота

А при том, что капли могут поглощать окислы азота, превращаясь в раствор азотной кислоты. Процесс объемного поглощения называется абсорбцией (от греческого sorbeo — поглощаю), а когда он сопровождается химической реакцией, то — хемосорбцией. Если закрыть глаза на все другие вещества в струе, то хемосорбцию окислов азота можно условно изобразить рисунком 1. Именно такие процессы и происходят в установках химической промышленности, производящих азотную кислоту.

Разумеется, струя с каплями во многом не похожа на промышленную колонку для производства азотной кислоты. Во-первых, в наземной установке практически не ограничено количество проточной воды, непрерывно хемосорбирующей окислы азота. Во-вторых, там давление окислов азота на порядки больше, чем в струе, что ускоряет процесс растворения (правда, в стратосфере температура ниже ($T_{\min} \approx 217$ K), что, напротив, способствует растворению).

Легко оценить сверху концентрацию азотной кислоты в каплях струи. Поскольку концентрация газообразных окислов азота на срезе сопла раз в сто меньше, чем воды, то и концентрация азотной кислоты не будет превышать величину порядка процента.

Но, в-третьих, есть же и другие вещества, помимо окислов азота. Так что в капле вообще могут происходить все те реакции, что и в газе (см. рис. 1 в первой части статьи), но, конечно, с другими скоростями. И нужно бы учесть все эти реакции, чтобы дать ответ — сорбция веществ струи каплями воды будет увеличивать или уменьшать содержание озона в атмосфере.

Но тут важно то, что благодаря каплям появилась надежда куда-то упрятать вредные газы струи. А дальше что? А дальше эти капли могут укрупняться за счет столкновений друг с другом и слияния, могут замерзнуть и, отяжелев и падая, транспортировать эти окислы в нижние слои атмосферы, где, испарившись, вернуть их снова в воздух. Но, как известно, их добавка в нижних слоях может даже увеличить содержание озона — как это происходит в знаменитых лондонских смогах.

Но! — воскликнет вдумчивый читатель и будет совершенно прав,— ведь что-то не видно, чтобы белый хвост за самолетом опускался со своими каплями. Да, правда, не видно. Но само по себе это не доказывает, что капли исчезли: можно предположить, что при укрупнении капель хвост становится прозрачным. Вспомним: туман из мелких капель непрозрачен, а дождь, при котором воды в единице объема воздуха гораздо больше, позволяет видеть далеко.

Действительно, чтобы оценить среднюю «длину видимости» вдоль какого-нибудь луча, окружим этот луч цилиндрической поверхностью с радиусом, равным среднему радиусу ка-

---

* См. «Квант» № 5.

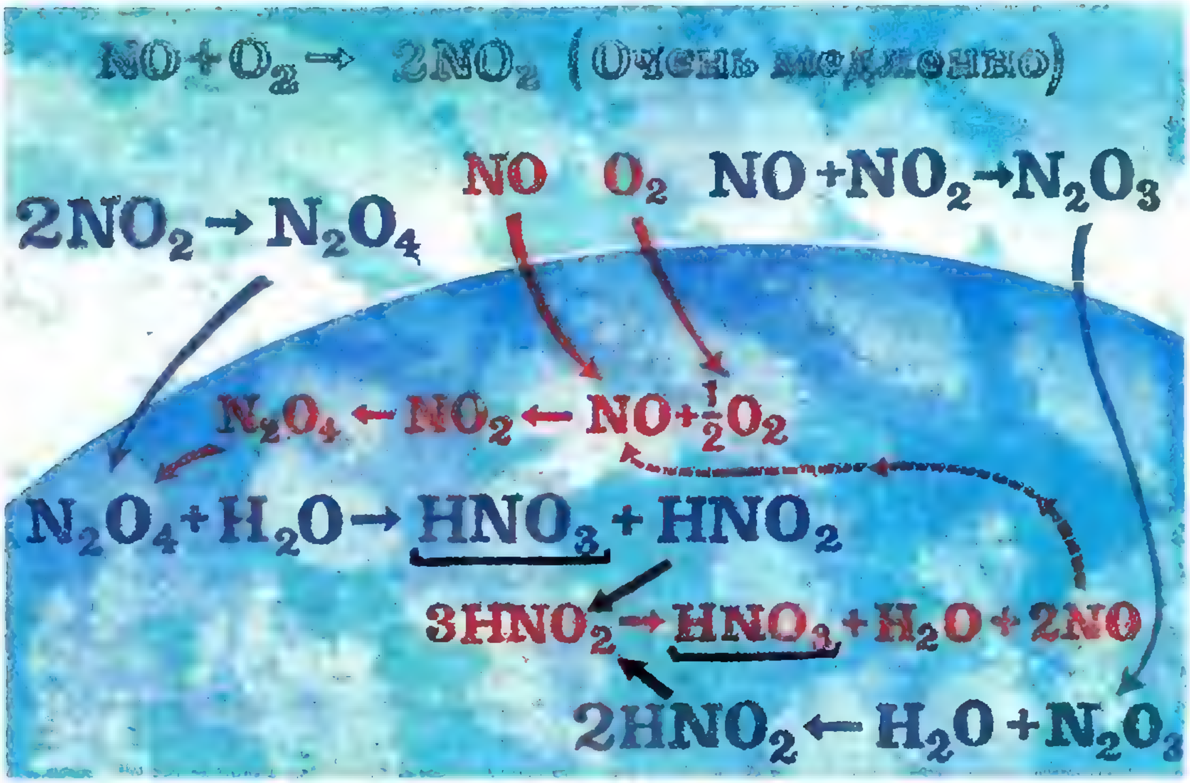

$NO+O_2 \rightarrow 2NO_2$ (Очень медленно)
NO
O_2
$NO+NO_2 \rightarrow N_2O_3$
$2NO_2 \rightarrow N_2O_4$
$N_2O_4 \leftarrow NO_2 \leftarrow NO+\frac{1}{2}O_2$
$N_2O_4+H_2O \rightarrow HNO_3+HNO_2$
$3HNO_2 \rightarrow HNO_3+H_2O+2NO$
$2HNO_2 \leftarrow H_2O+N_2O_3$

Рис. 1.

пель a. Если центр капли попадет в цилиндр, то эта капля «перекроет» луч. На длине L количество центров, попавших в цилиндр, равно $N=n\pi a^2L$, где n — концентрация капель, πa^2L — объем цилиндра. Значит, средняя длина видимости равна

$$\hat{l}=\frac{L}{N}=\frac{1}{\pi a^2 n}=\frac{1}{\pi a^2\rho_v/m}=\frac{\frac{4}{3}\pi a^3\rho^0}{\pi a^2\rho_v}\approx a\frac{\rho^0}{\rho_v},$$

где ρ^0 — плотность воды.

Таким образом, чем крупнее капли (чем больше их радиус a) при фиксированной плотности водяного пара ρ_v, тем прозрачнее облако.

Но, кроме того, струя за самолетом не бывает строго круглой со строго горизонтальной осью. Чтобы исследовать более подробно дальнейшую возможную судьбу капли с захваченными ею окислами азота, нужно сделать еще шаг вперед и рассмотреть, как крылатый летательный аппарат возмущает атмосферу.

Свободные вихри и теплые струи

Начнем с мухи. Давно известна такая школьная задача: на весах стоит закрытая непрозрачная коробка, на дне которой сидит муха — это ее состояние номер один. Запишем вес коробки с мухой. Второе состояние: муха летает (висит неподвижно в воздухе) где-то внутри коробки, не касаясь стенок. Можно ли отличить эти два состояния по показанию весов? Ответ: нельзя — весы покажут то же самое. Потому что, раз уж муха держится в воздухе коробки, она создает поток импульса — силу, направленную вниз и в точности равную ее весу. Но, коль скоро она отбрасывает воздух вниз, то он должен возвращаться к ней сверху. Возникает циркуляция воздуха в коробке, которая качественно изображена на рисунке 2, *а* синими линиями. Это очень похоже и на картину течения воздуха вокруг вертолета в режиме висения.

Пусть теперь муха или вертолет не просто висят в воздухе, а движутся вперед с постоянной скоростью V. Тогда в системе координат, связан-

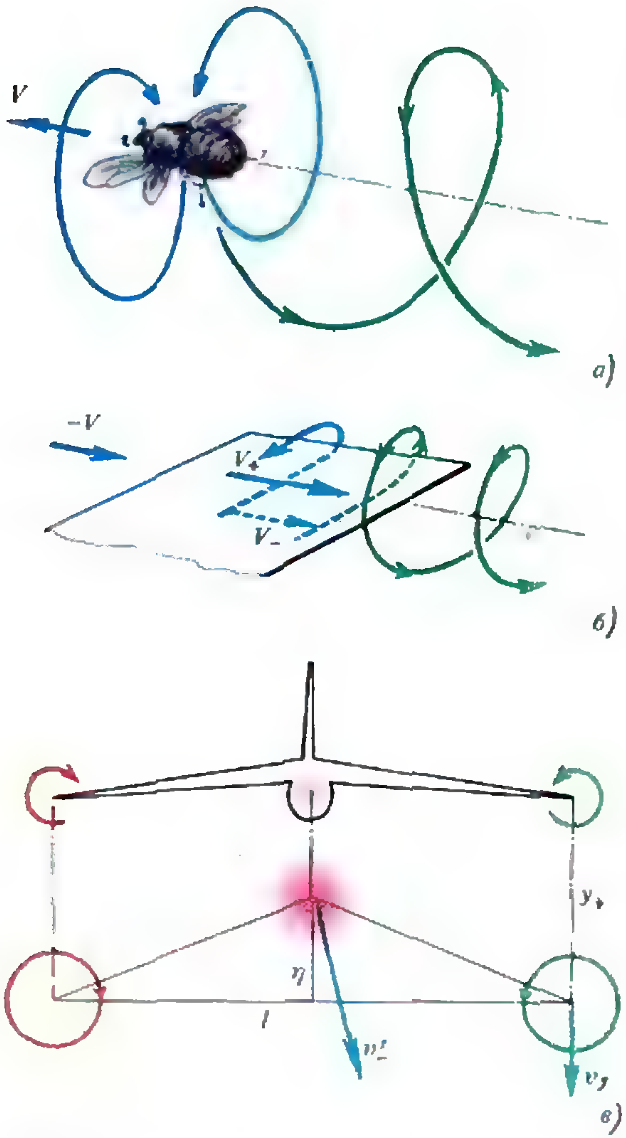


Рис. 2.

ной с их центром масс, воздух сдувается назад со скоростью $u_\infty = -V$. Порисовав картинки линий тока, можно понять, что в плоскости, перпендикулярной направлению движения, возникнут два вихря с почти параллельными осями (на рисунке 2, *а*, чтобы не загромождать картинку, изображен один из вихрей — правый с точки зрения мухи).

Самолет вызывает в атмосфере почти такое же течение воздуха, как движущаяся муха или вертолет,— только у него разделены функции: крыло создает подъемную силу, а тягу создает, в отличие от мухи, не крыло, а движитель (винт или реактивная струя).

Возникновение вихря воздуха у конца крыла можно качественно пояснить еще так. Раз уж воздух, обтекающий крыло, создал подъемную силу, значит, его давление на нижнюю поверхность крыла больше, чем на верхнюю: $p_- > p_+$. Тогда, согласно уравнению Бернулли, скорость воздуха вверху больше, чем внизу: $V_+ > V_-$ (рис. 2, *б*). А на самом конце крыла, кроме того, из-за указанного различия давлений воздух стремится перетечь снизу вверх. Если мы проследим за траекторией какой-либо частицы воздуха, то и получим спираль, сбегающую с конца крыла,— так называемый концевой, или присоединенный вихрь. На рисунке 2, *в* изображен вид сзади всего самолета и двух концевых вихрей. Таким образом, возникновение этих двух вихрей неразрывно связано с созданием подъемной силы движущимся крылом. (Конечно, это объяснение подходит для дозвукового обтекания крыла, но для наших целей и этого достаточно.)

Мощность вихря характеризуется его циркуляцией $\Gamma = 2\pi r v_\varphi$, где v_φ — окружная скорость. Считая, что при расширении вихря его мощность Γ остается постоянной, получим, что окружная скорость падает обратно пропорционально расстоянию от оси:

$$v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \qquad (1)$$

Вы сами можете «сделать» такой вихрь, открыв сливное отверстие ванны, и, подсыпая понемножку зубного порошка в разные его участки, убедиться в правильности формулы (1).

Итак, каждый из вихрей порождает в пространстве вихревое поле скоростей, в которое попадает и другой вихрь, и струя (см. рис. 3, *в*). Например, правый вихрь (самолет летит от нас) находится в том месте, где окружная скорость, индуцированная левым вихрем, равна $v_y = -\Gamma/2\pi l$ и направлена строго вниз (о чем говорит знак «минус»). В результате ось вихря опускается вниз с постоянной скоростью, а уравнение оси будет

$$y_+ = v_y t = v_y \frac{x}{u_\infty} = -\frac{\Gamma}{2\pi l u_\infty} x. \qquad (2)$$

Конечно, точно так же и левый вихрь, находясь в поле скоростей правого, будет описываться той же падающей прямой. Так как оси обоих вихрей находятся на одинаковой высоте, то нет горизонтальных компонент скоростей, и расстояние между ними сохраняется равным *l*.

Пусть в рассматриваемом сечении ось струи находится на расстоянии $\eta = y_j - y_{+,-}$ от горизонтальной линии, соединяющей вихри (см. рис. 2, *в*). Тогда скорость, индуцированная левым вихрем в этой точке, равна по модулю

$$v^l_- = \frac{\Gamma}{2\pi\sqrt{(l/2)^2+\eta^2}},$$

а ее вертикальная проекция

$$v^l_-\downarrow = -v^l_- \cos\alpha = -v^l_- \frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2+\eta^2}}.$$

От обоих вихрей она вдвое больше. Таким образом, ось струи находится в поле скоростей с вертикальной компонентой

$$v^l\downarrow = -\frac{\Gamma l}{2\pi((l/2)^2+\eta^2)}. \qquad (3)$$

Значит, если струю считать безвольной гибкой веревкой, то ось струи будет опускаться за самолетом и, учитывая, что $v^l\downarrow = \frac{dy^l}{dx} u_\infty$, можно найти интегрированием ее форму $y^l(x)$. Но и без этого интегрирования можно усмотреть одно интересное обстоятельство. *Существует такое значение* $\eta_* = \sqrt{3}\, l/2$, *при котором* вертикальные скорости воздуха на осях вихрей и на оси струи одинаковы ($v_y = v^l\downarrow$). Это значит, что по достижении ординаты $\pm\eta_*$ вихри и струя остаются параллельными (рис. 3, пунктир для знака «+»).

Но есть еще одна сила, действующая на струю и направленная вверх,— сила Архимеда. Струя теплее окружающей атмосферы и напоминает дирижабль, наполненный газом (воздухом) немного меньшей плотности (ведь, согласно закону Менделеева — Клапейрона, $\rho \sim 1/T$ при постоянном давлении). Для оценки скорости всплывания заменим непрерывное колоколообразное распределение температуры и плотности по радиусу струи ступенчатым, при котором их значения внутри цилиндра некоторого радиуса r_e будем считать постоянными и равными значениям на оси T_m, ρ_m, а вне этого цилиндра — значениям в невозмущенной атмосфере T_∞, ρ_∞ (см. рис. 3). Таким образом, будем считать, что кусок струи длиной Δx помещен в легкий целлофановый цилиндрический пакет с теплонепроницаемыми стенками и этот пакет (дирижабль или монгольфьер) испытывает в холодной атмосфере выталкивающую вверх силу Архимеда

$$\Delta F_A = (\rho_\infty - \rho_m)\, g\pi r_e^2 \Delta x.$$

Здесь $\pi r_e^2 \Delta x$ — объем выделенного участка струи длиной Δx, на которой струю можно считать приблизительно цилиндрической — хотя мы-то уже знаем, что она расширяется. Но, поскольку $\rho_\infty = p_\infty M/(RT_\infty)$, $\rho_m = p_\infty M/(RT_m)$, то получим

$$\Delta F_A = \rho_\infty g\pi r_e^2 \Delta x\, \frac{T_m - T_\infty}{T_m}.$$

Таким образом, сила Архимеда пропорциональна квадрату радиуса сечения струи и разности температур струи и атмосферы.

Пусть эта сила привела к движению струи вверх с постоянной скоростью $v\uparrow$. Тогда возникнет уравновешивающая сила аэродинамического сопротивления, которая, как уже много раз говорилось, пропорциональна плотности обтекающего воздуха, квадрату скорости и площади сечения $S_\perp = \Delta x \cdot 2r_e$, перпендикулярного вектору $\vec{v}\uparrow$:

$$\Delta F_a = \rho_\infty v\uparrow^2 S_\perp = \rho_\infty v\uparrow^2 2r_e \Delta x.$$

Из равенства сил F_A и F_a, учитывая, что $T_m(x) \sim 1/x$ и $r_e \sim \sqrt{x}$, получим

$$v\uparrow^2 \sim \frac{1}{r_e} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow v\uparrow \sim x^{-1/4}.$$

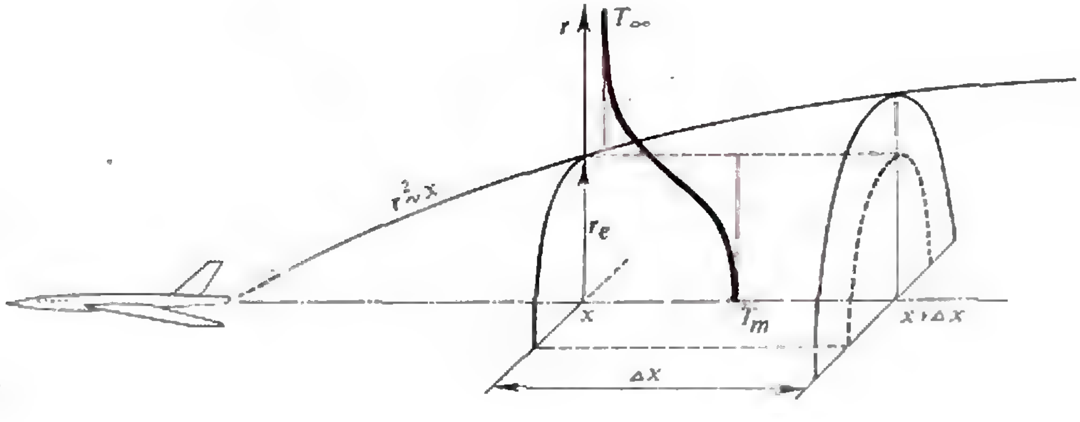


Рис. 3.

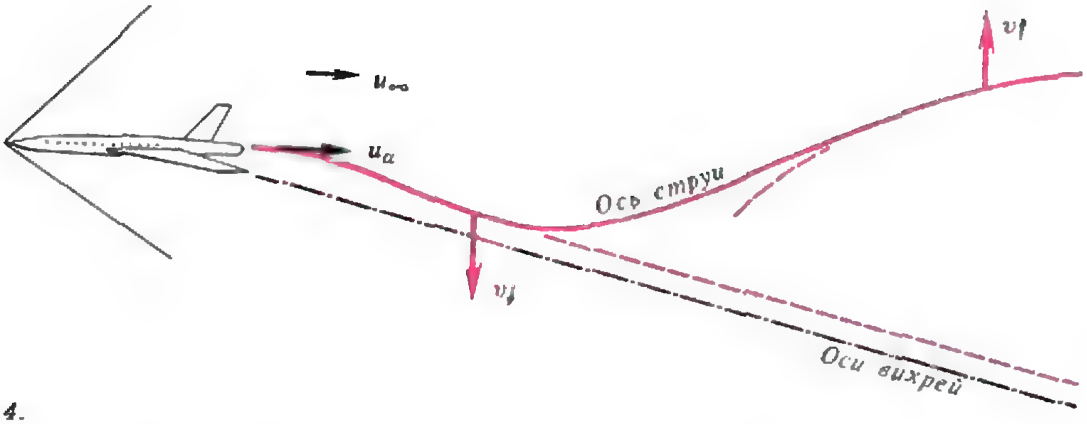


Рис. 4.

Если из-за этой силы плавучести струя «вырвется» из-под влияния вихрей (как видно из формулы (3), скорость, индуцированная вихрями, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния), то ее движение будет определяться в основном силой Архимеда. Можно записать

$$\frac{dy^j}{dx} = \frac{v\uparrow}{u_\infty} \sim \frac{x^{-1/4}}{u_\infty},$$

откуда после несложного интегрирования получим $y^j \sim x^{3/4}$. В результате ось струи будет иметь вид кривой, качественно изображенной на рисунке 4 сплошной линией.

Теперь пора оглянуться на все, что мы тут натворили, и, как говорят в приличном обществе, «извиниться» за все, чего мы не учли. Во-первых, сама вихревая нить, как и струя, будет ведь тоже «расплываться» из-за трения друг о друга слоев, вращающихся с разными окружными скоростями вокруг оси, значит, вихрь будет диффундировать в радиальном направлении, и радиальная зависимость его окружной скорости станет сложнее, чем (2). Во-вторых, поле скоростей вихря будет влиять не только на óси струй, но и на их периферию, поскольку струя ведь не есть линия, она имеет характерный поперечный размер, и разные элементы струи будут по-разному «сдуваться» вихрем относительно оси струи. В-третьих, струя после торможения в атмосфере вообще может начать распадаться на отдельные участки, которые будут всплывать вверх отдельными комками, а не в виде цилиндра. И многое другое мы не учли из того, что может влиять на эволюцию отдельной капли, на возможность слияния капель друг с другом, на скорость осаждения всего капельного следа вместе с захваченными им окислами азота. Но это смогут учесть наши читатели, когда станут большими и грамотными.

Заключение

Итак, вредны ли будущие стратосферные авиалайнеры для озона Земли? Да, но ведь вредно почти все, что делает Человечество, начиная с его дыхания. Мы дышим — получается углекислый газ, и животные тоже дышат — а растениям приходится его поглощать, возвращая кислород в атмосферу,— вот вам и равновесие. Следовательно, важно сравнить ожидаемый вред с тем, что творится в Природе. Известно, что до сих пор извержения вулканов вносят в атмосферу существенно больше окислов азота, чем вся мировая авиация. И в будущем, когда парк коммерческих самолетов станет сравнимым с природными источниками по скорости производства вредных примесей, все равно трудно будет выяснить измерениями, ктó именно портит воздух. Поэтому и теперь и впредь важным средством определения вклада авиации в эту проблему будут служить теоретические оценки, основанные на физико-химико-математических моделях процесса. Вроде тех, которые проиллюстрированы в этой статье.

Может быть, дальнейшие исследования покажут, что вся эта проблема озона не столь трагична, как это представили нервные журналисты, убоявшись «озоновой дыры» над Антарктидой. Часть ученых считает, что и проблемы-то нет: солнечное излучение, говорят они, поглощается всей атмосферой, а не только озоном. А народные приметы прямо свидетельствуют о пользе слабого раствора азотной кислоты для урожая,— конечно, в других терминах: если весной или в начале лета пройдут грозовые дожди — урожай будет хороший. Тут дело в том, что, хотя атмосфера состоит в основном из азота, ни одно растение усваивать его из воздуха не способно, а может лишь из соединений с другими элементами. Грозовой дождь и создает такие условия — при разрядах молнии азот воздуха образует химические соединения, которые, растворяясь в каплях дождя, превращаются в азотную кислоту слабой концентрации, а она реагирует с природными минералами и высвобождает питательные вещества, в частности фосфор и калий, необходимые для бурного роста растений. Но ведь все это чем-то похоже на события, происходящие в струе самолета. Так что не исключено в третьем тысячелетии появление новой народной поговорки: «Пролетел по весне над огородом гиперзвуковой лайнер — жди по осени большой тыквы».

Читатель ↔ журнал

Вот уже несколько лет мы каждые три месяца публикуем нашу анкету (есть она и в этом номере). Ведь журнал делается для вас, наших читателей, и чтобы он оставался интересным и полезным, нам нужна ваша помощь.

Что же показали полученные нами анкеты за 1991 год?

Конечно, очень приятно было узнать, что большинству тех, кто ответил на наши вопросы, нравится «Квант». Его называют хорошим, очень хорошим и даже отличным. Спасибо на добром слове!

Интересно, что в этом году больше всего анкет прислали ученики одиннадцатых классов (33 %). На втором месте десятиклассники (28 %), затем — девятиклассники (15 %) и восьмиклассники (10 %). В прошлые годы чаще откликались школьники 7—9 классов.

По-прежнему наибольшей популярностью пользуются постоянные наши рубрики «Задачник «Кванта», «Школа в «Кванте», «Практикум абитуриента» и «Калейдоскоп «Кванта». Ненамного отстают от них «Фантастика», «Квант» для младших школьников», «Варианты вступительных экзаменов» и «Математический кружок».

Лучшими статьями 1991 года были названы следующие:

И. Акулич «Странный император и странный полководец» (№ 2);

И. Депман, Н. Виленкин «Числовые фокусы» (№ 2);

А. Мигдал «Вычисления без вычислений» (№ 3);

В. Николаев «25 из 30» (№ 4);

Дж. Уокер «Как кипит вода?» (№ 5);

И. Депман «Совершенные числа» (№ 5);

Р. Винокур «О водяном звере и акустическом резонансе» (№ 7);

И. Лалаянц, А. Милованова «Физика против мошенников» (№ 8);

Я. Стюарт «Сказка о рождественской теореме Ферма» (№ 9);

В. Сурдин, С. Ламзин «Формула рождения звезд» (№ 10);

Ю. Носов «Голографическая память» (№ 10);

Б. Гурович, Р. Малков «Как обмануть интеграл» (№ 12).

Если разложить ваши отклики «по пожеланиям», в самую солидную стопу соберутся предложения по разделу «Информатика и программирование». Одни просят расширить раздел. Другие просят задач. Третьим надоел микрокалькулятор, который они решительно называют «вчерашним днем вычислительной техники» (о, как они правы!). Словом, информатика интересует очень многих. При этом рейтинг рубрики оказался одним из самых низких. Это наводит на серьезные размышления. Мы надеемся, что нам удастся поправить положение, а насколько это получится у редакции — покажут ваши анкеты в нынешнем году.

Второе место среди пожеланий занимает просьба «давайте больше задач». Кому — занимательных, кому — трудных, а кому — нерешенных. Сложно выполнить эти требования, не превращая журнал в задачник, но мы попытаемся.

Просят больше писать об астрофизике и астрономии. Просят больше фантастики. Хотят видеть больше материалов о современных научных достижениях и больше статей о знаменитых ученых и по истории науки. Выпускники требуют больше информации о вузах у нас и за рубежом. И еще — больше информации о новых книгах. Больше, больше, больше!.. Мы согласны с вашими доводами, дорогие читатели, мы готовы удовлетворить ваши просьбы, но в нашем распоряжении всего 80 страниц. Поймите и не обижайтесь, если именно ваше хорошее, толковое предложение не удастся осуществить.

ПРОГУЛКА ДО ТЕОРЕМЫ ЧЕБЫШЁВА

В. УФНАРОВСКИЙ

> *Не так уж и трудно задачи решать:*
> *Проблема дает вдохновенье.*
> *Искусство же в том, чтоб суметь отыскать*
> *Задачу, когда есть решенье.*
>
> *П. Хэйн. Груки*[*])

Есть особая прелесть в прогулках «куда глаза глядят»: идешь, сам не зная куда, и вдруг встречаешь что-то совсем неожиданное, чего и в голову не могло прийти, когда начинал прогулку. Давайте и мы прогуляемся по одной хитрой математической тропинке.

Мы начнем ее с признака делимости на 9: *число n делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.* Можно даже более внушительно: *если от числа n отнять его сумму цифр, которую мы обозначим $\sigma(n)$, то результат всегда будет делиться на 9.*

А теперь присядем и поговорим об обозначениях. От их выбора, как ни странно, зависит очень и очень многое, поэтому в обозначениях математики всегда достаточно консервативны. Например, обозначение n любому математику скажет, что речь идет о целых, скорее всего, натуральных числах (кстати, а какое у нас?). Неспроста мы выбрали и обозначение σ — как-никак это маленькая буква «сигма», а большая Σ издревле используется для обозначения сумм. У нас сумма маленькая, так что и букву возьмем маленькую.

Посмотрим на обозначения еще с одной стороны. Вы, конечно, знаете, арабы пишут не так, как мы — слева направо, а, наоборот, справа налево. Но задумывались ли вы о том, что сами-то мы с числами обращаемся по-арабски — справа налево. Ну да, не поверите вы, ведь числа мы пишем слева направо. Это да. А складываете вы как? С какой цифры начинаете, с первой или с последней? А умножаете? Попробуйте наоборот! Это неудивительно, цифры и обозначения у нас, как известно, арабские. В действительности удобнее было бы писать и цифры справа налево, но что поделаешь: привычка — вторая натура. Чтобы обойти привычку, будем записывать число в другой форме — не через цифры, а через разложение в степени десятки, скажем, не 234, а $4+3\cdot10+2\cdot100$. Против этого наша привычка не восстает, поэтому запишем и наше число n в таком виде:

$$n=a_0+a_1\cdot10+a_2\cdot10^2+\ldots+a_k\cdot10^k,$$

где a_0 — последняя цифра, a_1 — предпоследняя, ..., a_k — первая, так что всего цифр $(k+1)$, а их сумма равна

$$\sigma(n)=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_k.$$

Ну а теперь ничего не стоит доказать наше утверждение:

$$n-\sigma(n)=(a_0-a_0)+a_1(10-1)+a_2(10^2-1)+\ldots+a_k(10^k-1)=0+9a_1+99a_2+\ldots+99\ldots9a_k,$$

что, конечно же, делится на 9 (кстати, сколько девяток в последней записи?).

Налюбовавшись результатами своего труда, продолжим прогулку. Что еще можно получить так же просто, не особенно напрягаясь? Можно менять одно из трех: задачу, доказательство и обозначения. Доказательство менять не хочется. Можем ли мы поменять задачу? Да, нетрудно придумать и доказать признак делимости на 11 — только сумму нужно брать знакочередующуюся $(a_0-a_1+a_2-a_3+\ldots)$. Если копнуть глубже, то получится что-то вроде универсального признака делимости (докажите его в качестве упражнения).

Задача. *Пусть m — натуральное число и $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — остатки чисел $10, 10^2, \ldots, 10^k$ при делении на m. Тогда число*

$$n-(a_0+a_1p_1+a_2p_2+\ldots+a_kp_k)$$

делится на m.

При $m=9$ получаем уже доказанный ранее результат. А как насчет 11? Для $m=7$ получаем последовательность $\{p_i\}$: 3, 2, 6; 4, 5, 1, 3, 2 и т. д. Поэтому остаток от 1992 при делении на 7 равен остатку $2+9\cdot 3+9\cdot 2+1\cdot 6=53$, что в свою очередь равно остатку $3+5\cdot 3=18$, что в свою очередь... Пожалуй, можно остановиться и сказать, что это 4. Не слишком интересно...

---

[*]) С груками П. Хэйна наши читатели смогут познакомиться в одном из ближайших номеров. *(Прим. ред.)*

Пойдем в другую сторону — попробуем поменять обозначения. Как еще можно обозначить наше число n? Тот, кто хоть немного знаком с программированием, сразу скажет — надо использовать другую систему счисления, например, двоичную:

$$n=b_0+b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2+\ldots+b_m\cdot 2^m,$$

где b_i — это нули и единицы. (Например, $25=1+0\cdot 2+0\cdot 4+1\cdot 8+1\cdot 6$.) Тут тоже своя сумма цифр: $\sigma_2(n)=b_0+b_1+b_2+\ldots$ (Цифра 2, конечно же, намекает на основание системы счисления, так что наша σ — это σ_{10}.)

Соответствующая теорема звучит так: $n-\sigma_2(n)$ делится на... А, в самом деле, на что? В десятичной системе делилось на $9=10-1$, значит, здесь должно делиться на $2-1=1$. Факт верный, но малоценный. А может, попробовать в общем случае, в p-ичной системе счисления, где p — произвольное основание? Запишем

$$n=a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots+a_kp^k$$
$$(\text{где } a_i<p)$$

и обозначим

$$\sigma_p(n)=a_0+a_1+a_2+\ldots+a_k,$$

получается красивая

Теорема 1. *$n-\sigma_p(n)$ делится на $(p-1)$.*

Докажем. Это очень просто — рассуждение не меняется: разность

$$n-\sigma_p(n)=$$
$$=(a_0-a_0)+a_1(p-1)+a_2(p^2-1)+\ldots$$
$$\ldots+a_k(p^k-1),$$

разумеется, делится на $(p-1)$.

Например, в восьмиричной системе счисления число, записанное как 124, делится на 7. Проверим?

$4+2\cdot 8+1\cdot 64=84$ — действительно, на 7 делится. Вот вам и новый признак делимости на 7. Жаль только, что к восьмиричной системе счисления мы не больно-то привычные.

Куда бы дальше пойти? Что бы еще извлечь из делимости? А что если... действительно поделить? В самом деле, вполне достойный вопрос: чему равно частное от деления:

$$\delta_p(n)=\frac{n-\sigma_p(n)}{p-1}\ ?$$

Интересно... Начнем хотя бы с $p=2$, там хоть делить не надо. Составим для начала табличку:

n_{10}	n_2	$\sigma_2(n)$	$\delta(n)=n-\sigma_2(n)$
0	0	0	0
1	1	1	0
2	10	1	1
3	11	2	1
4	100	1	3
5	101	2	3
6	110	2	4
7	111	3	4
8	1000	1	7
9	1001	2	7
10	1010	2	8
11	1011	3	8
12	1100	2	10

Что мы видим? При каждом нечетном n число $\delta(n)$ не меняется, на четном — меняется. А на сколько? Ага, как раз на столько, сколько нулей в конце двоичной записи числа n. А число это, как известно, есть максимальная степень двойки, на которую делится n. Например, $n=12$ делится на $4=2^2$, и шагнули мы на 2 — от 8 до 10. Значит, мы можем сказать, что $\delta(n)$ как бы считает, сколько степеней двойки есть в числах $1, 2, \ldots, n$ или, лучше сказать, в произведении $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, которое обозначается обычно $n!$ и называется *факториалом числа n*. Итак, вроде бы верен следующий факт: $\delta(n)=n-\sigma(n)$ *есть максимальная степень двойки, на которую делится число* $n!$ Докажем?

В бой, ясное дело, просится индукция. Для малых n все видно из таблицы. Давайте осуществим индукционный переход. Допустим, что для $(n-1)$ мы нужный результат уже получили: $(n-1)-\sigma_2(n-1)$ есть максимальная степень двойки, на которую делится число $(n-1)!$ Докажем для n. Число $n!$ отличается от $(n-1)!$ только тем, что оно в n раз больше. Значит, появится ровно столько новых степеней двойки, сколько их есть в числе n, а это как раз число нулей в конце двоичной записи числа n. А как насчет $n-\sigma_2(n)$ по сравнению с $(n-1)-\sigma_2(n-1)$? Само n по сравнению с $(n-1)$ увеличилось на 1. А как изменится $\sigma_2(n)$ по сравнению с $\sigma_2(n-1)$? Допустим, что в конце двоичной записи числа n стоит k нулей: ...1000...0. Тогда $(n-1)$ имеет вид ...0111...1 с k единицами на конце (разве что ноль может и отсутствовать). Значит, единиц стало на $(k-1)$ меньше, а общее изменение равно $1-(-(k-1))$, что как раз равняется k и тем самым индукционный переход оказывается верным.

Куда дальше? Ну, конечно, интересно — верно ли это в общем случае, т. е. правда ли, что

$$\delta_p(n)=\frac{n-\sigma_p(n)}{p-1}$$

есть максимальная степень p, делящая $n!$.

Упражнение 1. Докажите это для $p=3$.

Увы, при $p=4$ нас ждет разочарование. Число 6! делится на 4^2, но $\delta_4(6)=(6-3)/3=1\neq 2$. Причину мы откроем очень быстро — необходимо, чтобы p было простым.

Упражнение 2. Докажите справедливость утверждения для любого простого p.

К счастью, для решения вопросов о делимости кроме простых чисел нам больше ничего и не нужно. Но что нам делать с факториалами, куда приспособить только что полученные знания? Конечно же, в первую очередь, для биноминальных коэффициентов $C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}$ (которые иногда обозначают и по-другому: $\binom{n}{i}$).

Главная формула, с которой они связаны,— это бином Ньютона:

$$(x+y)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}y+C_n^2x^{n-2}y^2+\ldots$$

$$\ldots+C_n^{n-1}xy^{n-1}+y^n.$$

Для большей симметрии используем такое обозначение:

$$C_{m+n}^n=\frac{(m+n)!}{n!m!}.$$

Теперь, благодаря полученным знаниям, мы способны определить, на какую степень простого числа p делится данный биномиальный коэффициент. Она в точности равна

$$\frac{(m+n)-\sigma_p(m+n)-(n-\sigma_p(n))-(m-\sigma_p(m))}{p-1}=$$

$$=\frac{\sigma_p(m)+\sigma_p(n)-\sigma_p(m+n)}{p-1}.$$

Красиво! Например, если $\sigma_p(m+n)=\sigma_p(m)+\sigma_p(n)$, то C_{m+n}^n на p не делится, и наоборот. Любопытно, а когда такое бывает? Ну хотя бы тогда, когда при сложении в p-ичной системе счисления чисел m и n переносов из разряда в разряд не происходит. Скажем, если сложить числа, записанные в семиричной системе счисления как 23 и 32, то получим 55 без переносов. Вывод: так как $3+2\cdot 7=17$, $2+3\cdot 7=23$, то C_{40}^{17} на 7 не делится.

А если перенос есть? Допустим, в каком-то разряде i. Скажем, у m было число $r<p$, у n — число $s<p$, а их сумма $r+s$ оказалась больше p. Тогда в следующий разряд перейдет 1, а в этом — вместо $r+s$ будет записано $r+s-p$. Тем самым в числе $m+n$ сумма цифр за счет i-го разряда будет на $(p-1)$ меньше, чем $\sigma_p(m)+\sigma_p(n)$. Да, как забавно — как раз на $(p-1)$ мы и делим. Так ведь это замечательно! Как мы сразу не догадались — верна следующая.

Теорема 2. *Если p — простое число, то максимальная степень p, делящая C_{m+n}^n, равна количеству переносов при сложении чисел m и n в p-ичной системе счисления.*

Вот до какой теоремы мы добрели! Чтобы извлечь из такого неочевидного факта? Глаза разбегаются. Ну давайте простоты ради начнем с изучения C_{2n}^n — самого большого биномиального коэффициента среди всех, входящих в разложение бинома $(x+y)^{2n}$. (Кстати, а можете ли вы доказать, что он и впрямь самый большой?) Максимальная степень p, на которую он делится, равна количеству переносов, получающихся при сложении n с самим собой в p-ичной системе счисления. Допустим, что $n<p<2n$.

Тогда n в p-ичной системе записывается одной p-ичной «цифрой» (собственно n), а $2n$ — двумя, скажем, $2n=r+1\cdot p$. Это значит, что происходит ровно один перенос и, следовательно, p входит в C_{2n}^n ровно один раз. Таким образом, произведение всех простых чисел, заключенных между n и $2n$, не превосходит C_{2n}^n. Нельзя ли получить что-то попривлекательнее? Оценим C_{2n}^n грубо.

Если положить в биноме Ньютона $x=y=1$, то получится, что

$$1+C_{2n}^1+C_{2n}^2+\ldots+C_{2n}^n+\ldots$$

$$\ldots+C_{2n}^{2n-1}+1=2^{2n},$$

откуда

$$C_{2n}^n<4^n.$$

Точно таким же образом произведение всех простых чисел между $n/2$ и n меньше $4^{n/2}$, между $n/4$ и $n/2$ — меньше $4^{n/4}$ и т. д. Тогда произведение всех простых чисел между 1 и n меньше

$$4^{n/2}\cdot 4^{n/4}\cdot 4^{n/8}\cdot\ldots=4^{n/2+n/4+n/8+\ldots}<4^n.$$

В итоге мы бесплатно получили совсем неочевидный факт:

Теорема 3. *Произведение всех простых чисел, меньших n, не превосходит 4^n.*

Упражнение 3. Докажите это строго: мы слишком небрежно делили пополам, «забыв», что бывают и нечетные числа. (Возможно, что лучший способ строгого подхода — индукция.)

Пусть теперь $p\leqslant n$. Тогда в разложении n по крайней мере две p-ичные цифры. Если в разложении $2n$ их ровно две, то $2n<p^2$ и заведомо происходит не более одного переноса. Следовательно, верна

Лемма 1. *Если $p>\sqrt{2n}$, то максимальная степень p, делящая C_{2n}^n, не превосходит 1.*

Интересно, а когда делимости нет вообще? Так как $2n<p^2$, то $n=a_0+a_1p$, где $a_0<p$, $a_1<p/2$. Чтобы не было переносов, должно быть $a_0<p/2$. В частности, при $a_1=1$ получаем, что если $a_0=n-p<p/2$, то p не является делителем C_{2n}^n. Отсюда следует

Лемма 2. *Если $n\geqslant p>2n/3$, то p не является делителем C_{2n}^n $(n>2)$.*

Доказательство. $n<p+p/2=3p/2$, откуда $p>2n/3$.

Прикинем теперь, что происходит при малых значениях $p\leqslant\sqrt{2n}$. Там переносов уже может быть несколько, но во всяком случае не больше чем k, если $2n=a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots+a_kp^k$. Так как $2n\geqslant p^k$, то $\log_p 2n\geqslant k$, и мы можем сказать, что максимальная степень p, делящая C_{2n}^n, не превосходит $\log_p 2n$. Значит, для произвольного p справедлива

Лемма 3. *Пусть $N=p^m$ является делителем C_{2n}^n. Тогда $N\leqslant 2n$.*

Доказательство. $p^m\leqslant p^{\log_p 2n}=2n$.

Ну вот, теперь мы более или менее представляем себе структуру числа C_{2n}^n. Его разложение на степени простых чисел состоит из трех типов сомножителей:

1) Простые числа, большие n (и, естественно, меньшие $2n$) — каждое по одному разу.

2) Простые числа, меньшие $2n/3$, но большие $\sqrt{2n}$,— каждое не более одного раза.

3) Простые числа, меньшие $\sqrt{2n}$. Тут возможна делимость на p^k с $k>1$, но все равно полный вклад p^k каждого такого простого числа не превосходит $2n$.

Интересно, а может ли быть так, что первая группа отсутствует, т. е. между n и $2n$ нет простых чисел?

Тогда все сосредоточено во второй и третьей группах. Можем ли мы оценить их реальный вклад? Произведение всех чисел второй группы, по теореме 3, не превосходит $4^{2n/3}$. Простых чисел в третьей группе заведомо меньше чем $\sqrt{2n}-1$, так что их общий вклад, по лемме 3, не превосходит $(2n)^{\sqrt{2n}-1}$. В итоге: если между n и $2n$ нет простых чисел, то справедливо неравенство

$$C_{2n}^{n}<4^{2n/3}\cdot (2n)^{\sqrt{2n}-1}. \qquad (*)$$

Какая мысль! Ведь если мы докажем, что это неравенство ложно, то одновременно докажем знаменитый постулат Бертрана: между n и $2n$ всегда имеется хотя бы одно простое число. Попробуем оценить C_{2n}^{n}. Коль скоро это самый большой из биномиальных коэффициентов, входящих в бином $(1+1)^{2n}$, и так как их всего там $2n+1<4n$, то заведомо $C_{2n}^{n}>\frac{4^n}{4n}$. Из полученных неравенств следует, что

$$\frac{4^n}{4n}<4^{2n/3}\cdot (2n)^{\sqrt{2n}-1},$$

$$4^{n/3}<2\cdot(2n)^{\sqrt{2n}},$$

$$n/3<\sqrt{2n}\,\log_4 2n+\frac{1}{2},$$

$$\sqrt{n}<\sqrt{18}\,\log_4 2n+\frac{1}{2}.$$

Но хорошо известно, что логарифм — функция медленная и $\sqrt{n}$ ее обгонит. Осталось понять когда. Прикинем, что будет при $n=1000$. Заведомо, $\sqrt{1000}>30$, $\log_4 2000<\log_4 4096=\log_4 4^6=6$, т. е. $30<\sqrt{18}\times 6+\frac{1}{2}$, что неверно. Значит, при $n=1000$ и (как вы, надеемся, легко с помощью производной докажете) для $n>1000$ неравенство $(*)$ — ложное. Значит, для этих значений n справедлива

Теорема Чебышёва (постулат Бертрана). *Между n и $2n$ всегда имеется хотя бы одно простое число.*

Хорошо, а что делать с маленьким n? Там же, вроде бы, неравенство верно. Ну и бог с ним — постулат-то Бертрана тоже верен — и в этом легко убедиться, попросту просмотрев таблицу простых чисел или написав махонькую программку. Если хотите, можно и иначе — проявив больше щепетильности к оценкам, получить более точное неравенство (см., например, книгу В. Серпинского «250 задач по элементарной теории чисел»). Это уж дело вкуса.

Но, пожалуй, наша прогулка затянулась. Пора и отдохнуть, а если вы еще захотите прогуляться — для затравки несколько задачек.

1. Докажите, что для простого p и любых целых x, y число $(x+y)^p-x^p-y^p$ делится на p.

2. Обобщите предыдущую задачу на случай нескольких слагаемых и выведите отсюда малую теорему Ферма: x^p-x делится на p.

3. Докажите, что если $N=p^m$ — степень простого числа p делит биномиальный коэффициент C_n^l, то $N\leqslant n$.

4. Докажите, что есть два простых числа между n и $2n$ для $n>5$.

5. Докажите, что если p_k — k-е по счету простое число, то $p_{k+2}<2p_k$.

6. Докажите, что $n!$ не является степенью никакого числа при любом $n>1$.

Вниманию абитуриентов!

Вышел в свет

«КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК ПО ФИЗИКЕ» карманного формата,
авторы *А. К. Цатурян* **и** *А. И. Черноуцан.*

Справочник, не имеющий аналогов в учебной литературе,
составлен в виде конспектов ответов на вопросы
экзаменационных билетов.
Предназначен для ускоренного повторения забытого материала
непосредственно перед школьными или вступительными экзаменами.

По вопросам распространения обращаться по телефону
(095) 447-32-64.

ЗАКОН КИРХГОФА

Кандидат педагогических наук
Я. АМСТИСЛАВСКИЙ

Изучение закономерностей свечения нагретых тел — теплового, или температурного, излучения — сыграло особую роль в развитии физической науки. Достаточно упомянуть, что исследования именно теплового излучения положили начало всей квантовой теории. Один из основополагающих законов теплового излучения был сформулирован немецким физиком Кирхгофом в 1859 году. О нем наш рассказ.

Может ли черное быть светлым?

Вначале о «черном». Понятие «черное» в физике связывают со свойством тел поглощать падающее на них излучение (в видимой или какой-либо иной части спектра). Чем тело чернее, тем бо́льшую долю излучения это тело поглощает. Абсолютно черное тело — ниже мы будем называть его сокращенно а. ч. т.— поглощает все падающее на него излучение целиком, причем во всех областях спектра. Понятие, противоположное «черному»,— «белое». Чем больше тело отражает, тем меньше оно поглощает и тем менее черным оно оказывается.

Теперь о «светлом». Под светлым телом понимают такое, которое много излучает (в видимой или другой части спектра). Причем чем больше тело излучает, тем оно светлее. Противоположным понятием «светлому» является «темное». Светлое тело излучает много, темное — мало.

Таким образом, «черное» и «светлое» (так же, как «черное» и «темное») — понятия разного «порядка». Они затрагивают различные свойства тел. Важный вопрос заключается в том, связаны ли эти свойства между собой. Если такая связь существует и имеет универсальный характер, то, зная поглощательные свойства тела, можно предсказать, как данное тело будет излучать в тех или иных условиях.

Из повседневного опыта мы хорошо знаем, что одно и то же тело при разной температуре излучает по-разному. Достаточно вспомнить, как сильно изменяется видимое глазом излучение нити накала электрической лампочки при увеличении тока: от едва заметного вишнево-красного свечения при $T=800$ К к ослепительно белому калению при $T=2800$ К. Не менее разительные превращения, обязанные своим происхождением изменению температуры тела, каждый из читателей, конечно же, неоднократно наблюдал, рассматривая (возможно, без должного интереса) коптящее пламя. Раскаленные до высокой температуры (порядка 1800 К) «черные» частички угля (сажа) ярко светятся и образуют в совокупности желтые языки пламени (здесь черное оказывается светлым), но такие же черные частички сажи, не сгоревшие и успевшие охладиться, образуют в совокупности темные, как смоль, язычки копоти (а здесь уже черное стало темным). Очевидно поэтому, что сопоставление поглощательных и испускательных свойств различных тел необходимо производить при одинаковых температурах тел.

В обычной жизни мы чаще наблюдаем тела при комнатной температуре. Причем нередко в наше поле зрения попадают и черные (для видимой или более широкой спектральной области) тела. Это может быть черная материя, кусок угля, закопченный предмет, оперение птиц, отверстие норы или пещеры, гнездо в скале и т. д. При сопоставлении черного тела с расположенными по соседству с ним нечерными телами мы видим, что первое оказывается темным, тогда как нечерные тела — значительно более светлыми. Отсюда нередко делается подсознательный вывод о том, что черное — всегда темное, причем чем чернее — тем темнее. Этот вывод глубоко ошибочен.

Все легко объясняется, если учесть два обстоятельства. Во-первых, тела мы всегда сравниваем при дневном или электрическом освещении (никто ведь не делает это темной ночью или в затемненном помещении) и воспринимаем мы совсем не собственное температурное излучение тел, а рассеянный ими свет «чужого» высокотемпературного излучателя — Солнца или лампы накаливания. Нечерные тела, в отличие от черных, сильно рассеивают это «чужое» излучение, а потому и кажутся светлыми. Во-вторых, наблюдаем мы обычно невооруженным глазом. Этот чудесный прибор чувствителен, однако, только к видимой области — ничтожному участку спектра электромагнитного излучения. А при комнатной температуре в этой области ни одно тело не излучает практически ничего!

Анализ вопроса о связи поглощательных и излучательных свойств тел и привел Кирхгофа к важному выводу, который получил название закона Кирхгофа. Его можно сформулировать так: *чем больше при данной температуре тело поглощает, тем больше оно и испускает (чем тело чернее, тем оно светлее).*

Чтобы записать закон Кирхгофа, сформулируем понятие поглощательной и испускательной способностей. Под поглощательной способностью $A_{\lambda,T}$ тела будем понимать долю падающего излучения с длиной волны λ, которая поглощается данным телом, находящимся при абсолютной температуре T. Поглощательная способность — величина безразмерная, принимающая в зависимости от свойств тела значение в интервале от 0 до 1. Причем $A=0$ в случае абсолютно белого тела*) и $A=1$ в случае а. ч. т.

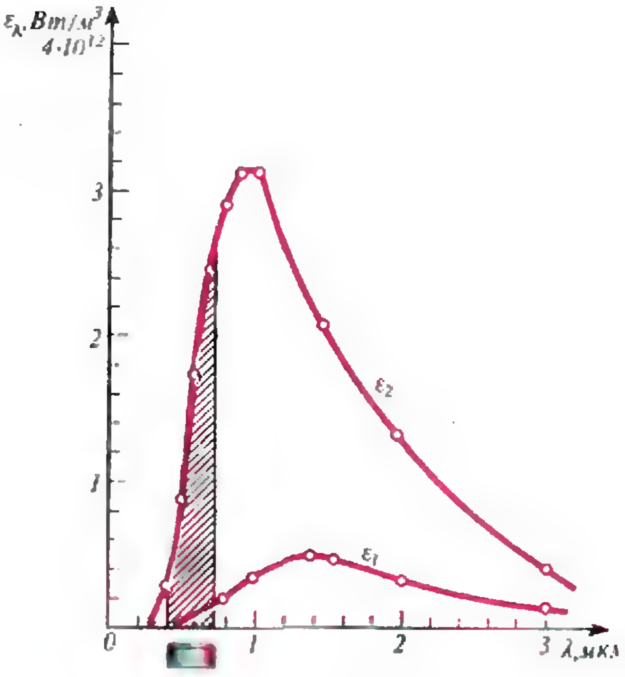


Рис. 1.

Под излучательной способностью $E_{\lambda,T}$ понимают энергетическую величину, равную мощности, излучаемой данным телом в пределах единичного спектрального интервала длин волн вблизи λ*) с единицы площади поверхности нагретого тела при температуре T.

Предположим, что мы имеем несколько тел с разными $A_{\lambda,T}$, причем среди них есть и а. ч. т., и абсолютно белое тело. Пусть все тела нагреты до одной и той же достаточно большой температуры T. Из закона Кирхгофа следует, что наши тела будут излучать по-разному, ярче всех будет светиться а. ч. т., тогда как белое тело будет совершенно темным. Выделим а. ч. т., обозначив $E_{\lambda,T}^{\text{а. ч. т.}}=\varepsilon_{\lambda,T}$, $A_{\lambda,T}^{\text{а. ч. т.}}=a=1$. Очень важно, что излучение а. ч. т. не только самое интенсивное при данной температуре, но и имеет строго определенный спектральный состав. Иначе говоря, функция $\varepsilon_{\lambda,T}$ представляет собой универсальную функцию λ и T. С учетом приведенной выше формулировки и данных определений запишем закон Кирхгофа в виде

---

*) Или в случае абсолютно зеркального тела (идеального зеркала). Абсолютно белая поверхность рассеивает все падающие лучи равномерно по всем направлениям, а абсолютно зеркальная отражает все лучи.

*) Во избежание недоразумений отметим, что «в пределах единичного спектрального интервала» не означает, что $\Delta\lambda$ равно, скажем, 1 метру. Имеется в виду, что мощность излучения пропорциональна $\Delta\lambda$: $\Delta W/(\Delta S\Delta t)=E_{\lambda,T}\Delta\lambda$, где ΔW — энергия, излученная в интервале длин волн $\Delta\lambda$ за время Δt с площадки ΔS.

$$E_{\lambda,T}=A_{\lambda,T}\varepsilon_{\lambda,T}\,. \qquad (1)$$

Вид функции $\varepsilon_{\lambda,T}$ был найден теоретически немецким физиком М. Планком в 1900 году. По Планку,

$$\varepsilon_{\lambda,T}=2\pi c^2h\lambda^{-5}\left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1\right)^{-1}, \qquad (2)$$

где $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света в вакууме, $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, $k=1{,}38\times\times10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

При фиксированной температуре тела T функции A, E, ε зависят только от λ. В этом случае их обозначают соответственно A_λ, E_λ, ε_λ. График функции Планка для двух температур $T_1=2000$ К и $T_2=3000$ К приведен на рисунке 1.

Может ли красное стать синим?

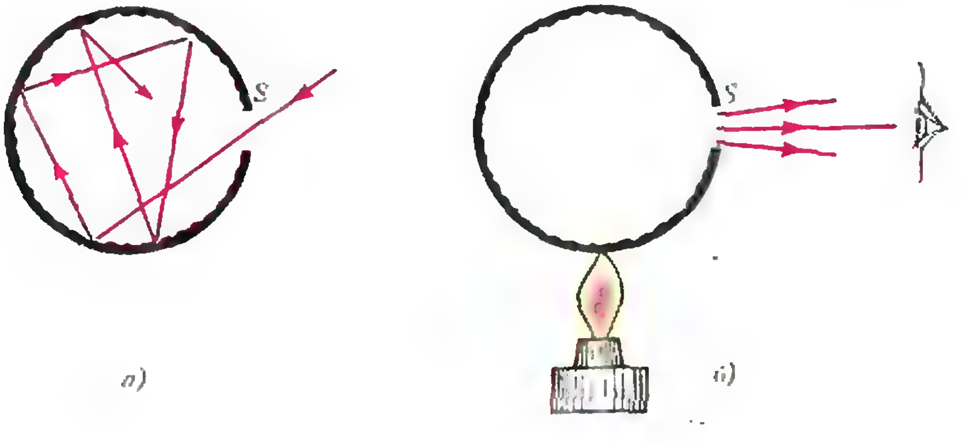
Наиболее удобной моделью а. ч. т. является малое отверстие в замкнутой оболочке из тугоплавкого или огнеупорного материала. Температуру тела изменяют при помощи электрического или какого-либо другого нагревателя. Форма оболочки существенной роли не играет.

Обратимся к модели а. ч. т. в виде полой сферы из тугоплавкого металла с зачерненной внутренней поверхностью (рис. 2). Луч света, падающий извне на отверстие S, проходит внутрь полости и, испытывая многократные отражения, быстро ослабевает и из полости практически не выходит, причем это имеет место *для любой* части спектра и при любой температуре. Следовательно, отверстие S нашей модели обладает свойствами а. ч. т. Может показаться, что, поглощая все, отверстие не излучает ничего. Это — глубокое заблуждение. Отверстие действительно не излучает ничего «чужого». Но, поглощая все падающее излучение и полностью «перерабатывая» его, а. ч. т. формирует свое *собственное излучение*, соответствующее данной температуре T. Из закона Кирхгофа следует, что по сравнению с излучением любого *другого* тела, нагретого до той же температуры T, излучение отверстия S будет наиболее сильным. Первым, кто предложил использовать отверстие в замкнутой оболочке в качестве абсолютно черного излучателя, был сам Кирхгоф (1859 г.). Однако лишь много лет спустя экспериментальные исследования температурного излучения на модели а. ч. т. стали традиционными.

Обсудим три примера, иллюстрирующих закон Кирхгофа.

1. Предположим, что внешняя поверхность сферы (см. *рис. 2*) *отполирована* до блеска и обладает зеркальными свойствами в широкой спектральной области. Что увидит наблюдатель, рассматривающий эту сферу со стороны отверстия S, при двух состояниях тела: а) при комнатной температуре ($T=300$ К) и б) при температуре белого каления ($T=3000$ К)?

а) Для исключения маскирующего влияния «чужого» излучения будем



а)

б)

Рис. 2.

проводить наблюдения в хорошо затемненном помещении. Но, рассматривая наше тело в таких условиях невооруженным глазом, мы не увидим ничего, потому что при $T=300$ К в пределах видимой части спектра ($0,4 \cdot 10^{-6}$ м$\leqslant\lambda\leqslant 0,76 \cdot 10^{-6}$ м) функция Планка ε_λ в соответствии с формулой (2), имеет исчезающе малую величину. Тем не менее, тело, нагретое до $T=300$ К, все-таки излучает, причем больше всего в той части спектра, где функция ε_λ достигает максимума, а именно на длине волны $\lambda^m=10 \cdot 10^{-6}$ м (10 мкм), что соответствует средней части инфракрасной области спектра. Исходя из закона Кирхгофа, можно сделать вывод, что в инфракрасных лучах отверстие S должно ярко «светиться» на темном фоне остальной части сферы. Но «увидеть» такую картину мог бы только глаз, который имел бы высокую чувствительность в области 10 мкм, или глаз, вооруженный подходящим преобразователем инфракрасного излучения в видимое.

б) При нагревании тела до температуры белого каления функция ε_λ в видимой части спектра резко возрастает. Как следует из формулы (2), при изменении T от T_1 до T_2 излучательная способность а. ч. т. в данной спектральной области λ возрастает в

$$\frac{\varepsilon_{\lambda,\,T_2}}{\varepsilon_{\lambda,\,T_1}}=\exp\frac{hc}{\lambda k}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)\ \text{раз.}$$

(Этот результат легко получается из (2), если учесть, что $\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)\gg 1$.) Для середины видимой области спектра ($\lambda=0,55 \cdot 10^{-6}$ м) при $T_2=3000$ К и $T_1=300$ К ($T_2/T_1=10$) имеем

$$\frac{\varepsilon_{\lambda,\,T_2}}{\varepsilon_{\lambda,\,T_1}}=e^{78}=10^{34}!$$

Поэтому теперь никакого преобразователя излучения не требуется, и ярко святящееся отверстие S мы увидим на темном фоне остальной части тела уже непосредственно невооруженным глазом («чем чернее, тем светлее»).

2. Предположим, что мы имеем цветной камень — тугоплавкий минерал, который при рассматривании на просвет кажется красным (рис. 3, *а*), поскольку он сильно поглощает голубые, синие и фиолетовые лучи, для которых $A_\lambda=1$, и прозрачен для красно-оранжевой части спектра, где $A_\lambda=0$. Для определенности предположим также, что с повышением температуры область интенсивного поглощения практически не смещается по спектру. Будет ли светиться этот камень при его нагревании, например, до $T=3000$ К? Если да, то будет ли свечение окрашенным и как?

При $T=3000$ К функция Планка ε_λ в видимой области спектра достаточно велика, и по закону Кирхгофа на участках сильного поглощения, где $A_\lambda=1$, накаленный минерал должен давать интенсивное свечение: $E_\lambda=A_\lambda\varepsilon_\lambda$. Поскольку сильное поглощение захватывает только коротковолновую часть видимой области спектра, это свечение должно быть окрашенным и иметь сине-голубой цвет (рис. 3, *б*).

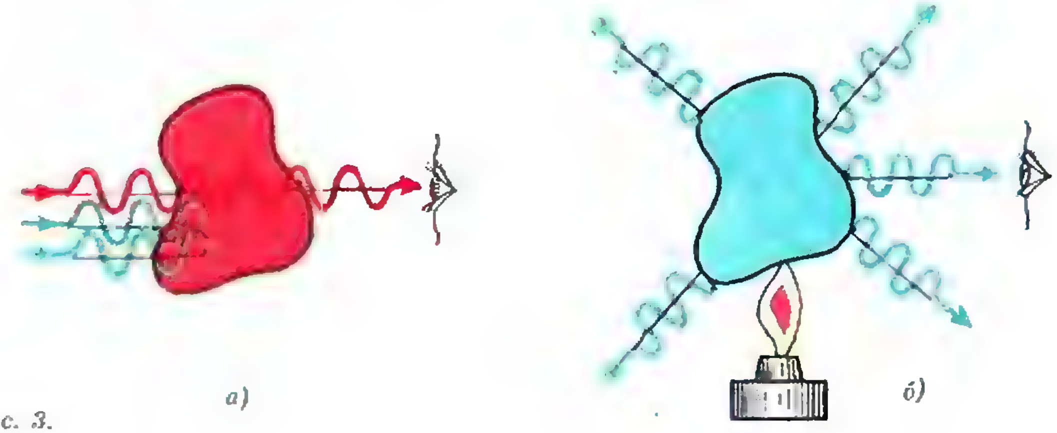

а) *б)*

Рис. 3.

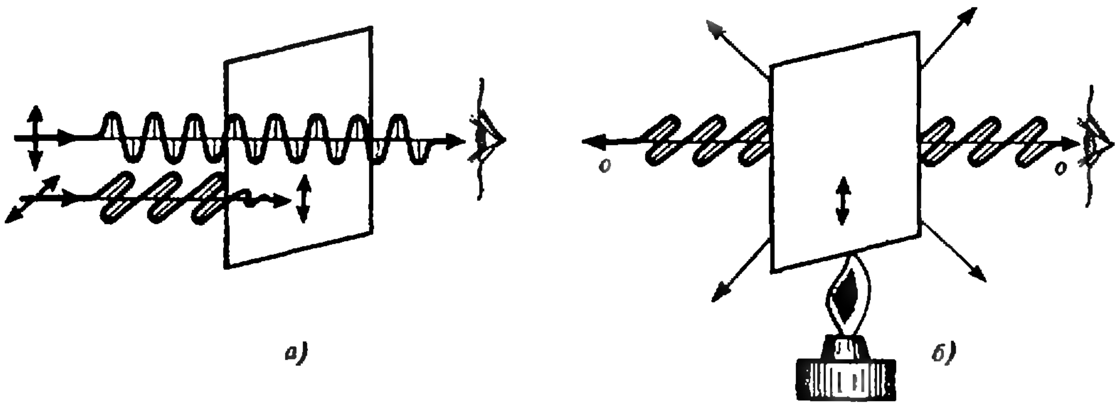
Интересный опыт с плавленым кварцем осуществил американский физик-экспериментатор Р. Вуд в начале XX века. В видимой области спектра плавленый кварц прозрачен, и поглощение здесь практически отсутствует, т. е. $A_\lambda = 0$. Поэтому столбик плавленого кварца, нагретый на газовой горелке, остается темным, несмотря на высокую температуру. Вуд «окрасил» плавленый кварц — добавил к нему некоторое количество окиси неодима и приготовил однородный расплав. Известно, что растворы редких земель (и в том числе — неодима) имеют узкие области сильного поглощения в видимой части спектра. Естественно поэтому, что и в окрашенном расплаве кварца также появились полосы поглощения. У неодима они располагаются в красной, оранжевой и зеленой частях спектра. Если теперь столбик из такого расплава нагреть на той же газовой горелке, что и ранее, то, в отличие от первого случая, он заметно светится. Вуд исследовал это свечение с помощью спектроскопа и убедился в том, что оно состоит из ярких полос как раз в красной, оранжевой и зеленой частях спектра.

3. Известно, что некоторые кристаллические вещества по-разному поглощают свет, поляризованный в разных плоскостях. Для одного направления световых колебаний коэффициент A_λ больше, а для другого (при тех же λ и T) — меньше. Классическим примером такого вещества является турмалин — одноосный окрашенный (часто — зеленый) тугоплавкий кристалл, который сильнее поглощает обыкновенные колебания (рис. 4, *а*). Поэтому при толщине в несколько миллиметров такой кристалл представляет собой изготовленный самой природой поляризатор: он пропускает свет с колебаниями, лежащими практически в одной плоскости. Вопрос сводится к следующему. Какими поляризационными свойствами обладает свечение накаленного кристалла турмалина?

Для обыкновенных (*о*) и необыкновенных (*е*) колебаний (от англ. ordinary и extraordinary) коэффициент A_λ различен (для *о*-колебаний он больше). Поэтому *о*- и *е*-колебания по-разному будут представлены и в излучении. Из закона Кирхгофа следует, что свечение накаленного турмалина должно быть частично поляризованным с заметным преобладанием *о*-колебаний (рис. 4, *б*). Именно этот результат впервые наблюдал сам Кирхгоф при качественном исследовании излучения накаленного турмалина (1859 г.). Более поздние количественные исследования явления, выполненные уже в начале XX столетия, хорошо подтвердили соотношение $A^e/A^o = E^e/E^o$.

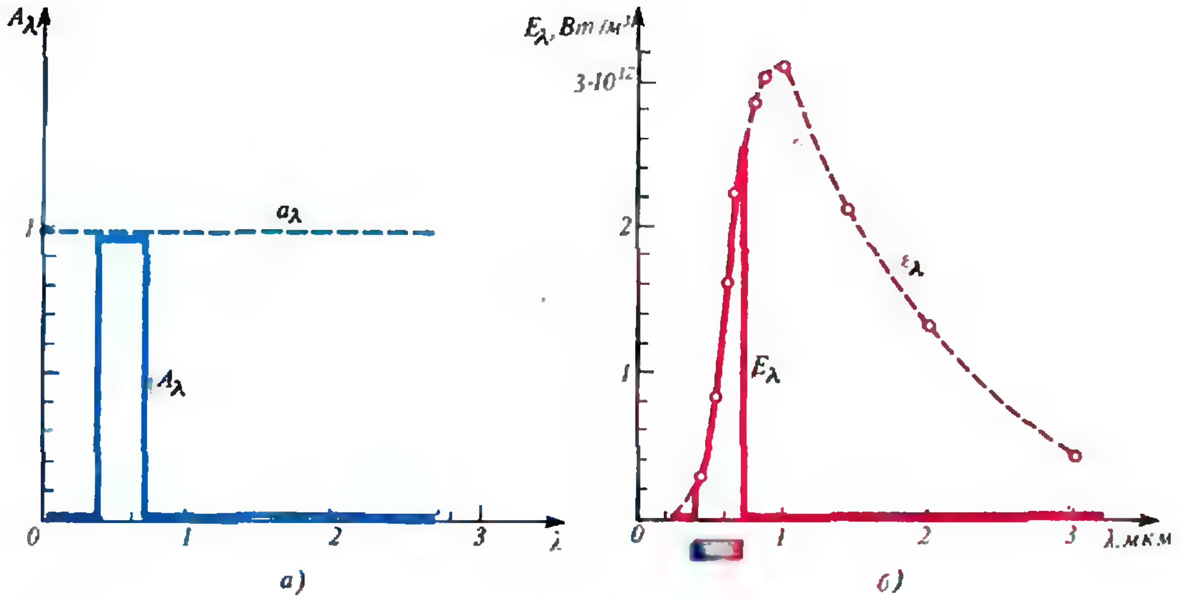
Могут ли три ватта равняться ста ваттам?

Одно из важных применений нагретых тел — использование их в качестве источников света. Вспомним, например, лампы накаливания, кото-



а) б)

Рис. 4.



а) б)

Рис. 5.

рые среди разнообразных источников света и сегодня играют важную роль. Переходя к обсуждению светотехнических приложений закона Кирхгофа, отметим, что в излучении а. ч. т. на видимую часть спектра (заштрихованная часть графика на рис. 1) приходится очень малая доля общей энергии излучения: при $T=2000$ К — около 0,3%, при $T=3000$ К эта величина возрастает до 3 %, оставаясь по-прежнему слишком малой. В случае вольфрамового излучателя, как это будет показано ниже, положение дел чуть-чуть лучше. Однако из-за неизбежных дополнительных потерь на теплопроводность и конвекцию КПД современных вольфрамовых ламп накаливания практически не превосходит 2—3 %. Это значит, что в лучшем случае 97 % подводимой к такой лампе мощности летит, так сказать, «в трубу».

Теперь немного пофантазируем. Предположим, что создан или найден тугоплавкий (например, до $T=3000$ К) электропроводящий материал с сильным поглощением при высокой температуре в видимой области спектра ($A_\lambda=1$) при практически полном отсутствии поглощения во всех остальных частях спектра ($A_\lambda=0$). Из закона Кирхгофа следует, что использование такого материала в качестве рабочего тела лампы накаливания обеспечило бы экономию огромных мощностей. Действительно, светоотдача подобной лампы мощностью в несколько ватт соответствовала бы светоотдаче современной 100-ваттной лампы.

В плане обсуждаемой проблемы интерес представляет следующая задача. Какой вид должна иметь функция A_λ для достижения максимально возможной светоотдачи при условии: наибольшей для данного значения T яркости источника или сочетания высокой яркости источника с наиболее благоприятным для человеческого глаза цветовым составом излучения?

Назовем источники, удовлетворяющие требуемым свойствам, соответственно S_1 и S_2. Искомые функции A_λ для них изображены на рисунках 5,*а* и 6,*а*, а излучательные способности E_λ — на рисунках 5,*б* и 6,*б*. Из закона Кирхгофа следует, что оба источника по своей экономичности оказываются идеальными — они излучают только видимый свет, так как вне этой области $A_\lambda=0$. Но бо́льшую яркость при данной температуре имеет источник S_1, который излучает свет как а. ч. т. Однако этот свет имеет красноватый оттенок, обусловленный преобладанием теплых тонов, поскольку E_λ быстро возрастает с

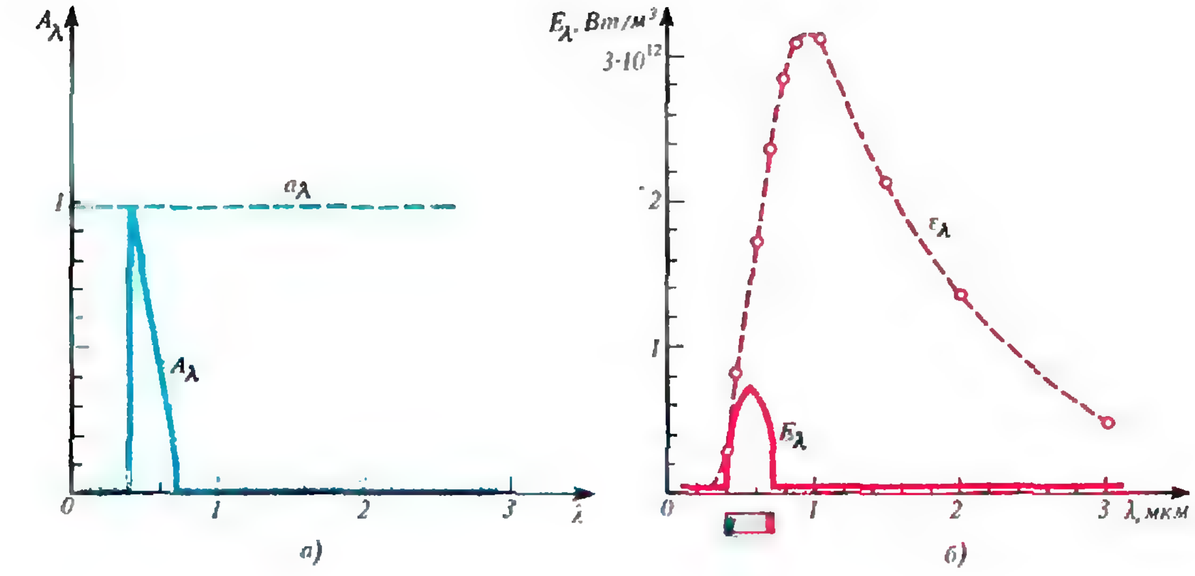
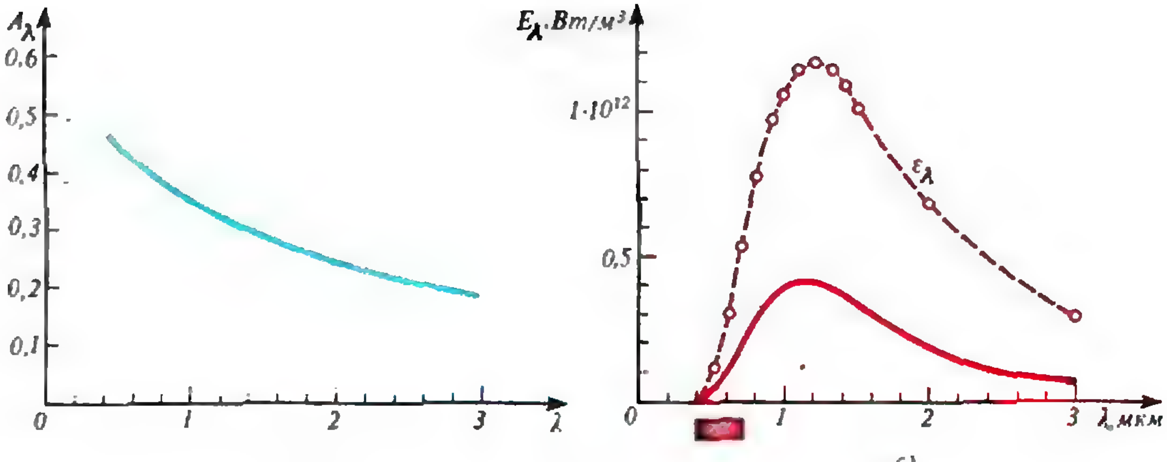


Рис. 6.

увеличением λ. В излучении источника S_2 теплые тона ослаблены за счет уменьшения A_λ в длинноволновой части спектра, и распределение энергии близко́ к распределению световой энергии в спектре Солнца. Свет источника S_2 оказывается более «белым» и более благоприятным для человеческого глаза. (Не исключаю, что кто-нибудь из читателей предложит еще более удачный вариант источника). Нетрудно видеть, что появление такой лампы, как S_1 или S_2, повлекло бы за собой революционные изменения в светотехнике. Но для достижения такого результата необходимо было бы предварительно совершить революцию в технологии — научиться изготавливать материалы с наперед заданными свойствами (коэффициентом поглощения, тугоплавкостью и т. д.).

Реальные тепловые источники света, к сожалению, мало сходны с рассмотренными выше идеальными сверхэкономичными источниками S_1 или S_2. Хотя иногда можно обнаружить и общие элементы. В этом плане небезынтересно упомянуть ауэровскую горелку. Как излучатель видимого света и инфракрасных лучей среднего диапазона ауэровская горелка получила известность еще в начале XX столетия и в наши дни представляет скорее исторический интерес. Тем не менее, свойства этого излучателя достаточно любопытны. Основной частью горелки является тугоплавкий сетчатый колпак, нагреваемый в газовом пламени до 1800 К. Сетка изготавливается из окиси тория с добавлением небольшого количества (от 0,75 до 2,5 %) окиси церия. Наличие окиси церия обеспечивает сильное, практически как у а. ч. т., поглощение во всей видимой области спектра и близкое к а. ч. т. поглощение в средней инфракрасной области, тогда как в ближней инфракрасной области поглощение практически отсутствует. Поэтому в излучении ауэровской горелки выпадает наиболее энергетичная в спектре а. ч. т. при $T=1800$ К ближняя инфракрасная область, и при небольшом суммарном излучении эта горелка представляет собой сильный, почти как а. ч. т., источник видимого света и инфракрасных лучей среднего диапазона.

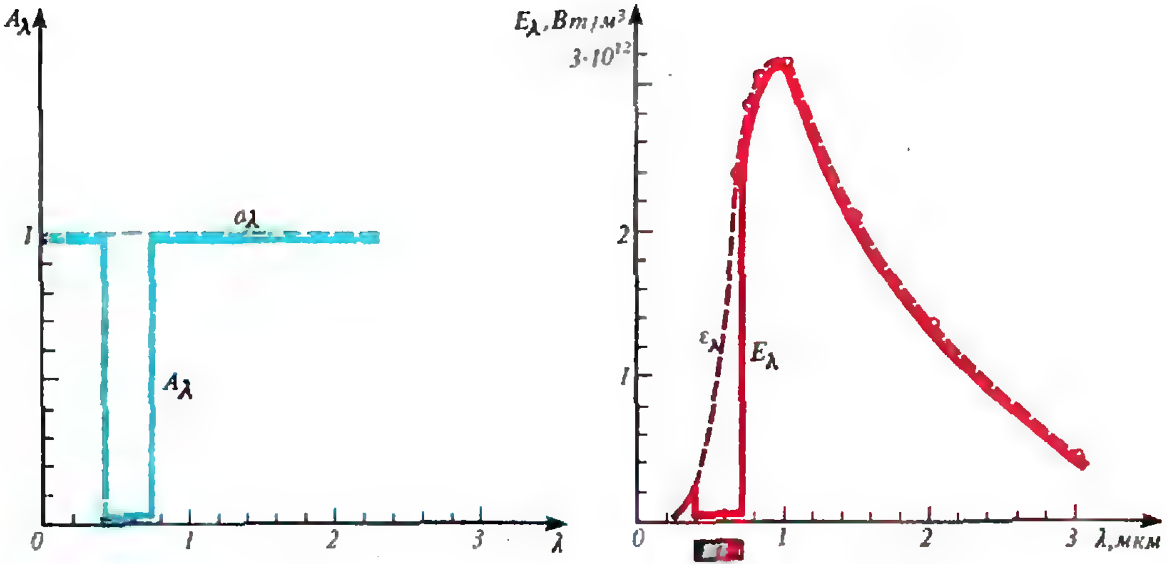
Перейдем к лампам накаливания. Основным материалом, используемым в качестве рабочего тела современной лампы накаливания, является вольфрам. Зависимости A_λ и E_λ для вольфрама при $T=2450$ представлены на рисунке 7. Как видно из рисунка, вольфрам излучает значительно мень-



а)

б)

Рис. 7.



а)

б)

Рис. 8.

ше, чем а. ч. т. при той же температуре, по всему широкому спектру. Причем в видимой области — вдвое меньше, что для источника света, конечно, плохо. Но, вместе с тем, в инфракрасной области вольфрам излучает втрое — впятеро меньше, чем а. ч. т., что для источника света уже хорошо, поскольку при этом существенно снижается потребляемая им мощность. Резюмируя, можно сказать, что, будучи не столь ярким излучателем света, как а. ч. т. при той же температуре, вольфрамовая лампа оказывается несколько более приятным для глаза и заметно более экономичным источником. Правда, ее КПД остается очень низким и, как уже говорилось, практически не превосходит 3 %. Естественно, что увеличение КПД ламп накаливания даже на несколько процентов при сохранении их достоинств явилось бы уже заметным достижением в области светотехники.

В заключение, дорогой читатель, небольшой контрольный вопрос.

На рисунке 8 изображены кривые A_λ и E_λ для некоторого нагретого тела. Что можно сказать об этом теле и его излучении?

Задачник „Кванта"

Задачи

М1346—М1350, Ф1353—Ф1357

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 августа 1992 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1346» или «Ф1353». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задача Ф1353 предлагалась на XVIII Всероссийской олимпиаде по физике, а задачи Ф1355 и Ф1356 — на Межреспубликанской физической олимпиаде 1992 года.

М1346. Внутри окружности радиусом 1 расположена замкнутая (самопересекающаяся) ломаная, содержащая 51 звено, причем длина каждого звена равна $\sqrt{3}$. Для каждого угла этой ломаной рассмотрим треугольник, двумя сторонами которого служат стороны этого угла (таких треугольников всего 51). Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше, чем утроенная площадь правильного треугольника, вписанного в данную окружность.

А. Берзиньш

М1347. Имеется 100 серебряных монет, упорядоченных по весу, и 101 золотая монета, также упорядоченные по весу. Известно, что все монеты различны по весу. В нашем распоряжении — двухчашечные весы, позволяющие про каждые две монеты установить, какая тяжелее. Как за наименьшее число взвешиваний найти монету, занимающую по весу 101-е место? Укажите это число и докажите, что меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя.

А. Анджанс

М1348. Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Стороны B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ параллельны, соответственно, отрезкам PA, PB, PC. Через точки A_1, B_1, C_1 проведены прямые, параллельные соответственно BC, CA и AB. Докажите, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$.

В. Прасолов

М1349*. Круг разбит на n секторов. В некоторых из них стоят фишки; всего фишек $n+1$. Затем позиция подвергается следующим преобразованиям: берутся какие-нибудь две фишки, стоящие в одном секторе, и переставляются в разные стороны в соседние сектора. Докажите, что после некоторого числа таких преобразований не менее половины секторов будет занято фишками.

Д. Фомин

М1350*. Пусть n и b — натуральные числа. Через $V(n;\ b)$ обозначим число разложений n в произведение (одного или нескольких) сомножителей, каждый из которых больше b (например: $36=6\cdot 6=4\cdot 9=3\cdot 3\cdot 4=3\cdot 12$, так что $V(36;\ 2)=5$). Докажите, что $V(n;\ b)<n/b$.

Н. Васильев

Ф1353. Найдите минимально возможный период обращения космического корабля вокруг Земли, зная, что видимый с Земли угловой размер Солнца $\alpha = 9{,}3\cdot 10^{-3}$ рад.

М. Гаврилов

Задачник «Кванта»

Ф1354. Шайба массой M скользит по льду со скоростью v_0 и налетает на неподвижную шайбу, масса которой $2M$. После удара первая шайба останавливается, а вторая начинает двигаться. Она достигает бортика и, упруго от него отразившись, ударяет первую шайбу «в лоб». Найдите скорости обеих шайб после этого. Считайте, что при соударении шайб в тепло переходит определенная часть максимальной энергии деформации.

А. Варгин

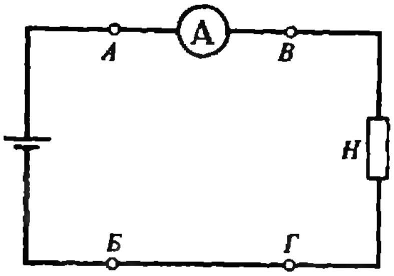


Рис. 1.

Ф1355. Нагреватель для аквариума H подключен к батарее последовательно с амперметром, который показывает ток 0,1 А (рис. 1). К точкам A и $Б$ подключили резистор, после чего ток упал до 0,05 А. Резистор отключили от A и $Б$ и подключили к точкам $В$ и $Г$ — ток в этом случае составил 0,3 А. Найдите КПД схемы во всех трех случаях. Сопротивления амперметра и проводов пренебрежимо малы.

Примечание: КПД схемы — это отношение мощности нагревателя к полной мощности, производимой батареей.

З. Рафаилов

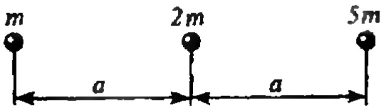


Рис. 2.

Ф1356. Три маленьких заряженных шарика закреплены на одной прямой, расстояния между соседними шариками a (рис. 2). Массы шариков m, $2m$ и $5m$, заряды их q, q и $2q$ соответственно. Шарики отпускают. Найдите их скорости после разлета на большие расстояния.

А. Зильберман

Ф1357. При помощи фотоаппарата «Смена» делают снимок светящейся точки с расстояния 1 м. Рука фотографа дрожит, и вместо точки на пленке получается небольшое пятно. Оцените размеры этого пятна, если амплитуда смещения любой точки фотоаппарата не превышает 1 мм. Фокусное расстояние объектива 50 мм. Выдержку считайте большой.

А. Ящиков

Решения задач

М1316—М1220, Ф1333—Ф1337

М1316. *Докажите, что арифметическая прогрессия из различных натуральных чисел, ни одно из которых не содержит в своей десятичной записи цифры c, состоит а) при $c \neq 0$ не более чем из 72 чисел, б) при $c = 0$ не более чем из 80 чисел. Достигаются ли эти оценки?*

Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — бесконечная арифметическая прогрессия, первый член a_1 и разность d которой — натуральные числа.

Известна несложная задача на доказательство: *для любой данной цифры c найдется член прогрессии, в записи которого встречается c.* Мы же должны доказать более тонкое утверждение: такой член найдется уже среди $a_1, \ldots, a_{73}$ (при $c \neq 0$) или среди $a_1, \ldots, a_{81}$ (при $c = 0$).

Если в k-м справа разряде у натурального числа N стоит цифра c, то остаток от деления N на 10^k лежит на промежутке $[c \cdot 10^{k-1};\ (c+1) \cdot 10^{k-1})$.

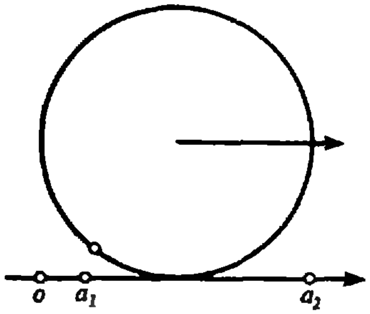


Рис. 1.

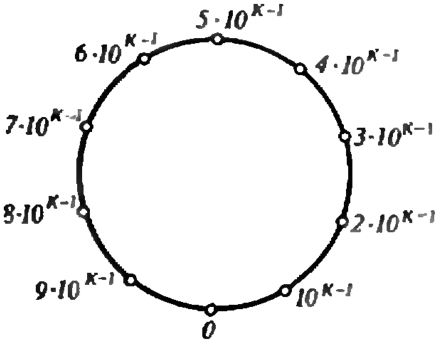


Рис. 2.

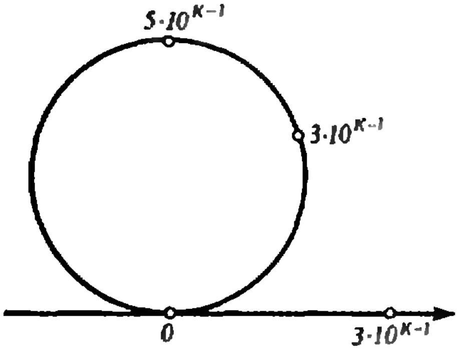


Рис. 3.

Поэтому естественно изучить остатки членов прогрессии при делении на числа вида 10^k, для чего рассмотрим еще одну достаточно известную задачу.

Пусть точки числовой оси, соответствующие членам нашей прогрессии, окрашены и оставляют отпечатки на окружности, катящейся вправо (рис. 1). Спрашивается, как они расположатся на окружности, если ее длина равна произвольному натуральному числу l? Оказывается, что отпечатки разделят окружность на равные дуги, длина каждой дуги будет равна $d'=(d, l)$ — наибольшему общему делителю чисел d и l; число таких дуг будет равно $l'=\left|\frac{l}{d'}\right|$. Докажем это. Для совпадения отпечатков членов прогрессии a_{n_1} и a_{n_2} необходимо и достаточно, чтобы разность $a_{n_1}-a_{n_2}=(n_1-n_2)d$ делилась на l, что, в свою очередь, равносильно делимости на l' разности n_1-n_2. В самом деле, l' и d взаимно просты, поэтому для делимости $(n_1-n_2)d$ на l (и, следовательно, на l') необходима и достаточна делимость на l' сомножителя n_1-n_2. Всего, таким образом, будет ровно l' различных отпечатков, разбивающих окружность на l' дуг. А так как расстояние между любыми двумя членами прогрессии кратно d (и, следовательно, кратно d'), то на окружности оно равно целому числу дуг длины d'. Отсюда следует, что расстояние (по окружности) между любыми двумя отпечатками кратно d', а между любыми двумя соседними отпечатками равно d'.

Вернемся к исходной задаче. Окружность длины $l=10^k$ разобьем на 10^k равных частей и занумеруем точки деления числами $0, 1, 2, \ldots, 10^k-1$ против часовой стрелки. (На рисунке 2 отмечены концы особо интересующих нас промежутков вида $[c\cdot10^{k-1}; (c+1)\cdot10^{k-1})$ для $c=0, 1, \ldots, 9$.) Пусть в начальный момент числовая ось и окружность касаются друг друга в своих нулевых точках, причем окружность расположена «выше» оси (рис. 3).

Ясно, что если эту окружность достаточно долго катить вправо, то отпечатки на ней появятся во всех точках, соответствующих остаткам членов прогрессии при делении на 10^k и только в них. Количество отпечатков (остатков) для окружности длины 10^k будем обозначать l'_k.

Как мы установили, эти остатки располагаются на окружности равномерно, и имеет место соотношение

$$l'_k=\frac{10^k}{(d, 10^k)}. \tag{1}$$

Если цифра c отсутствует в k-м разряде всех членов прогрессии, то на дуге $[c\cdot10^{k-1}; (c+1)10^{k-1})$ на рисунке 2 не появится ни одного отпечатка. Отсюда $l'_k<10$, поскольку отпечатки распределяются по окружности равномерно. Из (1) видно, что l'_k — делитель 10^k, поэтому $l'_k\neq9$ и неравенство $l'_k<10$ на самом деле означает, что $l'_k\leqslant8$.

С другой стороны, последовательность чисел l'_1, l'_2, l'_3, ... неограничена (поскольку $l'_k=\frac{10^k}{(d,10^k)}\geqslant\frac{10^k}{d}$, а число d постоянно). В частности, найдется k такое, что

$$l'_k\geqslant 10. \tag{2}$$

Пусть k_0 — наименьший из номеров членов последовательности, удовлетворяющих (2). Тогда $l'_{k_0}\leqslant 80$.

В самом деле, если $k_0=1$, то $l'_{k_0}=l'_1=\frac{10}{(d,10)}\leqslant$ $\leqslant 10<80$. Если же $k_0\geqslant 2$, то $l'_{k_0}=\frac{10^{k_0}}{(d,10^{k_0})}\leqslant$ $\leqslant\frac{10^{k_0}}{(d,10^{k_0-1})}=10\cdot\frac{10^{k_0-1}}{(d,10^{k_0-1})}=10l'_{k_0-1}\leqslant 10\cdot 8=80$ (так как из $l'_{k_0-1}<10$ следует, что $l'_{k_0-1}\leqslant 8$).

Пункты а) и б) задачи рассмотрим теперь по отдельности.

а) Пусть $c\neq 0$. Рассмотрим остатки первых l'_{k_0} членов прогрессии при делении на 10^{k_0}. Не менее, чем $\left[\frac{l'_{k_0}}{10}\right]$ из них попадут в промежуток $[c\cdot 10^{k_0-1};$ $(c+1)\cdot 10^{k_0-1})$, т. е. не менее $\left[\frac{l'_{k_0}}{10}\right]$ из первых l'_{k_0} членов прогрессии имеют в k_0-м справа разряде цифру c. Других (среди первых l'_{k_0}) членов прогрессии не более чем $l'_{k_0}-\left[\frac{l'_{k_0}}{10}\right]\leqslant 72$.

б) Пусть $c=0$. Если $a_1\geqslant 10^{k_0-1}$, то этот случай ничем не отличается от случая $c\neq 0$. Вообще же, поскольку запись натурального числа не принято начинать с нуля, нужно учесть, что некоторые члены прогрессии могут содержать менее k_0 цифр. Если $a_1\angle 10^{k_0-1}$, то разность $a_{l'_{k_0}+1}-a_1=l'_{k_0}d=\frac{10^{k_0}\cdot d}{(d,10^{k_0})}$ кратна 10^{k_0} и в k-м справа разряде числа $a_{l'_{k_0}+1}$ стоит нуль. Поэтому без нулей могут записываться не более чем $l'_{k_0}\leqslant 80$ первых членов прогрессии.

Прогрессии из 72 (для $c=1, 2, ..., 9$) и из 80 (для $c=0$) различных натуральных чисел, не содержащих в своей записи цифры c, существуют. Например, прогрессии с разностью 125 и первыми членами, равными для $c=1, 2, ..., 9$, 0 соответственно 22075, 3055, 4025, 5000, 6111, 7075, 8055, 9025, 10000, 111.

Интересно, что такая же, но для частного случая $c=9$, задача была придумана В. Бугаенко и предложена на осеннем (1991 г.) Турнире городов.

Для $c=9$ имеется более простое решение, суть которого в следующем.

Пусть члены прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_l$ не содержат в своей десятичной записи девяток, а разность d прогрессии такова, что $10^{n-1} \leqslant d < 10^n$ для некоторого натурального n. Тогда, как легко убедиться, в $(n+2)$-м справа разряде у всех членов прогрессии стоит одна и та же цифра или же не стоит никакой цифры. Последнее имеет место при $a_l < 10^{n+2}$ и именно этим случаем, не нарушая общности рассуждений, мы ограничимся.

Все члены прогрессии лежат в объединении 9 промежутков $[0;\ 88\ldots8] \cup [10\ldots0;\ 188\ldots8] \cup \ldots \cup [80\ldots0;\ 88\ldots8]$ (правый конец первого промежутка содержит n цифр, концы всех остальных промежутков — по $(n+1)$ цифре). Допустим, что $l \geqslant 73$. Тогда, по принципу Дирихле, в каком-то из промежутков будет не менее 9 членов прогрессии. Но последнее возможно только при

$d \leqslant \frac{10^n-1}{9}$, что меньше разности между ближайшими

концами соседних промежутков. Получается противоречие с тем, что $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — арифметическая прогрессия.

С. Токарев

М1317. *Докажите для любого треугольника ABC неравенство*

$$\frac{1}{4} < \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C} \leqslant \frac{8}{27},$$

где I — центр вписанной окружности, l_A, l_B, l_C — длины биссектрис треугольника ABC.

Пусть $AD = h_A$, а точка F на AD такая, что $IF \perp AD$ (см. рисунок). Из подобия треугольников AKD и AIF имеем: $\frac{IA}{l_A} = \frac{h_A - r}{h_A}$. Используя это равенство, легко доказать, что $\frac{IA}{l_A} = \frac{b+c}{a+b+c}$, $\frac{IB}{l_B} = \frac{a+c}{a+b+c}$, $\frac{IC}{l_C} = \frac{a+b}{a+b+c}$.

Из неравенства Коши следует, что

$$\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a+b+c} + \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{a+b}{a+b+c}\right) \geqslant$$

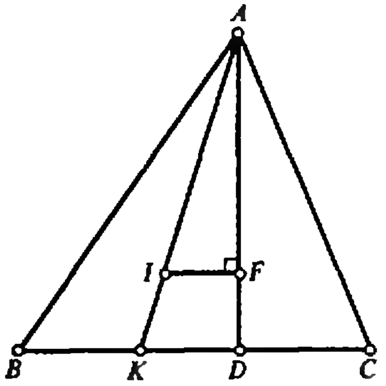
$$\geqslant \sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \geqslant \frac{IA \cdot IB \cdot IC}{l_A \cdot l_B \cdot l_C}.$$

Докажем неравенство

$$\frac{(b+c)(a+c)(a+b)}{(a+b+c)^3} > \frac{1}{4}.$$



Для того чтобы из отрезков, длины которых a, b, c, можно было составить треугольник, необходимо (а легко доказать, что и достаточно) выполнение неравенства

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) > 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим многочлен $P(x)$, корнями которого являются числа a, b, c: $P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-px^2+qx-r$, где $p=a+b+c$, $q=ab+bc+ac$, $r=abc$. Неравенство (1) дает:

$$-p^3+4pq-8r>0, \qquad (*)$$

а неравенство задачи приводится к виду: $-p^3+4pq-4r>0$ и немедленно следует из (*).

Заметим, что оценка снизу числом $\frac{1}{4}$ является точной: достаточно рассмотреть треугольники со сторонами 1, 1, x при $x\to 0$.

Заметим также, что введение многочлена в этом решении не обязательно: оно лишь упрощает запись простых и естественных выкладок, в которых фигурируют только числа a, b, c.

Замечание. Пусть выполнено неравенство (1) и при этом не все скобки положительны. Тогда отрицательные числа стоят в двух из них, например, $a+b-c<0$, $a+c-b<0$. Сложив эти неравенства, получаем: $2a<0$. Противоречие.

В. Сендеров

M1318. Дан связный граф с n ребрами. Докажите, что его ребра можно пометить числами от 1 до n так, что для каждой вершины, из которой выходит не менее двух ребер, числа, стоящие на этих ребрах, не имеют общего делителя большего 1. (Граф — это система точек, некоторые пары которых соединены ребрами. Граф называется связным, если по его ребрам можно из любой вершины пройти в любую другую.)

Начав с некоторой вершины v_0, будем идти по различным ребрам графа, нумеруя их подряд 1, 2, ... s, до тех пор, пока это возможно.

Если в результате останутся непронумерованные ребра, то в силу связности графа хотя бы одно из них выходит из вершины, на которой мы уже побывали. Начав с этой вершины, мы пойдем по непронумерованным ребрам, нумеруя их подряд $s+1$, $s+2$, ... также до тех пор, пока это возможно.

Продолжая этот процесс, мы в конце концов получим некоторую нумерацию ребер графа. Докажем, что она — искомая. Действительно, пусть из некоторой вершины v выходит не менее двух ребер. Если $v=v_0$, то одно из ребер имеет номер 1, и поэтому, наибольший общий делитель номеров ребер, выходящих из v, равен 1.

Если $v\neq v_0$, то пусть наименьший номер среди номеров ребер, выходящих из вершины v, равен r. Это означает, что в первый раз мы попали в вершину v именно по этому ребру на r-м шаге нашего процесса. Так как в этот момент из вершины v выходили еще непронумерованные ребра, то одно из них должно иметь номер $r+1$. Наибольший общий делитель множества чисел, содержащего r и $r+1$, равен 1.

В. Вавилов, А. Фомин

M1319. *Дан треугольник ABC и точка M внутри него. Докажите, что хотя бы один из углов MAB, MBC, MCA меньше или равен 30°.*

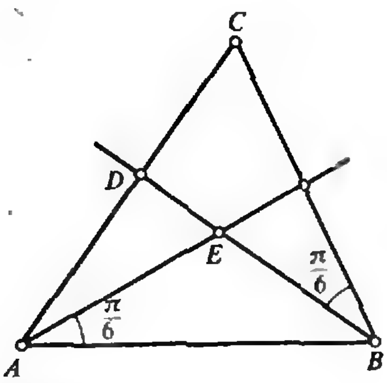


Рис. 1.

Пусть точка M внутри треугольника ABC такова, что все углы из условия задачи больше $\pi/6$. Тогда она лежит в треугольнике AED (см. рис. 1).

Следовательно, достаточно доказать, что $\angle ECA \leqslant \pi/6$.

Рассмотрим конфигурацию рисунка 2, где $r_1=1$, $\angle BO_2M=\pi/3$. Точка A лежит на прямой l в круге с центром O_2, точка M — в треугольнике ABC. Покажем, что при этих условиях отрезки BM и O_1O_2 имеют общую точку.

Пусть это не так (см. рис. 3).

На рисунке 3 прямая MD — касательная к окружности с центром O_1.

Имеем: $O_1C \perp l$, треугольник O_1CM правильный, отрезки BM и O_1C пересекаются. Так как угол BMm равен $\pi/6$, то прямая m, являющаяся касательной к окружности с центром O_2, пересекается с l в точке луча DC (либо $m \parallel l$). Следовательно, и точка A может лежать лишь на этом луче; значит, точка M лежит вне треугольника ABC.

Получили: $O_1O_2 \cap BM \neq \varnothing$.

Для решения задачи достаточно доказать, что $r_2 \leqslant d(O_2, l)$. (Здесь $d(O_2, l)$ — расстояние от точки O_2 до прямой l.) Пусть $d(O_3, l) \geqslant d(O_1, l)$. *Имеем:* $r_2=2\sin\alpha$,

$$d(O_2, l)=1+\left(\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sin\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+2\sin^2\alpha \geqslant 2\sin\alpha=r_2.$$

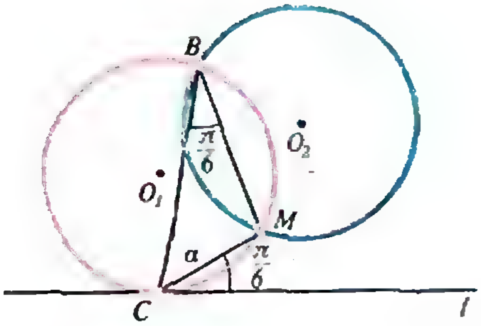


Рис. 2.

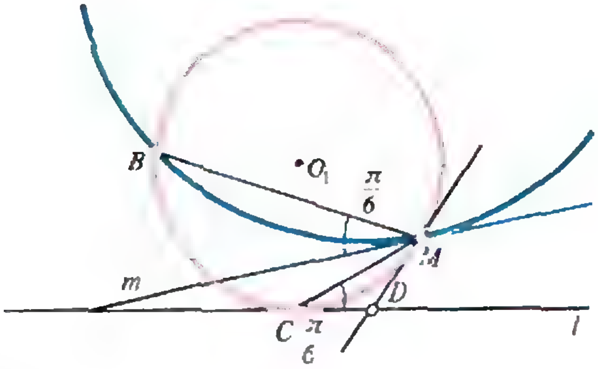


Рис. 3.

Случай $d(O_2, l) < d(O_1, l)$ рассматривается аналогично.

Замечание. Несложное доказательство допускает также и следующее утверждение. Пусть точка M лежит внутри четырехугольника $ABCD$. Тогда хотя бы один из углов MAB, MBC, MCD, MDA меньше или равен $\pi/4$. Докажите это утверждение самостоятельно.

В. Сендеров

М1320. Для произвольного заданного числа $\alpha>1$ постройте бесконечную ограниченную последовательность $x_1, x_2, \ldots$ такую, что при любых m, n $(m\neq n)$ выполняется неравенство

$$|x_m-x_n|\,|m-n|^{\alpha}\geqslant 1.$$

Применим двоичную запись натуральных чисел. Пусть

$$i=b_0+b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2+\ldots+b_k\cdot 2^k,$$

где все $b_s\in\{0;\ 1\}$ и $k\in N$. Пусть

$$h_i=b_0+b_1\cdot 2^{-\alpha}+b_2\cdot 2^{-2\alpha}+\ldots+b_k\cdot 2^{-k\alpha}.$$

Тогда

$$0\leqslant h_i\leqslant 1+2^{-\alpha}+\ldots+2^{-k\alpha}\leqslant\frac{1}{1-2^{-\alpha}}.$$

Возьмем $j\in N$, $j\neq i$, $j=c_0+c_1\cdot 2+\ldots+c_k\cdot 2^k$, $c_s\in\{0;\ 1\}$. Обозначим через l наименьший номер, для которого $b_l\neq c_l$. Тогда

$$|h_i-h_j|=|(b_0-c_0)+(b_1-c_1)2^{-\alpha}+\ldots+(b_k-c_k)2^{-k\alpha}|\geqslant$$
$$\geqslant|(b_l-c_l)2^{-l\alpha}|-|(b_{l+1}-c_{l+1})2^{-(l+1)\alpha}|-\ldots$$
$$\ldots-|(b_k-c_k)2^{-k\alpha}|\geqslant 2^{-l\alpha}-\frac{2^{-(l+1)\alpha}}{1-2^{-\alpha}}=$$
$$=2^{-l\alpha}\left(1-\frac{2^{-\alpha}}{1-2^{-\alpha}}\right)=(2^l)^{-\alpha}\left(\frac{2^{\alpha}-2}{2^{\alpha}-1}\right)\geqslant$$
$$\geqslant\left(\frac{2^{\alpha}-2}{2^{\alpha}-1}\right)|i-j|^{-\alpha},$$

поскольку $2^l\leqslant|i-j|$. Таким образом,

$$|h_i-h_j|\cdot|i-j|^{\alpha}\geqslant\frac{2^{\alpha}-2}{2^{\alpha}-1}.$$

Для завершения конструкции искомой последовательности теперь достаточно положить

$$x_i=\frac{2^{\alpha}-1}{2^{\alpha}-2}h_i.$$

Замечание. Последовательность $x_n=\{n\sqrt{2}\}$ ($\{x\}$ — дробная часть числа x) удовлетворяет условию задачи при $\alpha=1$ и, следовательно, при всех $\alpha>1$. Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно. (См. также в книге Н. Васильева и А. Егорова «Задачи всесоюзных математических олимпиад», М., «Наука», 1988, с. 227)

В. Вавилов, А. Фомин

Ф1333. Ведро с водой свисает с ворота колодца, тяжелая ручка ворота находится в нижнем положении (рис. 1). Если ведро отпустить, оно начнет двигаться и достигнет дна колодца. Подберем количество воды таким, чтобы при его уменьшении ведро при

Введем обозначения: масса ведра с нужным количеством воды M, радиус ворота R, масса ручки ворота, представляющей собой груз на конце рычага, m, длина рычага l. Обозначим через α угол рычага с вертикалью, при котором система находится в равновесии, и запишем условие равновесия:

$$MgR=mgl\sin\alpha. \qquad (1)$$

Положений равновесия два — при верхнем и нижнем расположениях ручки ворота (рис. 2). Условие задачи —

движении не достигало дна. При каком положении ручки ворота система в этом случае может находиться в равновесии? Веревку считайте легкой. Трением можно пренебречь.

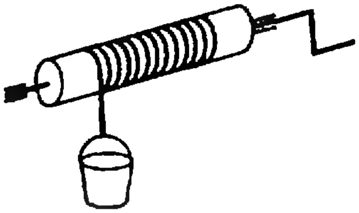


Рис. 1.

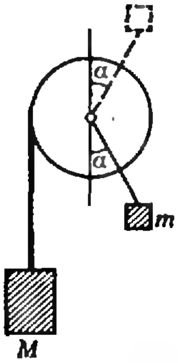


Рис. 2.

масса воды минимальна, а ведро еще достигает дна — можно выполнить в случае, если ручка «доедет» до верхнего положения равновесия, имея при этом почти нулевую скорость (в пределе — точно нулевую).

Теперь воспользуемся законом сохранения энергии. Ведро опустилось из начального положения на

$$\Delta h_1 = R(\pi - \alpha) \ (\alpha \text{ — в радианах}).$$

Ручка ворота поднялась из нижнего положения на

$$\Delta h_2 = l + l\cos\alpha = l(1+\cos\alpha).$$

Начальная и конечная кинетические энергии системы равны нулю. Тогда, в соответствии с законом сохранения энергии, можно записать

$$Mg\Delta h_1 = mg\Delta h_2, \text{ или } MR(\pi-\alpha) = ml(1-\cos\alpha). \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) получаем

$$\pi - \alpha = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \text{ или } \alpha + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pi.$$

Это уравнение легко решить численными методами или даже простым подбором по таблице.

Окончательный ответ: $\alpha \approx 0{,}81$ рад$\approx 46°$.

Б. Корсунский

***Ф1334.** Тонкая квадратная пластинка АБВГ сделана из меди. Ее нагревают со стороны торца АБ, поддерживая его температуру равной 100 °C, и охлаждают со стороны трех остальных торцов, поддерживая их температуру равной 0 °C. Найдите температуру в центре пластинки.*

Сразу нужно сказать, что полностью решить эту задачу — найти распределение температур по пластинке — очень трудно (а в рамках школьной программы — просто невозможно). Однако нам нужно найти температуру только в одной точке, и расположена эта точка очень удачно — в центре пластинки, так что дело небезнадежно.

Сформулируем вспомогательное утверждение (которое вполне очевидно): если при заданных температурах торцов в пластинке установилось равновесное распределение температур и мы увеличим температуры всех торцов на величину Δt, то все равновесные температуры увеличатся тоже на Δt.

Еще одно утверждение (куда менее очевидное — над ним придется подумать): если мы увеличим температуры торцов на разные величины Δt_1, Δt_2, Δt_3, Δt_4, то увеличение температуры в данной точке, из-за дополнительно возникших тепловых потоков, будет таким, какой была бы равновесная температура в этой точке, если бы температуры торцов были Δt_1, Δt_2, Δt_3, Δt_4.

Это нужно обсудить. Во-первых, не вполне ясно, чего же мы достигли — ведь вспомогательная задача ничуть не проще первоначальной (заданы температуры торцов и нужно найти температуру в центре). На самом деле эта задача все же проще — мы сами выберем Δt_1, ..., Δt_4 так, чтобы ответ было легко угадать. Во-вторых, не странно ли складывать температуры в точке («... температуры двух физиков равны по 36,6 °C, поставим физиков рядом и найдем получившуюся температуру: $t_{\text{общ}}=36{,}6\ ^\circ\mathrm{C}+36{,}6\ ^\circ\mathrm{C}=73{,}2\ ^\circ\mathrm{C}$...»)? Конечно, пример в скобках абсурден, но мы собираемся складывать вовсе не температуры, а тепловые потоки. Результирующую же температуру мы найдем, учтя температурные добавки, вызванные дополнительными потоками.

Итак, будем решать. На рисунках 1—4 приведены простые примеры, в которых легко угадать (в последнем — чуть сложнее) температуры в центре пластинки. Они равны соответственно —50 °C, +25 °C, +25 °C, +25 °C.

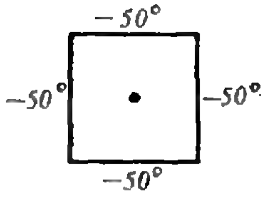


Рис. 1.

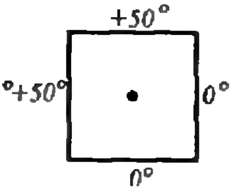


Рис. 2.

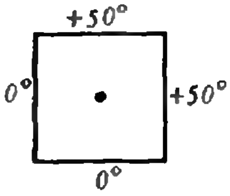


Рис. 3.

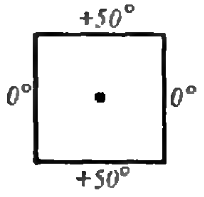


Рис. 4.

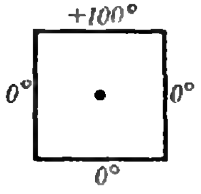


Рис. 5.

А теперь, начав с ситуации, изображенной на рисунке 1, будем увеличивать температуры торцов, «накладывая» ситуации 2, 3 и 4. После всего мы получим искомое распределение температур (рис. 5), а температура в центре пластинки будет равна +25 °C. Это и есть ответ.

А. Шапиро, А. Зильберман

Ф1335. *Внутри длинной трубы, наполненной воздухом, двигают с постоянной скоростью поршень, при этом в трубе распространяется со скоростью 320 м/с упругая волна. Считая перепад давлений на границе распространения волны равным 1000 Па, оцените перепад температур. Давление в невозмущенном воздухе 1 атм, температура 300 К.*

Пусть волна в трубе движется с постоянной скоростью v. Свяжем эту величину с заданным в условии перепадом давлений Δp и с разностью плотностей $\Delta\rho$ в невозмущенном воздухе и в волне. Разность давлений Δp «разгоняет» до скорости v «избыток» воздуха плотностью $\Delta\rho$, поэтому, в соответствии со вторым законом Ньютона, можно записать

$$(\Delta p S)\Delta t=(\Delta\rho S v\Delta t)v,$$

где S — площадь сечения трубы, Δt — малый промежуток времени. Отсюда получаем

$$v=\sqrt{\Delta p/\Delta\rho}$$

(эта формула широко известна, ее вывод в более строгих предположениях можно найти в любом курсе общей физики для вузов).

Воспользуемся уравнением Менделеева — Клапейрона и выразим $\Delta\rho$ через Δp:

$$\Delta\rho=\frac{(p+\Delta p)M}{R(T+\Delta T)}-\frac{pM}{RT}=\frac{MT\Delta p-p\Delta T}{R\,(T+\Delta T)T},$$

где $M=29$ г/моль — молярная масса воздуха, $R=8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная.

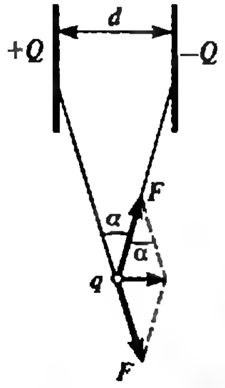
Подставляя сюда $\Delta\rho=\Delta p/v^2$ и учитывая, что $\Delta T/T \ll 1$, находим

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{\Delta p}{p}\left(1-\frac{RT}{Mv^2}\right)\approx 0{,}16\,\frac{\Delta p}{p}=1{,}6\cdot 10^{-3}.$$

Итак, $\Delta T \approx 0{,}5$ К.

Р. Александров

Ф1336. ***Плоский конденсатор, состоящий из двух круглых пластин площадью S, находящихся на малом расстоянии d друг от друга, заряжают до разности потенциалов U. На одинаковом расстоянии L от обеих пластин помещают маленький шарик, масса которого m и заряд q. Шарик отпускают. Найдите его ускорение в первый момент после отпускания и предельную скорость, которую он наберет за большое время. Считайте расстояние L во много раз бо́льшим, чем размеры конденсатора. Силу тяжести не учитывайте.***



Пусть пластины конденсатора заряжены зарядами $+Q$ и $-Q$ (см. рисунок). Тогда

$$Q=CU=\varepsilon_0 SU/d$$

— заряженный шарик находится далеко и его влиянием на распределение зарядов по пластинам мы пренебрегли. Учитывая, что $L \gg \sqrt{S}$ и $L \gg d$, найдем силу, действующую на шарик со стороны конденсатора:

$$F_{\text{поля}}=2F\sin\frac{\alpha}{2}\approx F\alpha\approx\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{L^2}\frac{d}{L}=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{L^3}\frac{\varepsilon_0 SU}{d}=\frac{1}{4\pi}\frac{qSU}{L^3}.$$

Тогда начальное ускорение шарика равно

$$a=\frac{F_{\text{поля}}}{m}=\frac{qSU}{4\pi mL^3}.$$

В точке, где шарик находился вначале — на одинаковом расстоянии от пластин, заряженных равными по величине и противоположными по знаку зарядами, потенциал поля, создаваемого этими зарядами, равен нулю. На большом расстоянии от конденсатора (шарик через большое время улетит далеко) потенциал поля также равен нулю. Значит, и конечная скорость шарика будет нулевой — вначале он будет разгоняться, а потом тормозиться.

З. Рафаилов

Ф1337. ***При исследовании на переменном токе «черного ящика» была использована схема, показанная на рисунке 1. Напряжение звукового генератора на всех частотах было равно 1 В, показания милливольтметра на разных частотах приведены в таблице.***

График зависимости тока от частоты имеет явный минимум на частоте ≈ 450 Гц. Такой характерной особенностью обладает, например, параллельный колебательный контур (рис. 2). В принципе есть множество схем с похожими свойствами, мы выбрали простейшую. Найдем параметры элементов r, C, L контура и если получатся разумные числа, то будем считать задачу решенной.

На самых высоких частотах ($f \approx 2000$ Гц) полное сопротивление контура $Z_{\text{общ}}$ практически определяет кон-

Что может находиться внутри «черного ящика»? Рассчитайте параметры элементов предложенной вами схемы (постарайтесь обойтись без экзотических приборов, все равно никто их вам не доверит — еще испортите!).

f, кГц	U, мВ
0,2	540
0,4	90
0,6	195
0,8	380
1,0	520
1,2	620
1,4	690
1,6	750
1,8	790
2,0	820

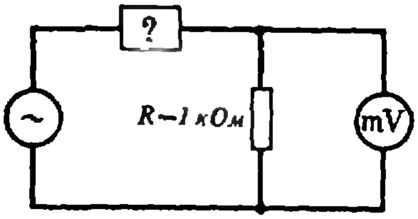


Рис. 1.

денсатор (индуктивное сопротивление равно емкостному на резонансной частоте ($f_p \approx 450$ Гц), а выбранная нами высокая частота примерно в 4—5 раз выше, значит, поправка не больше 20—25 %). Таким образом, для нашей схемы (см. рис. 1) можно записать

$$U_0 = IZ_{\text{общ}} \approx I\sqrt{X_C^2+R^2} = \frac{U}{R}\sqrt{X_C^2+R^2}.$$

Отсюда получаем

$$X_C = R\sqrt{U_0^2/U^2-1} \approx 700\ \text{Ом},$$

что соответствует емкости конденсатора

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} \approx 1{,}1\cdot 10^{-7}\ \text{Ф} = 0{,}11\ \text{мкФ}.$$

Уточним немного эту оценку. На самом деле емкостное сопротивление несколько меньше 700 Ом (т. е. емкость несколько больше), а увеличение полного сопротивления «ящика» до 700 Ом обеспечивает цепь с катушкой (влияние активного сопротивления r в нашем случае незначительно — из величины тока на частоте 400 Гц можно сделать вывод, что $r > 10$ кОм). После введения поправки (20—25 %) емкость оценим так:

$$C \approx 0{,}13-0{,}14\ \text{мкФ}.$$

Индуктивность катушки в нашем случае можно оценить только по значению резонансной частоты и найденной оценке для емкости:

$$L \approx \frac{1}{4\pi f_p^2 C} \approx 0{,}9\ \text{Гн}.$$

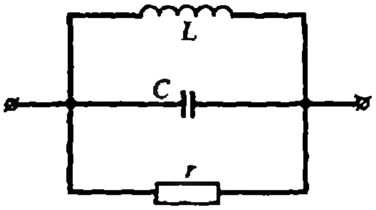


Рис. 2.

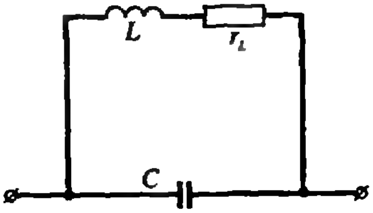


Рис. 3.

Числа для C и L получились вполне разумные, теперь можно привести и более правдоподобную схему — она изображена на рисунке 3. Дело в том, что катушки такой индуктивности даже с ферромагнитным сердечником имеют достаточно большое сопротивление r_L постоянному току и нет необходимости придумывать специальный резистор сопротивлением r. Оценить (очень грубо!) величину r_L можно по значению тока на самой низкой из используемых частот (200 Гц) — получается примерно 200—400 Ом.

Цифры, приведенные в условии задачи, явно округлены, поэтому пытаться получить более точные оценки не имеет смысла. На практике же нужно было бы не проводить измерения на нескольких фиксированных частотах, а исследовать резонансную точку намного подробнее.

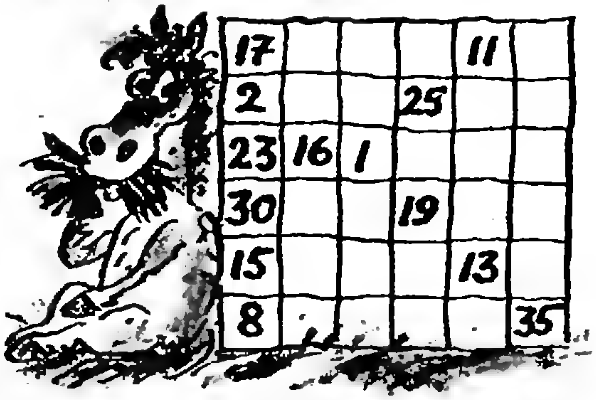
А. Ящиков

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. На балу каждый кавалер танцевал с тремя дамами, а каждая дама — с тремя кавалерами. Докажите, что число кавалеров было равно числу дам.

2. Шахматный конь обошел всю доску 6×6 и вернулся на исходное поле, побывав на каждом из остальных полей по одному разу. На рисунке указаны номера ходов при посещении некоторых полей доски. Восстановите полностью путь коня.



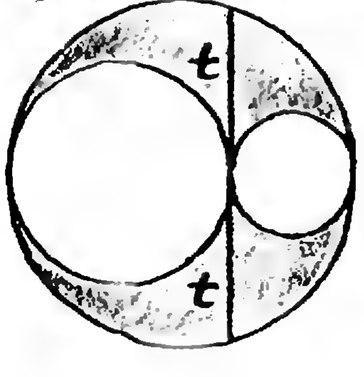
17				11	
2			25		
23	16	1			
30			19		
15				13	
8					35

3. Если обозначить одинаковыми буквами одинаковые цифры, а разными — разные, то во второй половине bd века нашей эры был $abcd$ год. Какой это был год?

4. Андрей и Витя купили одинаковые тетрадки, каждая из которых стоила дороже 30 копеек, но дешевле рубля. Андрей платил двадцатикопеечными монетами и получил 3 копейки сдачи, а Витя — пятнадцатикопеечными и одной двухкопеечной монетой. Сколько стоит тетрадь?

УЧЕНЬЕ-СВЕТ!
700р

5. Длина хорды, касающейся вписанных окружностей, изображенных на рисунке, равна $2t$. Найдите площадь заштрихованной части круга.



Эти задачи нам предложили В. Произволов, А. Савин, И. Акулич, Н. Антонович. Последняя задача взята из книги Д. Пойя «Математическое открытие».

РЕШЕНИЕ РЕБУСОВ НА ЧАШЕЧНЫХ ВЕСАХ

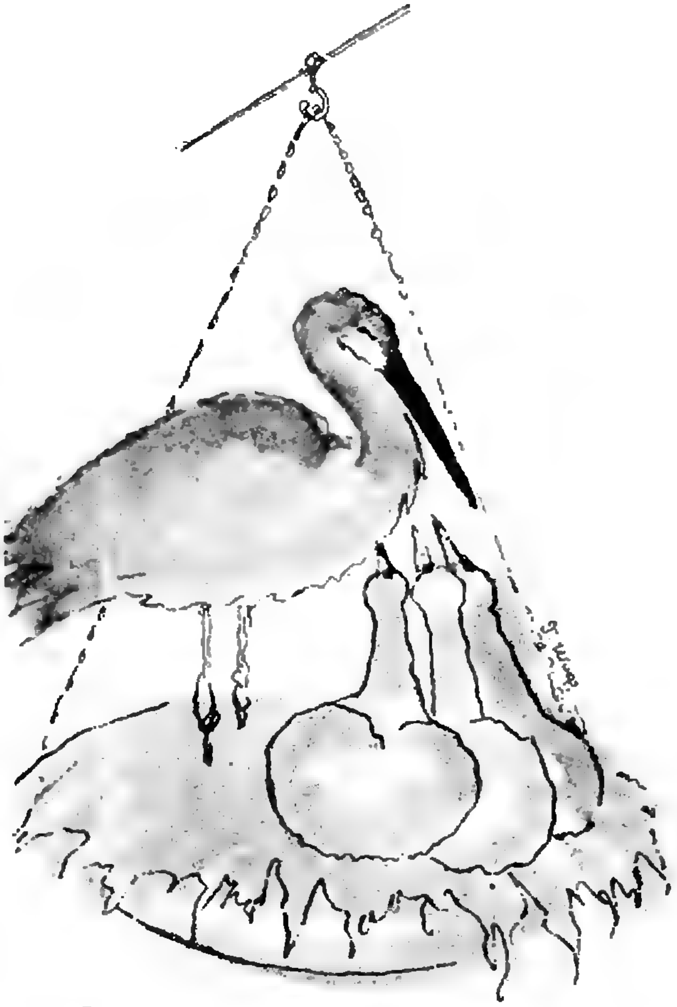
И. АКУЛИЧ

Как редкая птица долетит до середины Днепра, так и редкий номер «Кванта» обходится без арифметических ребусов. Чаще всего это задачи на сложение. Например:

EINS+EINS+EINS+EINS+
+EINS=FUNF

(«Квант» № 5, 1990 г.).

Как и во всех ребусах, публикуемых в «Кванте», в этой задаче одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные, ни одно из чисел не начинается нулем и расшифровать ребус можно единственным образом.



Многие из вас наверняка неоднократно решали такие ребусы; какие-то из них даются легче, какие-то — труднее, и нередко приходится хорошенько поломать голову, чтобы, используя какое-либо малоприметное свойство, суметь распутать задачу и получить искомый ответ. Без перебора, как правило, тоже не обходится, и количество рассматриваемых вариантов часто зависит от изобретательности и сообразительности решающего. Короче говоря — ребус ребусу рознь, и каждый требует индивидуального подхода.

После такого аргументированного и вроде бы неоспоримого вступления позвольте заметить следующее. Оказывается, имея обыкновенный микрокалькулятор, можно большинство этих ребусов решить за несколько минут одним и тем же почти механическим способом, не требующим ни особой сообразительности, ни тем более изобретательности. Не верите? Сейчас убедитесь.

«Взвесим» ребус

Суть метода покажем на примерах, взятых из номеров «Кванта» за последние три года.

Пример 1 («Квант» № 4, 1989 г.).
АИСТ+АИСТ+АИСТ+АИСТ=
=СТАЯ.

Очевидно, АИСТ=1000А+100И+10С+Т, а СТАЯ=1000С+100Т+10А+Я. Тогда ребус можно записать в виде:

$$4(1000А+100И+10С+Т)=$$
$$=1000С+100Т+10А+Я.$$

Осталось решить это уравнение в неотрицательных целых и (самое главное!) различных числах, причем А и С не равны 0.

Перенесем все неизвестные в левую часть и запишем их в порядке убывания абсолютных величин коэффициентов:

$$3990\text{А}-960\text{С}+400\text{И}-96\text{Т}-\text{Я}=0.$$

Первое слагаемое равно 3990А. Подберем такое А, чтобы оно как можно меньше отличалось от нуля. Так как $\text{А}\neq 0$, то приходится брать $\text{А}=1$, и $3990\text{А}=3990$.

Тогда сумма первых двух слагаемых равна $3990-960\text{С}$. Так как следующее — третье — слагаемое (400И) имеет знак «плюс», то подберем такое С, чтобы сумма двух первых слагаемых была как можно ближе к нулю, но оставалась не больше нуля. Это будет при $\text{С}=5$; тогда $3990\text{А}-960\text{С}=-810$.

Рассмотрим сумму первых трех слагаемых, равную $-810+400\text{И}$. Так как четвертое слагаемое имеет знак «минус», то подберем такое И, чтобы сумма была возможно ближе к нулю, но *не меньше* нуля. Получаем $\text{И}=3$, и сумма первых трех слагаемых равна $+390$.

Перейдем к сумме первых четырех слагаемых, равной $390-96\text{Т}$. Так как пятое слагаемое имеет знак «минус», то надо подобрать такое Т, чтобы сумма оставалась *не меньше* нуля, находясь возможно ближе к нулю. Это будет при $\text{Т}=4$, и сумма равна $+6$.

Дальнейшее ясно: последняя сумма равна $6-\text{Я}$ и должна равняться нулю, т. е. $\text{Я}=6$.

Ответ готов: АИСТ=1354, СТАЯ=5416.

Надеюсь, суть метода ясна? Разумеется, на каждом шагу следует выбирать значение очередной буквы из ранее не использованных цифр. А вообще-то, рассмотренный метод очень напоминает такую практическую задачу. Имеются чашечные весы и набор разнокалиберных гирь, которые надо побыстрее уравновесить. Наиболее естественный способ таков: самую тяжелую гирю ставим на одну чашку, пару штук полегче — на другую и т. д., т. е. загрузку весов начинаем с самых больших гирь. То же самое мы сделали, решая данный ребус, поэтому можем смело утверждать, что решили его *на чашечных весах.* При этом приведенные рассуждения удобно оформить в виде таблицы (см. таблицу 1 на с. 38).

Шевеление

К сожалению, описанным способом не всегда удается вот так, «с ходу», получить ответ. Поэтому сейчас мы ознакомимся со второй частью метода, самое подходящее название для которой — *шевеление.*

Пример 2 («Квант» № 9, 1990 г.).

$$\text{ЗАЗОР}+\text{АЗОР}+\text{ЗОР}+\text{ОР}+\text{Р}=55550.$$

Пусть вас не пугает наличие кроме букв также и конкретного числа. Надо лишь, преобразовывая уравнение к эквивалентному виду, записать это число в самом начале:

$$55550-10300\cdot\text{З}-2000\cdot\text{А}-40\cdot\text{О}-5\cdot\text{Р}=0.$$

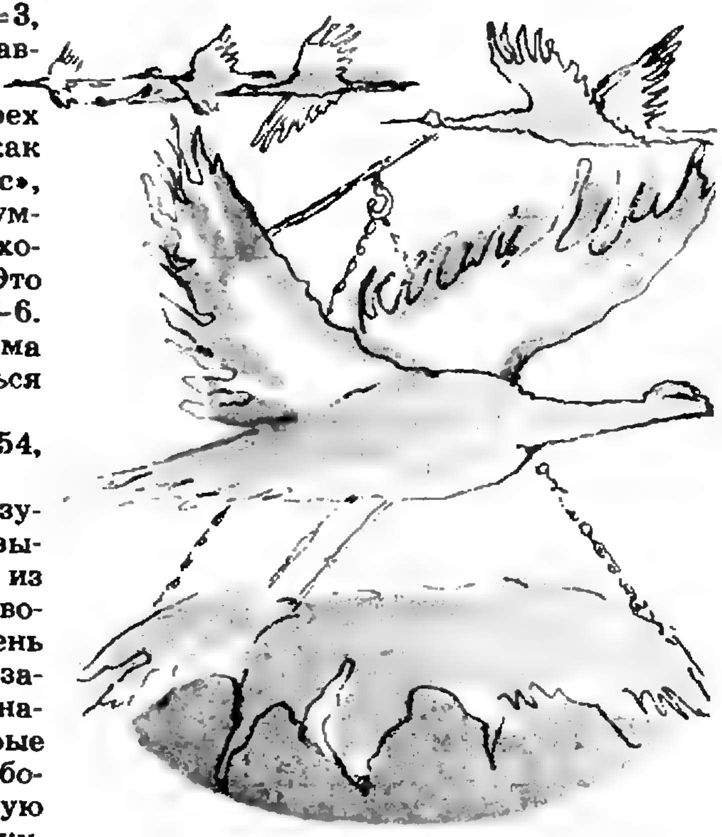


Таблица 1.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	Значение буквы	Значение суммы
1	3990А	не используется	А=1	+3990
2	3990—960С	+	С=5	—810
3	—810+400И	—	И=3	+390
4	390—96Т	—	Т=4	+6
5	6—Я	нет	Я=6	0

Таблица 2.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	Значение буквы	Значение суммы
1	11 110—2060 · З	—	З=5	+810
2	810—400 · А	—	А=2	+10
3	10—8 · О	—	О=1	+2
4	2—Р	нет	Р=3	—1

Таблица 3.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	Значение буквы	Значение суммы
1	11 110—2060 · З	—	З=4	+2870
2	2870—400 · А	—	А=7	+70
3	70—8 · О	—	О=8	+6
4	6—Р	нет	Р=6	0

Таблица 4.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	НОД последующих коэффициентов	Значение буквы	Значение суммы
1	500·E	не используется	1	E=1	+5000
2	5000—1001 · F	+	5	F=5	—5
3	—5+500 · I	—	5	I=2	+995
4	995—100 · U	+	5	U=9	+95
5	95+40 · N	+	5	N=0	+95
6	95+5 · S	нет	нет	S=3	+110

Предварительно поделим данное уравнение на 5:

$$11110-2060\cdot З-400\cdot А-8\cdot О-Р=0.$$

А теперь составим для него такую же таблицу (таблица 2), причем постоянному члену не присваиваем отдельного номера слагаемого.

Как видно, не удалось добиться нулевой суммы. Вот если бы взять $Р=2$, но это значение уже занято буквой А! Что же делать?

Применим шевеление, т. е. будем понемногу менять значения букв, стоящих перед Р, в порядке возрастания коэффициентов. Если, не меняя З и А, пошевелить О, то, как видно, итоговая сумма станет либо отрицательной, либо двузначной, и никакое допустимое значение Р ее не скомпенсирует. Если пошевелить А, не меняя З, то при изменении А на 1 сумма изменяется аж на 400. Тут уж никакие значения О и Р с их жалкими коэффициентами не смогут ее занулить. Выход один: надо шевелить З. Очевидно, брать $З>5$ нельзя: сумма станет отрицательной и стать положительной уже не сможет. Возьмем ближайшее к 5 меньшее число, т. е. $З=4$, и снова составим таблицу по тем же правилам (см. таблицу 3).

Порядок! Задача решена: ЗАЗОР=47486.

Наибольший общий делитель

Укажем еще одну уловку, позволяющую заранее отсечь некоторые бесперспективные значения букв. Назовем ее так: НОД (что, понятное дело, означает наибольший общий делитель).

Решим теперь ребус, приведенный в начале статьи.

Пример 3.

$$\text{EINS}\times 5=\text{FUNF}.$$

Его эквивалентный вид

$$5000\cdot E+1001\cdot F+500\cdot I-100\cdot I+40\cdot N+5\cdot S=0.$$

Уловка «НОД» применяется, только если наименьший из коэффициентов (в данном случае — при S) не равен 1. Тогда, очевидно, сумма, получаемая при «подходе» к последнему слагаемому, должна делиться на этот коэффициент. Кроме того, сумма, получившаяся при «подходе» к предпоследнему слагаемому, должна делиться на НОД коэффициентов при двух последних слагаемых и так далее. Иначе говоря, при подборе значений букв надо следить, чтобы получаемая сумма делилась на НОД коэффициентов при последующих слагаемых. Это позволяет отбросить заведомо бесперспективные значения, но приводит к необходимости ввести дополнительную графу в нашу таблицу (таблица 4).

Краткие пояснения: здесь, как видно, лишь при двух значениях F сумма делится на 5: это $F=0$ и $F=5$. Но F стоит на первом месте в числе FUNF и, следовательно, не может быть равным нулю. После слагаемого ($-100\cdot U$) все члены положительны, поэтому сумму надо было непременно сделать отрицательной, но даже наибольшее возможное значение $U=9$ не позволило ее скомпенсировать. Результат налицо: решение не найдено.

Приступим к шевелению. Очевидно, шевелить надо переменные, стоящие перед U, т. е. начинать надо с I. Если взять $I>2$, то неувязка еще больше усугубится. Значение $I=1$ занято. Попробуем $I=0$. Переделаем таблицу, причем даже не всю, а лишь строки, начиная с третьей (см. таблицу 5 на с. 42).

Готово: EINS=1049, FUNF=5245.

Что же, после такой радужной картины самое время, видимо, добавить ложку дегтя. Не всегда (и, пожалуй, далеко не всегда) после первого же шевеления мы придем к ответу. Иной раз придется изрядно повозиться. И вот тому подтверждение.

Пример 4 («Квант» № 12, 1989 г.).

$$\text{КНИГА}+\text{КНИГА}+\text{КНИГА}=\text{НАУКА}.$$

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Сжатые давлением окружающего воздуха, они [чаши] соединялись так прочно, что шестнадцать лошадей либо совсем не могли их разорвать, либо могли это сделать с большим усилием.

Отто Герике

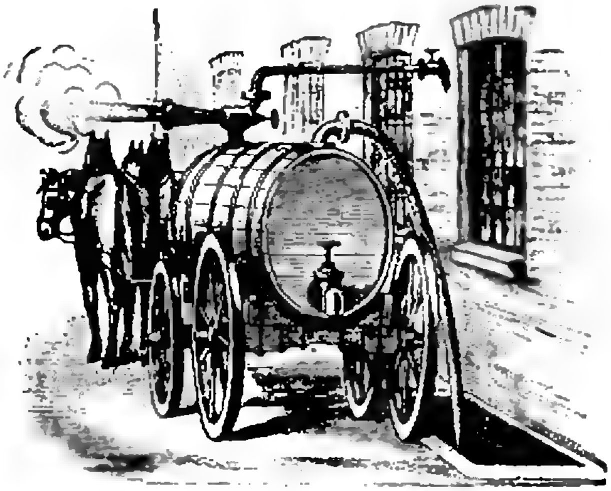
А так ли хорошо знакомо вам

давление ?

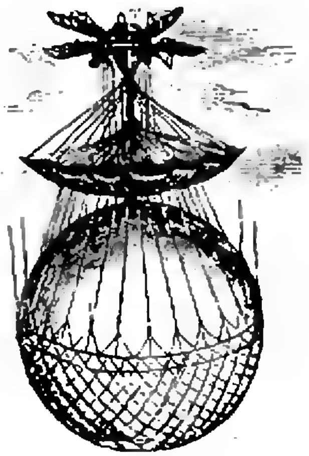
Конечно, вы сразу догадались, что в эпиграфе речь идет о роли давления в знаменитых опытах с магдебургскими полушариями. Давление — одна из первых величин, с которой мы знакомимся в курсе физики, к которой быстро привыкаем и позже относим ее как бы ко второму ряду — за такими фундаментальными понятиями, как время, длина, масса. Однако история науки напоминает нам, какую огромную роль сыграло в свое время открытие атмосферного давления. А соответствующие эксперименты Торричелли, Герике, Паскаля вошли в золотой фонд науки, стимулируя новые исследования и формируя основы современного естествознания.

Но было бы неверно утверждать, что сегодня понятие «давление» представляет лишь исторический интерес. Мы настолько часто сталкиваемся с давлением, оно столь многолико, что «пропитало» самые разные области физики и способствовало рождению многих остроумных и непростых вопросов.

Не верите — убедитесь сами.



Вопросы и задачи

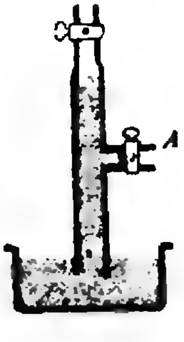


1. Надувной матрац заполнен воздухом до давления, превышающего атмосферное. В каком случае давление воздуха в матраце будет больше: когда человек станет на него или когда ляжет?

2. На доске лежит кирпич. Один конец доски плавно поднимают. Изменяется ли при этом давление кирпича на доску?

3. Какую форму должен иметь паровой котел, чтобы при заданной толщине стенок прочность котла была наибольшей?

4. В полый куб доверху налита жидкость. Как отличаются друг от друга силы давления на различные грани куба?



5. Из трубки, опущенной одним концом в воду, откачали воздух. При этом вода поднялась в трубке так, как показано на рисунке. Будет ли вытекать вода из крана *A*, если его открыть?

6. Закрытый сосуд доверху заполнен водой. У дна сосуда находится пузырек воздуха. Как изменится давление на дно сосуда, когда пузырек всплывет?

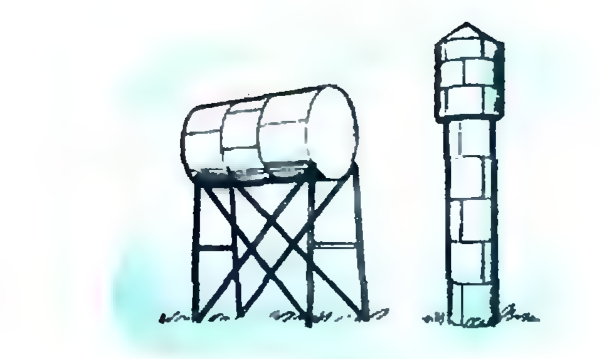
7. В море на большой глубине затонула незакупоренная бутылка. Увеличится или уменьшится вместимость бутылки под давлением воды?

8. Ртутный барометр, сохраняя вертикальное положение, падает с большой высоты. Что он показывает при этом?

9. К динамометру подвешена тонкостенная трубка ртутного барометра. Что показывает динамометр? Будут ли меняться его показания при изменении атмосферного давления?

10. Как-то одному моряку не удалось закрыть доской небольшое отверстие, через которое врывалась струя воды в трюм корабля. Приятель помог ему прижать доску к отверстию, после чего первому не стоило большого труда одному удерживать доску. Почему?

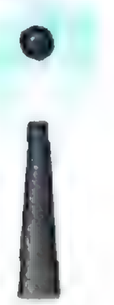
11. Какую роль при питье играет атмосферное давление?



12. Одинаковое ли давление создают в водной магистрали изображенные на рисунке водонапорные башни? Почему обычно строят более дорогие и громоздкие башни, как на рисунке слева?

13. Как меняется сила светового давления Солнца на какую-либо поверхность с увеличением расстояния от Солнца?

14. Отчего легкий шарик, помещенный в струю воздуха или воды, вытекающую с большой скоростью из трубки с узким отверстием, свободно парит в этой струе?



15. По трубе с переменным сечением течет вода. В трубу поместили эластичный резиновый мячик. Как изменится его диаметр при прохождении узкой части трубы?

Микроопыт

Попробуйте найти способ вылить воду из бутылки, не наклоняя ее.

Любопытно, что...

... Галилей, первым сделавший оценку плотности воздуха, до конца своих дней, как ни странно, сомневался в существовании атмосферного давления.

... Герике рассматривал свои пневматические опыты не просто как занятные наблюдения, а в рамках общих и весьма смелых для XVII века представлений о системе мира. Убежденный сторонник учения Коперника, Герике стремился обосновать гипотезу о множестве обитаемых миров и считая, что свойства пустого пространства независимы от божественного промысла.

... Паскаль, узнав об опытах Торричелли, решил их повторить, используя, правда, вместо ртути воду и... вино.

... Гидростатический парадокс — независимость давления жидкости на дно сосуда от его формы — был сформулирован голландским инженером и математиком Стевином задолго до «открытия» этого парадокса Паскалем. Паскаль не знал мало распространенный голландский язык и Стевина не читал.

... многие явления в мире живой природы объясняются действием сил давления и служат прообразом различных «изобретений». Например, присоски у рыб-прилипал или «устройство» копыт жвачных животных, позволяющее им не проваливаться в болоте.

... в природе можно наблюдать весь спектр давлений — от предельно малых (вакуум) до сверхбольших (внутри звезд). В лабораторных условиях удается воспроизвести как крайне низкие давления порядка 10^{-10}—10^{-12} атм, получаемые с помощью вакуумных насосов, так и давления свыше 10^9 атм, используемые, скажем, для получения искусственных алмазов.

... световое давление, наряду с давлением газов, ограничивает предельный размер звезд, существующих во Вселенной. Астрономические наблюдения подтвердили, что самые «тяжелые» звезды обладают как раз той предельной массой, которую еще допускает теория, учитывающая равновесие сил гравитационного сжатия и светового и газового давлений внутри звезд.

Что читать в «Кванте» о давлении
(публикации последних лет)

1. «Давление газа в сосуде» — 1987, № 9, с. 41;
2. «Давление света» — 1988, № 6, с. 19;
3. «О давлении» — 1989, № 3, с. 44;
4. «Еще раз о законе Паскаля» — 1990, № 2, с. 52;
5. «В роли магдебургского бургомистра» — 1990, № 5, с. 38;
6. «Вслед за Бойлем и Ломоносовым...» — 1991, № 4, с. 48.

Материал подготовил А. Леонович

Таблица 5.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	Нод последующих коэффициентов	Значение буквы	Значение суммы
3	—5+500· I	—	5	I=0	—5
4	—5—100· U	+	5	U=2	—205
5	—205+40· N	+	5	N=4	—45
6	—45+5· S	нет	нет	S=9	0

Таблица 6.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	НОД последующих коэффициентов	Значение буквы	Значение суммы
1	29990К	не используется	2	К=1	+29 990
2	29 990—7000Н	—	2	Н=4	+1990
3	1990—998А	+	10	А=5	—3000
4	—3000+300И	—	10	И=9	—300
5	—300—100У	+	30	У=0	—300
6	—300+30Г	нет	нет	Г=8	—60

Эквивалентный вид:

$$29990К-7000Н-998А+300И-100У+30Г=0.$$

Последний коэффициент не равен 1, и здесь тоже придется использовать столбец с НОД (таблица 6).

Ответ не получен, причем, как видно, основной «сбой» произошел после того, как было выбрано А=5 (получившаяся в результате сумма оказалась некомпенсируемой). Надо бы попробовать другое А, которое с учетом НОД должно быть кратно 5. Однако здесь мы угодим в другую крайность: получится некомпенсируемая положительная сумма. Значит, надо шевелить что-то «повыше», например — Н, и начинать со значений 3 и 5, соседних с Н=4. Но тут же выяснится, что опять возникает некомпенсируемая сумма, причем гораздо большая, чем при Н=4 (убедитесь!). Ясно, что другие значения Н нет смысла и пробовать. Придется шевелить самое начало — К. Сначала, разумеется, возьмем К=2 (см. таблицу 7).

Здесь пришлось взять У=7, чтобы сумма была отрицательна и притом делилась на 30. В итоге скомпенсировать ее не удалось, даже взяв наибольшее возможное значение Г=9. Пошевелим букву И, стоящую перед У. Сначала надо попробовать соседние значения, т. е. И=3 и И=5. Но последнее значение уже занято буквой А. Поэтому пробуем И=3 (таблица 8).

Наконец-то получен результат: КНИГА=28375, НАУКА=85125. Действительно, пришлось повозиться. Хотя, честно говоря, не очень-то мно-

Таблица 7.

Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	НОД последующих коэффициентов	Значение буквы	Значение суммы
1	29 990К	не используется	2	К=2	+59 980
2	59 980—7000Н	—	2	Н=8	+3980
3	3980—998А	+	10	А=5	—1010
4	—1010+300И	—	10	И=4	+190
5	190—100У	+	30	У=7	—510
6	—510+30Г	нет	нет	Г=9	—240

Таблица 8.

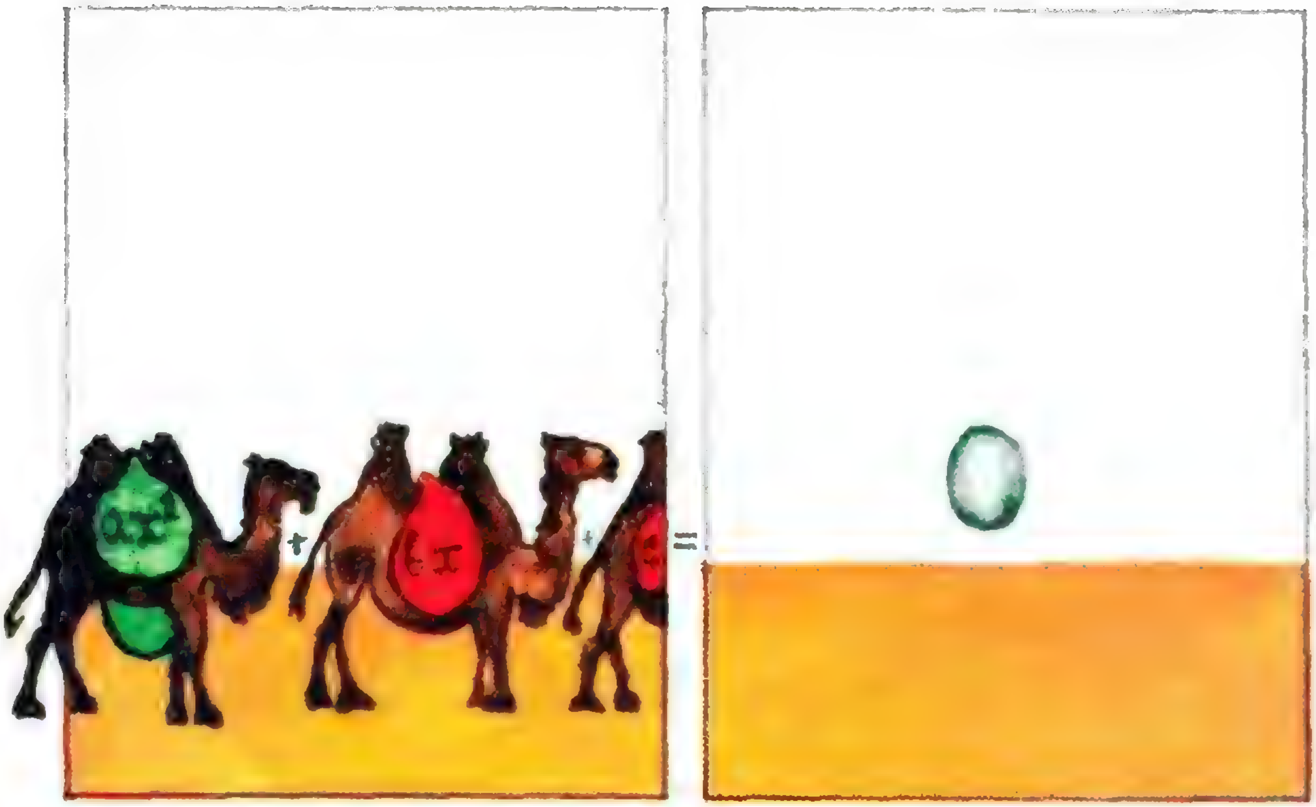
Слагаемых в сумме	Вид суммы	Знак последующего слагаемого	НОД последующих коэффициентов	Значение буквы	Значение суммы
4	—1010+300И	—	10	И=3	—110
5	—110—100У	+	30	У=1	—210
6	—210+30Г	нет	нет	Г=7	0

го вариантов пришлось перебрать: всего-навсего 6. Могло быть и хуже.

Итак, читатель получил достаточное представление о решении ребусов на чашечных весах. Плюсы его ясны: во-первых, этот метод позволяет наверняка рано или поздно найти решение (лишь бы оно было); во-вторых — независимость от конкретного ребуса; в третьих — «думать не надо» (или, философски говоря, принцип экономии мышления). Ну, а минусы? Во-первых, неизвестно, сколько придется сделать шевелений, если сразу решение не получено (т. е. стоит ли овчинка выделки); во-вторых, будет найдено лишь одно решение, даже если их несколько; а в-третьих, если решения вовсе нет (например, когда неверно напечатано условие — а такое, чего греха таить, случается!), то наше положение будет просто жутким, ибо решение превратится в почти полный перебор с нулевым результатом.

Обычно в конце статьи принято предлагать задачи для самостоятельного решения. Думается, здесь это не имеет смысла: читатель может найти множество подходящих ребусов на страницах «Кванта».

И в заключение — предложение к читателям: попробуйте придумать какие-нибудь эффективные вариации и дополнения к рассмотренному методу, а также модернизировать его для решения других типов ребусов (например, на умножение, наподобие ДВА×ДВА=ЧЕТЫРЕ). И пусть вам сопутствует удача!



Школа в «Кванте»

Квадратное уравнение

Доктор физико-математических наук

В. БОЛТЯНСКИЙ

Прежде всего напомним, как решается квадратное уравнение

$$x^2+px+q=0 \qquad (1)$$

с действительными коэффициентами p, q. Его можно переписать в виде

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(p^2-4q) \qquad (2)$$

(это легко проверить, раскрыв скобки). Число p^2-4q называют *дискриминантом* уравнения (1) и обозначают через D. Таким образом, уравнение принимает вид

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{1}{4}D. \qquad (3)$$

Теперь ясно, что если число D неотрицательно, то уравнение (1) имеет два действительных корня

$$x_1=\frac{1}{2}(-p+\sqrt{D}), \quad x_2=\frac{1}{2}(-p-\sqrt{D}), \qquad (4)$$

причем эти корни различны при $D>0$ и совпадают в случае $D=0$.

Если же D отрицательно, то уравнение (3), а потому и (1), действительных корней не имеет, поскольку ни при каком действительном x левая часть в (3) не может быть отрицательным числом. В этом случае уравнение (3) можно переписать в виде

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(\sqrt{-D}i)^2=0, \qquad (5)$$

где i — мнимая единица, т. е. $i^2=-1$*). Теперь, раскладывая левую часть на множители, получаем

$$\left(x+\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-D}i\right)\times$$
$$\times\left(x+\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-D}i\right)=0,$$

---

*) О комплексных числах см. статью Ю. Соловьева в «Кванте» № 7 за 1991 год.

откуда видно, что уравнение имеет два комплексных корня

$$x_1=\frac{1}{2}(-p+\sqrt{-D}i),$$

$$x_2=\frac{1}{2}(-p-\sqrt{-D}i). \qquad (6)$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *Квадратное уравнение (1) с действительными коэффициентами p, q имеет два корня, вид которых зависит от значения дискриминанта $D=p^2-4q$. При $D>0$ корни действительны и различны (см. (4)), при $D=0$ они действительны и совпадают, а при $D<0$ являются комплексными (см. (6)).*

Следующую теорему установил известный французский математик Франсуа Виет (1540—1603), один из основателей буквенных обозначений и современной алгебраической символики.

Теорема 2 (Виета). *Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения (1) удовлетворяют соотношениям*

$$x_1+x_2=-p, \quad x_1x_2=q. \qquad (7)$$

В самом деле, в случае действительных корней (т. е. при неотрицательном D) мы находим из формул (4):

$$x_1+x_2=\frac{1}{2}(-p+\sqrt{D})+\frac{1}{2}(-p-\sqrt{D})=$$
$$=-p,$$

$$x_1x_2=\frac{1}{4}(-p+\sqrt{D})(-p-\sqrt{D})=$$
$$=\frac{1}{4}(p^2-D)=q.$$

В случае комплексных корней (т. е. при $D<0$) формулы Виета (7) аналогичным образом получаются из (6).

Теорема 3. *Любой квадратный трехчлен разлагается на линейные множители:*

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения (1).

В самом деле, формулам Виета,

$$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=$$
$$=(x-x_1)(x-x_2).$$

Иногда при разложении на множители бывает удобно осуществлять *выделение полного квадрата* (см. (2)) вместо нахождения корней уравнения по формулам (4) или (6). Например,

$$x^2+8x-33=(x+4)^2-49,$$

откуда находим требуемое разложение

$$x^2+8x-33=(x-3)(x+11).$$

Заметим еще, что $\frac{1}{4}D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$ и $\frac{1}{2}\sqrt{D}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$. Этими формулами удобнее пользоваться, если p четно.

Задачи

1. Докажите, что дискриминант D квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ равен $(x_1-x_2)^2$, где x_1, x_2 — корни этого уравнения.

2. Проверьте подстановкой, что числа, указанные в (4), являются при $D\geqslant 0$ корнями уравнения (1). Проверьте также, что при $D<0$ числа (6) являются корнями этого уравнения.

3. Решите следующие квадратные уравнения

а) $x^2-5=0$; б) $x^2+7=0$;
в) $x^2+3x=0$; г) $x^2-7x+12=0$;
д) $x^2-x-30=0$; е) $x^2+4x+5=0$;
ж) $x^2+10x+25=0$;
з) $x^2+2(a-1)x-(6a+3)=0$;
и) $x^2+2(a+3)x+(a^2+2a+9)=0$;
к) $x^2-2(a^2-1)x+(a^4-a^2+1)=0$;
л) $2x^2-5x+2=0$;

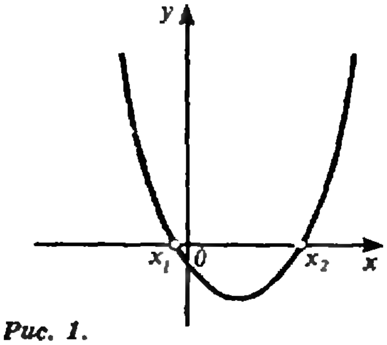


Рис. 1.

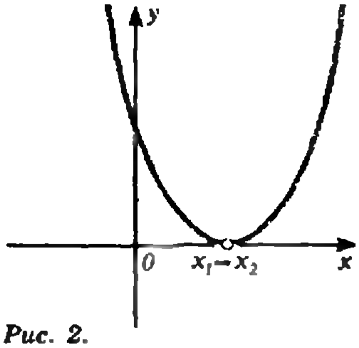


Рис. 2.

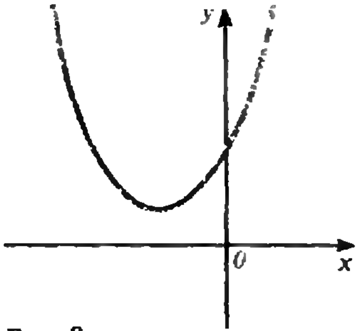


Рис. 3.

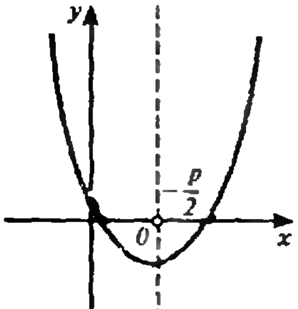


Рис. 4.

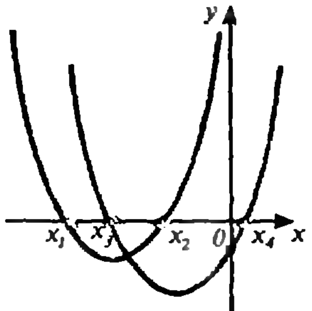


Рис. 5.

м) $(1+a)x^2+2x\sqrt{a^2+1}-(1-a)=0.$

4. Докажите, что при $D>0$ график квадратного трехчлена $y=x^2+px+q$ пересекает ось абсцисс в двух точках $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$ (рис. 1). При $D=0$ график касается оси абсцисс (рис. 2). Наконец, при $D<0$ график не имеет общих точек с осью абсцисс, а расположен выше нее (рис. 3).

5. Составьте квадратное уравнение, имеющее следующие корни:

а) $x_1=1$, $x_2=-2$; б) $x_1=x_2=-4$;
в) $x_1=2-3i$, $x_2=2+3i$;
г) $x_1=a+bi$, $x_2=a-bi$;
д) $x_1=3-4i$, $x_2=2-5i$.

6. Докажите, что при любых p, q система уравнений

$$\begin{cases} y+z=-p, \\ yz=q \end{cases}$$

имеет два решения:

$$y=x_1,\ z=x_2;\quad y=x_2,\ z=x_1$$

(действительных или комплексных, различных или совпадающих), где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

7. Докажите, что график квадратного трехчлена $y=x^2+px+q$ симметричен относительно прямой $x=-\frac{p}{2}$ (рис. 4).

8. Докажите, что корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ (с действительными коэффициентами p, q) в том и только в том случае действительны и положительны, если выполнены условия

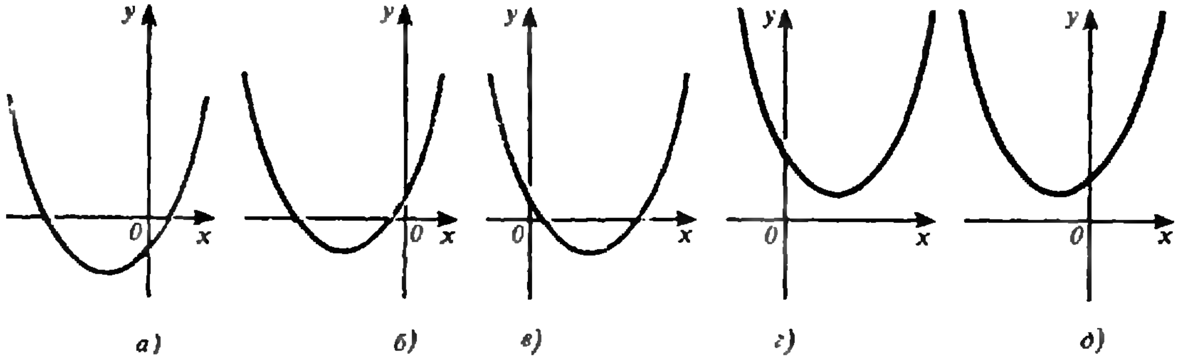
$$D\geqslant 0,\ p<0,\ q>0.$$

9. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ (с действительными коэффициентами p, q) были действительными, отличными от нуля и имеющими а) одинаковые знаки, б) разные знаки.

10. Докажите, что если один корень уравнения $x^2+px+q=0$ (с действительными коэффициентами p, q) действителен, то и второй корень действителен.

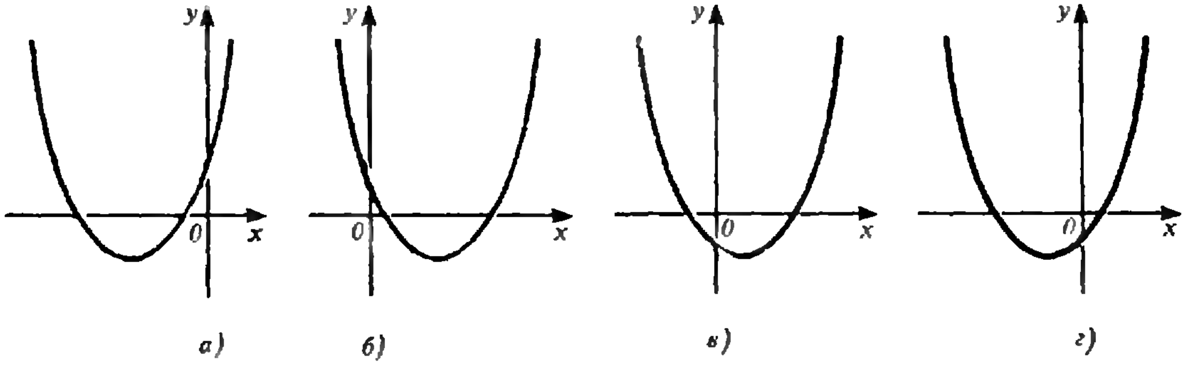
11. Докажите, что если один корень уравнения $x^2+px+q=0$ (с действительными p, q) не является действительным числом, т. е. имеет вид $a+bi$, где $b\neq 0$, то второй корень этого уравнения равен $a-bi$, т. е. также не является действительным числом.

12. Числа p и q действительны. Найдите (в зависимости от значения D) множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $x^2+px+q<0$.



а) б) в) г) д)

Рис. 6.



а) б) в) г)

Рис. 7.

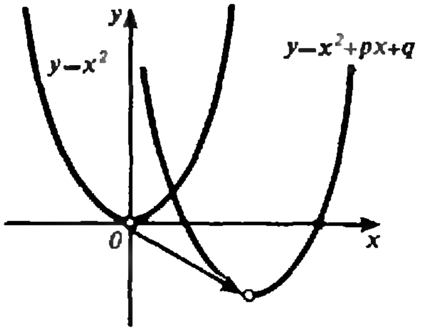


Рис. 8.

13. Решите следующие строгие квадратичные неравенства (и сделайте чертежи):

а) $x^2-5x+6<0$; б) $x^2-10x+25>0$;
в) $x^2-x-12>0$; г) $x^2-12x+38>0$.

14. Решите следующие нестрогие квадратичные неравенства:

а) $x-8x-18\leqslant 0$; б) $x^2-8x+16\leqslant 0$;
в) $x^2+6x+5\geqslant 0$; г) $x^2-14x+50\leqslant 0$.

15. Докажите, что если корни обоих квадратных уравнений

$$x^2+p_1x+q_1=0,$$
$$x^2+p_2x+q_2=0$$

действительны и находятся на отрезке $[a;\ b]$, то при любом $k>0$ корни уравнения

$$x^2+p_1x+q_1+k\,(x^2+p_2x+q_2)=0, \qquad (8)$$

если они действительны, лежат на том же отрезке $[a;\ b]$.

16. Докажите, что если корни x_1, x_2 уравнения $x^2+p_1x+q_1=0$ и корни x_3, x_4 уравнения $x^2+p_2x+q_2=0$ действительны и перемежаются (рис. 5), т. е. $x_1<x_3<x_2<x_4$, то при любом $k>0$ корни уравнения (8) действительны, причем один из них расположен на отрезке $[x_1;\ x_3]$, а другой — на отрезке $[x_2;\ x_4]$.

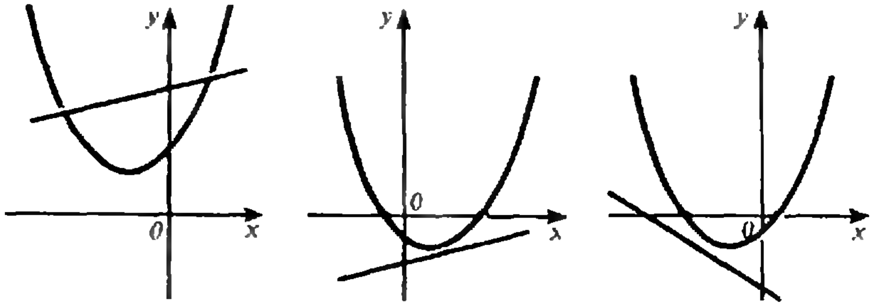


Рис. 9. *а)* *б)* *в)*

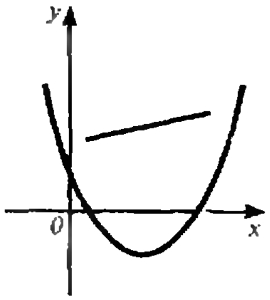


Рис. 10.

17. Докажите, что если корни x_1, x_2 уравнения $x^2+p_1x+q_1=0$ и корни x_3, x_4 уравнения $x^2+p_2x+q_2=0$ действительны и перемежаются (рис. 5), то при любом отрицательном k, отличном от -1, корни уравнения (8) действительны, причем один расположен на отрезке $[x_3;\ x_2]$, а другой — вне отрезка $[x_1;\ x_4]$.

18. При каких a уравнение $x^2+ax+6=0$ имеет целые корни?

19. При каких a уравнение $(x-10)(x-a)+1=0$ имеет целые корни?

20. Укажите знаки чисел p и q, если график квадратного трехчлена $y=x^2+px+q$ имеет вид, указанный на рисунке 6.

21. Пусть x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$. Найдите p и q, если известно, что x_1+1 и x_2+1 являются корнями уравнения

$$x^2-p^2x+pq=0.$$

22. На оси абсцисс взята точка A, а на оси ординат — точка B (обе точки отличны от начала координат). Докажите, что существует единственный квадратный трехчлен $y=x^2+px+q$, график которого проходит через обе точки A, B (рис. 7).

23. Для каких действительных значений a квадратный трехчлен $y=x^2+2ax+1$ положителен при всех действительных x?

24. Уравнения $x^2+p_1x+q_1=0$ и $x^2+p_2x+q_2=0$ имеют действительные коэффициенты, причем $p_1p_2=2(q_1+q_2)$. Докажите, что хотя бы одно из этих уравнений имеет действительные корни.

25. Рассмотрим многочлен $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ с действительными коэффициентами $a>0$, b, c. Докажите, что справедливо одно из следующих утверждений:

а $f(x,\ y)=a(x-m_1y)(x-m_2y)$, где $m_1\neq m_2$ — действительные числа (*гиперболический* многочлен);

б) $f(x,y)=a\,(x-my)^2$, где m — действительное число (*параболический* многочлен);

в) $f(x,y)>0$ при любых действительных x, y, кроме $x=y=0$ (*эллиптический* многочлен).

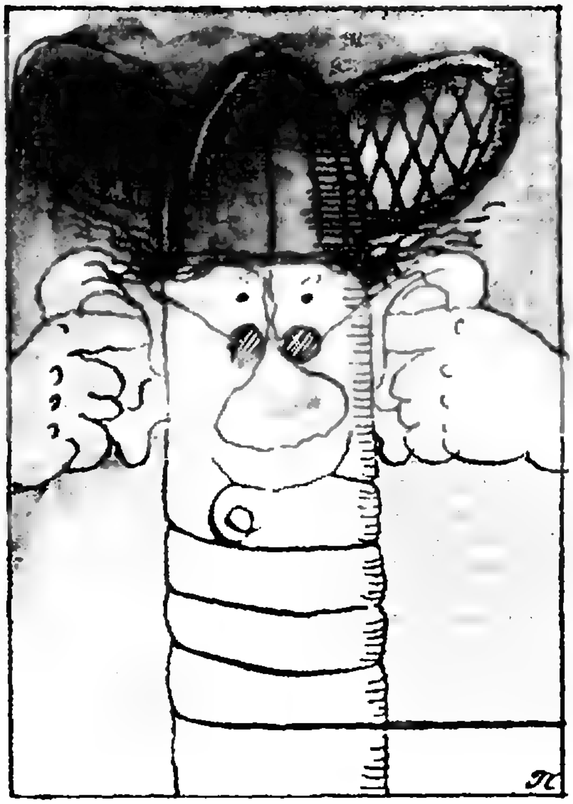
26. Докажите, что график трехчлена $y=x^2+px+q$ получается из графика $y=x^2$ параллельным переносом (рис. 8) на вектор $a=(-p/2;\ -D/4)$.

27. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} y=x^2+px+q, \\ y=ax+b \end{cases}$$

при любых a, b имеет не более двух решений (рис. 9).

28. Докажите, что внутренняя область параболы $y=x^2+px+q$, т. е. множество всех точек (x,y), для которых $y>x^2+px+q$, является *выпуклой* (это означает, что вместе с каждыми двумя точками она содержит и весь соединяющий их отрезок (рис. 10).



Лаборатория „Кванта"

Физика и гитара

П. МИХЕЕВ

Начну с того, что я — человек, не наделенный хорошим музыкальным слухом, но люблю побренчать на гитаре. И все время перед началом игры сталкиваюсь с трудно разрешимой для меня проблемой — как настроить инструмент? Вот этот вопрос и заставил меня взять ручку и сесть за письменный стол. И что же вы думаете? Физика помогла! Оказывается, достаточно подставить числа в некоторую формулу (мы ее потом получим), повернуть колки гитары необходимое число раз — и гитара настроена. Можно наслаждаться музыкой. Ну а теперь перейдем к делу — выведем магическую формулу.

Сначала определим циклическую частоту колебаний струны. Будем рассматривать колебание, содержащее всего половину длины волны (рис. 1),— такие колебания играют основную роль. Очевидно, что частота колебаний зависит от силы натяжения струны F, ее длины L и массы m. Пользуясь методом размерностей, получим формулу

$$\omega = A\sqrt{\frac{F}{Lm}},$$

где A — некий безразмерный коэффициент (проверьте сами, что только такая комбинация F, L и m имеет правильную размерность). Точное решение задачи приводит к ответу

$$\omega = \pi\sqrt{\frac{F}{Lm}}.$$

Выясним величину силы. При натяжении струны она деформируется, растягивается. Следовательно, возникает сила упругости, которая равна

$$F = ES\frac{\Delta x}{L},$$

где Δx — удлинение струны, E — модуль Юнга данного материала, S — поперечное сечение струны. Учитывая, что $m = \rho V = \rho SL$, получаем для частоты

$$\omega = \pi\sqrt{\frac{E\Delta x}{\rho L^3}}.$$

Отметим сразу же одно важное обстоятельство. Приняв $m = \rho SL$, мы ограничили наше рассмотрение сплошными однородными струнами, т. е. 1-й и 2-й струнами. У остальных струн существует дополнительная обмотка для увеличения массы.

Теперь рассмотрим процесс натяжения струны. Она наматывается на барабанчик диаметром d. На одну ось с барабанчиком насажена шестеренка, которую с помощью колка и механической передачи мы можем крутить (рис. 2). Пусть N — количество оборотов барабанчика при натягива-

Рис. 1.

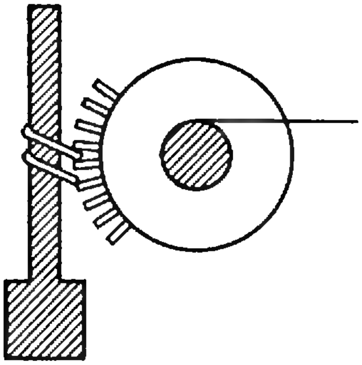


Рис. 2.

нии струны. Тогда $\Delta x = N\pi d$. Экспериментально проверено, что один оборот барабанчика происходит за $\alpha = 30$ оборотов колка. Тогда, чтобы барабанчик повернуть на N оборотов, колок надо повернуть $n = N\alpha$ раз. Значит, $\Delta x = n\pi d/\alpha$. Подставляя это выражение в формулу для циклической частоты, получим

$$\omega = \pi\sqrt{\frac{\pi E d n}{\rho L^3 \alpha}}.$$

Так как обычная частота колебаний ν связана с циклической частотой ω соотношением $\nu = \omega/(2\pi)$, то

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi E n d}{\rho L^3 \alpha}}.$$

Наконец, выразим число оборотов колка:

$$n = \frac{4\rho L^3 \alpha \nu^2}{\pi E d} = B\nu^2,$$

где $B = 4\rho L^3\alpha/(\pi E d)$.

Вычислим, чему равна константа B. Подставив $\alpha = 30$, $\rho = 7800$ кг/м^3, $L = 0{,}7$ м (для первой струны), $d = 5\cdot 10^{-3}$ м, $E = 2\cdot 10^{11}$ Па, получим, что $B = 1\cdot 10^{-4}$ Гц$^{-2}$. Итак, зная частоту звука, мы можем определить, сколько раз необходимо повернуть колок, чтобы настроить струну на нужный лад. Можно приступать к настройке гитары.

Первая струна должна быть настроена на звук «ми» первой октавы, а с физической точки зрения — на частоту $\nu \approx 300$ Гц. Получаем $n_1 = 10$ оборотов. Вторая струна — звук «си» малой октавы (≈ 247 Гц). Следовательно, $n_2 = 6{,}2$ оборота.

Но таким образом можно настроить только первые две струны. Что же делать с остальными? И тут может помочь физика.

Из теории колебаний и волн вам может быть знакомо слово «биения». Для тех, кто не помнит, постараюсь немного объяснить. Если есть два колебания с близкими частотами и они накладываются друг на друга, то получается очень интересная картинка. Пусть

$$x_1 = A\cos\omega_1 t \quad \text{и} \quad x_2 = A\cos\omega_2 t$$

— два гармонических колебания с равными амплитудами и нулевыми начальными фазами. Сложим эти колебания и получим новое:

$$x = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t,$$

или

$$x = A_0\cos\omega_{\text{ср}}t,$$

$$\text{где } A_0 = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t.$$

Так как $\omega_1 \approx \omega_2$, то $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ очень мало́, значит, A_0 слабо зависит от времени. График такого колебания приведен на рисунке 3.

Если эти колебания звуковые, то мы услышим усиление и ослабление звука. Это поможет нам настроить остальные струны. Открытая вторая струна должна звучать в унисон с третьей струной, прижатой на IV ладу. Защипнув одновременно обе струны, при частотах, очень близких между собой, мы услышим биения. При хорошей настройке можно измерить время между последующими затуханиями звука. Пусть это время T. Тогда ошибка, с которой настроена струна,

$$\varepsilon = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{1}{T\nu_0},$$

где ν_0 — частота эталона. Видно, что при $T \to \infty$ ошибка становится сколь

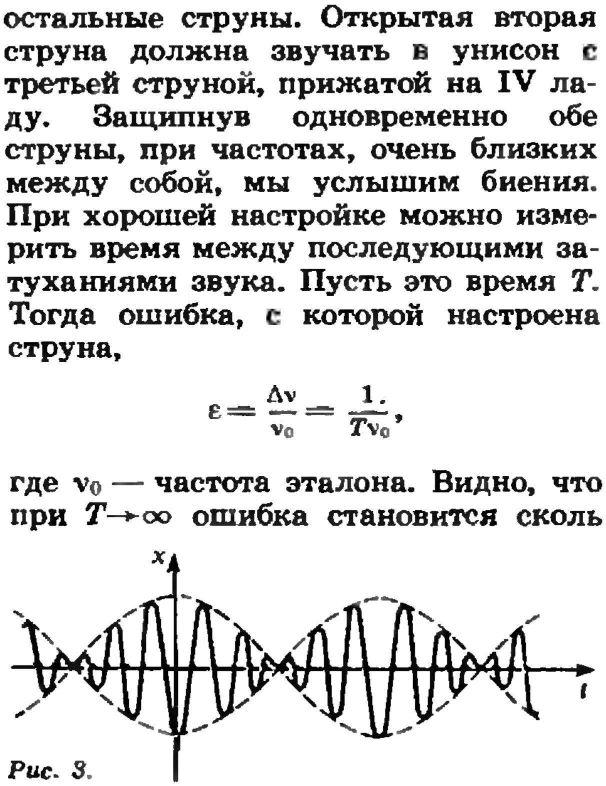


Рис. 3.

угодно малой. Чем больше период биений, тем лучше настройка.

Таким методом мы можем настроить все струны. Осталась совсем маленькая деталь. Очевидно, что струну нельзя натягивать слишком сильно — она может лопнуть. А на какую предельную величину ее можно растянуть? Предположим, что струна сделана из обыкновенной стали. Предел прочности на растяжение этого материала $\sigma_{пч}=5\ 10^8$ Па. Так как

$$\sigma_{пч}=E\frac{\Delta x_{пр}}{L},$$

то

$$\Delta x_{пр}=\frac{\sigma_{пч}L}{E}=2\ \text{мм},$$

т. е. возможно было бы сделать 4 оборота и получить максимальную частоту $\nu\approx 200$ Гц. Но так как струны делаются из специального сплава, то предел прочности у реальных струн выше. Его можно найти экспериментально, натягивая струну до тех пор, пока она не лопнет. Расчет легко провести по формуле

$$\sigma_{пч}=\frac{\pi dEn}{L\alpha}.$$

Порвав пару струн, я получил значение $\sigma_{пч}=5\cdot 10^9$ Па, что на порядок выше, чем в случае струн из обыкновенной стали.

Как видите, из обычной гитары можно извлечь не только музыку, а и множество интересных физических фактов. Эта тема еще не закрыта. Осталось самое интересное — исследование акустических свойств корпуса гитары. Может, и здесь физика поможет? А возможно, и укажет иную форму гитары с лучшими музыкальными свойствами.

Информатика

Проблема Гольдбаха и программирование

Б. ТАРАСЕНКО

В 1724 году Петром I была основана Петербургская академия наук. Для работы в ней были приглашены многие иностранные ученые: математики Даниил и Николай Бернулли, астроном Ж. Н. Делиль, физик Г. Б. Вильфингер и другие. Без приглашения прибыл на открытие академии очень интересный человек — большой выдумщик и непоседа Христиан Гольдбах (1690—1764). Благодаря своей энергии и эрудиции, Х. Гольдбах вскоре занял пост непременного секретаря академии, стал ее почетным членом. Видимо, именно его настойчивости обязана академия приезду в 1727 году великого математика Леонарда Эйлера (1707—1783).

Для Эйлера огромное значение имело его общение с Д. Бернулли (с которым он 6 лет жил на одной квартире) и с Х. Гольдбахом. Когда непосредственное общение оказывалось невозможным, Эйлер заводил с ними переписку. Так, с Гольдбахом он переписывался 35 лет, с 1729 по 1764 г.

В 1742 году Христиан Гольдбах пишет Эйлеру в Берлин: «По крайней мере, кажется, что каждое натуральное число, которое больше двух, представляется в виде суммы трех простых чисел». Нужно отметить, что в то время единица считалась простым числом, поэтому числа

$$3=1+1+1,\quad 4=2+1+1,\quad 5=2+2+1$$

удовлетворяли сделанному предположению.

В ответном письме Эйлер написал по этому поводу: «...Но что каждое четное число есть сумма двух простых, я полагаю совершенно определенной теоремой, хотя и не могу ее доказать». Именно это утверждение Эйлера для четных чисел, бо́льших 4, и стало называться «проблемой Гольдбаха», хотя многие ученые считают проблемой Гольдбаха задачу о возможности представления каждого натурального числа, большего 6, в виде суммы трех простых. (Единицу давно уже не считают простым числом, и оснований для этого достаточно много.) Очевидно, что из решения проблемы в формулировке Эйлера следует и решение проблемы во второй постановке. Действительно, отняв от четного числа 2 и представив полученное число в виде суммы двух простых чисел, получим требуемое представление в виде трех простых; от нечетного числа нужно отнять не 2, а 3.

Об эту проблему «обломало зубы» немало крупных ученых. Выдающийся немецкий математик Эдмунд Ландау на V Международном математическом конгрессе в 1912 году заявил, что при современном состоянии знаний проблема Гольдбаха недоступна для решения.

В 1922 году английские математики Харди и Литлвуд, опираясь на так называемую обобщенную гипотезу Римана, вывели, что каждое достаточно большое нечетное число представимо в виде суммы трех простых чисел. В 1937 году И. М. Виноградову удалось доказать это утверждение, не опираясь на гипотезу Римана, которая не доказана и до сих пор.

В этой постановке, казалось бы, проблема Гольдбаха уже практически решена, осталось лишь проверить ее справедливость для конечного числа нечетных чисел, что при современной технике не составляет большого труда. И действительно, к концу 60-х годов гипотеза Гольдбаха в формулировке Эйлера была проверена для всех четных чисел до $1\,000\,000\,000 = 10^9$, но число N, начиная с которого теория гарантирует выполнение гипотезы, поистине огромно:

$$N = e^{e^{16,3}} > 10^{5\,643\,232}.$$

Для того чтобы проверить такое количество чисел, даже самой новейшей проектируемой сейчас ЭВМ с производительностью $10\,000\,000 = 10^7$ операций в секунду при 10 операциях на проверку каждого числа потребуется время, большее гипотетического возраста Вселенной!

Следовательно, нужны новые идеи. Но Эйлер, чтобы уловить закономерность в той или иной задаче, проделывал гигантский объем вычислений (про него говорили: «Он вычисляет, как другие дышат»). Вряд ли среди вас найдется человек, вычисляющий лучше Эйлера, но зато в ваших руках вычислительная техника. Для начала мы можем использовать программируемый калькулятор МК-52 или МК-61. Представляем вам программу, которая последовательно выдает разложение на два простых слагаемых каждого четного числа от 6 до 99 999 998.

После ввода программы вводится начальное число (не меньшее шести), и калькулятор начинает считать. Например, если начальное число 14, то работа с калькулятором МК-61 будет выглядеть так: F АВТ В/О 1 4 «14» С/П «14» С/П «3» С/П «11» С/П «14» С/П «7» С/П «7» С/П «16» С/П «3» С/П «13» С/П «16» С/П «5» С/П «11» С/П «18» и так далее. В кавычках указаны числа, высвечивающиеся на индикаторе. За этот промежуток работы калькулятор указал все разложения чисел 14 и 16 в сумму двух простых: $14 = 3 + 11 = 7 + 7$, $16 = 3 + 13 = 5 + 11$.

Но микрокалькулятор — медлительная машина. Так, чтобы «разобраться» с числом 6, ему требуется 13 секунд, а дальше время работы растет пропорционально величине испытуемого числа. Например, для числа 286, имеющего двенадцать различных разложений в сумму двух простых чисел, требуется 43 минуты. К счастью, кроме микрокалькуляторов существуют компьютеры, считающие гораздо быстрее. Для тех, кто имеет к ним доступ, приведем программу на языке БЕЙСИК.

Опишем алгоритм, на основе которого составлена эта программа.

Пусть задано четное число $2n$. Берем первое нечетное число k ($k = 3$). Находим разность $2n - k$. Проверяем на простоту это число с помощью

```
00      Х→П 4  44   / + Начальная установка Н в Рг4 из РгХ
01      Х→П 3  43   / + Ввод Н из РгХ в Рг3, регистр первого простого
02    К П→Х 3  Г3   / + Уменьшение содержимого Рг8 на единицу
03    К П→Х 3  Г3   / + Уменьшение содержимого Рг3 на единицу
04    К П→Х 3  Г3   / + Уменьшение содержимого Рг3 на единицу
05      П→Х 4  64   / + Вызов текущего четного Н из Рг4 в РгХ
06      П→Х 3  63   / + Слагаемое С1 из Рг3 в РгХ, Н идет в РгУ
07      —      11   / + Слагаемое С2=Н — С1
08      Х→П 2  42   / + Фиксация С2 в Рг2
09      П→Х 3  63   / + Вызов С1 на РгХ
10      П→Х 2  62   / + Вызов С2 на РгХ, С1 идет в РгУ
11      —      11   / + Формирование разности С1 — С2=F
12   F  Х⩾0    59   / + F больше или равно нулю?
13      3   2  32   / + НЕТ, четное исчерпано, переход на шаг 32
14      П→Х 2  62   / + ДА, вызов С2 на РгХ из Рг2
15      ПП     53   / + Переход на подпрограмму проверки простоты
16      3   7  37   / + с начальным адресом на шаге 37 для числа С2
17   F  Х≠0    57   / + После п/п число простое и не равно нулю?
18      0   3  03   / + НЕТ, число составное, равно 0, переход на шаг 03
19      П→Х 3  63   / + ДА, число С2 простое, вызов С1 из Рг3 в РгХ
20      ПП     53   / + Переход на подпрограмму проверки простоты
21      3   7  37   / + с начальным адресом на шаге 37 для числа С1
22   F  Х≠0    57   / + После п/п число простое и не равно нулю?
23      0   3  03   / + НЕТ, число составное, переход на шаг 03
24      П→Х 4  64   / + ДА, число С1 простое, вызов Н из Рг4 в РгХ
25      С/П    50   / + Стоп-индикация текущего четного числа Н
26      П→Х 2  62   / + Вызов С2 из Рг2 в РгХ, меньшего простого
27      С/П    50   / + Стоп-индикация меньшего простого слагаемого С2
28      П→Х 3  63   / + Вызов С1 из Рг3 в РгХ, большего простого
29      С/П    50   / + Стоп-индикация большего простого слагаемого С1
30      БП     51   / + Безусловный переход на шаг
31      0   3  03   / + 03 для формирования новых слагаемых при том же Н
32    К П→Х 4  Г4   / + Добавление двойки двумя командами в шагах 32 и 33
33    К П→Х 4  Г4   / + к содержимому Рг4
34      П→Х 4  64   / + Вызов нового значения Н из Рг4 в РгХ
35      БП     51   / + Безусловный переход на шаг
36      0   1  01   / + 01 к новому циклу вычислений с новым значением Н
37      Х→П 6  46   / + Засыл испыт. числа И из РгХ в Рг6, начало п/п
38      3      03   / + Константа «три», И идет на РгУ
39      —      11   / + И — три=К
40   F  Х≠0    57   / + К не равно нулю?
41      6   3  63   / + НЕТ, К=0, И=3, ход на шаг 63 к выходу из п/п
42      1      01   / + ДА, К=0 и формирование константы «единица»
43      Х→П 5  45   / + Засыл 1 в счетчик делителей Рг5 из РгХ
44    К П→Х 5  Г5   / + Добавление двойки к содержимому
45    К П→Х 5  Г5   / + Рг5 командами в шагах 44 и 45
46      П→Х 6  66   / + Испытуемое число И из Рг6 в РгХ
47      П→Х 5  65   / + Вызов текущего делителя Д из Рг5, И идет в РгУ
48      ÷      13   / + ЧАСТНОЕ=И/Д
49      Х→П 9  49   / + Засыл ЧАСТНОЕ=И/Д из РгХ в Рг9
50    К П→Х 9  Г9   / + К=целая часть от И/Д
51      П→Х 6  66   / + Вызов И из Рг6 в РгХ
52      П→Х 9  69   / + Вызов К из Рг9 в РгХ, И идет в РгУ
53      П→Х 5  65   / + Вызов Д в РгХ, РгУ=К, РгZ=И
54      ×      12   / + Д×К, И идет из РгZ в РгУ
55      —      11   / + ОСТ=И — К×Д, остаток от деления
56   F  Х≠0    57   / + ОСТ не равен нулю?
57      6   4  64   / + НЕТ (ОСТ=0), деление нацело, переход на шаг 64
58      П→Х 9  69   / + ДА (ОСТ=0), вызов целого ЧАСТН в РгХ
59      П→Х 5  65   / + Вызов Д из Рг5 в РгХ, К идет в РгУ
60      —      11   / + РгХ=ЧАСТН — Д
61   F  Х<0    50   / + ЧАСТН — Д меньше нуля?
62      4   4  44   / + НЕТ, делители еще есть, переход на шаг 44
63      П→Х 9  69   / + ДА, делители исчерпаны, вызов И=П в РгХ из Рг6
64      В/О    52   / + Возврат в основную программу из п/п
```

соответствующей подпрограммы. Если число $2n-k$ просто, то проверяем на простоту число k. Если и оно простое, выводим последовательно на индикатор числа $2n-k$ и k. Если же хотя бы одно из этих чисел составное, переходим к следующему нечетному числу $k+2$ и вновь повторяем указанные действия до тех пор, пока соответствующее нечетное число не превзойдет n. После этого увеличиваем число n на единицу, т. е. переходим к следующему четному числу.

Подпрограмма проверки числа на простоту построена на следующем алгоритме, проверяющем делимость на все нечетные числа, что одновременно является и проверкой на простоту. Проверяемое число делится на p — первое нечетное число, большее 1, частное округляется в меньшую сторону до целого числа, затем из испытуемого числа вычитается произведение делителя и округленного частного. Если эта разность равна нулю, то число не простое (данный делитель p делит его нацело), если же разность не равна нулю, то число r увеличивается на 2, и вновь производится та же процедура до тех пор, пока делитель не станет больше частного.

Этот алгоритм может быть записан на алгоритмическом языке, изложенном в вашем учебнике по информатике, так:

```
алг   разложение (арг  цел  n)
      дано n — четное число, большее 4,
           разлагающееся в сумму двух про-
           стых
      надо одно из разложений напечатано
нач
      k: =3
      нц пока  НаимНечДел(k)≠k
               или  НаимНечДел(n—k)≠n—k
         k: =k+2
      кц
      вывод k, n—k
алг   цел  НаимНечДел(арг  цел  n)
      дано n — нечетное число, большее 1
      надо найти наименьший нечетный
           делитель n, больший 1
нач   цел  k
      k: =3
      нц пока n — k•div(n, k)≠0
         k: =k+2
      кц
кон
кон
```

А вот и программа на языке БЕЙСИК:

```
 1 PRINT «ГОЛЬДБАХ ЧЕТ»
 2 INPUT «N=», N: N — 2
 3 N=N+2 : K=1 : Y=0
 4 K=K+2:P=N—K:M=P—K
 5 IF M<0 THEN 3
 6 X=K: GOSUB 10: IF X=0 THEN 4
 7 X=P: GOSUB 10: IF X=0 THEN 4
 8 Y=Y+1: PRINT N, K; «+»; P, «Y =»; Y
 9 GOTO 4
10 IF X=3; GOTO 16
11 FOR D=3 TO X STEP 2
12 C=X/D: INT C
13 IF C=E; X=0: GOTO 16
14 IF C<D THEN 16
15 NEXT D
16 RETURN
```

Наша обложка

Радужные пятна на мокром асфальте

Весной и осенью, летом и даже теплой зимой можно наблюдать одно и то же явление — разноцветные масляные пятна на асфальте. Особенно много их — увы! — вблизи бензоколонок и автомобильных стоянок.

Но вот что интересно — как только на дорогах подморозит, пятна сразу тускнеют и исчезают, становятся практически незаметными для глаза. Куда они деваются? Ведь известно, что при легких заморозках никаких серьезных изменений с нефтепродуктами не происходит.

Оказывается, яркая радужная окраска масляных пятен на асфальте объясняется интерференцией света в тонких пленках масла и других нефтепродуктов, загрязняющих наши дороги. Причем, чтобы можно было наблюдать интерференцию, пленки должны быть тонкими и иметь гладкие поверхности.

Если асфальт мокрый, все поры и трещины на нем заполнены водой, а масло плавает на поверхности, растекаясь по воде ровным слоем. Когда же лужи замерзают и асфальт леденеет, условия наблюдения интерференции ухудшаются — поверхность асфальта с замерзшими лужами становится шероховатой, и, хотя масло еще остается жидким, никакой радужной окраски мы не видим.

Но лишь только лед начнет таять...

А. Митрофанов

Практикум абитуриента

Избранные задачи по термодинамике

А. КОРЖУЕВ

При решении большинства задач по физике бывает достаточно использовать хорошо известный алгоритм: сформулировать физическую модель рассматриваемого явления или процесса, переложить ее на язык физических законов и соотношений, составить систему уравнений, решить ее в общем виде и на последнем этапе произвести количественный расчет.

Однако, как показывает практика вступительных экзаменов, иногда встречаются задачи, в которых полезно прежде сделать ряд предварительных количественных оценок — от их результата будут зависеть как окончательный выбор физической модели явления, так и соответствующее ей математическое решение. Иначе может оказаться, что либо задача не решается, либо получаются совершенно неправдоподобные или противоречивые результаты.

В качестве примера рассмотрим задачи на теплообмен в замкнутых системах. Такие задачи не представляют никакой сложности, когда в условии есть указание на агрегатное состояние системы после установления термодинамического равновесия или когда информацию об этом можно получить, проведя несложные качественные рассуждения.

Гораздо сложнее решить задачу в случае, если в тепловой контакт вступали вещества различных агрегатных состояний и напрямую не сказано, в каком агрегатном состоянии будет находиться система после установления равновесия. Тут-то и потребуется провести ряд предварительных количественных оценок.

Задача 1. *В калориметре находится $m_1=2$ кг воды при температуре $t_1=5$ °С. Туда опускают кусок льда массой $m_2=5$ кг при температуре $t_2=-40$ °С. Какая температура установится в состоянии термодинамического равновесия? Сколько льда будет в калориметре? Теплоемкостью калориметра пренебречь.*

Предварительное обсуждение. В общем виде, пользуясь вышеприведенным алгоритмом, задачу решить нельзя — не известно конечное агрегатное состояние системы. А возможностей имеется целых пять. Обсудим каждую из них, используя для наглядности графики зависимости температуры тел t от количества отданной или полученной ими теплоты Q.

1) Лед нагреется до 0 °С, расплавится, и полученная из него вода нагреется до установившейся температуры $t_{\text{у}}>0$, «теплая» вода (при $t_1=5$ °С) остынет до той же установившейся температуры (рис. 1).

2) Лед нагреется до $t_{\text{у}}=0$ °С и весь расплавится, первоначально находившаяся в сосуде вода остынет до 0 °С (рис. 2).

3) Вода остынет до $t_{\text{у}}=0$ °С, лед на-

греется до 0 °С, и процесс теплообмена на этом прекратится (рис. 3).

4) Лед нагреется до $t_y=0$ °С, вода остынет до 0 °С и замерзнет (рис. 4).

5) Вода остынет до 0 °С, кристаллизуется, и получившийся лед остынет до температуры $t_y<0$, первоначально находившийся в сосуде лед нагреется до температуры $t_y<0$ (рис. 5).

Предварительная оценка. Теперь проведем количественные оценки и выясним, какая из пяти возможностей реализуется.

Количество теплоты, которое могла бы выделить вода при остывании до 0 °С, равно

$$Q_1=c_1m_1(t_1-0)=$$
$$=4200\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}\cdot 2\ \text{кг}\cdot 5\ \text{К}=$$
$$=42\,000\ \text{Дж}.$$

Количество теплоты, требуемое для нагревания льда от —40 °С до 0 °С, составляет

$$Q_2=c_2m_2(0-t_2)=$$
$$=2100\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}\cdot 5\ \text{кг}\cdot 40\ \text{К}=$$
$$=420\,000\ \text{Дж},$$

что в 10 раз больше, чем Q_1.

Предположение. Но может быть, вода все-таки сможет нагреть лед, если выделит еще некоторое количество теплоты, кристаллизуясь при 0 °С?

Найдем это тепло:

$$Q_3=\lambda m_1=3{,}34\cdot 10^5\ \text{Дж/кг}\times$$
$$\times 2\ \text{кг}=668\,000\ \text{Дж}.$$

Окончательный вывод. Как видно,

$$Q_1+Q_3=710\,000\ \text{Дж}>Q_2=$$
$$=420\,000\ \text{Дж}.$$

Значит, вода охладится до 0 °С и частично кристаллизуется, за счет чего лед, брошенный в сосуд, нагреется до 0 °С. На этом теплообмен закончится. Иными словами, реализуется четвертая возможность.

Итак, установившаяся температура системы равна $t_y=0$ °С. И теперь мы можем ответить на вопрос задачи: сколько же льда будет в калориметре?

Собственно решение задачи. Вычислим количество теплоты, требуемое для нагревания льда до 0 °С:

$$Q'=c_2m_2(0-t_2).$$

Найдем количество теплоты, выделенное остывающей, а затем частично кристаллизующейся водой:

$$Q''=c_1m_1(t_1-0)+\lambda m_3,$$

где m_3 — масса кристаллизовавшейся воды.

По закону сохранения энергии

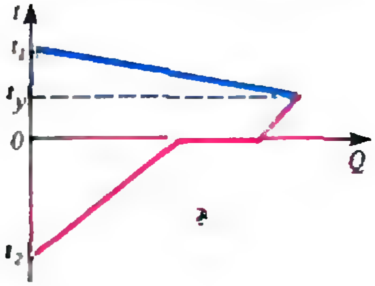


Рис. 1.

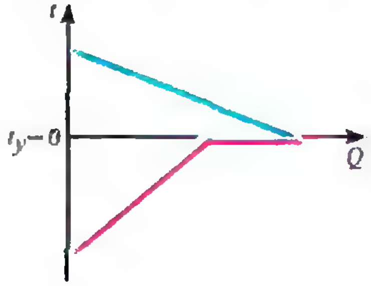


Рис. 2.

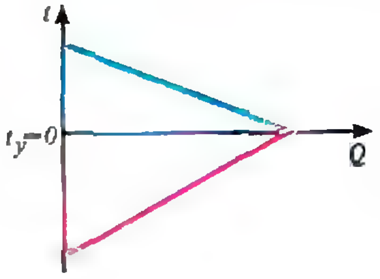


Рис. 3.

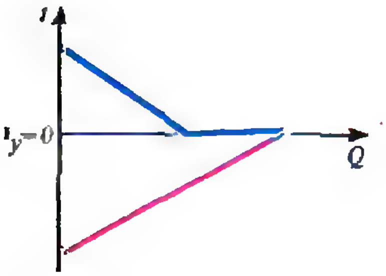


Рис. 4.

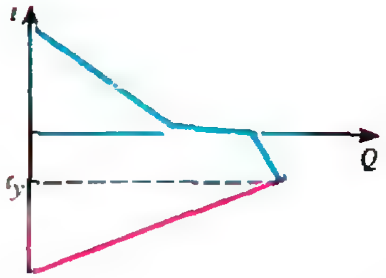


Рис. 5.

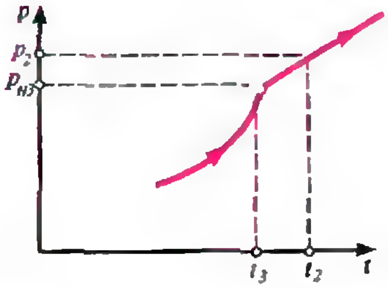


Рис. 6.

(уравнению теплового баланса) получаем $Q'=Q''$, или

$$-c_2m_2t_2=c_1m_1t_1+\lambda m_3.$$

Отсюда

$$m_3=(-c_2m_2t_2-c_1m_1t_1)/\lambda,$$

а масса льда в сосуде —

$$m_{\text{л}}=m_2+m_3=m_2+(-c_2m_2t_2-c_1m_1t_1)/\lambda\approx6{,}1\ \text{кг}.$$

Задача 2. *В сосуд теплоемкостью $C_1=1{,}7$ кДж/К при температуре $t_1=20$ °С поместили $m_2=56$ г льда при температуре $t_2=-8$ °С. Какая температура установится в сосуде?*

Разобравшись в решении задачи 1, этап предварительного обсуждения вы можете проделать самостоятельно. Перейдем сразу к предварительной оценке возможностей.

Вычислим количество теплоты, которое мог бы выделить сосуд при остывании до 0 °С:

$$Q_1=C_1t_1=1{,}7\cdot10^3\ \text{Дж/К}\cdot20\ \text{К}=34\,000\ \text{Дж}.$$

Найдем количество теплоты, которое потребовалось бы для нагревания льда до 0 °С:

$$Q_2=c_2m_2(0-t_2)=2100\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}\cdot0{,}056\ \text{кг}\times8\ \text{К}\approx941\ \text{Дж}.$$

Видим, что $Q_2<Q_1$, значит, лед начнет таять. Вычислим теперь количество теплоты, необходимое, чтобы растопить весь лед:

$$Q_3=\lambda m_2=3{,}34\cdot10^5\ \text{Дж/кг}\times0{,}056\ \text{кг}=18\,704\ \text{Дж}.$$

Получается, что потребляемое количество теплоты почти в два раза меньше выделяемого. Следовательно, растаявший лед еще вдобавок и нагреется до температуры $t_{\text{у}}>0$.

Теперь довести решение задачи до конца совсем просто.

Количество теплоты, отданное сосудом при остывании до конечной температуры $t_{\text{у}}$, равно

$$Q'=C_1(t_1-t_{\text{у}}).$$

Количество теплоты, требуемое для нагревания льда до 0 °С и его таяния, а также для нагревания получившейся воды, составляет

$$Q''=c_2m_2(0-t_2)+\lambda m_2+c_{\text{в}}m_2(t_{\text{у}}-0),$$

где $c_{\text{в}}=4200$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды. По закону сохранения энергии получаем $Q'=Q''$, или

$$C_1(t_1-t_{\text{у}})=m_2(-c_2t_2+\lambda+c_{\text{в}}t_{\text{у}}),$$

откуда окончательно

$$t_{\text{у}}=\frac{C_1t_1-m_2(\lambda-c_2t_2)}{C_1+c_{\text{в}}m_2}\approx8{,}5\ ^\circ\text{C}.$$

Задача 3. *В цилиндре под поршнем ничтожной массы находится $m_1=10$ г насыщенного водяного пара при давлении $p=100$ кПа. В цилиндр впрыскивают $m_2=5$ г воды при температуре $t_2=0$ °С. На сколько при этом опустится поршень? Площадь сечения поршня $S=100$ см^2. Теплоемкостью цилиндра пренебречь.*

Из того, что давление насыщенного пара равно 100 кПа, следует, что пар имеет температуру $t=100$ °С. Количество теплоты, которое он выделил бы при полной конденсации, равно

$$Q_1=rm_1=2{,}26\cdot10^6\ \text{Дж/кг}\times10^{-2}\ \text{кг}\approx22\,600\ \text{Дж},$$

а количество теплоты, которое потребуется для нагревания воды до 100 °С, составляет

$$Q_2=c_2m_2(t_1-t_2)=4200\ \text{Дж/(кг}\cdot\text{К)}\cdot0{,}005\ \text{кг}\times100\ \text{К}=2100\ \text{Дж}.$$

Видно, что $Q_2<Q_1$, следовательно, полной конденсации пара не произойдет. Пар лишь частично превратится в воду, и установившаяся температура в конце процесса будет равна $t_{\text{у}}=100$ °С. Массу m_3 сконденсировавшегося пара найдем из условия

$$rm_3=c_2m_2(t_1-t_2).$$

Отсюда

$$m_3=c_2m_2t_1/r,$$

а оставшаяся масса пара —

$$m_4=m_1-m_3=m_1-c_2m_2t_1/r.$$

После частичной конденсации объем пара равен

$$V'_п = \frac{m_4 RT_1}{Mp},$$

где $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная, $M = 18$ г/моль — молярная масса воды. А объем воды равен

$$V_в = \frac{m_2 + m_3}{\rho_в},$$

где $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды.

До конденсации пар занимал объем

$$V_п = \frac{m_1 RT_1}{Mp}.$$

Тогда изменение объема под поршнем, вследствие конденсации части пара, будет равно

$$\Delta V = V_п - (V'_п + V_в).$$

При этом поршень в цилиндре опустится на

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{m_2}{S}\left(\left(\frac{RT_1}{Mp} - \frac{1}{\rho_в}\right)\frac{c_2 t_1}{r} - \frac{1}{\rho_в}\right) \approx$$
$$\approx 16 \text{ см}.$$

Теперь рассмотрим две задачи непосредственно на свойства насыщенного пара, в которых тоже необходимы предварительные оценки.

Задача 4. *В откачанный сосуд объемом $V = 5$ л поместили $m = 1$ г воды. Найдите давление паров воды в сосуде при температурах $t_1 = 20$ °C и $t_2 = 100$ °C. Давления насыщенных паров воды при этих температурах равны соответственно $p_{н1} = 2{,}33$ кПа и $p_{н2} = 100$ кПа.*

Прежде чем применять уравнение Менделеева — Клапейрона, необходимо выяснить, будет ли водяной пар насыщенным и если да, то какая часть воды при этом перейдет в газообразное состояние.

Начнем с температуры t_1. Предположим, для первоначальной оценки, что вся жидкость испарилась. Тогда плотность пара будет равна

$$\rho = m/V = 0{,}2 \text{ кг/м}^3.$$

Посмотрев в таблицу плотностей насыщенных паров воды при различных температурах, увидим, что при 20 °C $\rho_{н1} \approx 0{,}017$ кг/м^3 — наше значение плотности гораздо больше. Это означает, что не вся жидкость испарится и пар над ней будет насыщенным. Поэтому давление паров в сосуде будет

$$p_1 = p_{н1} = 2{,}33 \text{ кПа}.$$

Непосредственное применение формулы привело бы к результату

$$p_1 = \frac{mRT_1}{MV} \approx 27 \text{ кПа (!)},$$

что более чем в 10 раз больше давления насыщенного пара при данной температуре.

Очевидно, что при дальнейшем нагревании жидкость продолжает испаряться. При полном ее испарении плотность получившегося пара станет равной вычисленному ранее значению $\rho = 0{,}2$ кг/м^3. Вновь обратившись к таблице плотностей, увидим, что это произойдет при температуре $t_3 = 70$ °C и давлении, равном давлению насыщенного пара $p_{н3} = 31{,}7$ кПа. Дальнейшее увеличение давления при нагревании от $t_3 = 70$ °C до $t_2 = 100$ °C происходит в соответствии с законом Шарля $p_3/T_3 = p_2/T_2$. Отсюда окончательно получаем (рис. 6)

$$p_2 = \frac{p_{н3} T_2}{T_3} \approx 34{,}5 \text{ кПа}.$$

Установив по таблице плотностей, что максимальная плотность пара в сосуде соответствует температуре, меньшей 100 °C, а значит, при 100 °C пар будет уже ненасыщенным (вся вода испарится при 70 °C), его давление можно вычислить проще — из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$p_2 = \frac{\rho RT_2}{M} \approx 34{,}5 \text{ кПа}.$$

Однако применение этой формулы к первому состоянию с температурой $t_1 = 20$ °C без предварительной оценки, показавшей, что пар насыщенный, привело бы к абсурдному результату.

Задача 5. *Камеру объемом $V = 10$ л наполнили при температуре $t_1 = 0$ °C сухим воздухом, ввели в нее*

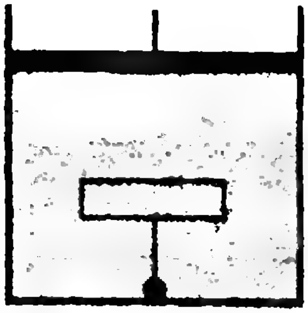


Рис. 7.

$m=3$ г воды, закрыли, а затем нагрели до $t_2=100$ °С. Какое давление установится в камере, если первоначальное давление было $p_1=10^5$ Па?

Искомое давление по закону Дальтона равно сумме давлений водяного пара и сухого воздуха.

Давление сухого воздуха, первоначально находившегося в камере, найдем по закону Шарля:

$$p_в=p_1\frac{T_2}{T_1}\approx136{,}6\ \text{кПа}.$$

Прежде чем дать окончательное заключение о давлении пара, выясним, будет ли он насыщенным при $t_2=100$ °С. Предположив, что вся вода испарилась, оценим возможное парциальное давление пара:

$$p_п=\frac{mRT_2}{MV}\approx51{,}7\ \text{кПа}.$$

Давление же насыщенного водяного пара при данной температуре почти в два раза больше (100 кПа). Значит, наше предположение правильное, и для полного давления в камере получим

$$p=p_в+p_п\approx188{,}3\ \text{кПа}.$$

Если бы давление пара в предварительной оценке получилось бо́льшим, чем 100 кПа, отсюда следовало бы, что пар еще насыщенный и его давление равно 100 кПа, а полное давление в камере $p\approx236{,}6$ кПа.

Упражнения

1. В сосуд теплоемкостью $C=760$ Дж/К, содержащий $m_1=200$ г воды при температуре $t_1=20$ °С, опустили $m_2=100$ г льда при $t_2=-10$ °С. Какая установится температура? Сколько воды будет в сосуде?

2. В сосуд, в котором находится $m_1=1$ кг воды при $t_1=30$ °С, опустили кусок льда массой $m_2=0{,}2$ кг при 0 °С с привязанным к нему на веревке металлическим шариком при 0 °С ($m_ш=30$ г, $c_ш=800$ Дж/(кг · К)) так, что лед полностью погрузился под воду (рис. 7). Затем все закрыли невесомым теплонепроницаемым поршнем площадью $S=100$ см^2. На сколько переместится поршень и какова будет температура в сосуде в конечном состоянии?

3. В сосуд теплоемкостью $C=200$ Дж/К при температуре $t_1=200$ °С налили $m_2=0{,}1$ кг воды при $t_2=60$ °С и закрыли теплонепроницаемым поршнем. Как изменится положение поршня в процессе установления теплового равновесия, если площадь сечения поршня $S=100$ см^2?

4. Сосуд объемом $V=10$ л наполнен сухим воздухом при температуре $t_1=20$ °С и давлением $p_1=10^5$ Па. Каким станет давление влажного воздуха, если в сосуд ввести $m_2=10$ г воды и нагреть его содержимое до $t_2=100$ °С?

Информация

Олимпийские интеллектуальные игры 1993 года

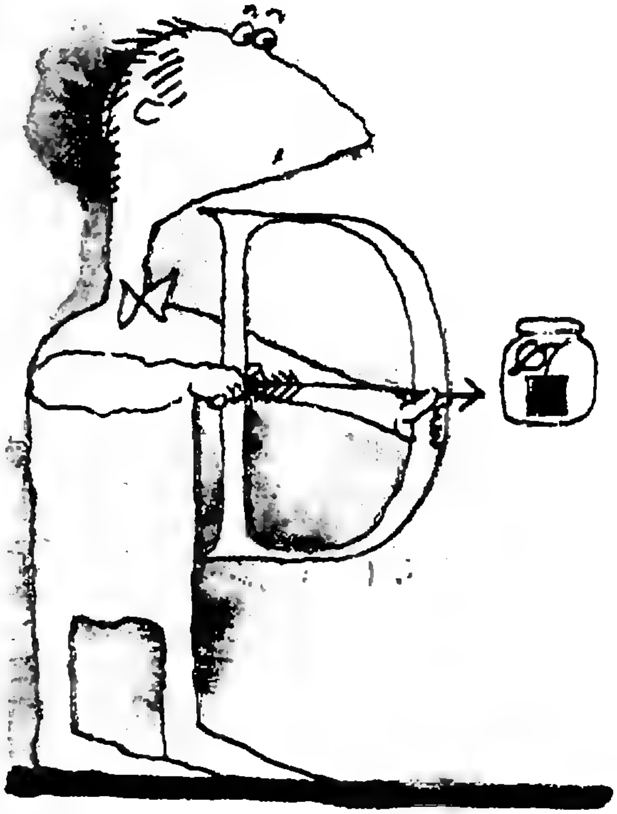
В следующем году в Англии планируется провести I Олимпийские интеллектуальные игры.

В программу I Олимпийских интеллектуальных игр вошли состязания по следующим видам: бакгамон (трик-трак), биофидбак (самовнушение), бридж, вари (калах), вычисления в уме, го, го-моку, джин-рамми, домино, китайские шахматы, компьютерное программирование, крибедж, кроссворды, логические головоломки, ма-джонг, покер, разгадывание шифров, реверси, рэндзю, скат, соревнования по запоминанию, соревнования по коэффициенту интеллектуальности, соревнования по словарному запасу, творческое тестирование, фантастические и исторические игры, шахматы, шашки, шоги, экономические игры.

Многие из этих названий вы, возможно, никогда и не слышали, однако за любым из них стоит не менее 20 миллионов человек, регулярно играющих в данную игру. Такое условие для включения игры в список установили организаторы олимпиады.

Полагаем, что вам интересно научиться играть в новые для вас игры. Поэтому мы планируем познакомить вас с некоторыми из них. С какими? Напишите нам. Мы постараемся учесть все пожелания. И как знать, не станете ли вы олимпийскими чемпионами?

А. Калинин



Практикум абитуриента

О дискриминанте

А. ЕГОРОВ

Многие задачи вступительных экзаменов способны повергнуть в ужас человека неподготовленного. Тем не менее, их часто удается решить с помощью чрезвычайно простых соображений. В этой статье мы расскажем, что можно «вытащить» из общеизвестных условий разрешимости квадратных уравнений и неравенств.

Уравнения и системы

Начнем с задачи, иллюстрирующей метод, который мы и будем применять дальше.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$5x^2-2xy+2y^2-2x-2y+1=0.$$

Решение. Можно переписать это уравнение в виде

$$(x+y-1)^2+(2x-y)^2=0.$$

Однако додуматься до такого преобразования не очень просто. Поэтому мы поступим иначе: рассмотрим наше уравнение как квадратное относительно x с коэффициентами, зависящими от y:

$$5x^2-2(y+1)x+2y^2-2y+1=0.$$

Записывая условие разрешимости, получаем после преобразований

$$D/4=(y+1)^2-5(2y^2-2y+1)=$$
$$=-9y^2+12y-4=-(3y-2)^2,$$

откуда сразу следует, что $y=2/3$ (иначе дискриминант отрицателен). Теперь без труда находим, что $x=1/3$.

Ответ: $(1/3;\ 2/3)$.

Теперь решим систему уравнений.

Задача 2 (МГУ, факультет почвоведения, 1979 г.). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0, \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0. \end{cases}$$

Решение. Стандартными методами с этой задачей справиться трудно. Поэтому поступим так же, как мы уже делали в первой задаче — решим первое уравнение как квадратное относительно x. Его дискриминант равен

$$D/4=-(y-3)^2.$$

Выходит, что уравнение имеет действительное решение лишь при единственном значении y, а именно при $y=3$. Теперь найдем, что $x=2$, и проверим полученное решение прямой подстановкой во второе уравнение.

Ответ: $(2;\ 3)$.

В следующей системе число уравнений меньше числа неизвестных.

Задача 3. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} x+y+z=\sqrt{3}, \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$

Решение. Выразив x через y и z из первого уравнения, получим после подстановки во второе уравнение:

$$y^2+(z-\sqrt{3})y+z^2-\sqrt{3}z+1=0.$$

Оно квадратное относительно y с коэффициентами, зависящими от z. Его дискриминант

$$D=-3z^2+2\sqrt{3}z-1=-(\sqrt{3}z-1)^2$$

не может быть отрицательным, и поэтому $z=1/\sqrt{3}$. Дальнейшее ясно.

Ответ: $(1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3};\ 1/\sqrt{3})$.

Задача 4. *Решите уравнение*

$$\cos x+\cos y-\cos(x+y)=3/2.$$

Решение. Преобразуя левую часть с помощью известных формул, приходим к уравнению

$$4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-4\cos^2\frac{x+y}{2}-1=0,$$

которое после замены $t=\cos\frac{x+y}{2}$ приводится к виду

$$4t^2-4\cos\frac{x-y}{2}\,t+1=0.$$

Записывая условие разрешимости, получаем неравенство

$$D/4=4\left(\cos^2\frac{x-y}{2}-1\right)\geqslant 0,$$

из которого сразу следует, что $\cos^2\frac{x-y}{2}=1$.

Осталось решить две системы уравнений

$$\begin{cases}\cos\dfrac{x-y}{2}=1,\\[2mm] \cos\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}\cos\dfrac{x-y}{2}=-1,\\[2mm] \cos\dfrac{x+y}{2}=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2(k+n)\pi;\ \pm\frac{\pi}{3}+2(k-n)\pi\right)$; $\left(\pm\frac{2\pi}{3}+\pi+2(k+n)\pi;\ \pm\frac{2\pi}{3}-\pi+2(k-n)\pi\right)$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$.

Задача 5 (МИРЭА, 1990 г.) *При каких значениях параметра a существует единственная пара $(x;\ y)$, удовлетворяющая уравнению*

$$ax^2+(3a+2)y^2+4axy-2ax+(4-6a)y+2=0?$$

Решение. При $a=0$ получаем уравнение

$$2y^2+4y+2=0,$$

единственный корень которого $y=1$.

Легко видеть, что в этом случае решениями исходного уравнения будут все пары $(x;\ -1)$, так что $a=0$ не удовлетворяет условию.

При $a\neq 0$, как и раньше, рассмотрим исходное уравнение как квадратное относительно x:

$$ax^2+2a(2y-1)x+(3a+2)y^2+(4-6a)y+2=0.$$

Для него

$$D/4=a(a-2)(y+1)^2.$$

Если $a(a-2)<0$, то $y=-1$, $x=3$ — единственное решение. Если же $a(a-2)\geqslant 0$, исходное уравнение относительно x имеет решение при любом y.

Ответ: $0<a<2$.

Неравенства

Напомним, что неравенство

$$ax^2+bx+c\geqslant 0\ (a>0)$$

выполнено при всех x тогда и только тогда, когда

$$b^2-4ac\leqslant 0.$$

Неравенство же

$$ax^2+bx+c<0$$

имеет решения при $a>0$ тогда и только тогда, когда соответствующее уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет 2 различных корня, т. е. при $D>0$.

Решение следующей широко известной задачи достаточно хорошо иллюстрирует метод решения, основанный на перечисленных свойствах квадратичных неравенств.

Задача 6. *Докажите неравенство*

$$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac,$$

где a, b, c — любые действительные числа.

Указание. Неравенство

$$a^2-a(b+c)+b^2+c^2-bc\geqslant 0$$

— квадратичное относительно a с коэффициентами, зависящими от b и c. Его дискриминант, равный $-3(b-c)^2$, не положителен и равен нулю при $b=c$, причем знак равенства в исходном неравенстве возможен лишь при $a=b=c$.

А вот несколько более сложная задача.

Задача 7. *Докажите неравенство*

$$6a+4b+5c\geqslant 5\sqrt{ab}+7\sqrt{ac}+3\sqrt{bc},$$

где $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$.

Решение. Положив $t=\sqrt{a}$, запишем неравенство как квадратичное относительно t:

$$6t^2-(5\sqrt{b}+7\sqrt{c})t+4b+5c-3\sqrt{bc}\geqslant 0.$$

Дискриминант квадратного трехчлена в левой части полученного неравенства равен

$$(5\sqrt{b}+7\sqrt{c})^2-24(4b+5c-3\sqrt{bc})=-71(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2,$$

т. е. отрицателен при $b\neq c$ и равен нулю при $b=c$.

Таким образом, левая часть этого неравенства всегда неотрицательна и может быть равна нулю лишь при $b=c=a$.

Задача 8. *При каких значениях a неравенство*

$$-1<\frac{ax^2+x+2}{x^2+1}<3$$

выполнено при всех x?

Решение. Из условия сразу следует переформулировка задачи: *при каких a каждое из неравенств*

$$ax^2+x+2<3x^2+3 \text{ и }$$
$$ax^2+x+2>-x^2-1$$

выполняется для всех x?

Для первого из них, $(a-3)x^2+x-1<0$, получаем условие

$$\begin{cases}a<3,\\ a<11/4,\end{cases}$$

т. е. $a<11/4$. Аналогично, для второго неравенства имеем $a>-1/3$.

Ответ: $-1/3<a<11/4$.

Задача 9 (МИФИ, 1990 г.). *При каких действительных значениях a неравенство*

$$1-\log_{1/7}(x^2+1)\geqslant\log_7(ax^2+4x+a)$$

выполняется при всех x?

Решение. Исходное неравенство равносильно системе

$$7(x^2+1)\geqslant ax^2+4x+a>0,$$

или

$$\begin{cases}(7-a)x^2-4x+7-a\geqslant 0,\\ ax^2+4x+a>0.\end{cases}$$

Последняя система выполняется при всех x тогда и только тогда, когда каждое из квадратичных неравенств выполняется при всех x, т. е. при условиях

$$\begin{cases}0<a<7,\\ 4-(7-a)^2\leqslant 0,\\ 4-a^2<0.\end{cases}$$

Решая полученную систему, приходим к ответу.

Ответ: $2<a\leqslant 5$.

В следующей задаче, прежде чем пустить в ход наш метод, приходится предварительно «обработать» условие.

Задача 10 (МГУ, экономический факультет, 1988 г.). *Найдите все значения параметра a, при которых неравенство*

$$|3\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a|\leqslant 3$$

выполняется для любых значений x.

Решение. Если $\cos x=0$, неравенство принимает вид

$$|a+3|\leqslant 3.$$

Его решения дают нам ограничения на a: $-6\leqslant a\leqslant 0$.

При $\cos x\neq 0$ поделим обе части неравенства на $\cos^2 x$ и выполним замену $t=\operatorname{tg} x$. В результате получим (воспользовавшись формулой $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$) неравенство

$$|(a+3)t^2+2at+a+1|\leqslant 3(1+t^2),$$

которое должно выполняться при всех t.

Это неравенство эквивалентно системе

$$-3-3t^2\leqslant(a+3)t^2+2at+a+1\leqslant 3(1+t^2).$$

При $a=0$ все неравенства справедливы. При $a\neq 0$, выписывая, как и раньше, условия, при которых эти неравенства выполняются при всех t, придем к системе неравенств относительно a и, решив ее, получим ответ.

Ответ: $-12/5\leqslant a\leqslant 0$.

Область значений функции. Максимум и минимум

При нахождении области значений функции часто оказывается полезным такое

Замечание. Пусть дана некоторая функция $y=f(x)$. Рассмотрим уравнение $f(x)=a$. Это уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда число a принадлежит области значений функции f.

В следующих задачах применение условия разрешимости квадратных уравнений и неравенств упрощает дело и оказывается более удобным, чем исследование функции f средствами анализа.

Задача 11. *Найдите область значений функции* $y=x/(x-1)^2$.

Решение. Задача немедленно сводится к такой: *при каких a уравнение $x/(x-1)^2=a$, или $ax^2-(2a+1)x+a=0$, имеет корни?*

Прежде всего при $a=0$ есть корень $x=0$. Если $a\neq 0$, все сводится к решению неравенства $D=4a+1\geqslant 0$.

Ответ: $[-1/4;\ +\infty)$.

Теперь несколько более трудных задач.

Задача 12. *Найдите наименьшее значение функции*

$$y=x(x+1)(x+2)(x+3).$$

Указание. Поскольку $y=(x^2+3x)(x^2+3x+2)$, выполним замену $t=x^2+3x$.

Уравнение $t(t+2)=a$ имеет корни при $a\geqslant -1$, причем левая часть равна -1 при $t=-1$. Осталось убедиться в том, что уравнение $x^2+3x=-1$ имеет корни.

Ответ: -1.

Задача 13 (МГУ, мехмат, 1989 г.). *Найдите наибольшее из значений z, для которого существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению*

$$2x^2+2y^2+z^2+xy+xz+yz=4.$$

Решение. Дискриминант квадратного уравнения относительно x с коэффициентами, зависящими от y и z, должен быть неотрицателен, т. е. должно выполняться неравенство

$$D=(y+z)^2-16y^2-8yz-8z^2+32\geqslant 0,$$

или

$$15y^2+6yz+7z^2-32\leqslant 0.$$

Квадратичное неравенство относительно y имеет решения лишь тогда, когда

$$9z^2-105z^2+15\cdot 32\geqslant 0,$$

т. е. при $z^2\leqslant 5$.

Итак, $-\sqrt{5}\leqslant z\leqslant\sqrt{5}$, так что z не может быть больше, чем $\sqrt{5}$. Если $z=\sqrt{5}$, то неравенство имеет единственное решение относительно y. Но тогда существует и x (тоже единственный) такой, что тройка (x, y, z) удовлетворяет уравнению

$$2x^2+2y^2+z^2+xy+xz+yz=4.$$

Ответ: $\sqrt{5}$.

Следующая задача, хотя внешне и отличается от предыдущей, без труда к ней сводится.

Задача 14 (МГУ, биологический факультет, 1989 г.). *Числа x, y, z таковы, что $x^2+2y^2+z^2=2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x+y-z$?*

Указание. Пусть $t=2x+y-z$. Тогда после подстановки $z=2x+y-t$ в уравнение приходим к задаче, отличающейся от предыдущей только значениями коэффициентов. Предоставляем читателям проделать все необходимые вычисления самостоятельно.

Ответ: $t_{\max}=\frac{4}{3}\sqrt{6}$.

Аналогично может быть решена и следующая задача.

Задача 15 (МГУ, факультет психологии, 1986 г.). *Найдите наимень-*

шее значение, принимаемое выражением $x+5y$, если $x>0$, $y>0$ и $x^2-6xy+y^2+21\leqslant 0$.

Указание. Пусть $t=x+5y$, тогда $x=t-5y$. После подстановки и преобразований придем к задаче об отыскании наименьшего положительного значения t, для которого соответствующее квадратичное относительно y неравенство будет иметь решение. Когда оно будет найдено, следует убедиться в существовании положительных x и y, дающих полученное значение t.

Ответ: $7\sqrt{3}$.

В заключение предлагаем несколько задач для самостоятельного решения.

1. Решите уравнения и системы

а) $5x^2+5y^2+8xy+2x-2y+2=0$;

б) $\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+2x-8y+10=0, \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+z=4, \\ 2xy-z^2=16; \end{cases}$

г) (МГУ, геофак, 1982 г.)

$$\begin{cases} 8\sin x\cos y\sin(x+y)+1=0, \\ y+z=x; \end{cases}$$

д) (МГУ, ВМК, 1985 г.)

$$\sqrt{15x^2+2y^2-2z^2-3\sqrt{5}x-2y+10z-4}+\sqrt{5x^2-2\sqrt{5}x\cos\pi y\cos\pi z+1}=0.$$

2. Докажите неравенства

а) $x^2+2xy+3y^2+2x+6y+3\geqslant 0$;

б)* $x(1+y)+y(1+z)+z(1+x)\geqslant 6\sqrt{xyz}$.

3. Найдите наименьшее значение функции

а) $y=\dfrac{x}{x^2+x+1}$; б) $y=\dfrac{2x^2+9x+11}{3x^2+11x+12}$.

4. Найдите область значений функции

$$y=\frac{x}{(x+1)^2}.$$

5. При каких значениях a следующие неравенства выполняются при всех x:

а) $-1<\dfrac{ax^2+x+1}{x^2+x+1}<1$;

б) $\dfrac{x-2}{ax^2-2x+a-2}<1$;

в) (МГУ; экономический факультет, 1988 г.)

$|5\sin^2 x+2a\sin x\cos x+\cos^2 x+a+1|\leqslant 6$.

6 (МГУ, мехмат, 1989 г.). Найдите наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению

$$x^2+2y^2+z^2+xy-xz-yz=1.$$

7 (МГУ, биофак, 1989 г.). Числа a, b, c таковы, что

$$2a^2+b^2+c^2=3.$$

Какое наименьшее значение может принимать выражение $a-2b+c$?

8 (МГУ, филологический факультет, 1989 г.). Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственная тройка чисел $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющая равенствам

$$x+y+z=x^2+4y^2$$

и

$$x+2y+3z=a$$

9. Какое наибольшее значение может принимать сумма $x+3y$, если x и y удовлетворяют неравенству

$$x^2+xy+4y^2\leqslant 3?$$

10. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения

$$x^2-xy+y^2, \text{ если } 2x^2+2xy+y^2=2.$$

11 (МГУ, биофак, 1985). Найдите все значения b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2-2xy+10y^2=b^4-6b^3+9b^2-19+\sqrt{85}, \\ x^2+2xy-3y^2=4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Внимание: новый задачник!

Учащимся, абитуриентам, преподавателям, руководителям кружков и факультативов, студентам педагогических вузов,

а также всем, кто желает углубить свои знания по математике, будет интересна и полезна новая книга:

«ЗАДАЧНИК ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ».

Книгу можно получить почтовой бандеролью, если перевести 25 рублей (в эту сумму входит оплата пересылки книги)

по адресу: 150054, г. Ярославль, ул. Свободы, д. 87, кв. 26, Чаплыгину В. Ф.

В графе «Для письма» платежного перевода напишите «Заказ книги» и укажите свой почтовый адрес.

Игра го

Немного истории

Го — одна из древнейших игр, дошедших до наших дней. Ей около 5 тысяч лет. Историки до сих пор спорят, какая из стран является родиной го. Одни специалисты считают, что эта игра зародилась в Индии, другие доказывают, что ее истоки восходят к Египту. Однако большинство сходится во мнении, что родина го — Китай.

Первым в списке претендентов на звание «отца» го (по-китайски она называется вейци) значится император Яо, правивший в XXIV—XXIII вв. до н. э. Уже тогда признавалось, что игра развивает интеллектуальные способности человека. Так, преемник императора Яо император Шунь использовал вейци для развития умственных способностей своего сына и наследника Шан Цзюня. А Конфуций отмечал, что вейци совершенствует личность человека.

Где-то в III или IV в. н. э. вейци проникла через Корею в Японию. Первоначально в нее играли монахи-буддисты, императоры же преследовали это занятие, считавшееся столь же порочным, как пьянство. 701 год стал великим годом в истории го на Японских островах: императорским эдиктом игра была признана неазартной и приравнена к упражнениям на музыкальных инструментах. Так, наконец, подпольные занятия монахов получили государственную легальность.

Шли годы. Игра проникла в широкие слои дворянства, купечества, ремесленников и даже крестьян. В 1603 г. сёгуном (правителем) Иэясу был издан эдикт об учреждении Академии го. Но вот наступил 1868 год — год так называемой «революции Мэйдзи». Микадо — император Муцухито — лично возглавил правительство страны, провел серию буржуазных реформ, обновивших общественную жизнь Японии. Го, причисленная к анахронизмам и нелепостям сметенного феодального порядка, почти исчезла из японской жизни. Однако, как это ни парадоксально, именно революция Мэйдзи, нанесшая такой удар по го внутри Японии, способствовала тому, что игра вышла на мировые просторы. После переворота 1868 г. Япония порвала с традиционной политикой изоляции от остального мира: не только идеи западной цивилизации хлынули в эту страну, начался и встречный поток. Европейцы знакомились с японскими обычаями, искусством, архитектурой, узнали они и любимую японцами игру го.

В начале XX в. в Европе стали появляться первые любительские клубы игроков го. Эмануэль Ласкер — тогдашний чемпион мира по шахматам — также заинтересовался игрой. Он быстро убедился, что она дает богатые возможности как для глубоких стратегических замыслов, так и для изящных тактических маневров. Еженедельно в доме Ласкера стали устраиваться вечера игры в го, в которых помимо хозяина принимали участие Эдуард и Бертольд Ласкеры — братья чемпиона мира, тоже очень сильные шахматисты. Ласкер, известный также и как математик, считал го идеальной игрой для математического ума. Между тем японцы, подметил он, до сих пор не выдвинули ни одного математика, который мог бы сравниться с величайшими гениями мира. Значит, это должно сказаться и в го. Сделав сей скороспелый вывод, Ласкер стал поговаривать о том, чтобы поехать в Страну восходящего солнца и встретиться там с ведущими мастерами игры.

Но случай помог чемпиону мира обойтись без дальнего вояжа. В то время в Берлине существовал японский клуб го. Трио Ласкеров отправилось туда, чтобы встретиться с одним японским игроком, не отличающимся высоким классом. Тот охотно согласился сыграть против всех троих, причем разрешил противникам консультироваться друг с другом и, более того, обещал дать вперед девять камней форы, что примерно равноценно ферзю в шахматах!

Немало удивленный, Э. Ласкер незамедлительно высказал сомнение: дескать, едва ли кто в мире сможет успешно соперничать с ним на таких условиях. Тем более что он уже довольно долго изучал теорию игры, разбирал партии японских мастеров и считал, что достиг в го достаточно глубокого понимания.

Задетый за живое, чемпион мира пытался отклонить предложение самонадеянного японца и хотел играть только на паритетных началах. Но японский игрок лишь загадочно улыбался и отрицательно качал головой.

«Ну хорошо же, хочет — пусть попробует!» Встреча состоялась. Ласкер и его союзники старательно обдумывали каждый ход, делая его лишь после длительного обсуждения между собой. Японец отвечал молниеносно, тратя на каждый ход доли секунды. Несмотря на огромную фору, японец наголову разгромил противников.

Огорченный таким исходом игры, Ласкер был вынужден признать, что, очевидно, в го таится много тонкостей, ускользнувших от его внимания. Впрочем, несмотря на такое сокрушительное поражение, Ласкер остался на всю жизнь горячим поклонником го и даже написал учебник для начинающих игроков.

В настоящее время в Японии и во всем мире проводится масса соревнований как среди профессионалов, так и среди любителей. О популярности игры можно судить по таким цифрам: только в Японии насчитывается около 10 миллионов любителей го, а во всем мире их более 20 миллионов. Регулярно проводятся чемпионаты мира, Европы, турниры «Гран-при» и другие. Начиная с 1986 г. в них стали участвовать и наши спортсмены.

Правила и понятия

Что такое го?

Представим себе, что двое путешественников попали на необитаемый остров и после того как пришли в себя, занялись дележом территории. Очевидно, в выигрыше окажется тот, кто отгородит себе территорию побольше.

Смысл игры го как раз заключается в отгораживании большей территории.

Доска для игры — тот же необитаемый остров, а игроки — путешественники, оказавшиеся на нем.

Игровое поле расчерчено 19 вертикальными и 19 горизонтальными линиями. Точки пересечения этих линий образуют 361 пункт для игры. (Здесь же расположен ряд форовых точек — для игры с форой. О ней мы в этой статье рассказывать не будем.) В комплект кроме доски входит набор фишек черного и белого цвета, которые называются камнями.

Начинающим рекомендуется использовать уменьшенную доску размером 13×13. На ней легче освоить и правила, и основные технические приемы го. Японцы считают, что, прежде чем переходить к большой доске, надо сыграть не меньше 100 партий на малой.

Итак, в го играют два партнера, у одного из которых черные камни, а у другого белые. Игра начинается с пустой доски. Ходы делаются поочередно. Первыми ходят черные. *Ход* игрока состоит в постановке камня на любой свободный пункт доски. Выставленный на доске камень не может быть перемещен в другое место и остается на ней до конца партии, за исключением тех случаев, когда он считается уничтоженным.

Если камень или группа камней уничтожены, все они снимаются с доски и учитываются только по окончании партии.

Каждый камень, стоящий на доске, имеет «дыхательные пространства» (*дамэ*). На рисунке 1, *а* показано, что у одиночного камня, стоящего в центре доски, имеется 4 дамэ, у камня, стоящего на краю доски,— 3 дамэ, а у камня, находящегося в углу (на пересечении двух пограничных линий),— только 2 дамэ. Если все дыхательные пространства перекрыты камнями противника, то такой камень считается уничтоженным и снимается с доски (рис. 1, *б*).

То же самое правило применимо и к *группе камней*. Группой называется набор камней, стоящих вплотную один к другому, которые не могут быть отделены друг от друга и уничтожены поодиночке. На рисунке 2 показана группа, состоящая из двух камней: их нельзя отделить друг от друга, и они имеют общую судьбу. У этой группы шесть дыхательных пунктов, и поэтому для снятия ее с доски требуется

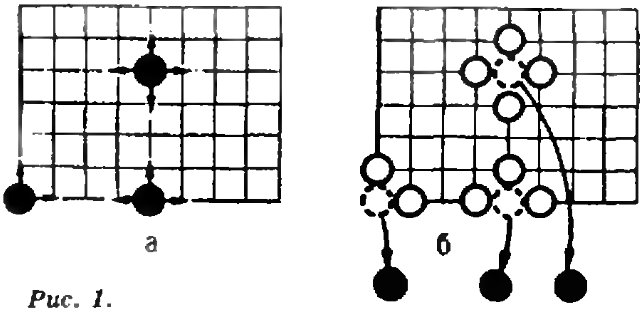


Рис. 1.

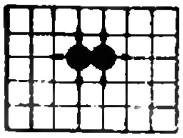


Рис. 2.

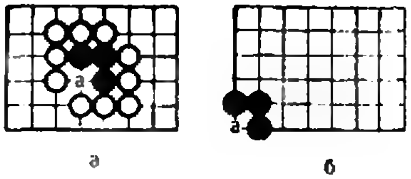


Рис. 3.

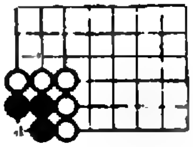


Рис. 4.

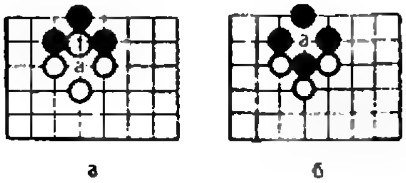


Рис. 5.

шесть камней противника. Очевидно, что для снятия одиночного камня требуется не больше 4 камней. Таким образом, чем больше камней в группе, тем сложнее ее уничтожить, т. е. она сильнее.

Мы сказали, что играющий может сделать ход в любой свободный пункт доски, но есть исключения. В го имеется два типа запрещенных ходов.

1. Запрещается делать ход, приводящий к закрытию последнего дамэ у собственных камней, если только этим ходом не уничтожаются камни противника.

Другими словами, в го запрещено делать самоубийственные ходы. Это правило, по-видимому, введено для того, чтобы избежать грубых ошибок, так как потеря собственных камней — это почти всегда плохо.

На рисунке 3, *а* приведена ситуация, в которой черные не могут сделать ход в пункт «а», так как в этом случае их камни окажутся уничтоженными. Теперь рассмотрим позицию на рисунке 3, *б*. Здесь уже белые не могут пойти в пункт «а», поскольку в этом случае их камень окажется без единого свободного дамэ. Это другой пример самоубийственного хода. Однако бывают случаи, когда такой ход все-таки возможен (рис. 4). Ситуация на этом рисунке напоминает положение на рисунке 3, *а*, но здесь камни черных вплотную окружены белыми камнями. В этом случае белые могут пойти в точку «а»: при этом уничтожаются камни противника и ход не является самоубийственным.

2. Запрещается делать ход, приводящий к повторению позиции (*правило ко*).

Рассмотрим рисунок 5, *а*. Такое расположение камней имеет специальное название — позиция ко. Черные ходом в точку «а» могут захватить камень белых 1, и тогда возникнет позиция, изображенная на рисунке 5, *б*. Теперь, если бы не существовало правила запрета повторения позиции, белые, в свою очередь, могли бы забрать камень черных ходом в точку «а» на рисунке 5, *б*. Таким образом, взаимное взятие могло бы продолжаться до бесконечности и игра потеряла бы смысл. Для того чтобы этого не произошло, и было введено правило ко.

Вернемся снова к позиции на рисунке 5, *а*. Черные взяли камень белых ходом в пункт «а». Теперь, после введения правила ко, для того, чтобы белые смогли забрать камень черных, надо, чтобы позиция изменилась, т. е. белые должны сделать ход в другом пункте доски. И только в случае, если черные не закроют *ко-борьбу* ходом в «а» на рисунке 5, *б*, белые смогут забрать камень черных.

Игра прекращается, если оба партнера отказываются от своего очередного хода. Обычно такой момент наступает тогда, когда не остается ходов, приносящих очки (рис. 6). Теперь начинается заполнение *нейтральных пунктов* (на рисунке 6 — «а» и «в»), и затем идет подсчет *очков*. Нейтральными называются такие пункты территории, которые при заполнении их камнями не приносят очков ни одному из партнеров.

Игрок, набравший наибольшее количество очков, объявляется победителем.

При подсчете очков, связанном с *пленными камнями*, снятыми во время игры, они для удобства подсчета выставляются на территорию противника. В примере на рисунке 6 черные захватили в плен три белых камня, а белые — два черных (эти камни отмечены треугольниками, далее в тексте мы будем их называть «отмеченные камни»). Затем камни перемещаются внутри своей территории (рис. 7) для образования прямоугольных областей, удобных для подсчета (перемещенные камни обозначены кружками).

Теперь уже можно легко подсчитать результат партии. Территория черных составляет 42 очка (30 очков на правой стороне доски и 12 очков в центре), а территория белых — 40,5 очков (14 очков на верхней стороне, 21 очко на нижней и 5,5 очка *коми*). Следовательно, в этой партии черные выиграли с перевесом в 1,5 очка.

Что такое коми? Это компенсация за право первого ходя черных — до начала партии они отдают белым 5,5 очка (5 из них передаются в виде пяти камней и 0,5 очка — условно). Эта половина очка исключает ничейный исход игры.

Е. Гик, А. Попов

(Продолжение следует)

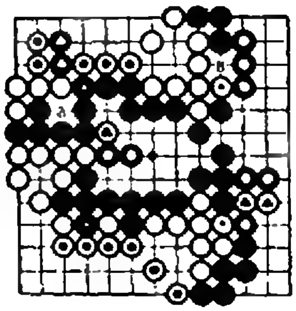


Рис. 6.

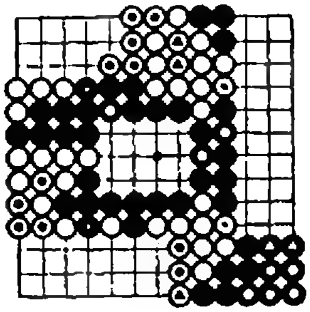


Рис. 7.

Канадские математические соревнования

В предыдущем номере нашего журнала мы начали публиковать задачи школьной математической олимпиады Канады. Здесь мы предлагаем вам задание для 10 и 11 классов канадской школы (что соответствует нашим 9 и 10 классам). Задание имеет вид теста, т. е. к каждой задаче даются несколько вариантов ответа и нужно выбрать среди них правильный.

Инструкция к заданию сообщает следующее:

— разрешается использовать бумагу для черновика и больше ничего;

— каждый вопрос имеет пять возможных ответов, обозначенных буквами *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Лишь один из них правильный. Когда вы выберете свой вариант ответа, поставьте соответствующую букву в вашем листе с ответами;

— за неправильные ответы начисляются штрафные очки. Если вы не подумали над вопросом, неразумно пытаться угадать верный ответ;

— ваши очки $=30+$ (количество очков за правильные ответы) — (накопившиеся штрафные очки);

— чертежи нарисованы без соблюдения масштаба и приводятся лишь как приложения.

Попробуйте выполнить это задание за указанное время. Желаем удачи!

Cayley Contest (Grade 10)*)

Время: 1 час

Часть А
(по 4 очка за каждую задачу)

1. Значение выражения $\frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{16}}$ равно

(*A*) 4; (*B*) 3; (*C*) 10; (*D*) 7/4; (*E*) 5/4.

2. Выражение $3(x-2)+2(2-x)$ равно

(*A*) $x-2$; (*B*) $5x-10$; (*C*) $10-x$; (*D*) $2x-2$; (*E*) $2x+2$.

3. Длины сторон треугольника равны 6, 10 и 11. Равносторонний треугольник имеет тот же периметр. Длина каждой из его сторон равна

(*A*) 27; (*B*) 11; (*C*) 10; (*D*) 9; (*E*) 6.

4. Из чисел 1,1; 1,01; 1,001, 1,0101; 1,00101 наименьшее

(*A*) 1,1; (*B*) 1,01; (*C*) 1,001; (*D*) 1,0101; (*E*) 1,00101.

5. Если $3a=7b=6c$, то расположение чисел a, b, c в порядке убывания таково:

(*A*) c, a, b; (*B*) b, c, a; (*C*) b, a, c; (*D*) a, b, c; (*E*) a, c, b.

6. Если $y=3x+2$, то x через y выражается так:

(*A*) $x=y-1$; (*B*) $x=y-2$; (*C*) $x=y-5$; (*D*) $x=(y-2)/3$; (*E*) $x=(y+2)/3$.

7. Рассмотрим множество всех четырехзначных положительных чисел, в каждом из которых все цифры различны. Разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел равна

(*A*) 8888; (*B*) 8876; (*C*) 8853; (*D*) 8646; (*E*) 8642.

8. Значение выражения $2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+2}}$ равно

(*A*) 3; (*B*) 7; (*C*) $2\frac{2}{5}$; (*D*) $2\frac{2}{3}$; (*E*) $2\frac{4}{5}$.

9. Все данные на рисунке 1 даны в градусах. Величина y равна

(*A*) 15; (*B*) 20; (*C*) 30; (*D*) 45; (*E*) 50.

10. Если $a\square b=ab+a+b$ и $3\square 5=2\square x$, то x равен

(*A*) 4; (*B*) 6; (*C*) 7; (*D*) $7\frac{1}{2}$; (*E*) $11\frac{1}{2}$.

Часть В
(по 5 очков за каждую задачу)

11. Если $x=-3$, а $y=-1$, то значение выражения $\frac{(x-y)^3}{x^3-y^3}$ равно

(*A*) 4/13; (*B*) 2/7; (*C*) 1; (*D*) 16/7; (*E*) 32/13.

12. Целое число называется восходящим, если каждая его цифра больше предыдущей. Например, таким числом является 2478. Количество восходящих чисел между 4000 и 5000 равно

(*A*) 7; (*B*) 8; (*C*) 9; (*D*) 10; (*E*) 11.

13. Если диагональ квадрата равна 2 см,

---

*) Соревнования имени Кэли (10 класс).

то его площадь (в квадратных сантиметрах) равна

(*A*) 1; (*B*) $\sqrt{2}$; (*C*) 2; (*D*) $2\sqrt{2}$; (*E*) 4.

14. Когда x разделили на 6, получился остаток 3. Остаток от деления $3x$ на 6 равен

(*A*) 4; (*B*) 3; (*C*) 2; (*D*) 1; (*E*) 0.

15. Некоторая дуга является шестой частью окружности, заключающей площадь в 144π. Длина этой дуги равна

(*A*) 24π; (*B*) 12π; (*C*) 6π; (*D*) 4π; (*E*) 2π.

16. Значение выражения $1/2+(1/2+1/3)+(2/3+1/4)+(3/4+1/5)+(4/5+1/6)+(5/6+1/7)+(6/7+1/8)+(7/8+1/9)+(8/9+1/10)$ равно

(*A*) 7,1; (*B*) 8,1; (*C*) 8,5; (*D*) 9,1; (*E*) 9,5.

17. Количество цифр в десятичной записи числа $4^6\,5^{11}$ равно

(*A*) 12; (*B*) 13; (*C*) 18; (*D*) 19; (*E*) 24.

18. На углу прямоугольного дома размером 10×20 метров с внешней стороны находится электрическая розетка. 15-и метровый шнур соединяет с розеткой электрокосилку. Наибольшая площадь газона, которую можно скосить этой косилкой, равна (в квадратных метрах)

(*A*) 225π−50; (*B*) 725π/4; (*C*) 225π;

(*D*) 675π/4; (*E*) 175π.

19. ABC — треугольник со сторонами a, b и c, как показано на рисунке 2. Если угол C равен 90°, $c=4$, и $a+b=18$, то площадь треугольника ABC равна

(*A*) 0,5; (*B*) 1; (*C*) 2; (*D*) 4; (*E*) 18.

20. Если $x+y=2z$ и $x\neq y$, то $\dfrac{x}{x-z}+\dfrac{y}{y-z}$ равно

(*A*) −4; (*B*) −2; (*C*) 0; (*D*) 2;

(*E*) не определяется единственным образом.

Часть C

(по 6 очков за задачу)

21. Бетти навестила свою подругу Кейт и затем вернулась домой той же дорогой. Она всегда ходит в гору со скоростью 2 км/час, под гору со скоростью 6 км/час и 3 км/час по ровной дороге. Если ее прогулка заняла 6 часов, то общее расстояние, которое она прошла (в километрах) равно

(*A*) 9; (*B*) 12; (*C*) 18; (*D*) 22; (*E*) 36.

22. Прямую $y=3x+1$ отразили относительно прямой $y=4$. Отраженная прямая задается уравнением

(*A*) $y=x/3+1$; (*B*) $y=-x/3+7$;

(*C*) $y=-x/3+6$; (*D*) $y=-3x+6$;

(*E*) $y=-3x+7$.

23. Вершины многогранника P — середины ребер прямоугольного параллелепипеда. Сумма количества ребер и количества граней многогранника P равна

(*A*) 46; (*B*) 38; (*C*) 36; (*D*) 18;

(*E*) ни одно из них.

24. Рассмотрим все трехзначные числа, составленные только из нечетных цифр. Сумма всех этих чисел равна

(*A*) 69 375; (*B*) 19 375; (*C*) 625^3;

(*D*) 78 125; (*E*) 125.

25. В треугольнике ABC угол B равен 90°, $AB=20$, а длины остальных двух сторон являются целыми числами (рис. 3). Количество таких треугольников

(*A*) 3; (*B*) 4; (*C*) 5; (*D*) 6; (*E*) 7.

Fermat Contest (Grade 11)

Время: 1 час

Часть A

(по 4 очка за каждую задачу)

1. Выражение $\dfrac{1-3/4}{4/3-1}$ равно

(*A*) 3/4; (*B*) 1/12; (*C*) −1; (*D*) 4/3;

(*E*) −9/16.

2. См. задачу 4 для 10 класса.

3. Число 0,435 : 0,0821 приблизительно равно

(*A*) 50; (*B*) 5; (*C*) 0,5; (*D*) 0,2; (*E*) 0,05.

4. Расстояния между столбами изгороди равны по 5 м. Количество столбов, необходимое для того, чтобы огородить треугольный участок со сторонами 20 м, 20 м и 30 м равно

(*A*) 11; (*B*) 13; (*C*) 14; (*D*) 15; (*E*) 17.

5. См. задачу 11 для 10 класса.

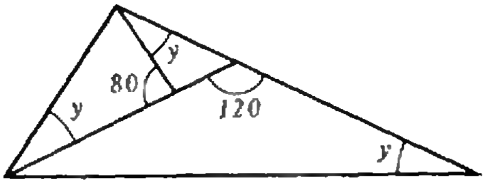


Рис. 1.

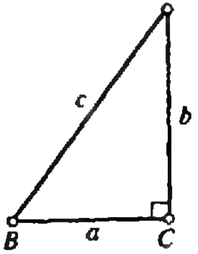


Рис. 2.

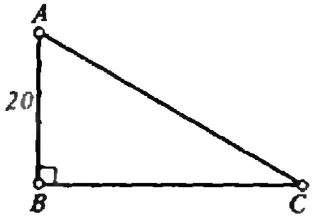


Рис. 3.

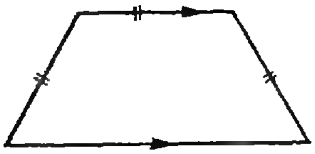


Рис. 4.

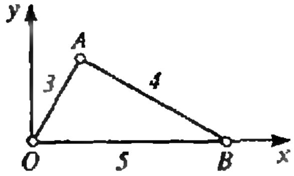


Рис. 5.

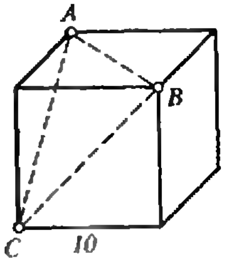


Рис. 6.

6. См. задачу 7 для 10 класса.
7. См. задачу 10 для 10 класса.
8. Если $1/3+1/4+1/n=1$, то n равно

(*A*) 12/11; (*B*) 11/12; (*C*) 12/5; (*D*) 5/12; (*E*) 5.

9. См. задачу 15 для 10 класса.
10. Чтобы получить число $1/b$, к числу $1/(b+2)$ следует прибавить

(*A*) $-\frac{1}{2}$; (*B*) $\frac{2}{b(b+2)}$; (*C*) 2; (*D*) $\frac{1}{b+2}$; (*E*) $\frac{2(b+1)}{b(b+2)}$.

Часть B

(по 5 очков за каждую задачу)

11. См. задачу 12 для 10 класса.
12. Если $f(x)=x^3$ и $a\neq b$, то $f(a)/f(b)$ равно

(*A*) $(a/b)^3$; (*B*) $(a/b)^0$; (*C*) $(a-b)^3$; (*D*) a/b; (*E*) a^3-b^3.

13. Если $(3x-1)(x-2)=0$, то $3x-1$ может быть равно

(*A*) только 1/3; (*B*) только 0; (*C*) 1/3 или 0; (*D*) 1/3 или 2; (E) 0 или 5.

14. См. задачу 18 для 10 класса.
15. См. задачу 22 для 10 класса.
16. Три стороны трапеции равны, а длина основания на две единицы меньше суммы длин этих трех сторон (рис. 4). Если расстояние между параллельными сторонами равно 5, то площадь трапеции, выраженная в квадратных единицах, равна

(*A*) 13; (*B*) 35; (*C*) 65; (*D*) 125; (*E*) 185.

17. Угловой коэффициент прямой *OA* на рисунке 5 равен

(*A*) 4/3; (*B*) 3/4; (*C*) 5/3; (*D*) 3/5; (*E*) $\sqrt{5/2}$.

18. Между числами 60 и 80 находятся два делителя числа $(4^{12}-1)$, это

(*A*) 67 и 75; (*B*) 65 и 75; (*C*) 63 и 65; (*D*) 61 и 68; (*E*) 61 и 65.

19. Куб с ребром 10 разделен на две части плоскостью *ABC* (рис. 6). Объем меньшей части равен

(*A*) $200\sqrt{2}$; (*B*) $100\sqrt{2}$; (*C*) $333\frac{1}{3}$; (*D*) 250; (*E*) $166\frac{2}{3}$.

20. Если $2^{3x}=16^{y+1}$ и $2x=5y-2$, то $x+y$ равно

(*A*) -1; (*B*) 2; (*C*) 3; (*D*) 13/3; (*E*) 6.

Часть C

(по 6 очков за задачу)

21. Каждая из четырех окружностей, изображенных на рисунке 7, касается трех остальных. Если радиус каждой из маленьких окружностей равен r, то радиус большой окружности равен

(*A*) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}r$; (*B*) $(1+\sqrt{3})r$; (*C*) $\frac{3\sqrt{3}+4}{4}r$; (*D*) $(2+\sqrt{3})r$; (*E*) $2\sqrt{3}r$.

22. Последовательность чисел $t_1, t_2, t_3, \ldots$ определяется соотношениями $t_1=7$, $t_{n+1}=\sqrt{|t_n^2-16|}$. Число t_{80} равно

(*A*) $\sqrt{15}$; (*B*) $\sqrt{17}$; (*C*) $79\sqrt{33}$; (*D*) 1; (*E*) $\sqrt{6384}$.

23. На рисунке 8 точки *E* и *F* на сторонах квадрата *ABCD* таковы, что $AE:EB=CF:FD=2:1$. Отношение площади параллелограмма *EGFH* к площади квадрата *ABCD* равно

(*A*) 1/9; (*B*) 2/9; (*C*) 1/3; (*D*) 4/9; (*E*) ни одно из них.

24. См. задачу 25 для 10 класса.
25. Если $f(x)=3x^2-2x+5$ и $f(g(x))=12x^4+56x^2+70$, то возможное значение суммы коэффициентов многочлена $g(x)$ равно

(*A*) -7; (*B*) $-19/3$; (*C*) $-7/3$; (*D*) 3; (*E*) 23.

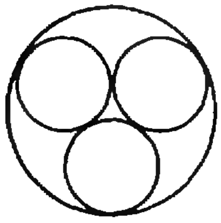


Рис. 7.

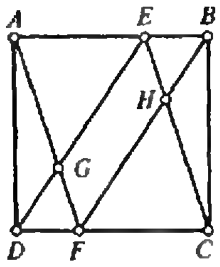


Рис. 8.

Публикацию подготовили А. Котова, А. Савин

Задачи вступительных экзаменов по математике в различные вузы

Предлагаем подборку задач письменных и устных вступительных экзаменов по математике в некоторые университеты — Воронежский (1) Донецкий (2), Киевский (3), Петрозаводский (4), Уральский (5), Московский технический университет связи и информатики (6) и педагогические институты — Киевский (7), Минский (8), Нижегородский (9), Ярославский (10).

Алгебра

1 (10). Участок дороги между городами A и B имеет подъем, а затем спуск, причем тот и другой одинаковой длины. Найдите среднюю скорость автобуса на пути из A в B, если скорость автобуса на подъеме равна 40 км/ч, скорость на спуске — 80 км/ч, а расстояние между городами A и B равно 160 км. Зависит ли значение средней скорости от расстояния между городами?

2 (9). Велосипедист должен проехать 36 км за определенное время. После двух часов пути он сделал остановку на 20 минут и, чтобы ликвидировать отставание, оставшийся путь проехал со скоростью, большей прежней на 6 км/ч. Какова первоначальная скорость велосипедиста?

3 (7). Поле разбили на три участка. За день вспахали 1/2 первого, 3/4 второго и весь третий участок, который составляет 1/4 часть всего поля. Вспаханная площадь в два раза больше площади второго участка. Какую часть всего поля составляет площадь, вспаханная за день?

4 (7). Лодка прошла по течению реки 34 км и 39 км против течения, затратив на это столько времени, сколько ей нужно, чтобы пройти в стоячей воде 75 км. Найдите отношение скорости лодки в стоячей воде к скорости течения.

5 (6). Имеется три сплава. Первый содержит 30 % никеля и 70 % марганца, второй — 10 % марганца и 90 % меди, третий — 15 % никеля, 25 % марганца и 60 % меди. Из них приготовлен сплав, масса которого 15 кг, содержащий 40 % меди и 42 % марганца. Какое количество первого, второго и третьего сплава взяли для этого?

6 (5). Для проведения эксперимента по выращиванию биомассы были использованы три пробирки. После эксперимента оказалось, что в первой и второй пробирках вместе биомассы в два раза больше, чем в третьей, а во второй и третьей вместе в три раза больше, чем в первой. В какой из пробирок биомассы первоначально было меньше, если ее прирост в первой пробирке составил 40 %, во второй — 60 % и в третьей — 50 %?

7 (1). Вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 денежным единицам, к концу следующего года — 749 денежным единицам. Если бы первоначально 5/6 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определите величину вклада по истечении двух лет.

8 (5). Партия телевизоров проходит испытание на долговечность. После первого года работы отказало 15 телевизоров, а после второго — еще 4. Сколько телевизоров было исправно после первого года работы, если известно, что отношение числа телевизоров, исправных к концу второго года, к числу телевизоров, исправных к началу этого года, на 8,75 % больше, чем такое же отношение, составленное для первого года испытаний?

9 (6). Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из A в B и из B в A. После встречи одному придется быть в пути еще два часа, а другому 9/8 часа. Определите скорости автомобилей, если $AB = 210$ км.

10 (1). Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как первый проработал 7 часов, а второй — 4 часа, оказалось, что они выполнили 5/9 всей работы. Проработав совместно еще 4 часа, они установили, что им остается выполнить 11/18 всей работы. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, мог бы выполнить всю работу?

11 (5). Бак имеет форму прямоугольного параллелепипеда. К нему подведены три трубы: одна сверху, одна снизу, а одна — к центру боковой грани. В трубу сверху вода вливается, а через две остальные выливается. Если открыть только нижнюю трубу, то полный бак пустеет за 8 часов. Если открыть и нижнюю и боковую трубы, то полный бак опустошается за 7 часов. Если же в пустом баке открыть все три трубы, то он наполняется за 5 часов 24 минуты. За какое время заполнится пустой бак, если открыть только верхнюю трубу?

12 (2). Первая машинистка должна отпечатать 40 страниц текста, вторая — 50. Начали работу они одновременно. Вторая машинистка, которая печатает на 2 страницы в час больше первой, после двух часов работы сделала перерыв на 30 минут, а затем стала печатать на 2 страницы в час больше, чем до перерыва. В итоге машинистки закончили работу одновременно. Найдите скорость печатания первой машинистки. В каких пределах может меняться скорость печатания первой машинистки, чтобы, при всех прочих условиях, вторая машинистка закончила работу не позже первой?

13 (2). Первый экскаватор должен выкопать 72 метра канавы, а второй — 60 метров. Производительность второго экскаватора на 2 м/ч меньше производительности первого. Первый экскаватор приступил к работе на час позже второго и, проработав 5 часов, сделал перерыв на 48 мин. Увеличив после этого свою производительность на 2 м/ч, он закончил работу одновременно со вторым, который работал без перерывов и с постоянной производительностью. Найдите первоначальную производительность первого экскаватора. В каких пределах может меняться первоначальная производительность первого экскаватора, чтобы, при тех же условиях работы, он выполнил свое задание не позже второго?

14 (2). Водитель грузовика, участвующий в ралли, рассчитывает проехать всю трассу со скоростью 80 км/ч. Из-за неполадок первую треть пути он ехал со скоростью, на a км/ч меньшей расчетной, зато потом, устранив неполадки, он увеличил свою скорость на $2a$ км/ч по сравнению с предполагавшейся, и эта скорость сохранялась до конца пути. При каком значении a трасса будет преодолена скорее всего?

15 (6). Найдите трехзначное число, цифры которого составляют геометрическую прогрессию с суммой 19 и цифра сотен которого на 5 больше цифры единиц.

16 (6). Три числа x, y, z образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а числа x, $2y$, $3z$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, отличный от единицы.

17 (1). В геометрической прогрессии сумма первых трех членов равна 9, а сумма первых шести членов равна —63. Найдите сумму первых десяти членов этой прогрессии.

18 (6). В геометрической прогрессии первый член равен 1, а сумма первых пяти членов в восемь раз превосходит сумму обратных величин этих же членов. Найдите знаменатель прогрессии.

19 (4). Найдите знаменатель знакопостоянной геометрической прогрессии, если произведение ее первых четырех членов равно 4, а сумма кубов первых трех членов, деленная на первый член, равна 73/4.

20. Вычислите:

а) (6) $96\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\times$
$\times\cos\frac{\pi}{6}$;

б) (6) $\sin\left(2\arccos\frac{12}{13}\right)$;

в) (6) $\frac{\log_5 250}{\log_{50} 5}-\frac{\log_5 10}{\log_{1250} 5}$.

21. Докажите тождество:

а) (7) $\frac{4\sin\alpha\times(1-\mathrm{tg}^2\,\alpha)}{\sec(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha)}=\sin 4\alpha$;

б) (6) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha$.

22 (6). Вычислите значение выражения

$$\frac{(2p-q)^2+2q^2-3pq}{2p^{-1}+q^2}:\frac{4p^2-3pq}{2+pq^2}$$

при $p=0{,}78$ и $q=0{,}28$.

23. Упростите выражение:

а) (2) $\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right):$
$:\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$,
где $x=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$, $a>0$, $b>0$;

б) (2) $\frac{a-b}{\sqrt{b}}x^2-2ax+a\sqrt{b}$,
где $x=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, $a>0$, $b>0$;

в) (6) $((\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^{-2}+(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^{-2}):$
$:\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2.$

24 (6). Вычислите производную функции

$$y=\left(\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9}\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+3}{x\sqrt{x}-27}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{x},$$

если $x\in[0;\,9)$.

25 (6). После упрощения найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x)=\left(\frac{1+\sqrt{3x}}{\sqrt[4]{3x}}-\sqrt[4]{3x}\right)^{-2}\times$$
$$\times\left(1+\sqrt{\frac{12}{x}+\frac{3}{x}}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2},$$

если $x\in[1;\,4]$.

26. Решите уравнение:

а) (6) $\frac{x^3+64}{16+4x}=11-\frac{x}{4}$;

б) (7) $\sqrt{2x-1}=x-2$;

в) (7) $\sqrt{x^2-5x+7}=2x-3$;

г) (6) $2\sqrt[4]{3x+\frac{1}{9}}+3\sqrt{3x+\frac{1}{9}}=1$;

д) (6) $3x^2-42x-38=7\sqrt{x^2-14x-14}$;

е) (7) $25^x-6\cdot5^x+5=0$;

ж) (4) $\log_{1-x}(4x^2-9x+1)=3$;

з) (6) $\sqrt{\log_5^2 x+\log_x^2 5+2}=2{,}5$;

и) (1) $2x(\log_2 6-1)=\log_2(x+9^x-18)$;

к) (5) $\log_3(x-1)^3-\log_{\sqrt{x-1}}3-$
$-\log_{10-x}(x-10)^2=3$;

л) (6) $(2x^2-x-6)\arccos\left(\frac{1}{x+2}\right)=0.$

27. Решите тригонометрическое уравнение:

а) (9) $\sin^4\frac{x}{2}-\cos^4\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$;

б) (9) $(\sin x+\cos x)^2=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

в) (9) $\dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}=2\sin\frac{x}{2}$;

г) (7) $2\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x=3$;

д) (7) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{x+2}}=0$;

е) (7) $1-\cos x=\sin x$;

ж) (4) $\cos x-\sin x=2\sin x\sin 2x$;

з) (6) $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}x+1}+\right.$
$\left.+\frac{1}{\operatorname{tg}x-1}\right)=4$;

и) (6) $\sin^4x+\cos 2x=\frac{1}{4}$;

к) (1) $\operatorname{tg}3x=\sin 6x$;

л) (1) $6\sin^2x+3\sin x\cos x-5\cos^2x=$
$=2$;

м) (5) $2\cos 2x+4\sin 2x=7-2\sin^2x-$
$-20\cos^2x$, если $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\,\frac{\pi}{4}\right]$;

н) (6) $2\sin^4x+2\cos^4x=7\sin x\cos x$, если $x\in[-\pi;\,\pi/2]$;

о) (4) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=\cos x+$
$+\cos 2x+\cos 3x$;

п) (5) $\sin 5x-\cos 7x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

р) (2) $\sin 7x+\cos 2x=-2$;

с) (2) $\cos x\cos 6x=-1$;

т) (5) $\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=0$;

у) (1) $\log_2\cos 2x-\log_2\sin x-$
$-\log_2\cos x=1$;

ф) (2) $\log_{\frac{x+6-x^2}{4}}\left(1+\cos^2\frac{\pi x}{2}\right)=$
$=\log_{\frac{x+6-x^2}{4}}\left(-\sin\frac{\pi x}{2}\sin\frac{3\pi x}{2}\right)$;

х) (2) $\log_{\frac{4x-x^2}{3}}\left(\cos^2\frac{\pi x}{3}\right)=$
$=\log_{\frac{4x-x^2}{3}}\left(\frac{1}{4}-\sin\frac{\pi x}{3}\sin\pi x\right).$

28. Решите неравенство:

а) (7) $\frac{x+8}{x^2+4x-5}\geqslant0$;

б) (6) $|x^2-2x-8|>2x$;

в) (7) $\sqrt{3x+x^2}\geqslant1+x$;

г) (5) $\sqrt{6\cdot25^x-11\cdot30^x+5\cdot36^x}<2\cdot5^x$;

д) (6) $||7^x-x^2|-2|<12-x^2-7^x$;

е) (1) $(x^2-4x+3)^{x^2-6x}>1$;

ж) (10) $5^{\lg x}-3^{\lg x-1}\leqslant3^{\lg x+1}-5^{\lg x-1}$;

з) (10) $\log_2(5x-4-x^2)+\log_3(3-x)\geqslant$
$\geqslant\log_2(4-x)+\log_3(4x-3-x^2)$;

и) (9) $\frac{\sqrt{6-x}}{\log_{1/3}(x-3)-1}\geqslant0$;

к) (9) $\log_{x/5}(x^2-8x+16)\geqslant0$;

л) (9) $|\log_{1/3}(4-x^2)|\geqslant2$;

м) (7) $\log_2(x^2-4x+3)\leqslant3$;

н) (6) $\log_3x+\log_{\sqrt{3}}x<6+\frac{1}{\log_x3}$;

о) (2) $\log_{1/2}(x+1)>\log_2(2-x)$;

п) (6) $\log_{0,2}(x^2-x-2)>$
$>\log_{0,2}(-x^2+2x+3)$;

р) (6) $\sqrt{x^{\log_2\sqrt{x}}}>16$;

с) (3) $\log_{\frac{x+1}{x-1}}(2x^2-5x+3)\leqslant 0$;

т) (3) $\log_{1/3}(4^{x-2}-3)+1>$
$>\log_{1/3}(3^{-1}2^{x-2}+3)$;

у) (5) $\log_{x^4}\frac{|x-5|}{5x^3}+\frac{3}{4}\geqslant 0$;

ф) (5) $\log_{x^2}(3x+10)\geqslant 1$;

х) (4) $\log_2(x+1)>\log_{x+1}16$;

ц) (1) $\lg^2x^2-2\lg x^2>3$;

ч) (1) $\log_{1/3}(3x+4)>\log_{1/3}(x^2+2)$;

ш) (4) $3^{2/x}+2x\cdot 3^{1/x}-18x-81<0$;

щ) (1) $2^{-|x-2|}\log_2(4x-x^2-2)\geqslant 1$.

29. Решите систему уравнений:

а) (6) $\begin{cases} y^2-x-5=0, \\ \frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}=\frac{1}{x}; \end{cases}$

б) (4) $\begin{cases} \frac{1}{xy}-\frac{1}{x+y}=\frac{1}{2}, \\ x^2y+xy^2=2; \end{cases}$

в) (7) $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9, \\ x+y=20; \end{cases}$

г) (6) $\begin{cases} 3^{x-\sqrt{y+1}}=1, \\ 2^{x+3}=0,5\cdot 4^{y+2,5x}; \end{cases}$

д) (9) $\begin{cases} 3^x\cdot 2^{1+y}=24, \\ \log_4(y-x)=0; \end{cases}$

е) (6) $\begin{cases} 4^{-y}\cdot\log_2 x=4, \\ \log_2 x+2^{-2y}=4; \end{cases}$

ж) (5) $\begin{cases} 2\cos^2(x-y)=5\cos x\cos y- \\ -\sin x\sin y, \\ x+y=\frac{5\pi}{3}; \end{cases}$

з) (3) $\begin{cases} \sin x\cos y=1/4, \\ 3\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} y. \end{cases}$

30 (7). Сколько решений может иметь уравнение

$$|x|-5=\frac{a-4}{|x|}$$

в зависимости от параметра a?

31 (7). Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x+3a-5}{x-a}<0$$

выполняется для всех $x\in[0;4]$.

32 (1). Найдите все пары $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению

$$25^x-2\cdot 5^x\cdot\cos^2\frac{y}{2}+1=0.$$

33 (9). При каких значениях a графики функций

$$y=2ax+1 \text{ и } y=(a-6)x^2-2$$

не пересекаются?

34 (5). При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} (a-1)y^2-2(3a+1)y+9a=0, \\ y=-\sqrt{x-3}+2 \end{cases}$$

имеет решение?

35 (6). При каких значениях a уравнение

$$2x^2-4a^2x-a^2+1=0$$

имеет два действительных корня одного знака?

36 (1). Найдите все значения параметра b, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2-2bx-1=0$ действительны и не превосходят по модулю 2.

37 (3). При каких значениях α уравнение

$$1-x=\sqrt{x^2-2\sin^2\alpha}$$

имеет решения? Найдите эти решения.

38 (7). Найдите все целые числа x и y, для которых выполняется равенство $2xy+x+y=83$.

Анализ

1 (6). Найдите площадь области, ограниченной линиями

$$y=\frac{|x|}{2},\ y=1,\ y=3.$$

2 (7). Запишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=2x-x^2$ в точке $x_0=2$.

3. Решите неравенство:

а) (6) $\varphi'(x)>f'(x)$,
если $f(x)=\frac{x^3+1}{x}$, $\varphi(x)=5x+\frac{1}{x}$;

б) (7) $f'(x)+g'(x)<0$,
если $f(x)=x^3-24x+x^2$, $g(x)=2x^2-9$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции:

а) (6) $y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$
на отрезке $[-1,5;\ 8]$;

б) (7) $y=x^4-2x^2+3$
на отрезке $[-4;\ 3]$.

5 (7). Найдите точки максимума функции $y=-x^3+3x|x-3|$, заданной на промежутке $[0;4]$, и ее наименьшее значение на этом промежутке.

6 (1). Докажите, что для функции

$$f(x)=\frac{(1+\cos 2x)\sin x}{2}$$

справедливо неравенство

$$\min_{x\in[-\pi;\,\pi]} f(x) > -\frac{7}{18}.$$

7 (3). Известно, что уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_0;\,f(x_0))$ имеет вид $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. В какой точке надо провести касательную к графику функции

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{18-x^2},\quad 0<x<3\sqrt{2},$$

чтобы она образовывала с координатными осями треугольник наименьшей площади?

8 (3). На координатной плоскости xOy вершина A прямоугольного треугольника ABC ($\angle ABC=90^\circ$) имеет координаты $(-2;\,0)$, вершина B лежит на отрезке $[2,\,3]$ оси Ox, а вершина C — на параболе $y=x^2-4x+1$. Какие координаты должна иметь вершина C, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

9 (6). Найдите размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 256 м^3 такого, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

10 (2). Для огораживания земельного участка площадью 242 м^2, имеющего форму прямоугольника, выделено 2000 руб. С трех сторон должен быть штакетник стоимостью 25 руб. за метр, а с одной стороны — живая изгородь стоимостью 75 руб. за метр. Хватит ли отпущенных средств на устройство изгороди? Какова минимальная сумма, необходимая для этой цели?

11 (1). В прямоугольном параллелепипеде площадь основания равна 2 дм^2, а боковая поверхность 18 дм^2. При каких размерах ребер сумма длин всех ребер параллелепипеда будет наименьшей?

12 (1). Объем правильной четырехугольной пирамиды равен $\frac{1}{6\sqrt{2}}$. Пусть x — длина стороны основания и $x\in\left[\frac{1}{2};\,2\right]$. Найдите наименьшее и наибольшее значения квадрата длины апофемы данной пирамиды.

Геометрия

1 (7). Найдите площадь треугольника, если длина его основания равна a, углы при основании равны 30° и 45°.

2 (7). Биссектриса прямого угла треугольника делит его гипотенузу на отрезки, длины которых 15 и 20. Найдите площадь треугольника.

3 (7). Найдите биссектрису прямого угла прямоугольного треугольника, если длины катетов равны a и b.

4 (7). Докажите, что квадрат биссектрисы угла при одной из вершин треугольника равен разности между произведением двух сторон этого угла и произведением отрезков, на которые биссектриса делит противоположную сторону.

5 (6). В треугольник вписана окружность с радиусом 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки, длины которых 6 и 8. Найдите длины сторон треугольника.

6 (6). В треугольнике ABC биссектриса AH делит медиану BE в отношении $BK:KE=2$, а угол ACB равен 45°. Найдите отношение площади треугольника BCE к площади описанного около этого треугольника круга.

7 (5). В равнобедренном треугольнике расстояние между точками пересечения медиан и биссектрис равно 2. Определите периметр треугольника, если длина окружности, вписанной в треугольник, равна 20π.

8 (2). В треугольнике ABC высота BH делит сторону AC в отношении $AH:HC=2$, а угол HBC вдвое меньше угла BAC. Биссектриса AE угла BAC пересекается с BH в точке K. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади описанного около этого треугольника круга.

9 (5). В треугольнике ABC точки K и N — середины сторон AB и AC соответственно. Через вершину B проведена прямая, которая пересекает сторону AC в точке F, а отрезок KN — в точке L так, что $KL:LN=3:2$. Определите площадь четырехугольника $AKLF$, если площадь треугольника ABC равна 40.

10 (6). В треугольнике ABC известны высоты h_a, h_b, h_c. Найдите радиус вписанной в треугольник ABC окружности.

11 (1). В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D, находящейся между точками B и C, причем $CD:BC=\alpha$ $\left(\alpha<\frac{1}{2}\right)$. На стороне BC между точками B и D взята точка E так, что $CD=DE$, и через нее проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найдите отношение площадей трапеции $ACEF$ и треугольника ADC.

12 (5). На стороне NP квадрата $MNPQ$ взята точка A, на стороне PQ — точка B так, что $NA:AP=PB:BQ=2:3$. Точка L является точкой пересечения отрезков MA и NB. В каком отношении точка L делит отрезок MA?

13 (10). Дан ромб со стороной a и острым углом 60°. На его большей диагонали как на диаметре построена окружность. а) Вычислите площадь круга. б) Что больше: площадь ромба или площадь части круга, лежащей вне ромба?

14 (6). Площадь прямоугольной трапеции равна S, а острый угол равен α. Найдите высоту трапеции, если меньшая диагональ равна большему основанию.

15 (1). Около круга с радиусом 2 описана равнобочная трапеция с площадью 20. Найдите стороны трапеции.

16 (3). В трапеции $ABCD$ основание BC в два раза меньше основания AD, а продолженные боковые стороны пересекаются в точке K. Через точку O внутри треугольника BKC из вершин B и C проведены две прямые, которые пересекают CK в точке N и BK в точке M. Площади треугольников BMO, BOC и CON соответственно равны S_1, S_2 и S_3. Определите площадь трапеции $ABCD$.

17 (2). Две окружности, радиусы которых равны 3 и 8, касаются сторон угла в 60° и пересекаются в точках M и H. Найдите расстояния от сторон угла до точки M.

18 (2). Внутри угла в 60° взята точка M так, что расстояния от нее до сторон угла равны 3 и 6. Найдите радиус окружности, которая проходит через точку M и касается сторон угла.

19 (1). Через точку P, лежащую внутри круга радиусом R, проведены две взаимно перпендикулярные хорды, одна из которых образует угол α ($\alpha > 0$) с прямой, проходящей через точку P и центр круга, и удалена от центра на расстояние a. В круг вписан четырехугольник, имеющий эти хорды диагоналями. Найдите его площадь.

20 (1). Боковые ребра треугольной пирамиды $SABC$ равны b, углы при ее вершине равны следующим величинам: $ASB = ASC = \frac{\pi}{3}$, $BSC = \frac{\pi}{2}$. Найдите высоту пирамиды.

21 (2). Основание пирамиды $HABC$ — равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC = 2BC$. Грань HBC перпендикулярна плоскости основания пирамиды, две другие грани наклонены к плоскости основания под углом α. Найдите величины углов, образуемых боковыми ребрами пирамиды с плоскостью ее основания.

22 (1). Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер, причем секущая плоскость перпендикулярна боковой грани, образованной этими ребрами. Найдите отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания.

23 (4). Найдите объем правильной треугольной пирамиды, боковые ребра которой наклонены к плоскости основания под углом α и удалены от середины противоположной стороны основания на расстояние l.

24 (3). Основанием пирамиды является треугольник ABC, медиана и высота которого, выходящие из вершины B, делят угол при этой вершине на три равные части. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α, а длина медианы основания пирамиды, выходящей из вершины B, равна a. Определите площадь сечения пирамиды плоскостью, которая проходит через вершину B параллельно ребру AC и наклонена к плоскости основания под углом β.

25 (7). Основание пирамиды — треугольник, две стороны которого a и b, а угол между ними 120°. Каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α. Найдите объем пирамиды.

26 (9). Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом α к плоскости основания. Определите площадь образовавшегося треугольного сечения, если объем пирамиды, отсеченной этой плоскостью, равен V.

27 (2). Основание пирамиды $HABCD$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$, $AB = 2AD$. Грань HAD является равнобедренным треугольником и перпендикулярна плоскости основания пирамиды, грань HBC наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите величины углов, образуемых боковыми ребрами пирамиды с плоскостью ее основания.

28 (6). Основанием пирамиды служит четырехугольник $ABCD$, диагонали которого $AC = 1$, $BD = 2$ образуют угол 30°. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

29 (5). Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Найдите угол между диагональю AC' и прямой, соединяющей точки пересечения диагоналей граней $ABCD$ и $DD'C'C$, если известны координаты точки A (0; 1; 1) и смежных с ней вершин $B(-2; 1; -1)$, $D(-1; 6; 1)$, $A'(5; -2; 3)$.

30 (7). В цилиндре параллельно его оси проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу 2α. Диагональ образованного сечения наклонена к плоскости основания под углом β. Найдите объем цилиндра, если площадь сечения равна S.

31 (6). Диагональ осевого сечения усеченного конуса точкой пересечения диагоналей делится в отношении 2:1, считая от большего основания. Угол между диагоналями, обращенный к основаниям конуса, равен α. Длина диагонали равна l. Найдите объем усеченного конуса.

32 (4). В шар с радиусом R вписана правильная треугольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен α. Найдите сторону основания пирамиды.

33 (10). Дана четырехугольная пирамида, основанием которой является квадрат и одно из ребер которой перпендикулярно к плоскости основания. В эту пирамиду вписан куб так, что нижнее основание куба лежит на основании пирамиды, а стороны верхнего основания куба лежат на боковых гранях пирамиды. Найдите объем пирамиды, если ее боковая грань наклонена к плоскости основания под углом α и ребро куба равно a.

Задачи устного экзамена

1 (8). Найдите арифметическую прогрессию, у которой сумма любого числа членов, начиная с первого, в четыре раза больше квадрата числа членов.

2 (8). Произведение четвертого и двенадцатого членов геометрической прогрессии равно 32. Найдите восьмой член этой прогрессии.

3 (6). Найдите $\log_5 3{,}38$, если $\lg 2 = a$, $\lg 13 = b$.

4 (6). Найдите $\log_{275} 60$, если $\log_{12} 5 = a$, $\log_{12} 11 = b$.

5 (6). Сравните без помощи таблиц и калькулятора:

а) $\log_{20} 75$ и $\log_8 25$;

б) $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$.

6 (6). Докажите, что при всех $n > 1$ имеет место неравенство

$$\log_n(n+1) > \log_{n+1}(n+2).$$

7. Докажите, что

а) (7) $a^4 + b^4 \geqslant \frac{1}{8}$, если $a + b = 1$;

б) (4) $3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10 \geqslant 0$

при $x > 0$, $y > 0$.

8 (4). Докажите тождество

$$2(\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x) = 1.$$

9 (7). Покажите, что из равенства $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ следует, что $a = b = c$.

10. Решите уравнение:

а) (6) $(x-2)^4 + (x+1)^4 = 17$;

б) (6) $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7) = 297$;

в) (7) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$;

г) (8) $x^{\log_x (x-2)^2} = 9$;

д) (7) $\lg(2x-51) - \lg(22-x) = 2$;

е) (7) $12 - 6\cos^2 x - 13\sin x = 0$;

ж) (8) $2\sin x + 3\cos x = 5$;

з) (7) $\dfrac{\cos x}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2} = |\cos x|$.

11. Решите неравенство:

а) (8) $\log_{x+1}(x+3) > 1$;

б) (6) $\dfrac{\arcsin(x^2-x-1)}{(2x+3)^2(x+2)^3} > 0$;

в) (8) $\sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) > -2$;

г) (8) $|\sqrt{x^2-1} - 3| \geqslant -2^x$.

12. Решите систему уравнений:

а) (7) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$ б) (8) $\begin{cases} xy = 40, \\ x^{\lg y} = 4. \end{cases}$

13 (8). Не решая уравнения

$$\log_{0,5} x = x + 5,$$

определите количество его корней.

14 (6). Существует ли угол α такой, что

$$\sin\alpha = \cos 50^\circ + \frac{2(1+\cos 40^\circ)}{\operatorname{ctg} 10^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}\ ?$$

15 (8). Докажите, что при $x > 1$

$$|\lg(x-1)| + x_2 + x + 9 > 0.$$

16 (7). Докажите, что в каждом прямоугольном треугольнике сумма квадратов медиан составляет 150 % от квадрата его гипотенузы.

17 (8). В треугольнике ABC $AB = 10$, $BC = 12$. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки M и K так, что $BM = 4$, $BK = 3$. Найдите площадь треугольника KMC, если площадь треугольника ABC равна 24.

18 (6). В треугольнике ABC угол A равен 60°, а центр вписанного круга делит биссектрису AK в отношении $(\sqrt{3}+1):\sqrt{2}$, считая от вершины А. Найдите величину углов B и C.

19 (8). Основания равнобедренной трапеции равны 3 и 12. Середина большего основания соединена с концами меньшего основания прямыми, которые пересекают диагонали трапеции в двух точках. Найдите расстояние между этими точками.

20 (8). Ромб $ABCD$ расположен над плоскостью α так, что его вершины A, B, C удалены от плоскости α соответственно на a, b и c. Найдите расстояние от вершины D до плоскости α.

Публикацию подготовил А. Егоров

Ответы, указания, решения

анные задачи по термодинамике

1. $t_у = 0$ °C; $m_в \approx 290$ г.
2. $\Delta h \approx 20$ см; $t_у = 12$ °C.
3. $\Delta h \approx 57$ см.
4. $p_2 \approx 2{,}28 \cdot 10^5$ Па.

скриминанте

1. а) $(-1;\ 1)$; б) $(2;\ 3)$;
в) $(4;\ 4;\ -4)$. Указание. При каждом фиксированном z числа x и y являются корнями уравнения
$t^2-(4-z)t+(16+z^2)/2=0$,
дискриминант которого равен $-(z+4)^2$.

г) $\left((-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2k+n);\right.$

$\left.(-1)^k\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}(2k-n);\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$,

$\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(2k+n);\right.$

$\left.(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}(2k-n);\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$,

$k,\ n\in Z$.

Указание. Приведите первое уравнение к виду $4t^2-4t\sin(x-y)+1=0$, где $t=\sin(x+y)$, и рассмотрите его дискриминант.

д) $(1/\sqrt{5};\ 2;\ 0)$, $(1/\sqrt{5};\ -1;\ 5)$.

Указание. Оба подкоренных выражения должны быть равны нулю. Из уравнения

$$5x^2-2\sqrt{5}\cos\pi y\cos\pi z+1=0$$

так же, как предыдущей задаче, следует, что либо $\cos\pi y\cos\pi z=1$, либо $\cos\pi y\cos\pi z=-1$. В первом случае $x=1/\sqrt{5}$, и мы приходим к уравнению

$$y^2-z^2-y+5z-2=0,$$

где y и z — целые числа одинаковой четности. (Рассматривая это уравнение как квадратное относительно y и записывая его дискриминант, получаем

$$D=4z^2-20z+9=(2z-5)^2-16.$$

Число D должно быть квадратом некоторого целого числа $m>0$. Полагая $p=2z-5$, получаем уравнение $p^2-m^2=16$, где p и m — нечетные числа. Перебирая делители числа 16, получим, что либо $p+m=8$, $p-m=2$, откуда $p=5$, $z=0$, $y=2$, либо $p+m=-2$, $p-m=-8$, т. е. $p=-5$, $z=5$, $y=-1$. Во втором случае $x=-1/\sqrt{5}$, и мы получаем уравнение

$$1+y^2-z^2-y+5z=0,$$

не имеющее решений, если числа y и z разной четиости.

2. б) Указание. Задача может быть решена с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для шести чисел. Поступим иначе: выполнив замену $t=\sqrt{x}$, убедимся, что дискриминант $D(y;\ z)$ полученного квадратичного неравенства относительно t неположителен при $y>0$ и $z>0$ и обращается в нуль лишь при $y=z=1$.

3. а) $y_{\min}=-1$; б) $y_{\min}=7/23$.

4. $y\leqslant 1/4$.

5. а) $a\in(-1;\ -1/2)$; б) $a\in(-\infty;\ -3/2)\cup$
$\cup(1+\sqrt{2};\ +\infty)$.
Указание. Решается аналогично предыдущей задаче. Следует только заметить, что знаменатель дроби не может быть равен 0.
в) $[-24/5;\ 0]$.

6. $x=-\sqrt{7/5}$.

7. $-\sqrt{33}/2$.

8. $-17/48$.

9. $2\sqrt{2}$.

10. 3 и 1/2. Указание. Пусть $x^2-xy+y^2=a$. Выясним, при каких a система

$$\begin{cases} x^2-xy+y^2=a, \\ 2x^2+2xy+y^2=2 \end{cases} \qquad (*)$$

имеет решения. Умножим первое уравнение на 2, второе на a и вычтем из второго уравнения первое. Получится уравнение

$$2(a-1)x^2+2(1+a)xy+(a-2)y^2=0.$$

При $a=1$ система имеет решение $(1;\ 0)$. Если $a\neq 1$, то $y\neq 0$, и мы можем выполнить замену $t=x/y$. Осталось выяснить, при каких значениях a имеет корни уравнение $2(a-1)t^2-2(a+1)t+a-2=0$ и убедиться, что при этих a система $(*)$ также имеет решения.

11. $b\in(-\infty;\ -1]\cup[4;\ +\infty)$. Указание. Положив $a=b^2(b-3)^2-12+\sqrt{85}$, приходим к задаче, аналогичной предыдущей.

Задачи вступительных экзаменов по математике в различные вузы

Алгебра

1. 160/3 км/ч. Нет. 2. 12 км/ч. 3. 5/7. 4. 15/2. 5. 7 кг, 4 кг, 4 кг. 6. В первой пробирке. 7. 726. 8. 120. 9. 60 км/ч, 80 км/ч. 10. 18 ч, 24 ч. 11. 3 ч. 12. 8; (0; 8]. 13. 3,4 м/ч; (2; 4]. 14. 20 км/ч. 15. 964. 16. 1/3. 17. 1023. 18. $\pm\sqrt[4]{8}$. 19. 2; 1/2. 20. а) 9; б) 120/169; в) 2. 22. 0,5.

23. а) a/b при $a\geqslant b$; b/a при $a<b$; б) 0; в) $2(\sqrt{a}+\sqrt{b})$. 24. $-1/\sqrt{x}$. 25. $\max f(x)=9/2$; $\min f(x)=2{,}5+\sqrt{3}$. 26. а) 7; б) 5; в) 2; г) $-8/243$; д) -1; 15; $(21\pm\sqrt{583})/3$; е) 0; 1; ж) -3; з) 25; 1/25; $\sqrt{5}$; $1/\sqrt{5}$; и) 18; к) $1+1/\sqrt[3]{3}$; л) -1; 2.

27*) а) $\pm 2\pi/3+2\pi k$; б) $\pi(4k-1)/4$; πk; в) $\frac{4\pi}{3}(3k\pm 1)$; г) $\operatorname{arctg} 2+\pi k$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k$; д) $-\pi/12+\pi k/2$, $k\geqslant -1$; е) $\pi(4k+1)/2$, $2\pi k$; ж) $\pi(4k-1)/4$, $\pi(4k+1)/8$; з) $\pi(4k+1)/16$; и) $\pi(2k+1)/4$; к) $\pi k/3$, $\pi(4k\pm 1)/12$; л) $\pi(4k+$

---

*) Здесь и далее $k,\ n\in Z$.

$+1)/4$, $-\mathrm{arctg}\,7/4+\pi k$; м) $\pi/4$; н) $-11\pi/12$, $-7\pi/12$, $\pi/12$, $5\pi/12$; о) $\pi(4k+1)/8$, $2\pi(3k\pm\pm1)/3$; п) $\pi(4k-1)/4$, $\pi(8k+3)/24$; р) $\pi(4k+1)/2$; с) $\pi(2k+1)$; т) πk, $\pi(8k+5)/4$; у) $\pi(16k+1)/8$; ф) 1; х) 2.

28. а) $(-5;\ -3]\cup(1;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 2\sqrt{2})\cup(2+2\sqrt{3};\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ -3]\cup[1;\ +\infty)$;
г) $(-\log_{6/5}5;\ 0]$;
д) $(-7;\ 1)$. Указание. Воспользуйтесь тем, что неравенство $|u|<v$ равносильно системе: $-v<u<v$;
е) $(-\infty;\ 0)\cup(2-\sqrt{2};\ 1)\cup(3;\ 2+\sqrt{2})\cup(5;\ +\infty)$;
ж) $(0;\ 100]$; з) $[2;\ 3)$; и) $(3;\ 10/3)\cup\{6\}$;
к) $[3;\ 4)\cup(4;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$; л) $(-2;\ -\sqrt{35}/3]\cup[\sqrt{35}/3;\ 2)$;
м) $[-1;\ 1)\cup(3;\ 5]$; н) $(0;\ 1)\cup(1;\ 27)$;
о) $(-1;\ (1-\sqrt{5})/2)\cup((1+\sqrt{5})/2;\ 2)$;
п) $(2;\ 2{,}5)$; р) $(0;\ 1/16)\cup(16;\ +\infty)$;
с) $(-\infty;\ -1)\cup(1{,}5;\ 2]$; т) $(2+\log_4 3;\ 4)$;
у) $(0;\ 1)\cup[10;\ +\infty)$; ф) $[-2;\ -1)\cup(1;\ 5]$;
х) $(-3/4;\ 0)\cup(3;\ +\infty)$;
ц) $(-\infty;\ -10\sqrt{10})\cup(-\sqrt{0{,}1};\ 0)\cup(0;\ \sqrt{0{,}1})\cup(10\sqrt{10};\ +\infty)$;
ч) $(-4/3;\ (3-\sqrt{17})/2)\cup((3+\sqrt{17})/2;\ +\infty)$;
ш) $(0{,}5;\ +\infty)$; щ) $\{2\}$.

29. а) $(4;\ -3)$; $(4;\ 3)$; б) $(1;\ 1)$, $(-2;\ 1)$, $(1;\ -2)$; в) $(2;\ 18)$; $(18;\ 2)$; г) $(1;\ 0)$; д) $(1;\ 2)$; е) $(4;\ -0{,}5)$;
ж) $\left(\dfrac{5\pi}{6}\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi;\ \dfrac{5\pi}{6}\pm\dfrac{\pi}{3}-k\pi\right)$;
з) $\left(\dfrac{\pi}{4}+(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{12}+\left(k+\dfrac{n}{2}\right)\pi;\ \dfrac{\pi}{4}+(-1)^n\dfrac{\pi}{12}+(k-n)\pi\right)$.

30. При $a<-9/4$ — решений нет; при $a=-9/4$ или при $a\geqslant4$ — два решения; при $-9/4<a<4$ — 4 решения.
31. $a\leqslant0$ и $4\leqslant a$. **32.** $(0;\ 2\pi n)$.
33. $a\in(-6;\ 3)$. **34.** $a\in[-2;\ -1)\cup(1;\ 5]$.
35. $a\in(-1;\ -1/\sqrt{3})\cup(1/\sqrt{3};\ 1)$.
36. $b\in[-3/4;\ 3/4]$.
37. $x=(2-\cos2\alpha)/2$ при $-\pi/4+\pi k\leqslant\alpha\leqslant\pi/4+\pi k$.
38. $(83;\ 0)$, $(0;\ 83)$, $(-1;\ -84)$, $(-84;\ -1)$.

Анализ

1. 16. **2.** $y=-2x+4$. **3.** а) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 2{,}5)$; б) $[-4;\ 2]$.
4. а) 0 и 28; б) 2 и 227. **5.** $x_{\max}=1$, $y_{\min}=-52$.
7. $(3;\ 2)$. **8.** $C\ (7/3;\ -26/9)$. **9.** 8×8×4.
10. Нет; 2200 руб. **11.** 2×1×3. **12.** 3/8 и 33/16.

Геометрия

1. $(\sqrt{3}-1)a^2/4$. **2.** 294. **3.** $ab\sqrt{2}/(a+b)$.
5. 13, 14, 15. **6.** $2/(5\pi)$. **7.** 108, $48\sqrt{6}$.
8. $6/(\pi\sqrt{5})$. **9.** 9.
10. $h_ah_bh_c/(h_ah_b+h_ah_c+h_bh_c)$.
11. $4(1-\alpha)$. **12.** 25/4.
13. $3\pi a^2/4$, площадь ромба меньше.
14. $\sqrt{2S\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$. **15.** 2; 5; 5; 8.
16. $3S_2(S_1+S_2)(S_2+S_3)/(S_2^2-S_1S_3)$.
17. $3(11\pm\sqrt{21})/8$. **18.** $2(3\pm\sqrt{2})$.
19. $2\sqrt{(R^2-a^2)(R^2-a^2\,\mathrm{ctg}^2\alpha)}$. **20.** $b/\sqrt{2}$.
21. $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\alpha/\sqrt{5})$, $\mathrm{arctg}(2\,\mathrm{tg}\,\alpha)$.
22. $\sqrt{6}$. **23.** $2\sqrt{3}l^3/(27\sin^2\alpha\cos\alpha)$.
24. $a^2(2\,\mathrm{tg}\,\alpha-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\beta)\sqrt{3}/(4\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha)$.
25. $ab\sqrt{a^2+ab+b^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha/12$.
26. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\alpha}\sqrt[3]{V^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$.
27. $\mathrm{arctg}(4\,\mathrm{tg}\,\alpha/\sqrt{17})$, $\mathrm{arctg}(4\,\mathrm{tg}\,\alpha)$.
28. 3/2. **29.** $\pi/6$.
30. $\pi S\sqrt{S\,\mathrm{ctg}\,\beta}/(4\sin^2\alpha)$.
31. $7\pi l^3\sin\alpha\sin\dfrac{\alpha}{2}/54$.
32. $4\sqrt{3}R\,\mathrm{tg}\,\alpha/(\mathrm{tg}^2\alpha+4)$.
33. $a^3(1+\mathrm{ctg}\,\alpha)^2(1+\mathrm{tg}\,\alpha)$.

Задачи устного экзамена

1. $a_1=4$, $d=8$. **2.** $\sqrt{-4}$; $\sqrt{4}$. **3.** $(a+2b-2)/(1-a)$.
4. $(a+1)/(2a+b)$. **5.** а) $\log_{30}75<3/2<\log_8 25$; б) $\log_{3\cdot7}7^2\cdot3^3>4/3>\log_{3^2\cdot7}3\cdot7^2$.
6. Поскольку $\log_n(n+1)=\ln(n+1)/\ln n=1+\ln(1+1/n)/\ln n$, функция $\log_n(n+1)$ убывает.
7. а) Из $a+b=1$ и $a^2+b^2\geqslant2ab$ следует, что $a^2+b^2\geqslant1/2$. Возведите полученное неравенство в квадрат. б) Выполните замену $t=(x/y+y/x)$.
9. Умножьте равенство на 2 и приведите его к виду

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0.$$

10. а) 0; 1. Выполните замену $t=x-1/2$.
б) -8; 4. Сгруппируйте первый и третий, второй и четвертый сомножители. Положите $t=x^2+4x$.
в) ±1; $\pm\sqrt{2}$; г) 5; д) $\varnothing$; е) $(-1)^n\arcsin(2/3)+\pi n$;
ж) $\varnothing$; з) $-1/2$, $\pi(4k+1)/2$.
11. а) $(0;\ +\infty)$; б) $[-1;\ (1-\sqrt{5})/2)\cup((1+\sqrt{5})/2;\ 2]$. в) $(-\infty;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$.
12. а) $(-1;\ -2)$; $(2;\ 1)$; б) $(4;\ 10)$, $(10;\ 4)$.
13. Один корень. **14.** Нет, т. к. $\sin\alpha=2\sin40^\circ>2\sin30^\circ=1$. **17.** 7,2. **18.** 75° и 45°.
19. 2. **20.** $a+c-b$.

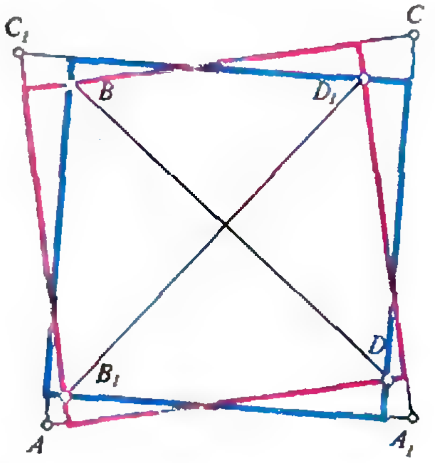


Рис. 1.

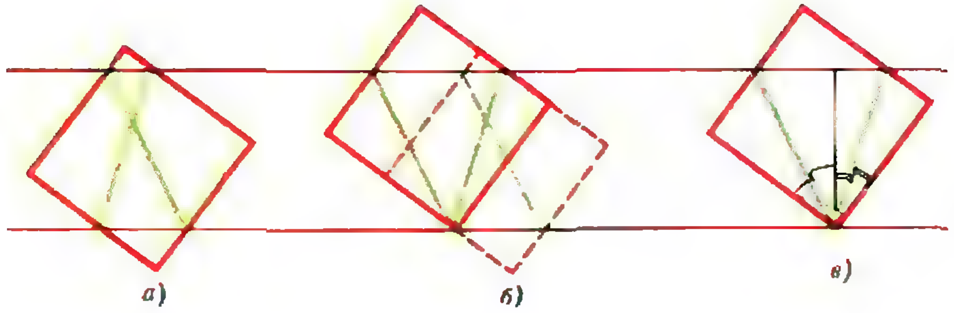


Рис. 2.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 5)

1. Перестановку можно провести, например, в таком порядке: 1562437—1624537—1245637—1234567.

2. $1089 \times 9 = 9801$.

3. Пусть в ящике было x ключей, а в связках — по y ключей. Из условия следует, что $x \leqslant 3y$. После того, как одну связку положили в стол, там оказалось $x+y$ ключей и, так как их число при добавлении другой связки увеличилось не менее, чем на четверть, то можно записать $y/(x+y) \geqslant 1/4$, откуда $x \geqslant 3y$. Значит, $x=3y$. Если бы в каждой связке было одним ключом больше (т. е. $y+1$), то по условию число ключей увеличилось бы не меньше, чем на 40 %, откуда $(y+1)/(x+y+1) \geqslant 0{,}4$. А так как $x=3y$, то $(y+1)/(4y+1) \geqslant 2/5$. Из этого неравенства получаем, что $y \leqslant 1$. Но y — натуральное число, следовательно, $y=1$, а $x=3y=3$.

4. 200.

5. Рассмотрим два параллелограмма — $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 1). Стороны AB и CD перпендикулярны сторонам A_1B_1 и C_1D_1, а стороны BC и DA — сторонам B_1C_1 и D_1A_1. Кроме того, высоты этих параллелограммов соответственно равны и перпендикулярны, откуда следует, что эти параллелограммы равны и их диагонали (отрезки, указанные в задаче) перпендикулярны.

Конкурс «Математика 6—8»
(см. «Квант» № 2)

16. Передвинем квадрат параллельно одной из его сторон так, чтобы он коснулся своей вершиной границы полосы (рис. 2, *б*). Тогда углы между зелеными отрезками у этих двух квадратов будут равны, так как при сдвиге один из отрезков останется на месте, а другой параллельно передвинется. Проведем высоту полосы из рассмотренной вершины сдвинутого квадрата (рис. 2, *в*). Тогда часть квадрата, расположенная внутри полосы, разобьется этой высотой и зелеными отрезками на две пары равных треугольников. Сумма углов этих треугольников при рассматриваемой вершине равна 90°, поэтому угол между зелеными отрезками равен 45°. Отсюда следует, что угол между зелеными отрезками и на рисунке 2, *а* также равен 45°.

17. Гусейну Гуслия достались кошельки с 5-ю и 7-ю таньга.

18. Пусть было уплачено A копеек B монетами, причем среди них было x_1 однокопеечных монет, x_2 — двухкопеечных, x_3 — пятаков, x_4 — гривенников, x_5 — двугривенных, x_6 —

АНКЕТА 6—92

Из статьи «Читатель ↔ журнал» (в этом номере) Вы узнали не только о себе, но и о том, как Ваши отзывы и пожелания помогают в подготовке журнала. Мы благодарим Вас за помощь и просим ответить на вопросы очередной анкеты. Чем больше будет ответов, тем легче нам будет ориентироваться в Ваших интересах.

Большинство вопросов традиционны, кроме одного — шестого. Отвечая на него, Вы можете рассказать, каким видите журнал, что бы Вам хотелось в нем изменить, добавить, устранить… Когда ответы будут готовы, вырежьте анкету и отправьте ее в редакцию. На конверте напишите: «Анкета 6—92».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____________________

Ваша профессия (если Вы работаете): ____________________

круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

____

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____________________

полтинников и x_7 — рублей, т. е. $x_1+2x_2+5x_3+10x_4+20x_5+50x_6+100x_7=A$ и $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=B$. Возьмем теперь следующий набор монет: $100x_7$ — однокопеечных монет, $50x_6$ — двухкопеечных, $20x_5$ — пятаков, $10x_4$ — гривенников, $5x_3$ — двугривенных, $2x_2$ — полтинников и x_1 — рублей. Нетрудно видеть, что количество монет равно A, а соответствующая сумма равна $100B$ копеек, т. е. B рублей.

3. Какие статьи (из любого раздела) и задачи из номеров 1—6 Вам понравились (не понравились)?

Вы использовали при подготовке к уроку?

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?

5. Какая обложка из номеров 1—6 Вам понравилась (не понравилась)?

6. Если бы редактором «Кванта» были Вы...

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко,
С. Табачников, В. Тихомирова, В. Уроев,
А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, А. Калинин,
Л. Кардасевич, С. Коновалов, А. Котова,
А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Е. Барк, С. Лухин, Э. Назаров,
П. Чернуский, Г. Шиф, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Т. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»,
тел. 250-33-54, факс 251-55-57

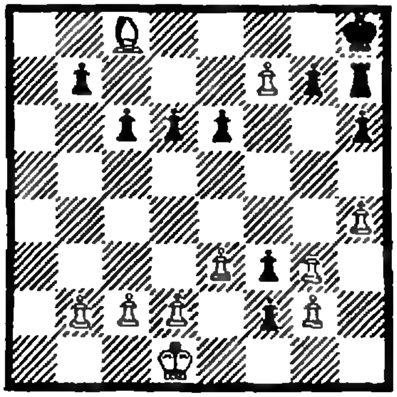
Сдано в набор 30.03.92. Подписано к печати 26.05.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,52.
Тираж 88 566 экз. Заказ 363. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

ПУТЕШЕСТВИЕ В ПРОШЛОЕ

В этом году мы несколько «страничек» посвятим ретроградному анализу — разделу шахматной композиции, который лежит на грани между логикой, математикой и шахматами. Латинское слово «retro» означает «назад», «вспять», и именно изучение прошлого шахматной позиции составляет сущность ретроанализа. Проблема состоит не столько в выполнении определенного задания в данной позиции, сколько в выяснении вопроса, как она возникла на доске. Рассмотрим подробно одну задачу классика этого жанра композиции Н. Плаксина.



Мат в 1 ход

Кто матует? Белые — f8Ф× или черные — f1Ф×? Дать мат ничего не стоит, а вот определить, чей ход, не так просто. Проследим за процессом формирования данной позиции из начальной расстановки шахматных фигур на доске.

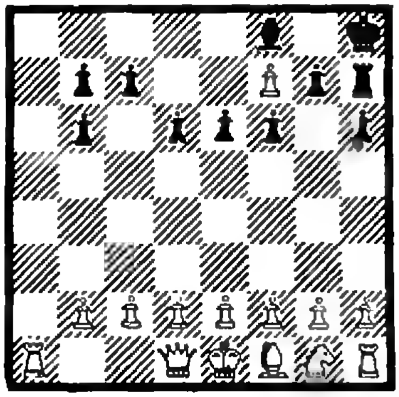
Очевидно, черная пешка f2 пришла с a7, а белая f7 — с a2. Проверим так называемый ретробаланс. Баланс белых фигур: 10 (на диаграмме) + 5 (взято — a7:b6:c5:d4:e3:f2) + 1 (Cc1 взят на поле c1 — пешки b2 и d2 на исходных местах) = 16. Баланс черных: 10 (на диаграмме) + 6 (взято — a2:b3:c4:d5:e6:f7 — на белых полях и еще f2:g3 — на черном поле) = 16. Итак, все отсутствующие фигуры (за исключением слона c1) взяты пешками.

Эстафету ретробухгалтерии принимает ретропоследовательность ходов. Поскольку *на доске все 16 пешек*, то превращенных фигур нет. Значит, белопольный слон белых c8 мог выйти со своего исходного поля f1 только после хода e2—e3. Ход этой пешкой мог быть сделан только после того, как черная пешка a7 пришла на f2. Но это могло произойти лишь после взятия f2:g3. Теперь вспомним, что белая пешка a2 идет на f7 по белым полям, а поле g3 — черное. Значит, на g3 мог быть снят только чернопольный слон. А выйти со своего исходного места на f8 он мог только после хода e7—e6. Но ход этой пешкой можно было сделать только после того, как белая пешка a2 пришла на f7. И наконец, белая пешка a2 могла прийти на f7 только после того, как черная пешка f7 сдвинулась минимум на f6.

Перед нами вырисовывается строгий план формирования исходной позиции. Вот последовательность его основных этапов: 1) черная пешка f7—f6, 2) белая пешка a2→f7 (указаны только старт и финиш маршрута), 3) черная пешка e7—e6, 4) Cf8→g3, 5) белая пешка f2:Cg3, 6) черная пешка a7→f2, 7) белая пешка e2—e3 и 8) Cf1→c8. Ни одно из звеньев этой логической цепочки нельзя переставить на другое место: если не завершен какой-то этап, то нельзя завершить и последующий. Не правда ли, эти рассуждения напоминают доказательство сложной математической теоремы?

Теперь мы можем провести окончательный анализ позиции. Стартует белая пешка a2. На трассе a2:b3:c4:d5:e6:f7 она берет ферзя, ладью, двух коней и белопольного слона черных. Но до этого черные должны были обязательно сделать по крайней мере ходы: d7—d6 (выпуская слона c8), a7:b6 (выпуская ладью a8), f7—f6 (освобождая поле f7) и еще — h7—h6, Лh8—h7 и Крe8—f7—g8—h8.

Последним ходом белой пешки «a» — e6:f7 — затягивается фигурно-пешечный ретроузел на полях h8, h7, h6, g7, f7. Черный король и ладья h7 навсегда выключаются из дальнейшей ретроигры. И только теперь *черные могут сыграть e7—e6.*



Освобожден черный слон f8, который, обретя подвижность, пока остается запертым в вольере f8—e7—d8. Надо еще сыграть или f6—f5, выводя его через f6, или c7—c6 (и еще b6—c5), выпуская через поле c7. Однако ход c7—c6 делать преждевременно, так как тогда слон f1 не сможет попасть на c8.

Итак, после хода e7—e6, продолжаем: f6—f5, Cf8→g3, f2:Cg3, и черной пешке b6 открыта дорога к пункту f2. Предварительно, конечно, еще должно быть сыграно h2—h4, чтобы вывести белую ладью h1 на диагональ c5—f2. Путешествие из прошлого продолжается — b6:c5:d4:e3:f2.

Наконец-то возможен ход e2—e3, освобождающий слона f1. Вот теперь мы пришли к так называемой критической позиции (белые: Крd1, Cf1, пешки b2, c2, d2, e2, f7, g2, g3, h4; черные: Крh8, Лh7, пешки b7, c7, d6, e6, f2, f5, g7, h6). Особенность ее в том, что у одной из сторон (у черных) остались только ходы пешками — темпоходы. Начинается темпоигра: 1. e2—e3 f5—f4 2. Cf1—b5 f4—f3 3. Cb5—d7 c7—c6! 4. Cd7—c8. Перед нами исходная позиция, ход черных, и именно они ставят мат — f2—f1Ф×!

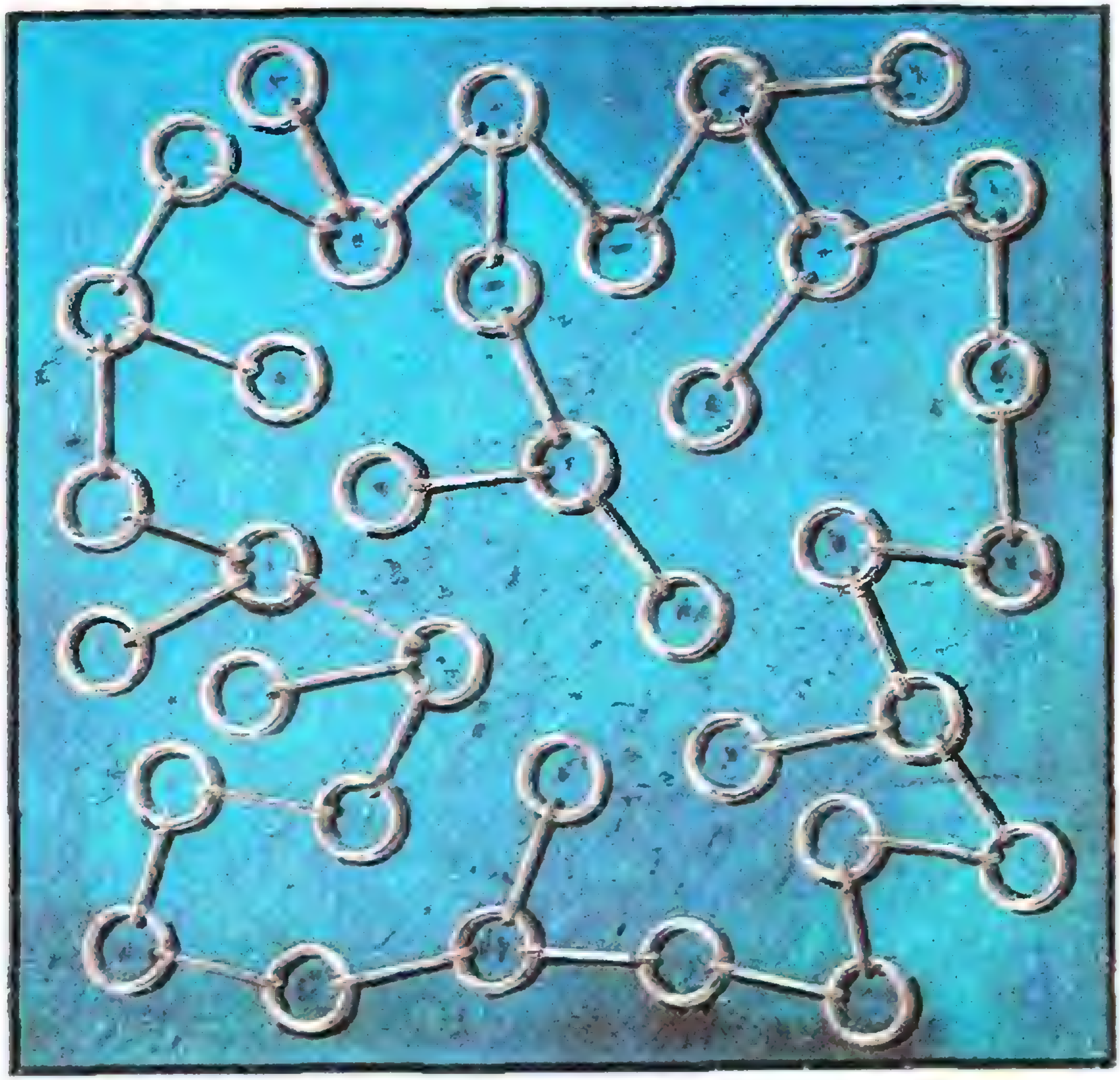
Е. Гик

1 р. 10 к.
Индекс 70465

ГОЛОВОЛОМКА «ОЖЕРЕЛЬЕ»

Цепочка из 36 колец, изображенная на рисунке, может служить как украшением, так и головоломкой. Если повесить эту цепочку на шею, то получится симпатичное ожерелье. Это ожерелье становится головоломкой, если вы попросите кого-нибудь расположить цепочку на плоскости в виде квадрата 6×6 колец. Разумеется, сначала научитесь это делать сами.

А. Калинин



НОМЕР
7

Квант
7 1992

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал*

*Учредители —
Президиум
Российской академии наук,
Президиум
Академии педагогических наук
и коллектив редакции
журнала «Квант»*

*Москва, «Наука».
Главная редакция
физико-математической
литературы*

В номере:

2 *Ю. Соловьев.* Творцы новой астрономии
8 *В. Сурдин.* Чернильное колечко и космическая физика
14 *Я. Стюарт.* Топология
21 *Г. Литинский.* Корабельные пушки и волны в упругих стержнях

Задачник «Кванта»

26 Задачи М1351—М1355, Ф1358—Ф1362
27 Решения задач М1321—М1325, Ф1338—Ф1342
37 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

39 Задачи
42 *Л. Генденштейн.* Алиса и Точка
40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Математический кружок

46 *Е. Куланин.* Об одной трудной геометрической задаче

Практикум абитуриента

51 *Б. Корсунский.* Внимание: ловушка!

Информация

53 Заочная школа при НГУ
55 Заочная школа программистов

Р — значит ракета

56 Есть ли жизнь на Европе?

Информатика

60 *А. Котова.* Машина Тьюринга

Олимпиады

63 Канадские математические соревнования
65 Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Фантастика

68 *Т. Томас.* Сломанная линейка

Игры и головоломки

73 Игра го
77 **Ответы, указания, решения**
«Квант» улыбается *(52)*
Нам пишут *(13, 72)*

Наша обложка

1 *Четырехугольник с целочисленными сторонами, диагоналями, радиусами различных окружностей... (см. с. 7).*
2 *Рисунок обсерватории Тихо Браге, сделанный его современником. О Тихо Браге, Кеплере и других астрономах читайте в статье на с. 2.*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Две новые родственные головоломки: одна из Англии, другая с Урала.*

© «Квант», 1992

ТВОРЦЫ НОВОЙ АСТРОНОМИИ

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

> *Геологическая история показывает нам, что жизнь есть лишь беглый эпизод между двумя вечностями смерти и что в этом эпизоде прошедшая и будущая деятельность сознательной мысли — не более, как мгновение. Мысль — только вспышка света посреди долгой ночи.*
> *Но эта вспышка — все.*
>
> А. Пуанкаре

На рубеже 17-го столетия две личности, обе грандиозной творческой силы и огромного темперамента, вступают на арену борьбы за коперниканское учение — немец Иоганн Кеплер (1571—1630) и итальянец Галилео Галилей (1564—1642). Их работы являются гранью, разделяющей всю историю астрономии: от трактатов Кеплера и Галилея ведет начало все современное научное миросозерцание. Честь создания новой астрономии разделяет с ними датчанин Тихо Браге (1546—1601), «феникс астрономии», как назвал его Кеплер, человек, который впервые за четырнадцать с половиной столетий после Птолемея внес в наблюдательную астрономию существенно новый и весьма обширный материал. О их судьбах и научном творчестве наш рассказ.

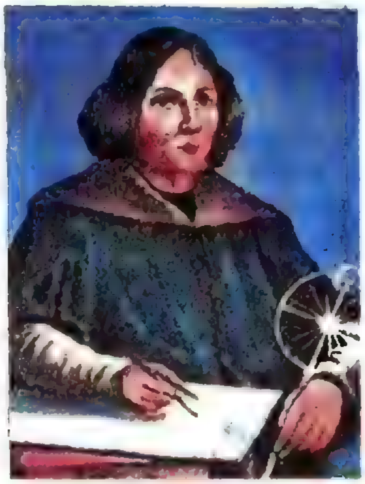
«Я жил не даром!»

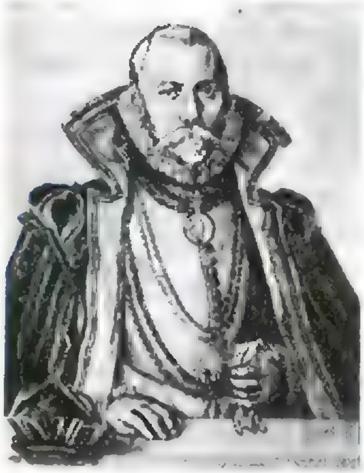
Тихо Браге родился в 1546 году. Его отец, датский дворянин, был комендантом Гельсинборга и умер в 1571 году. В 1560 году Тихо по желанию семьи отправился в Копенгагенский университет изучать право. Но юриспруденция, по-видимому, была ему не по душе, и в 1562 году он переселился в Лейпциг, где занимался астрономией. В августе 1563 года он наблюдал противостояние Юпитера и Сатурна. Семья его не сочувствовала таким недворянским затеям и, вероятно, положила бы им конец, если бы на сторону молодого человека не перешел его дядя Стен Билле. Когда Тихо после нескольких лет странствий вернулся в 1571 году на родину, его дядя устроил для него в своем имении маленькую обсерваторию и химическую лабораторию. Наблюдения Тихо над новой звездой, которая появилась в 1572 году, сияла ярче Венеры, а в 1574 году исчезла, обратили общее внимание на молодого астронома. В 1574 году он читал лекции по астрономии в Копенгагене и был представлен датскому королю Фридриху II, который подарил ему остров Хвен в проливе Каттегат и построил для него обсерваторию Ураниенбург, сделавшуюся впоследствии столь знаменитой. В продолжение 21 года (1576—1597) Браге производил наблюдения в Ураниенбурге в кругу многочисленных ассистентов и учеников. Он был последним великим астрономом, жившим до той поры, когда Галилей направил на звездное небо зрительную трубу. Его астрономические приборы, по-существу, были известны еще в древности, однако большая изобретательность Браге и развившееся искусство ремесленников позволили сделать их очень точными.

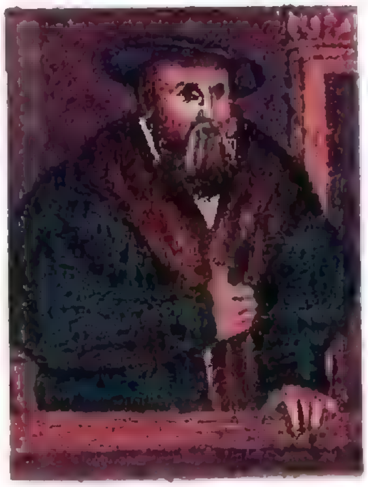
В 1597 году положение Тихо Браге резко изменилось. Его покровитель Фридрих II умер, и, за малолетством его наследника Христиана IV, государством стали править четыре советника. С одним из них, Валькендорпом, Тихо имел столкновение из-за имущества обсерватории, и враги воспользовались этим случаем, чтобы его выжить. Сначала Браге отправился в Копенгаген, когда же Валькендорп запретил ему производить наблюдения своими прежними инструментами, он переселился в Росток. В 1599 году окончились его переговоры с императором Рудольфом II, и он отправился в Прагу в качестве императорского астронома, астролога и алхимика. Он получил замок Бенах близ города для научных занятий и — что всего важнее — ассистента в лице молодого астронома Кеплера. Браге не удалось, однако, долго поработать на новом поприще: он внезапно заболел и скоропостижно скончался 23 октября 1601 года.

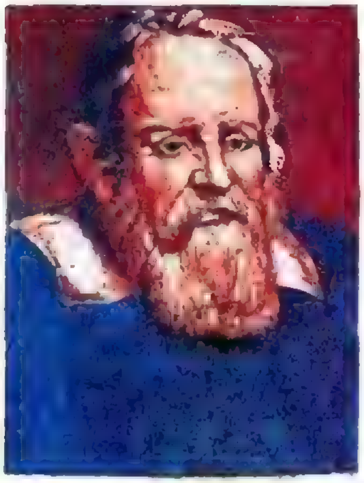
Браге был непревзойденным наблюдателем — даже с нашей современной точки зрения его наблюдения являются очень точными и тщательно выполненными. Однако иронией судьбы, весь этот нечеловеческий труд длиною в жизнь был проделан им для того, чтобы опровергнуть теорию Коперника. Против теории движения Земли Браге приводит следующие возражения. 1) Непонятно, каким образом при вращении Земли камень, брошенный с высокой башни, может упасть у ее подножья,— возражение весьма веское в то время, когда закон инерции был еще неизвестен. Коперник пытался опровергнуть подобные доводы допущением, что всем земным телам присуще совместно с Землей круговое движение. 2) Если Земля пробегает такое огромное расстояние по своей орбите, то неподвижные звезды должны изменять свое кажущееся положение. Коперник, предвидя это возражение, заранее опроверг его указанием на громадность расстояния до неподвижных звезд. 3) Нельзя указать силу, которая поддерживала бы параллельность земной оси,— довод весьма веский и получивший правильное объяснение только в конце семнадцатого столетия Ньютоном. 4) Библия в книге Иисуса Навина («Солнце, остановись в Гидеоне!») прямо опровергает учение о движении Земли. Последний аргумент, по-видимому, окончательно убедил Браге в несостоятельности системы Коперника. Он придумал промежуточную систему, согласно которой, как и у Птолемея, Земля находится в покое, а Солнце и Луна вращаются вокруг нее; прочие же планеты двигаются вокруг Солнца, как у Коперника.

Сейчас система мира Тихо Браге кажется довольно наивной, но в свое время она сделала полезное дело. Так или иначе, но Браге ниспроверг систему Птолемея и тем самым подготовил окончательную и решительную победу Коперника. И конечно же, главным вкладом, определившим эту победу, были уникальные наблюдения Тихо Браге. Ему не пришлось вкусить теоретических плодов своей долголетней работы. Впоследствии мы увидим, как плохооплачиваемый


Николай Коперник.


Тихо Браге.


Иоганн Кеплер.



Галилео Галилей.

и многострадальный его ассистент Кеплер выведет из его данных истинные орбиты планет и исправит, таким образом, систему Коперника в одном из ее самых слабых мест.

Научный подвиг Тихо Браге оказался не напрасным — из его наблюдений выросли основы нового миропонимания, оправдав гордое восклицание умиравшего Браге: «Я жил не даром!»

Гармония мира

Через двадцать восемь лет после выхода в свет знаменитой книги Коперника «Об обращении небесных сфер» 27 декабря 1571 года в городке Вейль-дер-Штадт в Вюртемберге увидело свет слабое дитя, которому было суждено завершить дело Коперника и разгадать законы неба. Это был Иоганн Кеплер, сын трактирщика, одного из тех отчаянных людей, которых было так много в то время. Отец Кеплера после рождения сына отправился искать военного счастья у герцога Альбы в Бельгии. Потеряв в военных походах все свое немудреное состояние, он вернулся в Германию и поселился с семьей в городке Леонберге. Здесь юный Иоганн шести лет от роду поступил в местную школу. Он должен был научиться лишь тому, что необходимо было знать швабскому крестьянину. Однако судьба предназначила этому слабому ребенку более высокое жизненное поприще. Благодаря своему прилежанию, мальчик поступил в 1586 году в протестантскую монастырскую школу в Маульбронне, где его ожидали всяческие неприятности и лишения. Здесь-то он и заложил основу своим обширным познаниям древних классиков и латинского языка.

Уже в это время Кеплер обнаружил интерес к наблюдениям над небесными телами. Он отметил в своем дневнике тот замечательный факт, что при наступившем 3 марта 1588 года лунном затмении совершенно не было видно покрытого земной тенью диска Луны. Сдав блестяще экзамен на бакалавра, Кеплер получил осенью 1589 года место в Тюбингенской духовной академии, которая была известна своей богословской ученостью и нетерпимостью. Оба первых года ушли у него здесь на изучение естественных наук. Учителем математики и астрономии у Иоганна был знаменитый в свое время профессор Местлин. Он-то впервые и посвятил молодого Кеплера в учение Коперника. Но делалось это тайком, так как Местлин опасался гнева фанатиков и публично излагал лишь птолемееву систему мира. Последние три года занятий в Тюбингене были посвящены богословию.

После окончания академии Кеплер получил место учителя математики и морали в гимназии австрийского города Граца. Во многих отношениях это было не очень удачное место, но Кеплер получил образование за казенный счет и поэтому полагал, что должен повиноваться сделанному ему указанию. 13 марта 1594 года он отправился в Грац.

Помимо собственных специальных занятий, Кеплеру было поручено также составить календарь для Штирии и снабдить его астрологическими предсказаниями на новый год. При этих предсказаниях Кеплер больше полагался на свой здравый взгляд на вещи, нежели на расположение светил, и в нескольких случаях довольно точно предугадал будущие события. Таким образом, реформатор астрономии начал свой жизненный путь, окруженный ореолом великого астролога. Сам он, конечно, прекрасно знал цену своим предсказаниям и как-то в личной переписке заметил, что все такого рода занятия «являются очень сомнительными и мало полезными в житейских делах».

В один из зимних дней 1595 года, пока он набрасывал на доске перед своими учениками чертеж, ему вдруг пришла в голову мысль, определившая всю его дальнейшую жизнь. Кеплер начертил равносторонний треугольник с вписанной и описанной окружностями (рис. 1) и неожиданно осознал, что эти окружности можно связать с орбитами планет. Довольно быстро он понял, что плоские геометрические фигуры не позволяют найти разумный ответ и обратился к геометрическим телам — правильным многогранникам.

В математике известно пять правильных многогранников (рис. 2): тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. С другой стороны, Кеплер знал вычисленные Коперником расстояния от Солнца до шести известных в то время планет.

Кеплер предположил, что поскольку в мире должна существовать полная математическая гармония, пять планетных сфер должны располагаться вокруг Солнца таким образом, чтобы между ними вписывались правильные многогранники. Проделанная Кеплером вычислительная работа была под силу только незаурядному математику. Между самыми далекими сферами Сатурна и Юпитера он поместил куб так, чтобы вершинами он касался сферы Сатурна, а гранями — сферы Юпитера. Между Юпитером и Марсом Кеплер поместил тетраэдр и т. д. с тем же расчетом, чтобы гранями каждый многогранник касался внутренней, меньшей сферы, а вершинами был вписан во внешнюю, большую сферу.

Результаты своих вычислений Кеплер опубликовал в 1596 году в книге под названием «Mysterium cosmographicum» («Тайна Вселенной»). Кеплер не сомневался, что тайна Вселенной раскрыта: ведь он не только объяснил основу устройства Солнечной системы, но и открыл, почему

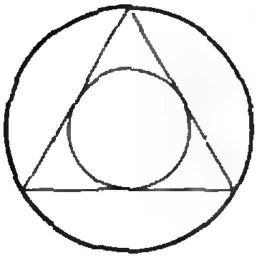


Рис. 1.

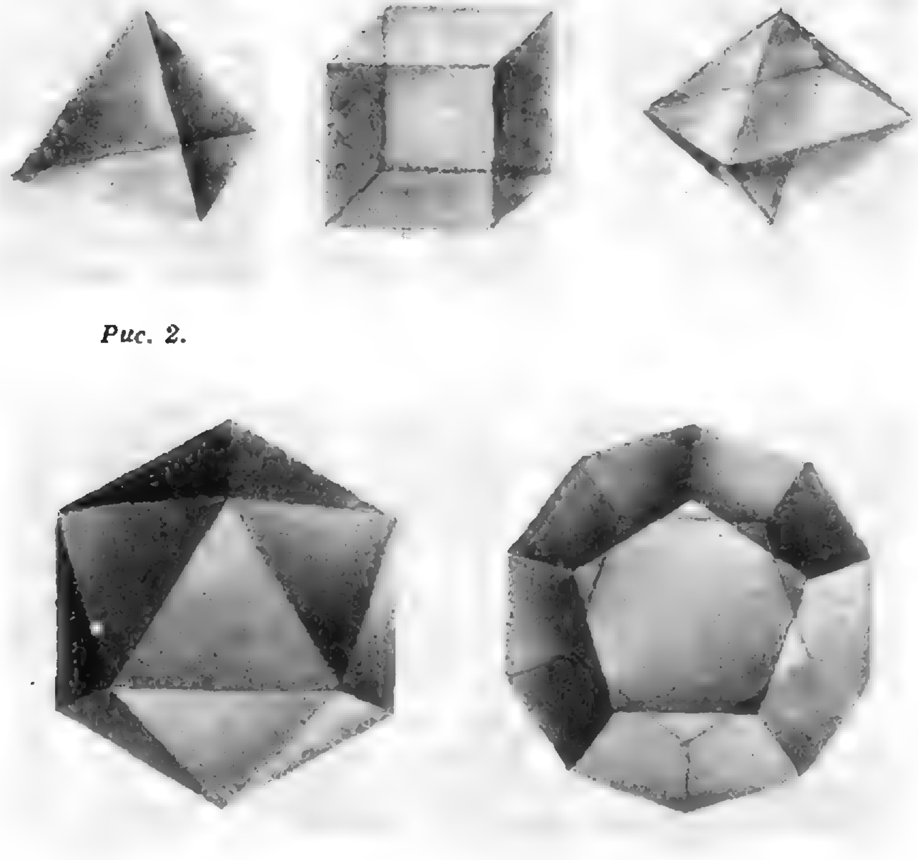
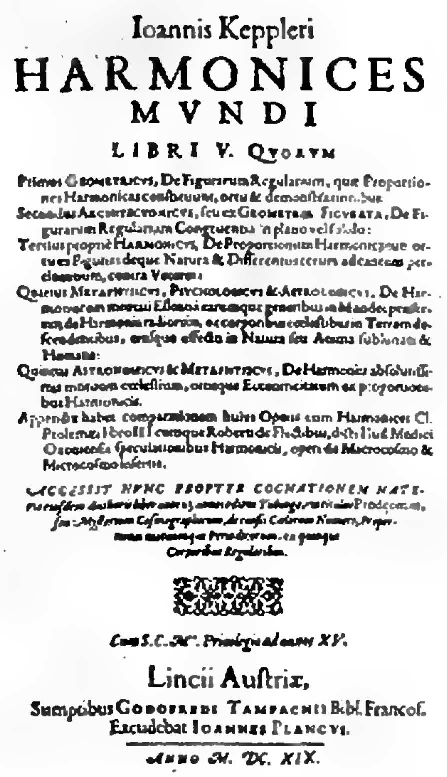


Рис. 2.



Ioannis Keppleri
HARMONICES
MVNDI
LIBRI V. QVORVM

Cum S.C. M^{tis}. Privilegio ad annos XV.

Lincii Auſtriæ,
Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof.
Excudebat Ioannes Plancus.

Anno M. DC. XIX.

Титульный лист книги Иоганна Кеплера «Гармония мира».

планет именно шесть, а не «двадцать или сто». К сожалению, склонный к умозрительным построениям ученый попал на совершенно ложный путь. Сегодня мы можем с уверенностью утверждать, что расстояния между планетами и их число никак не связаны ни с какими многогранниками. Конечно, структура Солнечной системы не является случайной, но истинные причины, по которым она устроена так, а не иначе, до сих пор не известны.

В 1598 году эрцгерцог Фердинанд издал указ, которым из Штирии выселялись все протестантские учителя и священники. Только для Кеплера в указе было сделано исключение. Этим проявлением милости он был обязан тому, что воздерживался от религиозных споров, а также тому, что Фердинанд высоко ценил его научные сочинения. Но Кеплер плохо чувствовал себя в Граце, где гимназия совершенно опустела. Охотнее всего он вернулся бы к себе на родину, но богословы из Тюбингенской духовной академии и слышать о нем не хотели. Это оказалось счастьем для молодого астронома, поскольку Кеплер решил принять предложение Тихо Браге и стать его сотрудником в Праге. В виде особой милости ему было позволено сдать в аренду свое недвижимое имущество в Граце. В октябре 1600 года семья Кеплера переселилась в Прагу, где Кеплер должен был работать под руководством Тихо Браге в качестве его помощника.

Очень быстро отношения между Кеплером и Тихо Браге стали чрезвычайно натянутыми. Тихо Браге занимался усовершенствованием системы Коперника, в которой он находил много недостатков, Кеплер же был ее решительным сторонником. Научные споры переходили порой в жестокие оскорбления со стороны патрона. Кроме того, несмотря на то, что Тихо Браге обладал княжескими богатствами, Кеплеру стоило больших трудов получать от него свое жалованье. Сам Кеплер вспоминал, что ему приходилось почти вымаливать себе содержание. Трения эти прекратились лишь после неожиданной смерти Тихо, последовавшей 23 октября 1601 года. Тихо Браге оставил Кеплеру сундук с бесценными результатами своих наблюдений и завещал опровергнуть учение Коперника.

После смерти Браге Кеплер получил место и звание императорского математика. Однако император Рудольф испытывал очень большие денежные затруднения, поэтому положение Кеплера в Праге было очень тяжелым. Восемь лет он не получал ни гроша за свою работу и жил в вопиющей бедности, перебиваясь случайными заработками и составлением гороскопов. И все эти годы он напряженно занимался анализом наблюдений Тихо Браге над Марсом. По словам Кеплера, размышляя и соображая, он чуть ли не сошел с ума. Но он нашел то, что искал.

(Окончание следует)

Удивительный четырехугольник

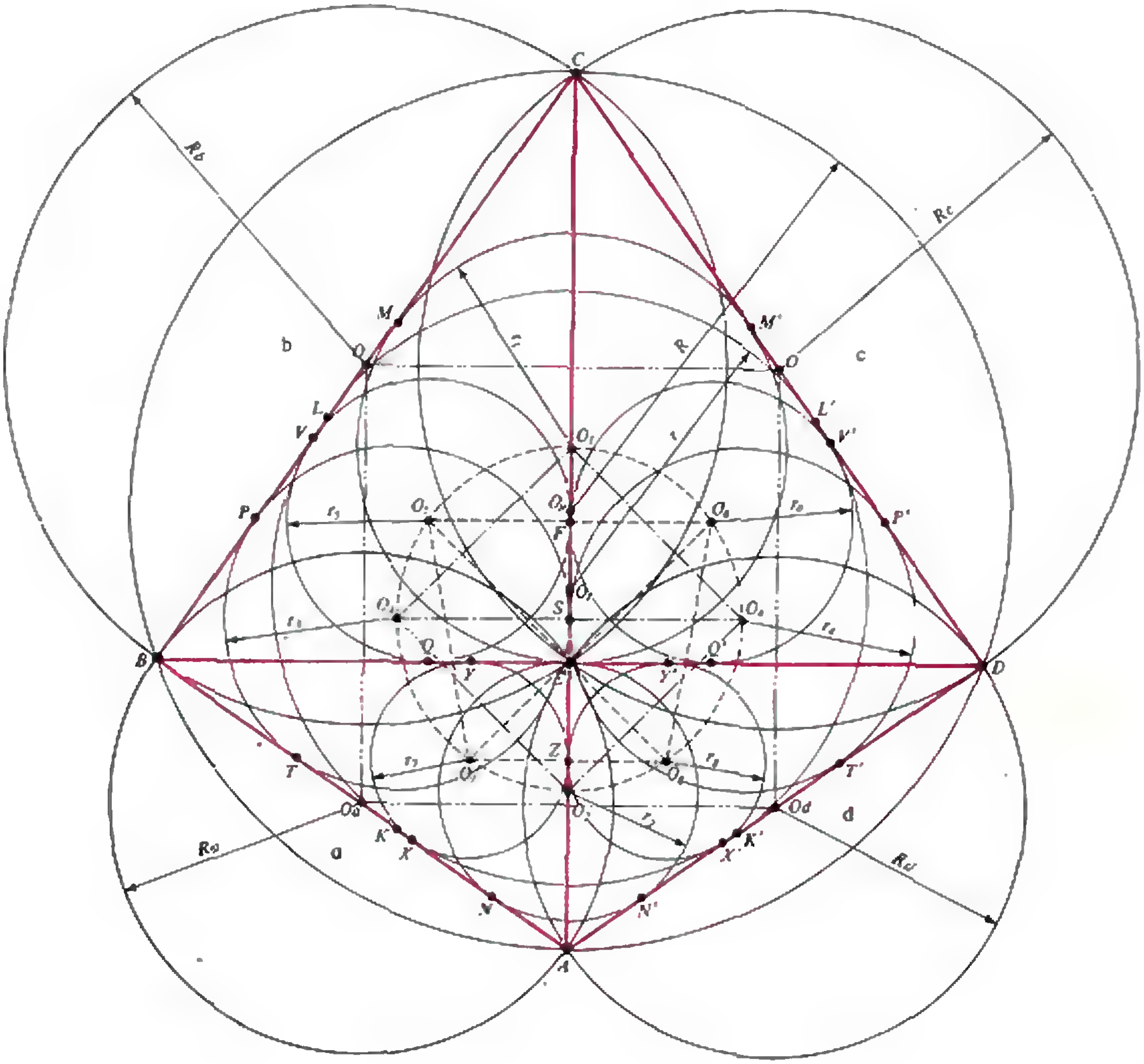
Четырехугольник, изображенный на рисунке и на первой странице обложки, обладает массой любопытных свойств. Все его стороны, диагонали, радиусы различных вписанных и описанных окружностей, расстояния между центрами этих окружностей, между точками касания окружностей со сторонами и диагоналями — целые числа. Приведем эти числа. Система обозначений центров и радиусов, а также точек касания, понятна из рисунка. Отрезки AB, BC, CD, и AD удобно обозначить через a, b, c и d. Итак, $a=d=210$, $b=c=280$, $AC=350$, $BD=336$, $AE=126$, $EC=224$, $R=175$, $r=120$, $O_rO_R=25$, $R_a=R_d=105$, $R_b=R_c=140$, $O_aO_d=O_bO_c=168$, $O_aO_b=O_cO_d=175$, $r_1=84$, $r_2=56$, $r_3=r_4=70$, $O_1O_2=O_3O_4=140$, $r_5=r_6=56$, $r_7=r_8=42$, $O_5O_6=112$, $O_7O_8=84$, $AN=AN'=42$, $NX=NX'=42$, $XK=X'K'=6$, $KO_a=K'O_d=15$, $O_aT=O_dT'=35$, $TB=T'D=70$, $CM=CM'=112$, $MO_b=M'O_c=28$, $O_bL=O_cL'=20$, $LV=L'V'=8$, $VP=V'P'=42$, $PB=P'D=70$, $CO_1=140$, $O_1F=28$, $FO_R=7$, $O_rS=10$, $SE=14$, $EZ=42$, $ZO_2=14$, $O_2A=70$, $BQ=Q'D=112$, $QY=Y'Q'=14$, $YE=EY'=42$. И еще одно замечательное свойство: точка S касания окружностей с радиусами r_3 и r_4 является центром окружности радиуса 70, на которой лежат точки O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7 и O_8.

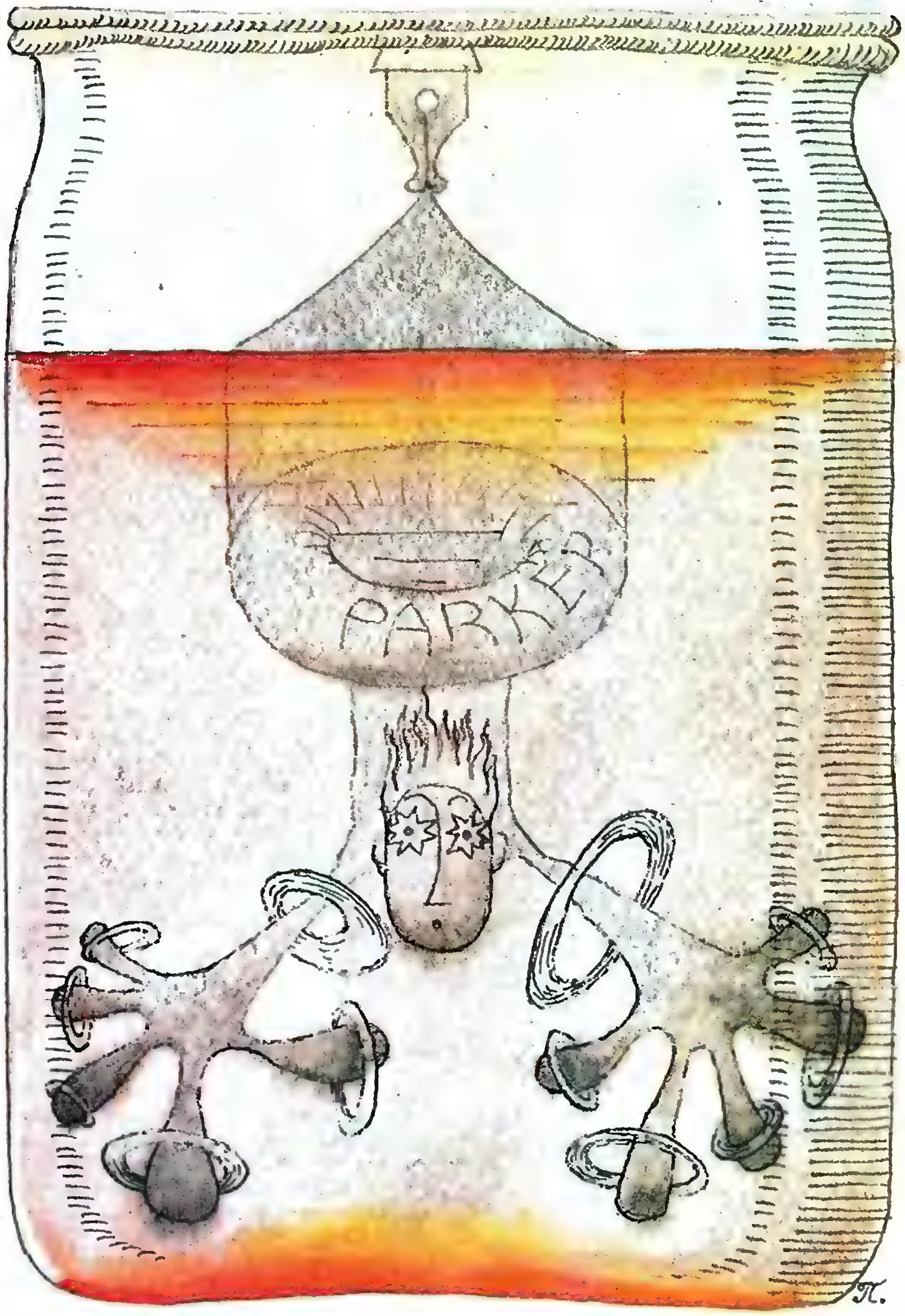
Р. Сарбаш

От редакции

Рассмотренный здесь четырехугольник действительно замечателен, но не

(Окончание см. на с. 20)




PARKER
П.

ЧЕРНИЛЬНОЕ КОЛЕЧКО И КОСМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Кандидат физико-математических наук
В. СУРДИН

Не люблю шариковых ручек. Предпочитаю «вечное перо» и отношусь к нему с большим уважением. Пишет оно легко, разумеется, когда привыкнет к руке хозяина. Зато чужими самописками писать — сплошное мучение: не любят они случайную руку. Это вам не какой-нибудь безродный шарик, со всех сторон одинаковый, к любой руке безразличный, который можно без особого сожаления взять — отдать — потерять. Настоящая перьевая авторучка — это удобный в работе инструмент, да к тому же и предмет изящный. Им владеют годами, а то и десятилетиями. Если судьба подарила вам благородный «Паркер» или безотказный «Пеликан», то вы будете заботиться о нем, как ковбой о своем кольте.

Признаюсь, у меня никогда не было настоящего «Паркера» и даже «Пеликана». Когда я учился в 9 классе, отец подарил мне свою китайскую авторучку, и она стала моим надежным спутником на многие годы. В университете почти у всех моих однокашников тоже были перьевые авторучки: в те годы отечественные шарики писали туго, и угнаться в конспекте за лектором можно было только пером. Нередко мы сообща промывали наши авторучки и заправляли их свежими чернилами. Вот тогда-то и подметили мы один любопытный эффект, подтолкнувший нас — будущих астрофизиков — к постановке специального эксперимента. О нем я и хочу вам рассказать.

Эволюция чернильной капли

Когда капля чернил падает на твердую поверхность, например на лист тетради, то известно, чтó получается — клякса. А что будет, если чернильная капля упадет на поверхность жидкости? Тут все зависит от плотности жидкости и от скорости капли. Если жидкость плотная (например, раствор поваренной соли) или капля падает с большой высоты и ударяется о поверхность жидкости с большой скоростью, то она разбивается на части и глубоко в жидкость не проникает. Но если плотность жидкости немного меньше, чем у чернил, и капля падает с высоты в несколько сантиметров, то с ней происходят удивительные превращения.

Давайте сделаем эксперимент; для него потребуется стеклянная банка объемом не менее 2—3 литров (а еще лучше небольшой аквариум) и перьевая авторучка (или пипетка). Налейте полную банку воды, поставьте ее на удобное для наблюдений место и не трогайте в течение получаса. Это выжидание необходимо для того, чтобы вода в банке успокоилась, чтобы затихли остаточные слабые и невидимые глазу движения жидкости. Затем начнем опыт.

Двигая поршень авторучки (или нажимая на пипетку), добейтесь того, чтобы на кончике пера повисла капля чернил (рис. 1). Теперь можно аккуратно уронить эту каплю на поверхность воды, но опыт будет еще интереснее, если вы осторожно поднесете каплю к самой поверхности и коснетесь ее. Капля будет моментально втянута в воду и начнет с большой скоростью двигаться вниз. Эту скорость капля приобрела под действием взаимного притяжения молекул жидкости. Возникающие при этом силы физики называют силами поверхност-

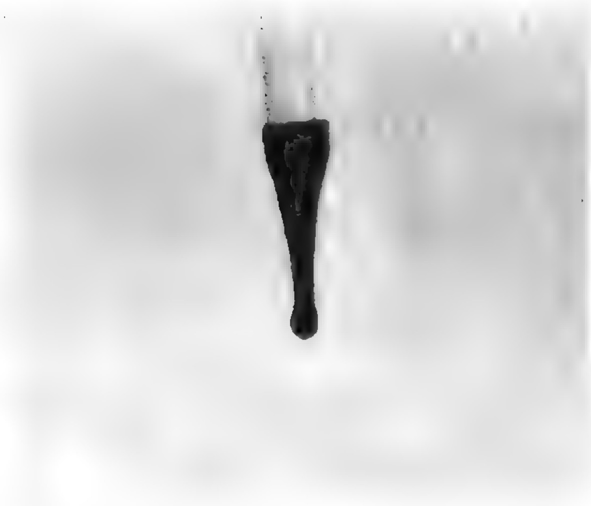


Рис. 1.

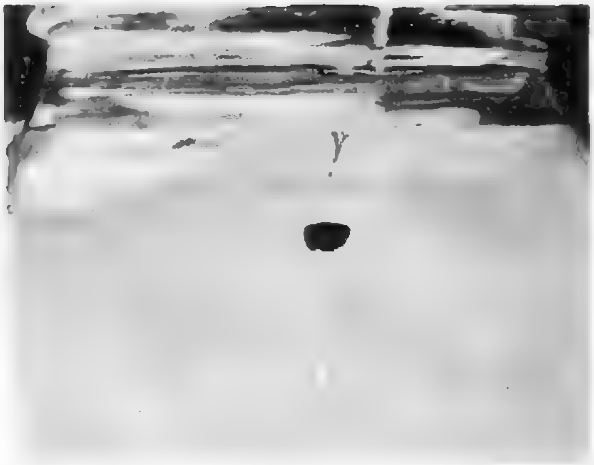


Рис. 2.

ного натяжения потому, что они всегда стремятся уменьшить свободную поверхность жидкости, втягивая ее внутрь и выравнивая любую неровность на ней.

Кое-кто мог бы мне возразить, что капля и без всякой силы поверхностного натяжения будет погружаться в воду. Конечно, под действием тяготения капля устремляется вниз. Но расчеты показывают, что силы поверхностного натяжения втягивают каплю в воду значительно энергичнее, чем это делает сила тяжести. Да вы в этом и сами только что убедились: капля висела на кончике пера, удерживаемая все теми же молекулярными силами.

Итак, сначала чернильная капля с большой скоростью погружается в воду, но затем движение ее замедляется. Виноваты в этом архимедова сила, почти уравновешивающая силу тяжести, и сила трения между каплей и неподвижной водой. Поскольку сила трения действует лишь на внешнюю поверхность капли, то, пройдя несколько сантиметров, капля превращается... во вращающееся кольцо (рис. 2). Механизм образования вихревого кольца довольно прост: боковая поверхность капли тормозится о неподвижную воду и начинает отставать от внутренней части. Место провалившейся серединки занимает чистая вода — вот и готов бублик. Конечно, в деталях этот процесс не так-то прост, и если рассмотреть строение кольца подробно, то можно обнаружить чередующиеся слои чернил и воды, но эти тонкости нас сейчас не интересуют. Главное, что вихревое кольцо родилось и под действием небольшой разницы в плотности чернил и воды оно медленно движется вниз.

Кольцо недолго остается идеально круглым: его вращение замедляется и на нем появляются вздутия и впадины. Физики называют это явление неустойчивостью Рэлея — Тейлора. Суть его проста. Слой тяжелой жидкости (чернила), лежащий на слое более легкой жидкости (вода), вообще говоря, может пребывать в равновесии, но равновесие это будет неустойчивым. Стоит поверхности раздела жидкостей немного искривиться, как тяжелая жидкость устремится во впадины, а легкая начнет всплывать, усиливая вздутия. Это совершенно естественно: жидкости стремятся занять положение устойчивого равновесия, когда легкая находится наверху, а тяжелая — внизу. В нашем случае на кольце возникает 2—3 впадины, в которые стекают чернила и, прорывая в этих местах кольцо, начинают струйками двигаться вниз, ко дну сосуда (рис. 3).

Движение струи в неподвижной жидкости во многом напоминает движение отдельной капли: под действием вязких сил на конце струи опять-таки образуется вихревое кольцо, которое через несколько секунд под действием рэлей-тейлоровской не-

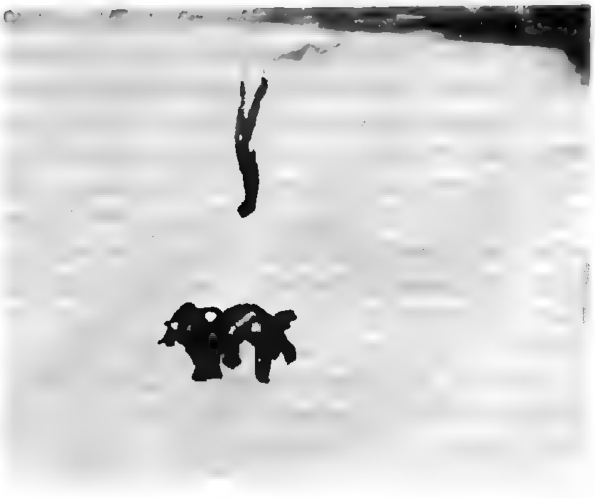


Рис. 3.

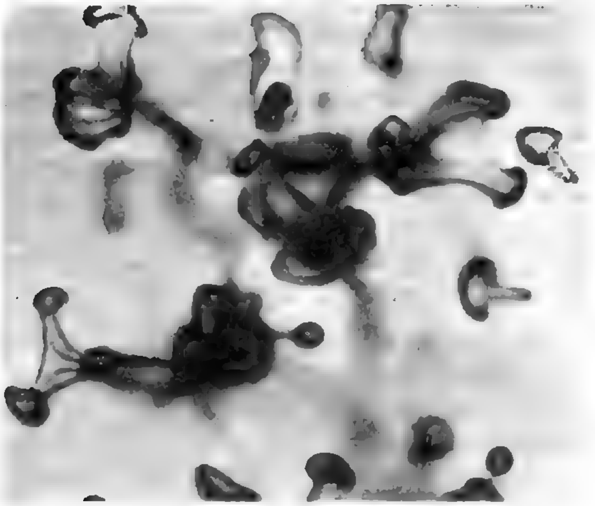


Рис. 4.

устойчивости само породит 2—3 струи (рис. 4). Такой процесс «почкования» повторяется несколько раз, пока чернила не достигнут дна банки, оставляя за собой голубой след. Кто бы мог подумать, что упавшая в воду одна-единственная капля чернил претерпевает такую удивительную метаморфозу. Еще несколько минут вы сможете любоваться ветвистым «деревом», растущим от поверхности воды вниз и имеющим на конце каждой ветви крохотное чернильное колечко (рис. 5).

Довольно легко можно зафиксировать все этапы эволюции капли с помощью фотоаппарата. Для этого поместите позади сосуда чистый лист белой бумаги и осветите сосуд сбоку с помощью настольной лампы. Важно, чтобы наружная поверхность сосуда была чистой, а также чтобы на внутренней поверхности не было пузырьков воздуха. Если вы используете банку, то от пузырьков легко освободиться: возьмите банку за горлышко и резко поверните ее на пол-оборота (вокруг вертикальной оси). Затем подождите минут пять, чтобы вода успокоилась, и начинайте опыт. Движение колец в воде происходит достаточно медленно, так что при фотографировании можно делать сравнительно длительные экспозиции, вплоть до 1/15—1/30 с. Но аппарат должен стоять на твердой подставке, и для спуска затвора вы должны пользоваться тросиком.

Итак, простая капля чернил продемонстрировала нам сразу три физических явления: поверхностное натяжение жидкости, образование вихревых колец и неустойчивость тяжелой жидкости над легкой, описанную в 1900 году английским физиком Дж. Рэлеем и более детально изученную в 1950 году другим английским физиком Дж. Тейлором. А где еще в природе встречаются эти физические явления?

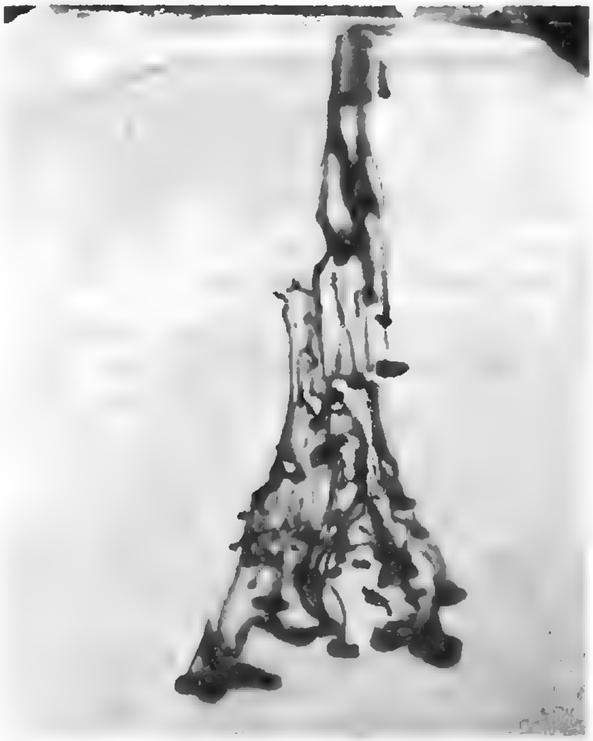


Рис. 5.

Примеры земные...

Поверхностное натяжение лучше всего проявляется в процессах и в объектах малого масштаба. Падающие из крана капли воды становятся круглыми под действием сил поверхностного натяжения. Эти же силы поддерживают рябь на поверхности воды и поднимают горячий воск или стеарин по фитилю свечи.

Вихревые кольца мы часто видим вылетающими изо рта курильщика или из выхлопной трубы автомобиля. Иногда это явление происходит и в больших масштабах: например, гигантское вихревое кольцо возникает после мощного взрыва в атмосфере. Вспомните фотографии печально известного «атомного гриба»: его «шляпка» — это гигантское вихревое кольцо, возникшее из-за быстрого подъема струи горячего воздуха. Важное свойство вихревого кольца — его устойчивость, прочность. Кольцо газа или жидкости не разрушается, пролетая такое расстояние, на котором обычная струя непременно разрушилась бы и перемешалась с окружающим веществом. Эту особенность вихревых колец используют в специальных дымовых трубах, которые «выстреливают» кольца отработанных газов высоко в атмосферу.

Неустойчивость Рэлея — Тейлора также нередко встречается в природе и приводит подчас к самым неожиданным последствиям.

И примеры космические

Астрономы неплохо представляют себе, как новорожденные звезды формируются в плотных облаках межзвездного газа*). А вот как формируются сами эти облака, не совсем ясно. Одной из причин их образования в разреженной межзвездной среде может быть как раз неустойчивость Рэлея — Тейлора. В спиральных рукавах Галактики, там, где сосредоточен межзвездный газ, существует магнитное поле с явно выраженным основным направлением, параллельным галактической плоскости. Горячий ионизованный газ, т. е. плазма, как известно, не может двигаться поперек силовых линий магнитного поля — оно сильно искривляет траектории заряженных частиц, отклоняет их в сторону. Поэтому иногда возникает ситуация, когда газ лежит на своего рода «магнитной подушке» и не может опуститься к плоскости Галактики. Магнитное поле упруго, но, по существу, невесомо: оно играет роль легкой жидкости. А находящийся над ним газ — роль тяжелой. Значит, их равновесие неустойчиво: стоит магнитному полю немного прогнуться в одном месте, как туда устремляется газ, который своим весом продавливает поле еще сильнее. В конце концов весь газ скапливается в образовавшейся магнитной «яме» и, уплотняясь, превращается в самостоятельное облако — будущий «инкубатор» для новорожденных звезд.

Нужно заметить, что различные неустойчивости играют большую конструктивную роль в природе (исследованием таких процессов, в частности, занимается теория катастроф). Именно неустойчивости, усиливая небольшие начальные флуктуации параметров системы, приводят к рождению качественно новых объектов и явлений. В нашем опыте с чернильной каплей неустойчивость Рэлея — Тейлора приводила к рождению струек чернил и к размножению колечек. В Галактике эта же неустойчивость приводит к рождению газовых облаков, а неустойчивость другого типа — гравитационная неустойчивость Дж. Джинса (тоже, между прочим, английского физика, изучившего ее в 1902 году) — приводит к рождению звезд в этих облаках.

Сразу после рождения звезды в облаке она начинает интенсивно разогревать окружающий газ. Давление в нем повышается, и, расширяясь, он, как поршень, расталкивает и уплотняет окружающий звезду холодный газ. Узнаете ситуацию —

---

*) См., например, статью «Формула рождения звезд» в «Кванте» № 11 за 1991 год.

разреженное вещество подпирает более плотное. Разумеется, рэлей-тейлоровская неустойчивость тут как тут: холодный газ дробится на куски и проваливается внутрь расширяющегося горячего «пузыря», надолго оставаясь там в виде плотных темных облачков. Самые мелкие из них со временем испарятся, но наиболее массивные могут сжаться и превратиться в звезды.

Не только рождение, но и смерть звезды может сопровождаться неустойчивостью Рэлея — Тейлора. Как известно, в конце жизни массивные звезды взрываются — это явление называют вспышкой сверхновой. В момент взрыва звезда с огромной скоростью сбрасывает свои наружные слои, которые, расширяясь и сгребая окружающий звезду межзвездный газ, формируют оболочку сверхновой. В чем-то это явление напоминает описанное выше расширение горячего «пузыря» вокруг молодой звезды, но имеет значительно больший масштаб и энергию. За счет знакомой нам неустойчивости уплотненный в оболочке газ проваливается отдельными потоками в горячий «пузырь», возникают мощные турбулентные движения, которые усиливают существующее в межзвездном газе магнитное поле. А это приводит к ускорению свободных электронов плазмы и к рождению мощного синхротронного излучения — самого характерного признака оболочек сверхновых.

Любопытно, что даже на этом не оканчивается связь рэлей-тейлоровской неустойчивости с эволюцией звезд. После вспышки сверхновой и сброса оболочки на месте массивной звезды иногда остается ее сильно сжавшееся ядро — нейтронная звезда. При сжатии существенно усиливается ее магнитное поле. Если такая нейтронная звезда вращается в паре с нормальной звездой, то своим притяжением она может захватывать часть вещества, постоянно теряемого этой звездой (ему дано красивое название «звездный ветер»). Но захваченное вещество не сразу падает на поверхность нейтронной звезды, а останавливается вблизи нее давлением магнитного поля. Пока газа немного, он устойчиво лежит на магнитной подушке, но с увеличением массы газа такое равновесие нарушается: под действием рэлей-тейлоровской неустойчивости газ пробивает брешь в магнитном поле и прорывается вниз к поверхности звезды. Ударяясь о поверхность нейтронной звезды, газовая струя разогревается до температуры в миллионы градусов и на некоторое время становится источником мощнейшего рентгеновского излучения. Такие вспыхивающие время от времени рентгеновские источники хорошо знакомы астрофизикам.

Вот, оказывается, с какими сложными космическими явлениями состоит в родстве поведение капли чернил в банке с водой — простейший, казалось бы, процесс, с которым каждый желающий может познакомиться, проделав нехитрый опыт.

Нам пишут

Наш читатель В. Грачёв из Новокузнецка предлагает простой метод решения некоторых задач механики, где рассматривается равноускоренное движение тел. Вот его рассуждения.

Рассмотрим известную задачу:

Свободно падающее тело за последнюю секунду своего движения пролетело 35 м. Сколько времени падало тело? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

Из того, что ускорение движения равно 10 м/с^2, следует, что каждую секунду скорость тела увеличивается на 10 м/с. Значит, за каждую предыдущую секунду тело пролетает на 10 м меньше, чем за последующую.

На основании этого можно утверждать, что в нашем случае тело за предпоследнюю секунду своего движения пролетело 35 м — 10 м=25 м, секундой раньше оно опустилось на 25 м — 10 м=15 м, еще секундой раньше — на 15 м — 10 м=5 м. Таким образом, легко видеть, что падение нашего тела продолжалось 4 секунды. Это и есть ответ задачи.

Такие же рассуждения справедливы и в других подобных ситуациях.

ТОПОЛОГИЯ

Я. СТЮАРТ

Тополог — это тот,
кто набивает чучела?
Из разговоров

Одним из самых неожиданных явлений в развитии математики XX в. стал головокружительный взлет науки, известной под названием *топология*. Желая пояснить, что такое топология, иногда говорят, что это «геометрия на резиновой поверхности». Это малопонятное и туманное описание позволяет тем не менее уловить суть предмета. *Топология изучает те свойства геометрических объектов, которые сохраняются при непрерывных преобразованиях.* Непрерывные преобразования характеризуются тем, что точки, расположенные «близко одна к другой» до преобразования, остаются такими и после того, как преобразование закончено. При топологических преобразованиях разрешается растягивать и изгибать, но не разрешается рвать и ломать. (Однако, с одной оговоркой: когда речь идет о преобразованиях, нас не интересует, что происходит в процессе этих преобразований, важны только начальное положение и конечный результат. Поэтому допускаются, скажем, разрезы по каким-то линиям, которые потом склеиваются по тем же линиям. Например, если шнурок завязан узлом и его концы соединены, можно разрезать его где-то, развязать узел и снова соединить на месте разреза. В этом смысле выражение «геометрия на резиновой поверхности» не слишком удачно.) Можно было бы дать строгое определение «непрерывности», однако пока мы ограничимся интуитивным представлением о ней.

Какого рода свойства являются топологическими? Ясно, что не те, которые изучаются в обычной евклидовой геометрии. Прямолинейность не есть топологическое свойство, потому что прямую линию можно изогнуть, и она станет волнистой. Треугольность — тоже не является топологическим свойством, ибо треугольник можно непрерывно деформировать в окружность (рисунок 1).

Итак, в топологии треугольник и окружность — одно и то же. Длины отрезков, величины углов, площади — все эти понятия изменяются при непрерывных преобразованиях, и о них следует забыть. Очень немногие привычные понятия геометрии годятся для топологии, поэтому приходится искать новые. Этим топология трудна для начинающего, пока он не постигнет сути дела.

Образцом топологического свойства объекта служит наличие дырки у бублика (причем довольно тонкая сторона этого дела — тот факт, что дырка *не является* частью бублика). Какую бы непрерывную деформацию ни претерпел бублик, дырка останется. Другое топологическое свойство — наличие *края*. Поверхность сферы не имеет края, а пустая полусфера имеет, и никакое непрерывное преобразование не в состоянии это изменить.

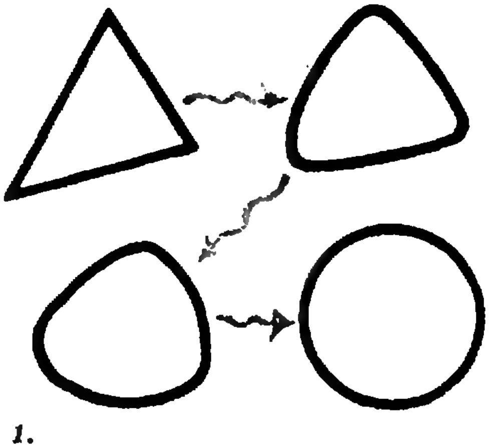


Рис. 1.

Из книги: Стюарт Я. Концепции современной математики (Минск: Вышэйшая школа, 1980).

Существует очень много различных непрерывных преобразований, поэтому топологам что бублик, что какая-нибудь другая штука с одной дыркой — все едино (в этом мы убедимся в следующем разделе). У тополога меньше объектов изучения, и в этом смысле предмет изучения в топологии *проще*, чем в большинстве других разделов математики (хотя сама топология как предмет отнюдь не проще других). В этом одна из причин того, что топология превратилась в мощный инструмент математики в целом: ее простота и общность обеспечили ей широкий круг применений.

Топологическая эквивалентность

Основные объекты изучения в топологии называются *топологическими пространствами*. Интуитивно их можно представлять себе как геометрические фигуры. Математически это — *множества* (иногда — подмножества евклидова пространства), наделенные дополнительной структурой под названием *топология*, которая позволяет формализовать понятие непрерывности. Поверхность сферы, бублика (правильнее — *тора*) или двойного тора — это примеры топологических пространств (рисунок 2).

Два топологических пространства *топологически эквивалентны*, если можно непрерывным образом перейти от одного из них к другому и непрерывным же образом вернуться обратно. Часто говорят, что тополог не отличает бублика от кофейной чашки. Это как раз и есть пример топологической эквивалентности (рисунок 3).

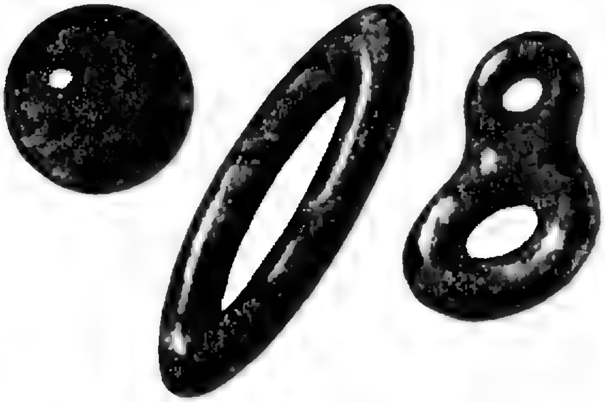


Рис. 2.

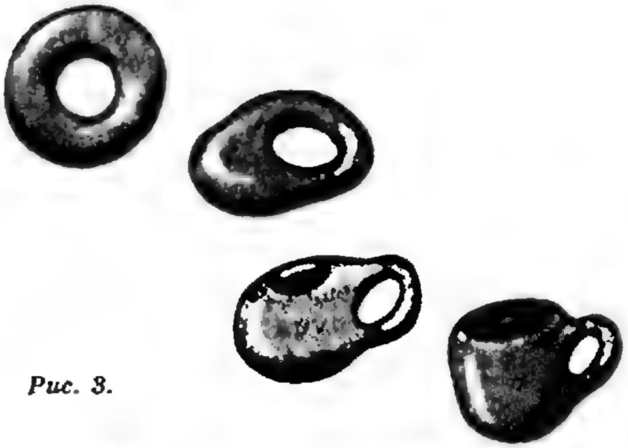


Рис. 3.

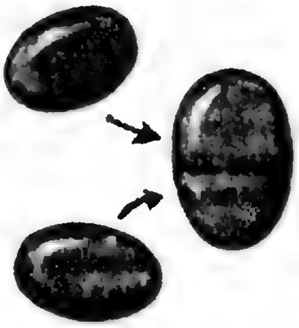


Рис. 4.

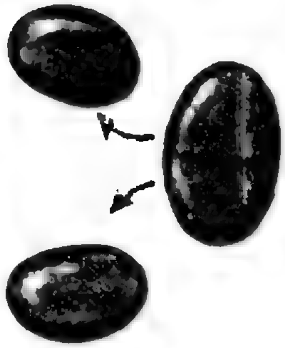


Рис. 5.

Нам приходится вводить требование непрерывности как прямого отображения, так и обратного к нему, по следующей причине. Возьмем два куска глины и слепим их вместе. Такое преобразование непрерывно, поскольку близкие друг к другу точки останутся таковыми (рисунок 4). Однако при обратном преобразовании один кусок распадается на два (рисунок 5), и, следовательно, близкие точки по разные стороны от линии раздела окажутся далеко друг от друга, т. е. обратное преобразование не будет непрерывным. Такие преобразования нам не подходят.

В качестве упражнения попытайтесь разбить топологические пространства, изображенные на рисунке 6, на классы топологически эквивалентных.

Некоторые необычные пространства

Если бы все топологические пространства были такими удобными, как сфе-

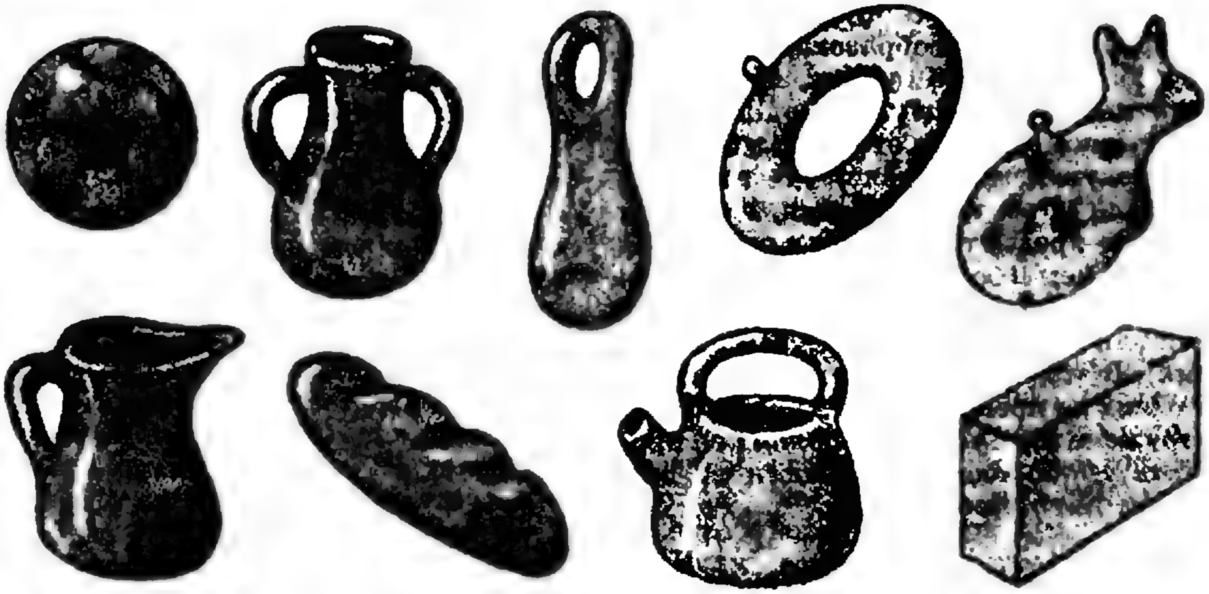


Рис. 6.

ра или тор, вряд ли стоило бы заниматься топологией. Несколько более экзотических примеров, возможно, помогут разбудить вашу интуицию.

Вы, наверное, слышали о *ленте* (или *листе*) *Мёбиуса**), которую можно получить из бумажной полоски, склеив ее края после поворота на 180° (рисунок 7).

Лента Мёбиуса топологически не то же самое, что цилиндрическая лента, склеенная из той же полоски. Она имеет только один край (посчитайте!). Поскольку количество краев — топологическое свойство, а цилиндрическая лента имеет два края, эти две ленты топологически неэквивалентны.

Известно еще одно свойство ленты Мёбиуса — то, что она имеет лишь одну сторону. Цилиндрическую ленту можно раскрасить двумя цветами — одну сторону красным, другую синим. Проделать то же самое с лентой Мёбиуса не удастся.

К сожалению, свойство односторонности трудно описать математически строго и в то же время достаточно наглядно. Ведь наша лента не имеет толщины, и каждая ее точка находится «на» обеих сторонах, подобно тому как каждая точка плоскости лежит «на» обеих ее сторонах. В топологии мы должны рассматривать эту ленту как некое пространство, а не подмножество евклидова пространства, и тогда не совсем очевидно, является ли количество сторон топологическим свойством.

Чтобы пояснить эту мысль, позвольте мне задать вопрос: сколько сторон у трехмерного евклидова пространства?

Думаю, большинство ответит: «ни одной». Ведь наше пространство продолжается до бесконечности в любом направлении, какие же у него могут быть стороны?

Но представьте себе, что вы плоское существо, живущее на двумерной плоскости и не имеющее больше ни о чем понятия. Сколько сторон у вашего «пространства»? Если вы раньше ответили «ни одной», вы непременно должны повторить тот же ответ и теперь: ведь плоскость тоже продолжается и продолжается во всех направлениях.

Иначе говоря, количество сторон зависит от того, рассматривать ли плоскость саму по себе или как часть трехмерного пространства. То же самое относится и к трехмерному пространству: если в качестве четвертого измерения ввести время, то окажется, что наше пространство имеет две стороны — прошлое и будущее.

Надеюсь, теперь понятно, насколько

---

*) О листе Мёбиуса «Квант» писал неоднократно (см., например, № 1 за 1990 год, а также «Калейдоскоп» в № 11 за 1991 год). *(Прим. ред.)*

трудно даже объяснить, что понимается под числом сторон, не говоря уж о том, чтобы понять, топологическое это свойство или нет.

Однако существует все-таки одно явление, которое могут наблюдать воображаемые жители ленты Мёбиуса, не выходя за пределы своего «пространства», и которое позволяет дать математическое описание «односторонности». Предположим, что эти создания имеют две руки, причем их большие пальцы направлены в разные стороны. Тогда им доступны понятия «правый» и «левый». Кроме того, допустим, что они носят варежки (рисунок 8).

Однажды просыпается такое существо и видит, что все его правые варежки куда-то подевались и остались одни левые. Проявив находчивость, оно берет одну варежку и переносит ее вдоль ленты, как показано на рисунке 9.

К большому нашему (но не его!) удивлению, левая варежка превратилась в правую. Правда, при этом и левая рука воображаемого существа превратилась в правую, а правая — в левую, но зато оно получило годную пару варежек.

Можете сами убедиться в этом, склеив ленту Мёбиуса из бумаги (и тогда, чтобы увидеть, что делается «на другой стороне» бумаги, придется смотреть на свет *сквозь* нее), а лучше из прозрачной пленки. Вместо этого можете воспользоваться своими двумя руками и воображаемой лентой Мёбиуса. Поскольку руки не двумерны, следите только за их *очертаниями.* Держите руки перед собой ладонями наружу, пальцы вверх, большие пальцы прижаты друг к другу. Левую руку оставьте на месте, а правую двигайте вдоль воображаемой ленты Мёбиуса следующим образом. Поднимите правый локоть, чтобы ладонь наклонилась, затем поворачивайте ее вниз от себя, поднимайте локоть еще выше, пока рука не окажется в положении тыльной стороной к вам, пальцами вниз. Теперь сдвиньте ее влево на уровень левой руки и отведите от себя большой палец, чтобы ладонь стала к вам ребром. В идеале следовало бы поворачивать и дальше правую руку, но анатомия не позволяет, поэтому поверните левую руку большим пальцем к себе и соедините ладони ребром к ребру, левая вниз, правая вверх.

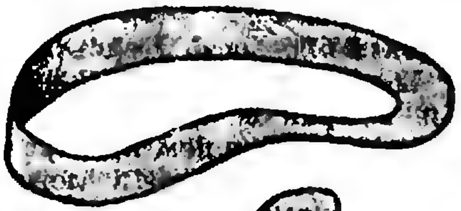


Рис. 7.

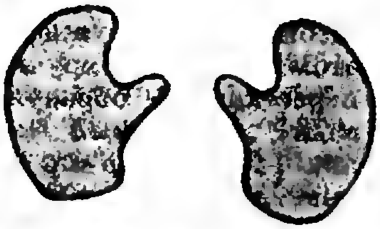


Рис. 8.

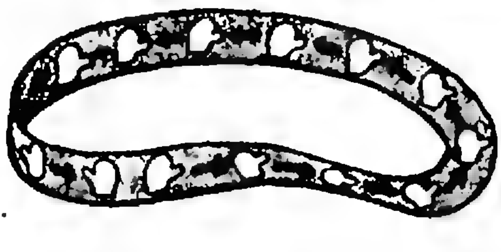


Рис. 9.

Вот это неудобное положение и получается после того, как ваша правая рука опишет ленту Мёбиуса (а левая немного продвинется ей навстречу). Чтобы стало полегче, держите руки в том же положении одну относительно другой, но передвиньте правую немного вправо, а левую за ней следом. Теперь нужно перевернуть правую руку снизу вверх на поверхности ленты Мёбиуса. Для этого опустите правый локоть, продолжая держать руку ладонью наружу. Теперь обе кисти направлены вверх, левая ладонью внутрь, правая — наружу. Сложите их вместе. Вы убедились в том, как точно они совпали. Если говорить только об очертаниях, то ваша правая рука, описав ленту Мёбиуса, стала левой (а заодно вы получили превосходный пример стиля рассуждений, известного у математиков под названием «размахивание руками»).

Жители двустороннего мира (к которым относимся и мы с вами, согласно современным представлениям науки) не смогли бы проделать этот фо-

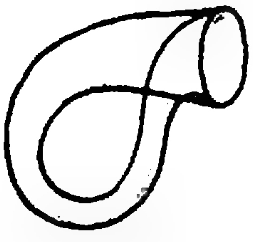


Рис. 10.

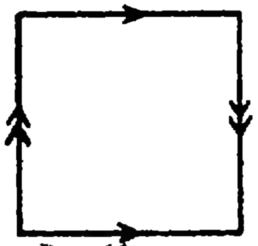


Рис. 11.

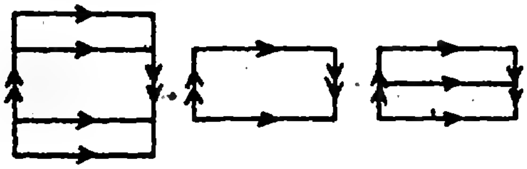


Рис. 12.

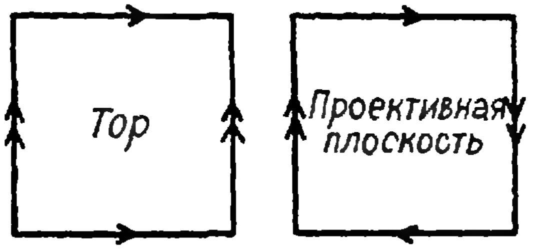


Рис. 13.

кус с варежками: для них правая останется правой, а левая — левой. Для существа с ленты Мёбиуса понятие правого и левого имеет смысл лишь до тех пор, пока предметы не передвигаются, и невозможно дать определение правого и левого, которое годилось бы для всей поверхности в целом. В таком случае говорят, что эта поверхность *неориентируема.* А пространство вроде нашего, в котором можно дать глобальное определение правого и левого, называется *ориентируемым.* Ориентируемость соответствует двусторонности, а неориентируемость — односторонности, и оба этих свойства являются внутренними топологическими свойствами, не зависящими ни от какого внешнего пространства.

Если соединить края двух лент Мёбиуса, получится поверхность, называемая *бутылкой Клейна* (рисунок 10). У нее нет краев, и она неориентируема, потому что неориентируемы ленты Мёбиуса. Кроме того, ее нельзя вложить в трехмерное пространство так, чтобы не было самопересечений.

Бутылку Клейна можно описать по-другому: представьте себе квадрат, стороны которого склеены так, как показывают стрелки на рисунке 11. (Сначала верхняя сторона склеивается с нижней и получается цилиндр. Затем, чтобы правильно склеить края цилиндра, его надо согнуть и протолкнуть сквозь самого себя.) При помощи этой же диаграммы можно убедиться в том, что бутылка Клейна действительно получается из двух лент Мёбиуса: разрежем ее, как показано на рисунке 12.

Иногда можно услышать какие-то утверждения о внутренней и наружной стороне бутылки Клейна. Они бессмысленны: в трехмерном пространстве ее построить нельзя, а в четырехмерном, где ее можно сделать без самопересечений, говорить о внутренности бутылки Клейна — все равно, что говорить о внутренности окружности в трехмерном пространстве,— можно в нее войти и из нее выйти без всяких препятствий.

Склеиванием сторон квадрата можно получить еще два интересных пространства: тор и *проективную плоскость* (называемую так из-за ее связи с проективной геометрией) (рис. 13).

О торе мы уже говорили — это ориентируемая поверхность. Проективная плоскость, подобно бутылке Клейна, не имеет края, неориентируема и не допускает вложения в трехмерное пространство.

Проективная плоскость представляет собой ленту Мёбиуса, приклеенную край в край к кругу. Чтобы построить ее в трехмерном пространстве, надо превратить край ленты Мёбиуса в окружность. Лента при этом будет перекручиваться и самопересекаться, образуя так называемый *скрещенный колпак* (рисунок 14). Закрыв его отверстие, получим проективную плоскость (рисунок 15).

Наконец, познакомимся еще с одним занятным пространством — *рогатой сферой Александера* (рисунок 16)*). Оно строится так. Вытя-

---

*) О ней вы можете прочитать в «Кванте» № 6 за 1990 год. (*Прим. ред.*)

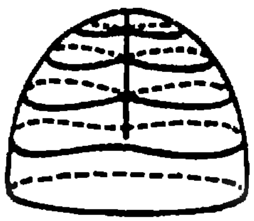


Рис. 14.

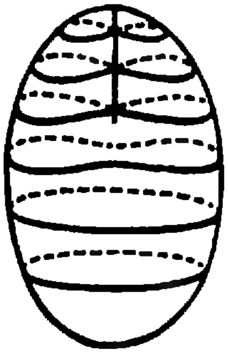


Рис. 15.

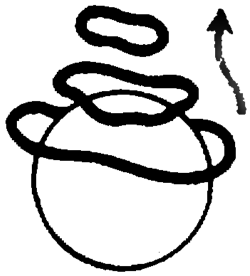


Рис. 17.

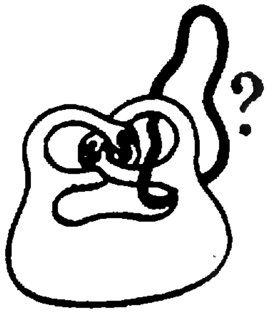


Рис. 18.

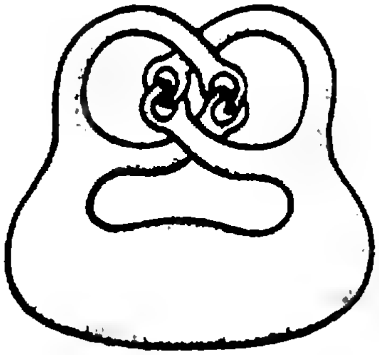


Рис. 16.

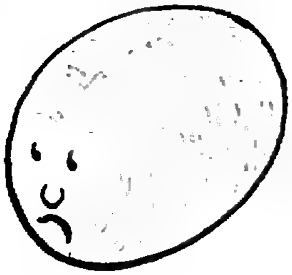


Рис. 19.

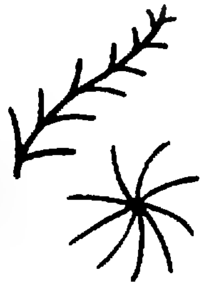


Рис. 20.

нем из сферы два рога, расщепим надвое их концы и переплетем их между собой, расщепим надвое новые концы и снова переплетем их, и так далее до бесконечности. Хотите — верьте, хотите — нет, но то, что получается, топологически эквивалентно сфере: способ вытягивания рогов можно задать при помощи подходящей функции, которая определяет топологическую эквивалентность. Однако наружное пространство рогатой сферы уже не будет топологически эквивалентно пространству вне обычной сферы.

В самом деле, с обычной сферы соскакивает любая надетая на нее петля (рисунок 17), а на рогатой сфере она может запутаться в рогах (рисунок 18). И здесь снова заботы причиняет не сама поверхность, а окружающее ее пространство.

Теорема о волосатом шаре

Мы немного поговорили о понятиях, которые вводятся в топологии, и объектах, которые в ней изучаются. Теперь приведем пример топологической теоремы.

Если внимательно посмотреть, как растет шерсть у собаки, можно обнаружить, что вдоль спины она разделяется «на пробор», а другой «пробор» идет вдоль живота. С точки зрения топологии собака — это шар (если считать, что пасть у нее закрыта, и пренебречь внутренними органами); чтобы в этом убедиться, достаточно «втянуть» ей ноги и немного ее «раздуть» (рисунок 19).

Можно задаться таким вопросом: удастся ли так «причесать» собаку, чтобы не стало «проборов». В результате получился бы волосатый шар, не имеющий ни «проборов», ни «макушек», изображенных на рисунке 20.

Этот вопрос относится к топологии, ибо при любой непрерывной деформации такого шара гладкая шерсть останется гладкой, а «пробор» останется «пробором». Топологические методы позволяют установить (хотя это нелегко), что гладко причесать шар невозможно. (В правильной формулировке задачи говорится о «векторных

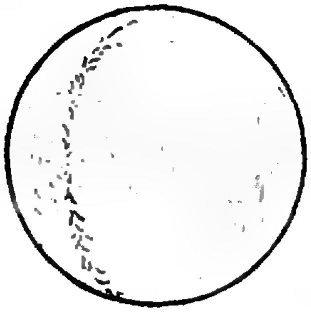


Рис. 21.

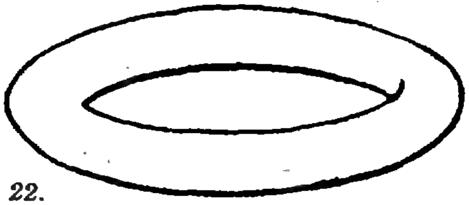


Рис. 22.

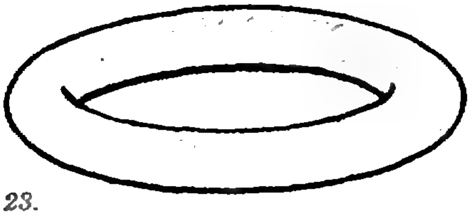


Рис. 23.

полях» на сфере, но этому вполне соответствует интуитивное представление о волосатом шаре.)

Лучшее, чего можно добиться,— причесать волосы так, что останется лишь одна «макушка» — точка, в которой нарушается гладкость (рис. 21).

Не будем углубляться здесь в доказательство этой теоремы, однако заметим, что ее значение выходит за рамки причудливых применений к воображаемым гладким собакам.

Поверхность Земли представляет собой сферу. Если для какого-то момента времени изобразить на сфере направления воздушных потоков в атмосфере Земли, т. е. направления всех ветров, дующих над поверхностью Земли, то получится своего рода «прическа» на этой сфере, где роль волос будут играть линии, изображающие потоки. Наша теорема утверждает, что не существует гладкой системы ветров (за исключением случая полного безветрия, что, однако, невозможно, но по другим причинам), т. е. где-то всегда есть циклон.

Таким образом, зная только *форму* Земли, мы уже можем делать заключения о поведении ветров без всяких сведений о том, куда они дуют на самом деле.

А вот на тороидальной планете возможен постоянный ветер без циклонов, поскольку волосатый тор можно причесать требуемым образом (рисунок 22).

Дальнейшее изучение, основанное уже на более подробных сведениях о ветрах, показывает, что гладкий поток скорее будет обвиваться вокруг тора, как на рисунке 23.

Известны и многие другие приложения теоремы о волосатом шаре. Например, в алгебре она применяется для доказательства теоремы о том, что каждое уравнение, левая часть которого — многочлен, имеет корни в поле комплексных чисел (так называемая «основная теорема алгебры»).

Наша обложка

(Начало см. на с. 7)

уникален. Если взять два одинаковых прямоугольных треугольника с целыми сторонами (их называют *пифагоровыми*) и сложить их гипотенузами так, чтобы получился четырехугольник, симметричный относительно одной из его диагоналей (он называется *дельтоидом*), то длины радиусов и отрезков, соответствующих рассмотренным, окажутся рациональными числами. Теперь найдем наименьшее общее кратное знаменателей и увеличим стороны четырехугольника в это число раз. Тогда в полученном четырехугольнике длины всех рассматриваемых радиусов и отрезков окажутся целыми числами. Центры восьми окружностей вновь будут лежать на окружности с центром в точке касания двух из них. Попробуйте доказать все эти утверждения самостоятельно.

Известно, что все пифагоровы треугольники со взаимно простыми длинами сторон описываются формулой $a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$, где m и n — взаимно простые числа различной четности. Если увеличить стороны этого треугольника в $2c(a+b)$ раз, то у дельтоида, составленного из двух таких треугольников, длины всех указанных радиусов и отрезков будут целыми числами.

КОРАБЕЛЬНЫЕ ПУШКИ И ВОЛНЫ В УПРУГИХ СТЕРЖНЯХ

Кандидат технических наук
Г. ЛИТИНСКИЙ

В 1914 году в Петербурге при полигонных испытаниях пробной установки двенадцатидюймовых корабельных орудий было обнаружено, что давление, развиваемое в их стволах, составляет 450 атмосфер, вместо ожидаемых 250 атмосфер, для которых были выполнены расчеты прочности. Казалось, что все построенные орудия придется забраковать из-за их несоответствия неожиданно большим нагрузкам. Замена орудий обошлась бы в 2,5 млн. рублей, и, кроме того, корабли не были бы готовы в срок.

Экспертный анализ ситуации был поручен А. Н. Крылову*), который установил, что прибор, регистрирующий давление в стволах,— индикатор Виккерса — дает сильно искаженные показания, а истинное максимальное давление примерно вдвое меньше записанного. Из заключения Крылова следовало, что замена орудий совершенно не нужна.

Исследование работы индикатора Виккерса, проведенное Крыловым, имеет не только практическое, но и большое принципиальное значение.

Индикатор Виккерса представляет собой вариант пружинного динамометра. Схема индикатора приведена на рисунке 1. Под действием давления поршень перемещается, деформируя при этом пружину. По перемещению поршня судят об изменении давления. Для снятия показаний индикатора служит шток, соединяющий поршень индикатора с регистрирующим устройством (оно на рисунке не показано).

Простое объяснение работы индикатора можно получить, предположив, что вся масса подвижной части индикатора сосредоточена в поршне, а пружина индикатора идеальная — абсолютно упругая и невесомая.

Статическая деформация пружины (т. е. смещение поршня при медленном приложении силы F) равна

$$x_0 = \frac{F}{k},$$

где k — жесткость пружины. Максимальную же деформацию пружины при мгновенном приложении силы (поршень разгонится, проскочит положение равновесия, потом остановится) можно найти, приравняв работу силы F к изменению потенциальной энергии пружины:

$$Fx_м = \frac{kx_м^2}{2}, \quad x_м = \frac{2F}{k}.$$

Получаем, что максимальная динамическая деформация пружины в два

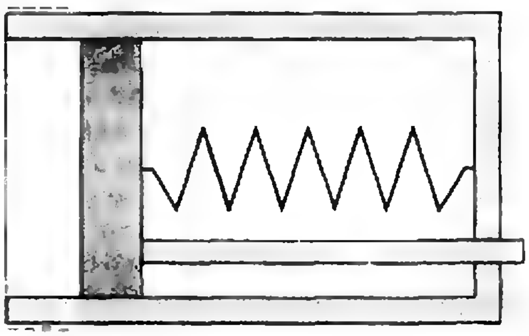


Рис. 1. Схема индикатора Виккерса.

---

*) Алексей Николаевич Крылов (1863—1945) — механик, математик, кораблестроитель и историк науки. Помимо множества специальных трудов, перу А. Н. Крылова принадлежат перевод на русский язык работы И. Ньютона «Математические начала натуральной философии» и очень интересная книга мемуаров «Мои воспоминания».

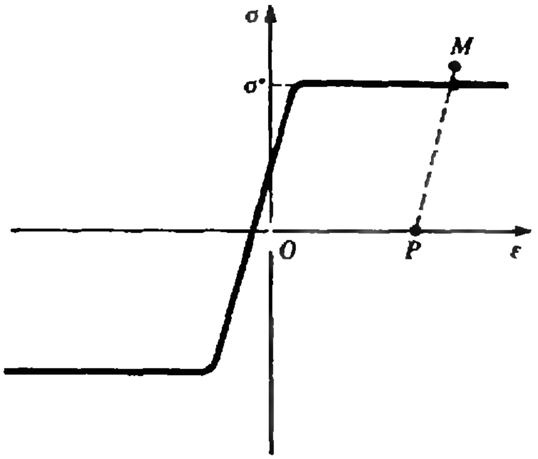


Рис. 2. График зависимости между напряжением и деформацией. При напряжениях $|\sigma|<\sigma^*$ *металл упруг, при бо́льших напряжениях — пластичен. Если нагрузить образец до напряжения, соответствующего точке M, и после этого уменьшать напряжения до нуля, деформации будут изменяться так, как показано пунктиром. OP соответствует остаточной пластической деформации.*

раза больше статической. А так как время действия газов на индикатор Виккерса мало́, то он фиксирует именно максимальное смещение поршня.

Однако анализ, проведенный Крыловым, показал, что картина явления значительно сложнее. В реальных условиях массой пружины пренебрегать нельзя, и главную роль начинают играть распространяющиеся в пружине упругие волны. Поэтому для того, чтобы разобраться в работе индикатора, надо изучить распространение звуковых волн в упругих стержнях.

Упругие свойства твердых тел

Напомним сначала некоторые понятия, известные из школы.

Пусть имеется стержень с поперечным сечением S, перпендикулярно концам которого приложена сила F, равномерно распределенная по торцам. Отношение

$$\sigma=\frac{F}{S}$$

называется напряжением. Растягивающей силе мы приписываем положительное значение, сжимающей — отрицательное.

Относительной деформацией (в дальнейшем слово «относительная» будем опускать) называется отношение удлинения стержня ΔL к его начальной длине L:

$$\varepsilon=\frac{\Delta L}{L}.$$

В случае, когда длина стержня уменьшается, деформация будет отрицательной.

Деформация называется упругой, если ε зависит только от σ и при снятии напряжения она исчезает. Оказывается, деформация будет упругой до тех пор, пока ε пропорциональна σ (закон Гука):

$$\sigma=E\varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности E в этом соотношении называется модулем Юнга.

Большинство материалов являются упругими лишь при малых деформациях. Сталь, например, упруга только при деформациях, не превышающих десятые доли процента. График зависимости напряжений от деформаций для металлов представлен на рисунке 2.

Возможны и другие отклонения свойств реальных материалов от упругих. Например, бутилкаучук (разновидность синтетического каучука), из которого изготавливают камеры автомобильных шин,— при медленном деформировании он ведет себя как упругое тело, но если уронить шарик, сделанный из него, на пол, то он практически не отскочит — почти вся кинетическая энергия шарика перейдет в тепло.

Противоположный пример — «глупая замазка» — один из видов каучукосодержащей столярной замазки. В руках она ведет себя подобно пластилину, но если уронить шарик, сделанный из нее, на пол, он отскочит почти до первоначальной высоты.

Распространение возмущений в упругих стержнях

Пусть к концу достаточно длинного стержня в момент времени $t=0$ внезапно приложена сила F, которая в дальнейшем остается постоянной. Если сила F не очень велика, то возникающие в стержне деформации будут упругими. В этом случае возмущения будут распространяться в стержне посредством упругих звуковых волн. Обозначим их скорость буквой c. Через промежуток времени t возмущения успевают распространиться лишь на участке стержня AB (рис. 3). Остальная часть стержня еще «не знает», что к точке A приложена сила.

Граница B, отделяющая возмущенную часть стержня от невозмущенной, называется фронтом упругой волны. Справа от фронта возмущений нет, т. е. напряжения, деформации и скорости всех точек равны нулю, как и до приложения силы. Слева от фронта, на участке AB, напряжение в любом сечении равно F/S, деформация всюду равна ε и все точки движутся с одной и той же скоростью v.

Найдем связь между скоростью v и деформацией ε (здесь и далее полагаем $v \ll c$, или $\varepsilon \ll 1$). Точки на фронте волны еще не успели сместиться из своего начального положения, а смещение левого конца равно vt. Значит, деформация участка AB, начальная длина которого равна ct, составляет

$$\varepsilon = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c}.$$

Определим теперь скорость звука c в стержне, исходя из закона сохранения импульса. Импульс участка AB стержня, равный $mv = \varrho(ct)Sv$, приобретается под действием силы F, которая действует в течение времени t:

$$Ft = \varrho ctSv.$$

Подставляя $F = \sigma S = E\varepsilon S$ и $v = \varepsilon c$, найдем выражение для скорости распространения упругих волн:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}}.$$

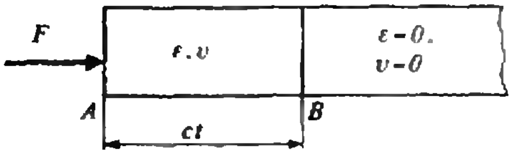


Рис. 3. Распространение упругой волны в стержне.

Приведем значения c для некоторых материалов:

сталь	4900 м/с
алюминий	5100 м/с
медь	3500 м/с
стекло	5200 м/с
резина	40 м/с

Теперь рассмотрим два конкретных примера, после чего перейдем к анализу работы индикатора Виккерса.

Удар упругого стержня о жесткую преграду

Пусть до соударения стержень длиной L имел скорость v (рис. 4, *а*). В момент удара $t=0$ скорость точки A мгновенно изменилась от v до 0. От точки A в момент времени $t=0$ пошла упругая волна.

Перед фронтом волны все точки движутся со скоростью v, напряжения и деформации отсутствуют, как и до удара (рис. 4, *б*). За фронтом упругой волны скорости всех точек одинаковы и равны скорости точки A, т. е. нулю. Деформации во всех сечениях стержня, через которые уже прошла упругая волна, равны v/c; следовательно, напряжение равно Ev/c.

В момент времени $t=L/c$ волна дойдет до конца стержня (рис. 4, *в*). Теперь все точки стержня покоятся. Напряжение во всех сечениях стержня равно Ev/c. Чтобы понять, что будет происходить дальше, представим, что мы теперь мгновенно приложили к точке B сжимающую силу $F_1 = EvS/c$. Напряжения, созданные силой F_1, уравновесят напряжения, «принесенные» упругой волной, и стержень окажется в состоянии равновесия.

Но на самом деле конец B стержня свободен от нагрузки. Что же произойдет, если освободить конец B стержня, находящегося в сжатом состоянии? По стержню справа налево начнет распространяться упругая волна (ее называют отраженной от сечения B). Перед фронтом отраженной волны все точки покоятся (рис. 4, *г*), напряжение равно Ev/c, деформация $\varepsilon = v/c$. За фронтом отраженной волны напряжения равны нулю, как в точке B. Значит, равна нулю и деформация стержня за фронтом отраженной волны.

При прохождении отраженной волны через любое сечение стержня деформация изменяется от v/c до 0. Скорости точек стержня за фронтом отраженной волны равны v и направлены вправо.

В момент времени $t=2L/c$ отраженная волна дойдет до сечения A. Начиная с этого момента времени весь стержень перейдет в недеформированное состояние, все его точки будут иметь направленную вправо скорость v (рис. 4, *д*). В следующий момент стержень отскочит от преграды (рис. 4, *е*).

Итак, для отскока стержня от преграды требуется время, которое не зависит от скорости движения стержня перед ударом, а определяется лишь длиной стержня и скоростью распространения в нем упругих волн.

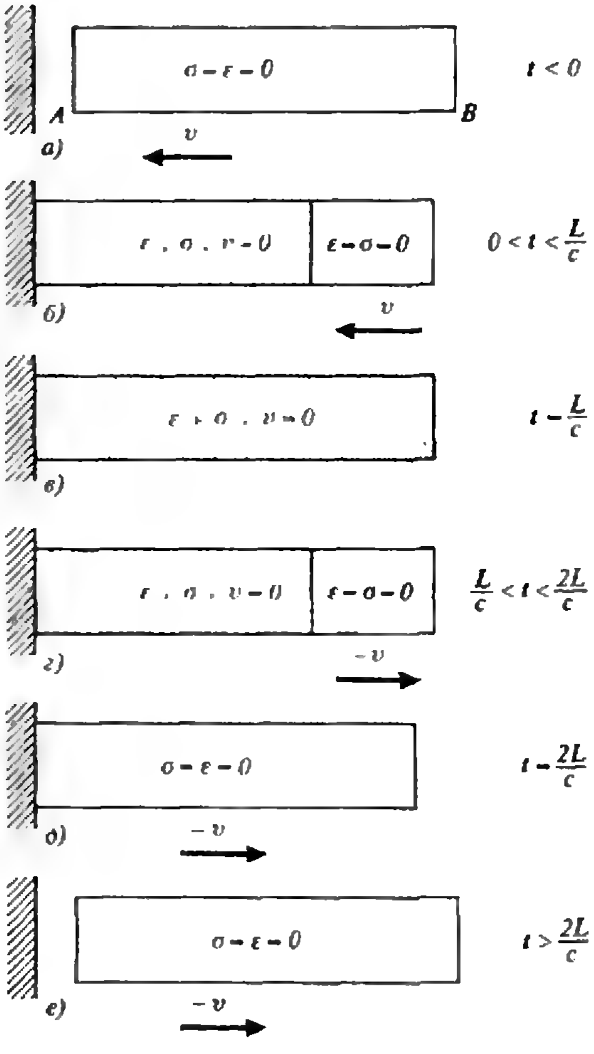


Рис. 4. Соударение стержня с жесткой преградой.

Соударение упругих стержней

В школьном задачнике часто встречаются слова «удар считать абсолютно упругим». Это означает, что кинетическая энергия соударяющихся тел до удара равна их кинетической энергии после удара. Выясним, всегда ли соударение упругих стержней будет абсолютно упругим.

Если стержни сделаны из одного материала, имеют одинаковые сечения и длину, то процессы, происходящие в каждом из стержней при ударе, будут такими же, как и при ударе стержня о жесткую преграду (это понятно из соображений симметрии). Если до удара оба стержня имели скорость v, то после удара их скорости изменят свои значения на противоположные. Кинетическая энергия при этом сохраняется, т. е. удар является абсолютно упругим.

Рассмотрим теперь случай, когда длина одного стержня L, а другого $2L$. После соударения в момент времени $t=L/c$ волна дойдет до конца короткого стержня и отразится от него. При $t=2L/c$ короткий стержень отделится от длинного. В этот момент времени волна, возникшая в длинном стержне, дойдет до его конца.

Мы получили следующую картину: после соударения короткий стержень отлетел со скоростью v, длинный остался неподвижен. Действительно, в момент времени $t=2L/c$ центр тяжести длинного стержня неподвижен. При $t\geqslant 2L/c$ на стержень не действуют внешние силы, следовательно, его центр тяжести будет неподвижен и в дальнейшем. Кинетическая энергия обоих стержней до удара была равна $mv^2/2+2mv^2/2$, после удара она стала равна $mv^2/2$. Две трети кинетической энергии перешли в энергию колебаний в длинном стержне.

Таким образом, мы видим, что удар упругих стержней различной длины не является абсолютно упругим.

Анализ работы индикатора Виккерса

Выясним теперь, почему индикатор давал искаженные показания. Для простоты массой поршня индикатора будем пренебрегать. Пружину для удобства будем рассматривать как упругий стержень длиной L, сечением S и модулем упругости E. Модуль E зависит не только от свойств материала, но и от конструкции пружины.

Если к поршню медленно приложить силу F, то деформация пружины составит $F/(SE)$. Смещение поршня x_0 будет равно

$$x_0=\frac{FL}{SE}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда силу F прикладывают мгновенно. В момент приложения силы от точки A начнет распространяться упругая волна. Перед фронтом этой волны пружина не деформирована, скорости всех ее точек равны нулю, за фронтом волны деформация пружины составляет $\varepsilon=F/(SE)$, следовательно, скорости всех этих точек за фронтом волны равны (рис. 5, *а*)

$$v=\frac{Fc}{SE}.$$

В момент времени $t=L/c$ волна дойдет до точки B (рис. 5, *б*) и отразится от нее. За фронтом отраженной волны скорости всех точек равны нулю, деформация за фронтом будет в 2 раза больше, чем перед фронтом (рис. 5, *в*). Отраженная волна дойдет до точки A в момент времени $t=2L/c$ (рис. 5, *г*). В течение промежутка времени $t=2L/c$ поршень двигался со скоростью v; следовательно, за это время он сместился на расстояние

$$x_м=\frac{v2L}{c}=\frac{2LF}{SE}=2x_0.$$

Итак, при мгновенном приложении силы максимальное отклонение поршня индикатора вдвое больше, чем при медленном. Ответ получился таким же, как в упрощенной модели с невесомой пружиной!

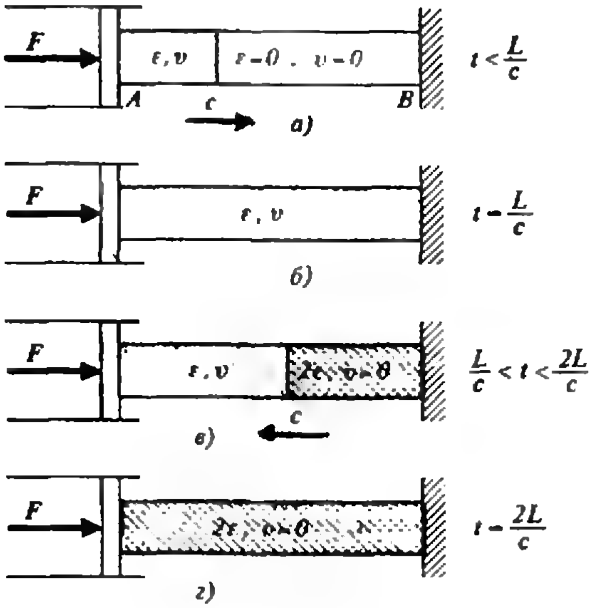


Рис. 5. Мгновенная нагрузка на стержень с закрепленным противоположным концом (модель индикатора Виккерса).

Мы видим, что статический и динамический расчеты упругих систем могут приводить к сильно различающимся результатам. Для многих практических вопросов важно знать, когда применим статический расчет, а когда необходим динамический. А. Н. Крылов предложил следующий критерий применимости статического расчета:

Статический расчет применим, если время нарастания нагрузки много больше периода свободных колебаний системы.

Для упругого стержня период свободных колебаний равен $2L/c$. При выстреле в стволе орудия давление изменяется так, что время нарастания давления приблизительно равно 0,01 с. Если длина пружины индикатора 0,1 м и скорость распространения возмущений в пружине 20 м/с, то статический расчет индикатора недопустим.

А. Н. Крылов решил более общую задачу, учитывая массы поршня и пружины. Для решения задачи он использовал довольно сложный математический аппарат, однако для того чтобы получить качественные выводы, оказалось вполне достаточно нашей упрощенной модели индикатора.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1351 — М1355, Ф1358 — Ф1362

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 сентября 1992 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1351» или «Ф1358». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задача Ф1358 предлагалась на Московской городской олимпиаде по физике, а задачи Ф1359, Ф1360 и Ф1362 — на Межреспубликанской физической олимпиаде 1992 года.

М1351. Пусть в прямоугольном треугольнике AB и AC — катеты, $AC>AB$. На AC выбрана точка E, а на BC — точка D так, что $AB=AE=BD$. Докажите, что треугольник ADE будет прямоугольным в том и только в том случае, если стороны треугольника ABC относятся как $3:4:5$.

А. Паровян

М1352. n чисел ($n>1$) называются близкими, если каждое из них меньше, чем сумма этих чисел, деленная на $n-1$. Пусть a, b, c, ...— n близких чисел, S — их сумма. Докажите, что

а) все они положительны;

б) всегда $a+b>c$;

в) всегда $a+b\leqslant S/(n-1)$.

Р. Шлейфер

М1353. Дана таблица $n\times n$, заполненная числами по следующему правилу: в клетке, стоящей в i-й строке и j-м столбце таблицы,записано число $1/(i+j-1)$. В таблице отметили n чисел таким образом, что никакие два отмеченных числа не находятся в одном столбце или в одной строке. Докажите, что сумма отмеченных чисел не меньше 1.

С. Иванов

М1354. Даны три треугольника: $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$. Известно, что их центры тяжести (точки пересечения медиан) лежат на одной прямой и никакие три из девяти вершин этих треугольников не лежат на одной прямой. Рассмотрим 27 треугольников вида $A_iB_jC_k$, где i, j, k независимо пробегают значения 1, 2, 3. Докажите, что эти 27 треугольников можно разбить на две группы так, что сумма площадей треугольников первой группы будет равна сумме площадей треугольников второй группы.

А. Анджанс

М1355. Докажите, что если число $a=2^{2k}+2^k+1$ не является делителем числа $2^{2^k+1}-1$, то a — составное.

Г. Карнаух

Ф1358. При каких значениях коэффициента трения жесткая палочка длиной l с резиновыми наконечниками сможет удерживаться в горизонтальном положении под куполом радиусом R (рис. 1)?

Д. Григорьев

Задачник „Кванта"

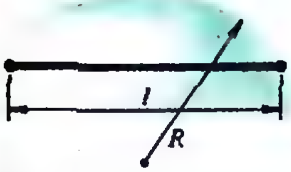


Рис. 1.

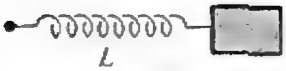


Рис. 2.

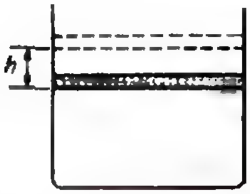


Рис. 3.

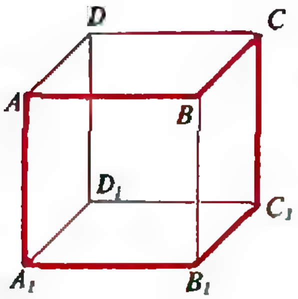


Рис. 4.

Ф1359. На гладком горизонтальном столе расположен пружинный маятник — тяжелый груз на легкой пружине, длина которой в свободном состоянии $L=50$ см (рис. 2). Из-за небольшого вязкого трения о воздух колебания маятника медленно затухают — амплитуда уменьшается в 2 раза за 10 полных колебаний. Для поддержания амплитуды неизменной поступают следующим образом: свободный конец пружины быстро сдвигают на $l=1$ мм навстречу грузу в тот момент, когда длина пружины минимальна, и возвращают в прежнее положение, когда она максимальна. Определите установившуюся амплитуду таких колебаний.

З. Рафаилов

Ф1360. В цилиндрическом сосуде под тяжелым поршнем находится кислород (рис. 3). Поршень поднимают на высоту h от положения равновесия, дожидаются установления температуры, затем сосуд теплоизолируют и поршень отпускают. На каком расстоянии от прежнего положения равновесия установится поршень, когда система вновь придет в равновесие? Теплоемкостью стенок и поршня пренебречь.

А. Зильберман

Ф1361. Несколько заряженных проводников расположены вдали от других тел. Потенциал одного из них равен φ_1 и становится равным нулю после того, как заряды всех остальных тел изменяют на противоположные. Каким станет потенциал первого проводника, если его заряд увеличить теперь в 4 раза?

Р. Александров

Ф1362. Виток в форме квадрата $ABCD$, сделанный из тонкого провода, имеет индуктивность L_1. Виток более сложной формы $ABCC_1B_1A_1A$ (рис. 4) из того же провода имеет индуктивность L_2. Чему равна индуктивность еще более сложного витка $ABB_1C_1D_1DA$? Фигура $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — это куб.

М. Цыпин

Решения задач

М1321—М1325, Ф1338—Ф1342

М1321. Ладья побывала во всех клетках шахматной доски размером $n\times n$ клеток. Докажите, что она должна была при этом изменить направление движения не менее $2n-2$ раза. (Ладья движется параллельно сторонам квадрата.)

Заметим, что каждый из концов вертикального (горизонтального) отрезка траектории является либо началом ее, либо концом, либо точкой, где происходит смена направления движения.

Поэтому, если на каждой из n горизонталей имеется отрезок траектории, то общее количество поворотов ладьи не меньше, чем $2n-2$. При этом нетрудно построить пример траектории с $2n-2$ поворотами.

Если же есть горизонталь, не содержащая ни одного отрезка, то траектория ладьи пересекает все ее клетки по вертикальным отрезкам. Но тогда есть n вертикальных отрезков и к ним применимы уже проведенные рассуждения.

Ю. Ходзинский

M1322. Три отрезка, выходящие из разных вершин треугольника ABC и пересекающиеся в одной точке M, делят его на шесть треугольников. В каждый из них вписана окружность. Оказалось, что четыре из этих шести окружностей равны. Следует ли отсюда, что треугольник ABC — правильный, если M — точка пересечения а) медиан, б) высот, в) биссектрис, г) M — произвольная точка внутри треугольника?

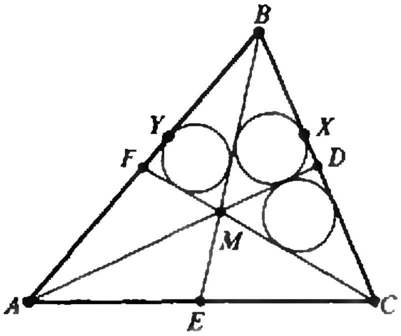


Рис. 1.

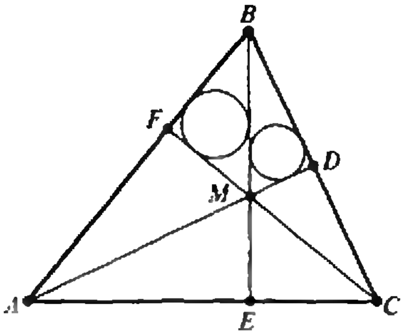


Рис. 2.

Ответ: а), б), в) да; г) нет.

Назовем треугольники, в которые вписаны окружности равных радиусов, отмеченными. Заметим, что какие-то два из отмеченных треугольников примыкают к одной из сторон треугольника ABC. Пусть, для определенности, это будут треугольники BMD и DMC.

а) Поскольку равны площади и радиусы вписанных окружностей отмеченных треугольников, равны и их периметры. Поэтому (рис. 1) $BM=MC$, и, следовательно, $AB=AC$. Пусть $AD=m$, $BE=CF=n$, $AB=AC=l$, $BC=a$, а треугольник BMF — отмеченный. Тогда из равенства периметров треугольников BMF и BMD получаем

$$\frac{l}{2}+\frac{n}{3}+\frac{2n}{3}=\frac{a}{2}+\frac{2n}{3}+\frac{m}{3},$$

т. е.

$$\frac{l}{2}+\frac{n}{3}=\frac{a}{2}+\frac{m}{3}. \qquad (*)$$

Пусть X и Y — точки касания вписанных окружностей (см. рис. 1) со сторонами BD и BF, $DX=x$, $FY=y$. Из свойств отрезков касательной следует, что

$$BM=\frac{l}{2}-y+\frac{n}{3}-y=\frac{a}{2}-x+\frac{m}{3}-x,$$

и с учетом (*) получаем

$$x=y.$$

Поскольку $\angle ADB$ — прямой, $\angle CFB$ — тоже прямой, т. е. медиана CF является высотой, и треугольник ABC — правильный.

Если отмечен треугольник AME, то, как и раньше, получаем из равенства периметров

$$\frac{l}{2}+\frac{2m}{3}+\frac{n}{3}=\frac{a}{2}+\frac{2n}{3}+\frac{m}{3},$$

т. е.

$$\frac{l-a}{2}=\frac{n-m}{3}. \qquad (**)$$

Однако, во всяком треугольнике *большей* стороне соответствует *меньшая* медиана. Поэтому, если $l>a$, то $n<m$, наоборот, при $l<a$ будет $n>m$, так что равенство (**) возможно лишь при $a=l$. Итак, и в этом случае утверждение доказано.

Остальные ситуации совпадают с разобранными с точностью до обозначений.

б) И в этом случае треугольники BMD и CMD равны (рис. 2), поскольку $\angle BMD=\angle CMD$ (эти углы равны, так как окружности одинаковых радиусов касаются отрезка MD в одной точке). Значит, $BD=DC$, $AB=AC$, $MF=ME$, $BF=EC$, так что равны треугольники MBF и MEC. Если они отмеченные, то равны и треугольники MBF и MBD (у них общая гипотенуза BM и равные радиусы вписанных окружностей, при этом $\angle FBM=\angle MBD$ — в противном случае, фигура $MFBD$ окажется прямоугольником).

Если отмечены равные треугольники AMF и AME, то равны и треугольники AME и BMD (они подобны и имеют одинаковые радиусы вписанных окружностей). Но тогда $AD=BE$, что и завершает доказательство.

в) Мы можем считать отмеченными треугольники AMF и AME (рис. 3). Но тогда окружности, вписанные в эти треугольники, касаются отрезка AM в общей точке. Отсюда следует, что $\angle AME=\angle AMF$ и $\angle ABE=\angle ACF$, т. е. $\angle B=\angle C$ и $AB=AC$. Если отмечен треугольник BMF, то, пользуясь формулой для площади $S=rp$ применительно к треугольникам AMF и FMB, получаем

$$\frac{AM+MF+AF}{AF}=\frac{MF+BF+BM}{BF}. \qquad (***)$$

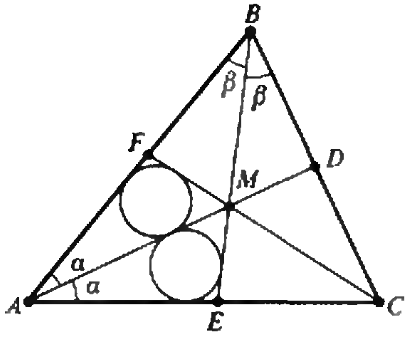


Рис. 3.

Применяя к этим треугольникам теорему синусов, перепишем (***) так:

$$\frac{\sin\alpha+\sin(2\alpha+\beta)}{\cos\beta}=\frac{\sin\beta+\sin(2\alpha+\beta)}{\sin 2\beta},$$

откуда получаем после преобразований (пользуясь тем, что $\alpha+2\beta=\pi/2$), что

$$\sin 3\beta=1, \text{ т. е. } \beta=\pi/6,$$

т. е. ABC — правильный треугольник.

Если отмечены треугольники BMD и CMD, то, так как точка M — центр вписанной в треугольник ABC окружности, получаем

$$\frac{S_{AME}}{AE}=\frac{S_{CMD}}{CD},$$

что дает (формула $S=rp$)

$$\frac{AE+EM+MA}{AE}=\frac{CM+MD+DC}{CD},$$

после чего, рассуждая как и раньше, приходим к равенству

$$\cos 2\beta+\sin 3\beta=1+\sin\beta,$$

из которого находим без труда $\beta=\pi/6$.

И в этом случае ABC — правильный треугольник.

г) Треугольник ABC может и не быть равносторонним. Для его построения (рис. 4) проведем прямую, перпендикулярную AF, и выберем на ней точку M так, что $\frac{\pi}{2}>\angle MAF>\frac{\pi}{3}$. В построенные на рисунке 4 углы впишем *равные* окружности с центрами O_1 и O_2, затем из точки A проведем касательную к окружности O_2. Эта касательная пересечет прямую MF в некоторой точке C. Симметрично отразив картинку относительно прямой MF, получим неправильный равнобедренный треугольник ABC ($AC=BC$), удовлетворяющий условию задачи.

В. Сендеров

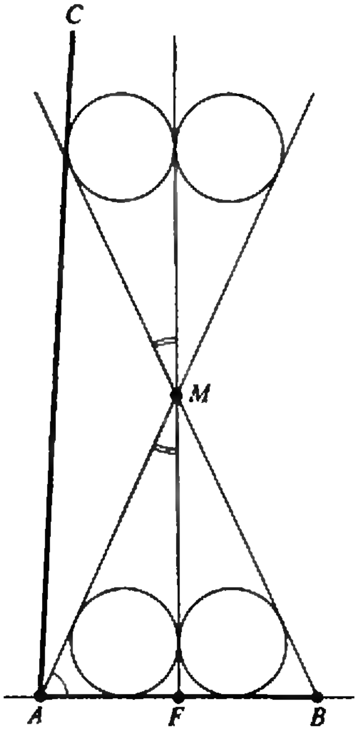


Рис. 4.

Задачник „Кванта"

***M1323.** Докажите для любых положительных чисел x и y неравенство*

$$x\cdot 2^{y}+y\cdot 2^{-x}\geqslant x+y.$$

Первое решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^{a}b+x^{-b}a$, где $a>0$, $b>0$, $x\geqslant 1$. Поскольку

$$f'(x)=ab(x^{a-1}-x^{-b-1})>0 \text{ при } x>1,$$

функция $f(x)$ возрастает и, следовательно,

$$f(2)\geqslant f(1).$$

Осталось в полученном неравенстве

$$b\cdot 2^{a}+a\cdot 2^{-b}\geqslant a+b$$

изменить обозначения.

Второе решение. Зафиксируем $y>0$ и рассмотрим функцию от x (y — параметр):

$$\varphi(x)=x\cdot 2^{y}+y\cdot 2^{-x}-x-y.$$

Заметим, что $\varphi(0)=0$, и продифференцируем функцию φ:

$$\varphi'(x)=2^{y}-y\cdot 2^{-x}\ln 2-1.$$

Теперь докажем, что $\varphi'(x)>0$, отсюда и будет следовать, что $\varphi(x)>0$ при всех $x>0$.

Поскольку

$$(\varphi'(x))'=y\cdot 2^{-x}\ln^{2}2,$$

функция $\varphi'(x)$ возрастает. Остается заметить, что

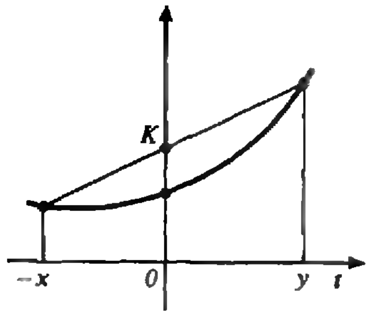
$$\varphi'(0)=2^{y}-y\ln 2-1>0 \text{ при } y>0.$$

(Это доказывается аналогично предыдущему. Значение функции $\Psi(y)=\varphi'(0)$ при $y=0$ равно 0, а производная

$$\Psi'(y)=(2^{y}-y\ln 2-1)'=2^{y}\ln 2-\ln 2$$

положительна.)

Третье решение (для знатоков анализа). Поскольку функция $f(t)=2^{t}$ выпукла вниз (ее производная возрастает), любая хорда, соединяющая две точки ее графика, лежит над графиком (см. рисунок).



В частности, справедливо неравенство

$$1=f(0)<OK=\frac{f(-x)y+f(y)x}{x+y}.$$

Н. Васильев, В. Прасолов, В. Сендеров

***M1324.** Докажите, что ни при каком целом k число $k^{2}+k+1$ не делится а) на 5, на 11 и на 17; б) на число вида $6m-1$ (m — произвольное натуральное число).*

Остатки от деления на 5

k	k^2	k^2+k+1
0	0	1
1	1	3
2	4	2
3	4	3
4	1	1

Утверждение а) можно доказать, рассматривая остатки от деления чисел $b=k^{2}+k+1$ на 5, 11 и 17 (см. таблицы на полях).

Общая задача б) связана с различными методами и теоремами теории чисел.

Первое решение (*метод спуска*). Без ограничения общности можем считать, что $k>0$. Число $k^{2}+k$ всегда четно, поэтому $b=k^{2}+k+1$ — нечетно; при $k=3i$ и $k=3i-1$ число b дает при делении на 6 остаток 1, т. е. $b=6j+1$, а при $k=3i+1$ оно имеет вид $b=3(6j+1)$.

Итак, при всех k число $b=e(6j+1)$, где $e=1$ или 3.

Теперь предположим, что утверждение б) неверно. Пусть $b=k^{2}+k+1$ — наименьшее число требуемого вида, имеющее делители вида $6m-1$, и $q=6i-1$ — наименьший из таких делителей числа b. Тогда $b=eqr$, Остатки от деления на 11

k	k^2	k^2+k+1
0	0	1
1	1	3
2	4	7
3	9	2
4	5	10
5	3	9
6	3	10
7	5	2
8	9	7
9	4	3
10	1	1

Остатки от деления на 17

k	k^2	k^2+k+1
0	0	1
1	1	3
2	4	7
3	9	13
4	16	4
5	8	14
6	2	9
7	15	6
8	13	5
9	13	6
...	...	...

где $r=6j-1$, а $e=1$ или $e=3$, причем $q\leqslant r$. При этом $q\leqslant k$, так как при $q\geqslant k+1$ имеем: $qr\geqslant(k+1)^2>k^2+k+1\geqslant qr$, что невозможно.

Рассмотрим число $b_1=(k-q)^2+(k-q)+1=b-q(2k-q+1)$. Это число делится на q и, очевидно, меньше b. Противоречие. Тем самым утверждение задачи доказано.

Второе решение. Воспользуемся малой теоремой Ферма: *для всякого простого p и a, не делящегося на p, число $a^{p-1}-1$ делится на p*, или, прибегая к языку сравнений*), $a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$.

Пусть p — простое и $k^2+k+1\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$. Умножив это сравнение на $k-1$, получаем

$$k^3\equiv 1(\mathrm{mod}\ p). \qquad (*)$$

Если $p=6m-1$, то (по малой теореме Ферма)

$$k^{6m-2}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p),$$

откуда следует, что $k^2\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$, но из этого сравнения и сравнения (*) следует, что

$$k\equiv 1(\mathrm{mod}\ p),$$

т. е.

$k^2+k+1\equiv 3(\mathrm{mod}\ p)$ — противоречие, ибо $3\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$.

Н. Васильев, С. Масич, В. Сендеров

M1325. *а) На плоскости даны три точки A, B, C.* Пусть *O — их центр тяжести (точка пересечения медиан треугольника ABC). При повороте на угол 120° вокруг O точка B переходит в точку P, при повороте на 240° вокруг O (в том же направлении) точка C переходит в точку Q. Докажите, что треугольник APQ правильный (либо точки A, P и Q совпадают).*
б) Для произвольного на*бора q точек A_0, A_1, ..., A_{q-1} *на плоскости ($q\geqslant 1$) определим следующую операцию: строим центр тяжести O данных точек и поворачиваем каждую точку A_k вокруг O на угол $2\pi k/q$ в новое положение A'_k ($k=0, 1, ..., q-1$). С полученным набором* q точек $A'_0=A_0$, A'_1, ..., A'_{q-1} *проделаем такую же*

а) Пусть a, b, c — векторы, идущие из точки O в точки A, B, C соответственно. Поскольку O — центр тяжести, $a+b+c=0$. Пусть Φ означает операцию поворота на 120° вокруг центра O, Φ^2 — это поворот на 240°, а $\Phi^3z=z$ и $z+\Phi z+\Phi^2z=0$ для любого вектора z (рис. 1). Докажем, что $\Phi(PQ)=AP$ — это как раз и означает, что треугольник APQ равносторонний:

$$AP=OP-OA=\Phi(OB)-OA=\Phi b-a;$$

$$\Phi(PQ)=\Phi(OQ-OP)=\Phi(\Phi^2c-\Phi^2b)=\Phi^3c-\Phi^3b=$$
$$=c-\Phi^3b=-a-b-\Phi^2b=-a+\Phi b.$$

б) Решение этой задачи, в принципе, аналогично: мы введем операцию ε поворота вектора на угол $2\pi/q$ и воспользуемся тем, что для любого вектора z векторы z, εz, ε^2z, ..., $\varepsilon^{q-1}z$ — стороны правильного q-угольника — в сумме дают 0 (рис. 2).

Здесь удобно использовать язык комплексных чисел: рассматривать ε как комплексное число — корень q-й степени из 1: $\varepsilon=\cos(2\pi/q)+i\sin(2\pi/q)$ (напомним, что умножение на ε как раз означает поворот на угол $2\pi/q$).

Для любого набора z из q векторов (комплексных чисел) z_0, z_1, ..., z_{q-1} рассмотрим следующий набор F из q

---

*) Напомним, что обозначения $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ означает, что $a-b$ делится на m. См. статью А. Егорова «Сравнения по модулю» («Квант», 1991, № 6).

операцию еще раз, и т. д. Докажите, что через $q-1$ повторений получится набор из q совпадающих точек.

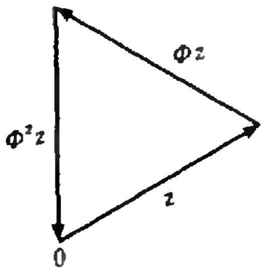


Рис. 1.

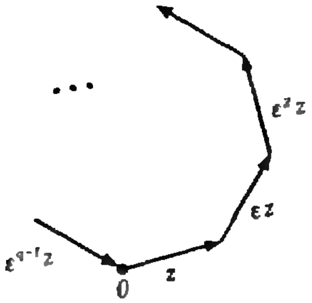


Рис. 2. .

f_0,	f_1,	f_2,	...,	f_{q-2},	f_{q-1},
f_1,	f_2,	f_3,	...,	f_{q-1},	0,
f_2,	f_3,	f_4,	...,	0,	0,
....	....	....	....	....	....
f_{q-1},	0,	0,	...,	0,	0.

векторов $f_0, f_1, \ldots, f_{q-1}$:

$$f_0=z_0+z_1+z_2+\ldots+z_{q-1},$$

$$f_1=z_0+\varepsilon z_1+\varepsilon^2 z_2+\ldots+\varepsilon^{q-1} z_{q-1},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$f_k=z_0+\varepsilon^k z_1+\varepsilon^{2k} z_2+\ldots+\varepsilon^{k(q-1)} z_{q-1},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

здесь $k=0, 1, \ldots, q-1$. Этот набор F называется *преобразованием Фурье*, или *спектром*, набора Z. Заметим, что по спектру F можно узнать исходный набор Z, и определяется он очень похожими формулами: если умножить k-ю строчку на ε^{-jk} (j — одно из чисел $0, 1, \ldots, q-1$) и сложить все строки, получим такую «формулу обращения»

$$f_0=\varepsilon^{-j} f_1+\varepsilon^{-2j} f_2+\ldots+\varepsilon^{-j(q-1)} f_{q-1}=qz_j.$$

Мы воспользовались тем, что

$$1+\varepsilon^{m-j}+\varepsilon^{2(m-j)}+\ldots+\varepsilon^{(q-1)(m-j)}=0 \text{ при } m\neq j.$$

Описанную в условии операцию можно выполнить в два этапа. Сначала от заданных q комплексных чисел (векторов) $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{q-1}$ отнимается их среднее арифметическое $(z_0+z_1+z_2+\ldots+z_{q-1})/q$, отчего сумма полученных векторов становится равной нулю*). Затем j-е по счету число ($j=0, 1, \ldots, q-1$) умножается на ε^j — так получается новый набор $(z'_0, z'_1, \ldots, z'_{q-1})$.

Пусть у исходного набора спектр был равен $f_0, f_1, \ldots, f_{q-1}$. Тогда после первого этапа (добавления ко всем числам постоянной — f_0/q) все коэффициенты Фурье — числа f_k — не меняются, кроме f_0, которое становится равным 0. Затем все коэффициенты сдвигаются на один номер: спектр полученного набора $(z'_0, z'_1, \ldots, z'_{q-1})$ будет равен $f'_0=f_1$, $f'_1=f_2$, $f'_2=f_3$, ..., ..., $f'_{q-2}=f_{q-1}$, а последний коэффициент $f'_{q-1}=0$.

Итак, наборы коэффициентов Фурье после каждой операции будут оканчиваться все бóльшим количеством нулей (см. таблицу на полях), так что после $q-1$ шагов все, кроме нулевого, коэффициенты Фурье равны 0, значит сам набор (как видно, например, из формулы обращения) состоит из q совпадающих чисел.

Б. Быковский, Н. Васильев

***Ф1338.** На горизонтальной поверхности стола покоится клин массой M с углом наклона α к горизонту (рис. 1). Со скоростью v_0 на него наезжает маленькая тележка массой m. Через какое время тележка съедет с клина? Какое расстояние проедет за это время клин? Въезд на клин*

Решение этой, несложной на вид, задачи весьма громоздко. Разберемся вначале, что происходит при въезде тележки на клин. После того как тележка попадет на прямолинейный участок, все будет просто — она будет двигаться с постоянным ускорением.

Введем обозначения: u — вертикальная составляющая скорости тележки, v_1 — ее горизонтальная составляющая, v_2 — скорость клина (она горизонтальна). Все

---

*) Можно сказать иначе: мы переносим начало отсчета — нуль — в центр тяжести точек $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{q-1}$.

сделан так, что тележка движется плавно, без толчков.

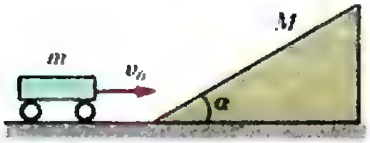


Рис. 1.

эти скорости измерены *относительно стола* и относятся к моменту окончания движения тележки по криволинейному участку (въезду на клин). Считая время движения по этому участку малым, а его размеры небольшими (как фактически и сказано в условии), воспользуемся законами сохранения импульса и энергии:

$$mv_0 = Mv_2 + mv_1,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mv_2^2}{2} + \frac{m(v_1^2+u^2)}{2}.$$

Из простых кинематических соображений (относительно клина скорость тележки направлена под углом α к горизонту) легко получить

$$\frac{u}{v_1 - v_2} = \operatorname{tg}\alpha, \quad \text{или} \quad v_1 = v_2 + u\operatorname{ctg}\alpha.$$

Обозначим $M/m = \gamma$. Тогда законы сохранения можно переписать так:

$$v_0 = \gamma v_2 + v_2 + u\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$v_0^2 = (\gamma+1)v_2^2 + 2v_2u\operatorname{ctg}\alpha + u^2/\sin^2\alpha.$$

Выразим из первого уравнения v_2 и подставим во второе уравнение — нас интересует только вертикальная составляющая u скорости тележки, через нее легко найти время «путешествия» по клину. Мы получим

$$v_0^2 = \frac{v_0^2}{\gamma+1} + \frac{u^2}{\sin^2\alpha} - \frac{u^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{\gamma+1},$$

откуда

$$u = v_0\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+(\sin^2\alpha)/\gamma}}.$$

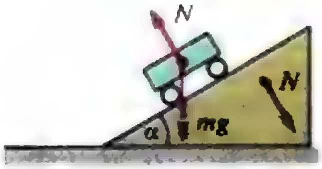


Рис. 2.

Осталось найти ускорение тележки по вертикали. Займемся динамикой (рис. 2). Горизонтальное ускорение клина $a = (N\sin\alpha)/M$, ускорение тележки по вертикали $a_в = g - (N\cos\alpha)/m$, по горизонтали (влево) — $a_г = (N\sin\alpha)/m$, где N — сила нормального давления тележки на клин, равная силе нормальной реакции клина на тележку. Из кинематики $a_в/(a_г + a) = \operatorname{tg}\alpha$. Отсюда найдем

$$N = \frac{mg\cos\alpha}{1+(\sin^2\alpha)/\gamma},$$

и ускорение тележки по вертикали —

$$a_в = g - \frac{N\cos\alpha}{m} = g\frac{\gamma\sin^2\alpha}{\gamma+\sin^2\alpha}.$$

Итак, время движения тележки вверх — вниз по прямолинейному участку клина равно

$$\tau = \frac{2u}{a_в} = \frac{2v_0}{g\sin\alpha}\sqrt{1+(\sin^2\alpha)/\gamma}.$$

Теперь о перемещении клина. Центр масс системы движется по горизонтали равномерно со скоростью

$$v_ц = \frac{mv_0}{M+m} = \frac{v_0}{1+\gamma}.$$

Взаимное расположение тележки и клина в начальный и конечный моменты одно и то же, значит, клин за время τ сдвинулся так же, как и центр масс системы:

$$l=v_{ц}\tau=\frac{2v_0^2}{(g\sin\alpha)(1+\gamma)}\sqrt{1+(\sin^2\alpha)/\gamma}.$$

З. Рафаилов

Ф1339. *Внутри большого мыльного пузыря находится маленький, радиус которого в 10 раз меньше. Воздух снаружи откачивают, после чего радиус большого пузыря увеличивается в 2 раза. Во сколько раз увеличится радиус внутреннего пузыря? Температуру считайте постоянной, влиянием силы тяжести можно пренебречь.*

Обозначим коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки σ. Тогда при атмосферном давлении p_a для давлений внутри большого и маленького пузырей можно записать

$$p_1=p_a+\frac{2\sigma}{R},$$

$$p_2=p_1+\frac{2\sigma}{r}=p_a+\frac{22\sigma}{R}.$$

(Вообще говоря, мыльный пузырь состоит из двух жидких пленок, так что при расчете давления нужно удваивать коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора, но в нашем случае это несущественно — через σ обозначен результирующий коэффициент, в ответ в явном виде он войти не должен.)

После того как воздух откачали, давление снаружи упало до нуля, и внутри нового большого пузыря оно стало

$$p_1^*=\frac{2\sigma}{R^*}=\frac{\sigma}{R}.$$

Ясно, что объем внутреннего пузыря составляет ничтожную часть объема внешнего, поэтому можно записать $p_1^*=p_1V/V^*=1/8p_1$. Отсюда получаем $\sigma/R=1/6p_a$, и

$$p_1=\frac{4}{3}p_a,\quad p_2=\frac{14}{8}\ p_a.$$

Пусть радиус внутреннего пузыря теперь равен r^*, тогда

$$p_2^*=p_2\frac{r^3}{r^{*3}}=p_1^*+\ \frac{2\sigma}{r^*}=\ \frac{1}{6}p_a+\ \frac{10}{3}p_a\frac{r}{r^*}.$$

Обозначив $r/r^*=x$, получаем уравнение

$$28x^3-20x+1=0.$$

Это уравнение легко решить подбором, тем более что особая точность тут не нужна: $x\approx0{,}87$ и $r^*\approx1{,}15r$.

Итак, радиус внутреннего пузыря увеличится примерно в 1,15 раза.

А. Зильберман

***Ф1340.** В схеме, изображенной на рисунке 1, ключ очень быстро перебрасывают из положения A в положение B и обратно. Найдите среднее значение тока через резистор сопротивлением 2R. Какой ток течет через батарею? В каждом положении ключ находится одинаковое время.*

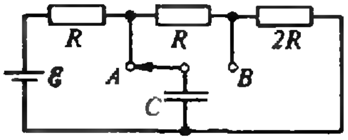


Рис. 1.

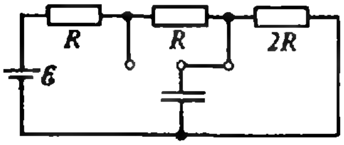


Рис. 2.

Эту задачу довольно легко решить при условии, что за время подключения τ конденсатор не успевает сильно подзарядиться или разрядиться, т. е. в том случае, когда напряжение конденсатора можно считать практически неизменным, а токи в цепи — постоянными. Мы рассмотрим именно такой случай.

Пусть установившееся напряжение конденсатора равно U. Тогда в схеме, изображенной на рисунке 1, ток через батарею равен $I_б=(\mathcal{E}-U)/R$, а ток, утекающий по резисторам сопротивлениями R и $2R$, составляет $I=U/(3R)$. Следовательно, за время τ заряд конденсатора возрастет на

$$\Delta q_1=(I_б-I)\tau=\left(\frac{\mathcal{E}-U}{R}-\frac{U}{3R}\right)\tau.$$

Аналогично, в схеме, изображенной на рисунке 2, заряд конденсатора за это же время уменьшится на

$$\Delta q_2=\left(\frac{U}{2R}-\frac{\mathcal{E}-U}{2R}\right)\tau.$$

В установившемся режиме

$$\Delta q_1=\Delta q_2, \quad \text{и} \quad U=\frac{9}{14}\mathcal{E}.$$

Ток, текущий через резистор сопротивлением $2R$, половину всего времени равен $U/(3R)$, а половину — $U/(2R)$, поэтому среднее значение тока через этот резистор

$$I_{2R\,\text{ср}}=\frac{5}{12}\frac{U}{R}=\frac{15}{56}\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

Средний ток через батарею можно, конечно, вычислить аналогично. Однако ясно, что весь заряд, прошедший через батарею, проходит и через резистор сопротивлением $2R$ — заряд конденсатора остается в среднем неизменным. Таким образом,

$$I_{б\,\text{ср}}=I_{2R\,\text{ср}}=\frac{15}{56}\frac{\mathcal{E}}{R}.$$

А. Зильберман

***Ф1341.** В однополупериодном выпрямителе для зарядки аккумулятора A (рис. 1) «высох» электролитический конденсатор большой емкости — его емкость упала во много раз. Во сколько раз увеличится время, необходимое для зарядки аккумулятора? Действующее значение напряжения источника переменного напряжения $U=15$ В, напряжение аккумулятора $\mathcal{E}=12$ В. Диод считайте идеальным.*

Если конденсатор на выходе выпрямителя еще не «высох» и имеет большую емкость, то напряжение в нем можно считать неизменным и равным $U\sqrt{2}\approx 21{,}2$ В. За один период T через аккумулятор протечет заряд

$$q_0=\frac{U\sqrt{2}-\mathcal{E}}{r}T=2\pi\frac{U\sqrt{2}-\mathcal{E}}{r\omega},$$

где r — внутреннее сопротивление аккумулятора, ω — частота колебаний тока.

Если емкость конденсатора станет совсем малой, то напряжение на выходе выпрямителя будет пульсирующим (рис. 2), и за период ток через аккумулятор будет протекать лишь в течение промежутка времени от $-t_1$ до t_1. Время t_1 можно найти из условия

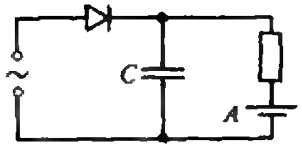


Рис. 1.

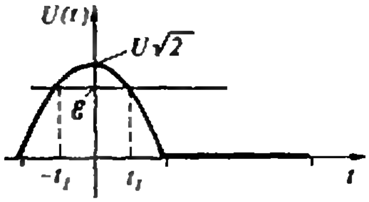


Рис. 2.

$$U\sqrt{2}\cos\omega t_1=\mathcal{E}\Rightarrow t_1=\frac{1}{\omega}\arccos\frac{\mathcal{E}}{U\sqrt{2}}.$$

Для расчета заряда, прошедшего через аккумулятор, в этом случае придется интегрировать:

$$q_1=\int\limits_{-t_1}^{t_1}\frac{U\sqrt{2}\cos\omega t-\mathcal{E}}{r}dt=\frac{2U\sqrt{2}}{r\omega}\sin\omega t_1-\frac{2t_1\mathcal{E}}{r}.$$

Таким образом, время зарядки аккумулятора увеличится в $n=q_0/q_1$ раз:

$$n=\frac{2\pi(U\sqrt{2}-\mathcal{E})}{r\omega}\left(\frac{2U\sqrt{2}}{r\omega}\sqrt{1-\frac{\mathcal{E}^2}{2U^2}}-\frac{2\mathcal{E}}{r\omega}\arccos\frac{\mathcal{E}}{U\sqrt{2}}\right)^{-1}=$$
$$=\pi\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-x\arccos x},$$

где $x=\mathcal{E}/(U\sqrt{2})\approx 0{,}566$.

Окончательно

$$n\approx 4{,}94\approx 5,$$

т. е. время зарядки возрастет примерно в 5 раз.

Р. Александров

Ф1342. *Если объектив фотоаппарата, имеющий фокусное расстояние $F=58$ мм и наведенный на бесконечность, направить на Солнце, то при диаметре входного отверстия (диафрагмы) объектива больше чем $d=11$ мм, прожигается шторка затвора фотоаппарата. На какое расстояние нужно навести объектив, чтобы даже при существенно большем диаметре входного отверстия его можно было без опаски направлять на Солнце? Видимый с Земли угловой размер Солнца $\alpha=9{,}3\cdot 10^{-3}$ рад. Считайте, что при наведении на бесконечность шторка затвора находится в фокальной плоскости объектива.*

Если объектив фотоаппарата наведен на бесконечность и направлен на Солнце, то диаметр изображения Солнца равен

$$\delta_0=\alpha F=0{,}54 \text{ мм}.$$

При этом шторка затвора прожигается лишь при диаметре диафрагмы большем чем $d=11$ мм. Таким образом, о шторке можно не беспокоиться, если диаметр диафрагмы превышает диаметр пятна на шторке не более чем в

$$n=d/\delta_0=20 \text{ раз}.$$

Соответственно, если диаметр диафрагмы существенно больше — обозначим его D, то шторка не прожжется при диаметре пятна от Солнца на ней большем чем

$$\delta_1=\delta_0 D/d=\alpha FD/d.$$

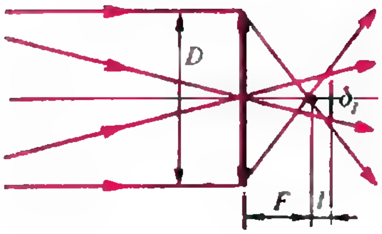
Пренебрегая неравномерностью освещения вблизи границ этого пятна (т. е. считая в данном случае Солнце точечным источником, поскольку получаемое пятно существенно больше изображения Солнца[*]), из простого геометрического построения (см. рисунок) получаем, что шторка должна отстоять от фокальной плоскости больше чем на

$$l=\delta_1 F/D=(\alpha FD/d)(F/D)=\alpha F^2/d=2{,}84 \text{ мм}.$$

Следовательно, фотоаппарат должен быть наведен на расстояние меньшее, чем критическое расстояние L,

---

[*] Здесь возможно более точное решение, учитывающее угловой размер Солнца. Однако оно дает тот же самый результат.



соответствующее условию

$$\frac{1}{L}+\frac{1}{F+l}=\frac{1}{F},$$

откуда

$$L=\frac{F(F+l)}{l}=1{,}24\ \text{м}.$$

М. Гаврилов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1306—М1320, Ф1313—Ф1327, справились с задачей М1311. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

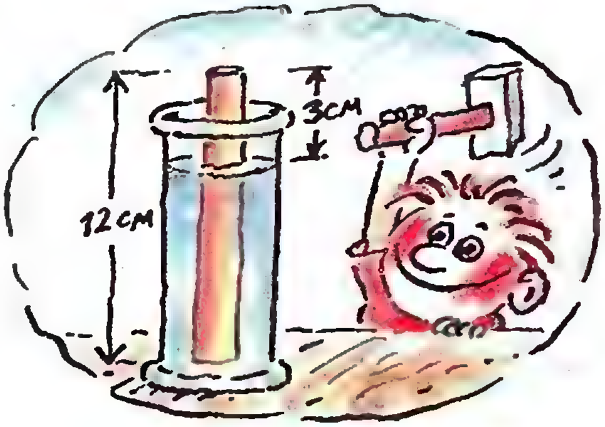
Математика

О. Авдеев (Днепропетровск) **06, 08, 13, 15**; *Ю. Алексеенко* (Киев) **06—08, 10, 13, 15**; *А. Алиев* (Баку) **06, 07, 13, 17**; *Г. Асатрян* (Ереван) **17, 19**; *А. Ахмедов* (Баку) **06, 07, 13, 15—20**; *В. Бринюк* (Донецк) **12, 13, 15**; *О. Бурд* (Киев) **06, 07**; *Б. Вайнер* (Киев) **06, 07**; *А. Васильев* (п. Даниловка Киевской обл.) **06, 17, 19**; *В. Войков* (Астрахань) **17**; *А. Габибов* (с. Тюкла, Азербайджан) **13**; *О. Гайдай* (Львов) **06, 07, 13, 15**; *Д. Гайдунько* (Алма-Ата) **06**; *С. Гетун* (Киев) **06, 07**; *Ю. Горенбургов* (Санкт-Петербург) **06, 07, 17—19**; *Б. Григоренко* (Москва) **17, 19**; *П. Григорьев* (Самара) **06, 12—14, 19**; *С. Гудзенко* (Павлоград) **13**; *Р. Гуляев* (с. Говлар, Азербайджан) **13**; *И. Доманов* (Донецк) **06, 07**; *А. Доценко* (Киев) **13**; *Д. Дудко* (Киев) **06—08, 12, 13, 15, 17—20**; *М. Завьялов* (Омск) **06, 07**; *В. Замятин* (Киров) **07, 17—20**; *М. Ибрагимов* (Ташкент) **06, 07**; *И. Изместьев* (п. Суна Кировской обл.) **06, 07**; *А. Ильяня* (Новгород) **06, 07, 13, 15**; *С. Иоффе* (п. Черноголовка Московской обл.) **06—09, 13, 17, 19, 20**; *А. Исаев* (Баку) **13, 15**; *С. Клейман* (Запорожье) **06**; *С. Климов* (Ижевск) **06, 07, 09, 12, 13, 15, 17—20**; *Н. Когабаев* (Усть-Каменогорск) **06, 07**; *П. Кожевников* (Калуга) **06—09, 12, 13, 15, 17—20**; *О. Коробкин* (Днепропетровск) **06**; *К. Кудайбергенов* (Ташкент) **06, 07, 13, 17, 19, 20**; *С. Кузьмич* (Минск) **06—09, 12, 13, 17—20**; *А. Кукушкин* (Москва) **06, 12, 13**; *В. Кулагин* (Харьков) **06**; *В. Левин* (Гомель) **06, 07, 13**; *И. Левин* (Москва) **13**; *П. Левин* (Москва) **06, 07, 09, 13, 19**; *Н. Лисицын* (Ижевск) **06, 07, 09, 10, 13, 15, 17—19**; *М. Магеррамов* (Баку) **06, 07, 13, 17**; *Э. Магеррамов* (Баку) **06, 07, 17**; *И. Макаров* (Киев) **06**; *Н. Мамедов* (Баку) **06**; *В. Мустафаев* (Баку) **06, 07, 13**; *Т. Назарова* (Желтые Воды) **06**; *А. Назарян* (Тбилиси) **06**; *Б. Насыпанный* (Гайворон) **06, 07**; *С. Одрибец* (Переяслав-Хмельницкий) **06, 07, 13, 15, 17, 19**; *Д. Панов* (Москва) **06—09, 13, 17, 19**; *С. Панферов* (Москва) **06**; *Т. Пашаева* (Баку) **06, 07**; *Е. Перельман* (Санкт-Петербург) **18, 19**; *А. Петросян* (Ереван) **06, 07, 12, 13, 15**; *В. Пиковский* (Киев) **06, 07**; *М. Плетюхов* (Брест) **06, 13**; *Е. Порошенко* (Алма-Ата) **06, 07, 13, 15**; *А. Поталинин* (Киев) **17**; *О. Потапов* (Москва) **06, 07, 13, 17**; *А. Поташник* (Киев) **06**; *А. Рымов* (Талды-Курган) **06, 07, 13**; *З. Сабиров* (к/з Коммунар Хорезмской обл.) **06, 07**; *А. Сарсембаев* (Аркалык) **06, 07, 13, 15**; *А. Свердлов* (Москва) **07**; *В. Севриновский* (Москва) **06**; *С. Сефибеков* (Ташкент) **13**; *С. Сикорский* (с. Вузловая Львовской обл.) **06, 12**; *Т. Симонова* (Северодвинск) **13**; *А. Солодушкин* (Степногорск) **06, 07, 13, 17, 19**; *И. Сороко* (Минск) **19**; *А. Таратин* (Северодвинск) **06, 07, 13**; *О. Тейтельбойм* (п. Черноголовка Московской обл.) **17**; *А. Теплинский* (Каменец-Подольский) **06, 07**; *М. Тройников* (Ижевск) **13, 17, 19, 20**; *Б. Турешбаев* (Кзыл-Орда) **06, 17, 19, 20**; *Е. Турчин* (Днепропетровск) **06, 07, 13, 17—20**; *А. Уханов* (Евпатория) **06, 07**; *М. Хасин* (Донецк) **06, 07**; *К. Хвенкин* (Минск) **06, 07, 09, 13, 15, 17, 19, 20**; *Р. Ходжаниязов* (пгт Хазарасп Хорезмской обл.) **06, 17**; *А. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) **13, 17—19**; *А. Швецова* (Донецк) **13**; *В. Шипунов* (Желтые Воды) **06, 17**; *В. Яновский* (Харьков) **06, 07**.

Физика

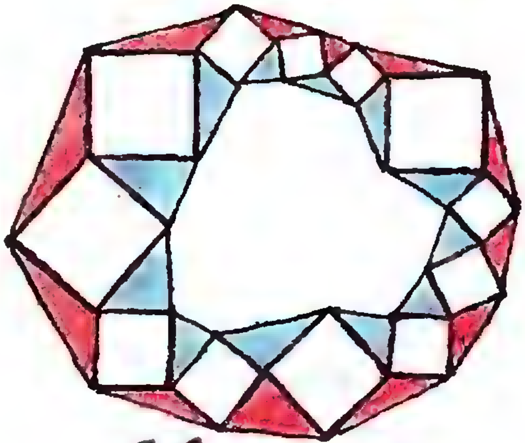
Р. Авезов (Ургенч) **13, 20**; *Ю. Адамов* (Минск) **23, 24, 26**; *А. Айкынбаев* (Алма-Ата) **23, 25**; *М. Аллаберганов* (Ургенч) **13, 16, 19, 20, 23, 24**; *Д. Антипов* (Киев) **13, 15, 17**; *Д. Апальков* (Харьков) **13, 14, 19, 20**; *Д. Асадов* (Имишли) **16, 23**; *С. Бабенкова* (Тамбов) **23**; *И. Бейбаляев* (с. Чиликар Хивского р-на) **20, 23, 24**; *О. Белиловский* (Алма-Ата) **13, 15—17, 20, 22, 23, 25, 27**; *К. Блиох* (Харьков) **13, 15—17, 20, 23, 25, 27**; *В. Богак* (Донецк) **16**; *Д. Боднарь* (Винница) **20**; *Д. Бокий* (п. Черноголовка Московской обл.) 13; *Н. Боронбаев* (с. Ак-Жол, Кыргызстан) 23; *В. Борохов* (Керчь) 21, 23, 25, 27; *С. Борщев* (Алма-Ата) 19, 20, 22, 23, 25; *С. Босак* (п. Юзофо-Николаев Винницкой обл.) 13; *Т. Бретман* (п. Черноголовка Московской обл.) 14, 15, 20; *В. Васев* (Николаеа) 13, 14, 16, 17; *С. Васильев* (Горловка) 20, 23, 24, 26; *А. Ветров* (Северодвинск) 13, 19, 22—24; *И. Воскобойник* (Киев) 13—20, 22—27; *В. Воскобойников* (п. Черноголовка Московской обл.) 13, 20; *А. Вылугин* (Донецк) 13, 16, 23—25, 27; *О. Гайдай* (Львов) 13; *Д. Гайдунько* (Алма-Ата) 13, 14, 16, 20, 23—27; *А. Галанин* (Сергиев Посад) 13, 16—20, 22—25, 27; *С. Галиев* (Благовещенск) 23; *Т. Гасанов* (Киев) 20; *П. Гвоздев* (Котельнич) 13, 19, 20, 23, 24; *А. Георгадзе* (Нальчик) 13, 14, 16; *В. Глазков* (Коломна) 13, 16, 18—21, 23—25, 27; *С. Головченко* (Алма-Ата) 20; *В. Горгадзе* (Нальчик) 23—25, 27; *П. Гребенев* (Кузвецовск) 13, 14, 16, 17, 19—22; *А. Гревцев* (Москва) 13, 16, 19, 20, 22—25, 27; *Б. Григоренко* (Москва) 23, 25; *Т. Григорян* (Ереван) 13, 16, 18—20, 22—24; *Я. Грода* (Брест) 23; *Ю. Гройсман* (Ташкент) 23, 25; *Р. Гулгазарян* (Ереван) 23—25; *Н. Гуляев* (Нижний Новгород) 13—20, 22—27; *Т. Данияров* (Павлодар) 20; *Э. Девятов* (Тула) 13, 15, 16, 19, 20, 23—25; *С. Диброва* (Киев) 13—18, 20, 22—27; *И. Дмитриев* (п. Черноголовка Московской обл.) 23; *С. Дубровина* (Владимир) 16, 20, 23, 24; *С. Дудий* (п. Комсомольский Харьковской обл.) 19, 20, 23, 25; *А. Ельников* (Донецк) 13, 15—17, 19, 20, 22—27; *Е. Ерхов* (Аркалык) 20, 23; *А. Ефимов* (Алма-Ата) 13, 16, 17; *С. Жак* (Тернополь) 13, 16, 19, 20, 22; *С. Залюбовский* (Винница) 20—22; *С. Занкович* (Николаев) 13—17, 19—21, 23—25, 27; *А. Иванов* (Пинск) 23—25, 27; *С. Ивленков* (Тольятти) 13, 14, 20, 22—25, 27; *Н. Ивченко* (Киев) 13—16, 19, 20; *Б. Иманов* (Алма-Ата) 23; *Ш. Исмоилов* (Ургенч) 13, 20, 23, 24; *Б. Кайчубаев* (Алма-Ата) 23; *Д. Калинин* (Тамбов) 23, 24; *А. Касаткин* (Тольятти) 13, 19, 20, 22—25, 27; *Н. Keберле* (Запорожье) 14, 19; *А. Кирилюк* (Одесса) 23—25; *Б. Кисельман* (Нижний Новгород) 23, 24; *С. Клейман* (Запорожье) 13, 23; *М. Клембовский* (Николаев) 13—17, 19, 20, 22—25, 27; *Д. Климов* (Мурманск) 14; *В. Кмецинский* (Камень-Каширский) 13, 16; *К. Коваль* (Запорожье) 13, 16, 18—20, 23, 24; *К. Кожухов* (Кузнецовск) 16, 17; *В. Козлов* (Старый Оскол) 13, 15, 16; *А. Колесников* (Воронеж) 13, 16, 19, 20, 22, 23; *И. Коробов* (Москва) 20, 22; *М. Косицин* (Тольятти) 13, 23, 24; *С. Костин* (Москва) 23, 24; *А. Кравцов* (Старый Оскол) 23; *Д. Кример* (Брест) 23—25, 27; *Э. Крицун* (Богородчаны) 13, 14, 16, 19, 20; *Е. Круглая* (Бердянск) 23—25; *А. Крючков* (Москва) 23, 25; *А. Кузмич* (Старый Оскол) 23, 27; *В. Кулагин* (Харьков) 13, 16; *Ю. Кулик* (Канев) 13, 15, 16, 18—20, 22—25; *П. Куприн* (Северодвинск) 23—27; *П. Левин* (Москва) 13, 20, 22—24; *И. Линчевский* (Брест) 13, 20, 23; *С. Макаров* (Усинск) 13, 16, 20, 23, 25; *Н. Махкамов* (Чертакский р-н Наманганской обл.) 20; *С. Малащицкая* (Кузнецовск) 19, 22, 24, 25, 27; *Ю. Маравин* (Евпатория) 13—16, 19, 20, 22—25, 27; *В. Матусевич* (Минск) 23; *М. Махмудов* (Исфара) 20, 23—27; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 16, 19—24; *Р. Михеенко* (Могилеа) 14; *В. Мушик* (Кузнецовск) 16, 19, 20, 22, 24, 25, 27; *А. Нежуренко* (Киев) 15, 17, 19, 20, 22, 23, 25, 27; *М. Немировский* (Одесса) 13, 16, 20, 22—24, 27; *И. Ненько* (Александрия) 23; *Д. Новиков* (Минск) 20; *А. Носиков* (Винница) 20; *А. Ольховец* (Киев) 13—17, 20, 22, 23, 25, 27; *А. Ордабаев* (Алма-Ата) 13, 15—17, 23, 25, 27; *Д. Островский* (Санкт-Петербург) 13, 15—17, 19, 20, 23—25, 27; *Х. Отожонов* (Ургенч) 13, 20, 23, 24; *А. Павлик* (Новая Ушица) 16, 23—25, 27; *Д. Пастухов* (Витебск) 13—17, 19, 20, 23—27; *В. Паульс* (Чимкент) 23—25, 27; *Д. Петрайтис* (Вольск) 15, 20, 23—25, 27; *А. Пикалов* (Канаш) 19, 20, 23—25, 27; *М. Плетюхов* (Брест) 13, 16, 20, 23—25, 27; *В. Понкратов* (Старый Оскол) 13, 19, 20, 22, 23; *С. Рассадин* (Минск) 13, 15, 16, 20, 23, 27; *В. Регельман* (Баку) 13; *Р. Реймбердиев* (Фарабский р-н Чарджоуской обл.) 21; *М. Ризванов* (Баку) 16; *Е. Рослый* (Омск) 16, 17, 20, 23, 26; *Д. Рузметов* (Ургенч) 13, 20; *Ш. Рузметов* (Хивинский р-н Хорезмской обл.) 23; *В. Рыбачук* (Винница) 20, 23, 24, 27; *А. Рыженко* (Целиноград) 20; *Р. Сабиров* (Хорезмская обл.) 23; *А. Свириденков* (Троицк Московской обл.) 20, 23, 24; *И. Секержицкий* (Брест) 23; *Ц. Семичев* (Тамбов) 20; *И. Сихарулидзе* (Тбилиси) 23; *А. Солодушкин* (п. Степногорск Целиноградской обл.) 20, 23; *О. Сорока* (с. Верба Ровенской обл.) 13, 15, 17; *А. Сорокин* (Москва) 20; *И. Сороко* (Минск) 27; *О. Тейтельбойм* (п. Черноголовка Московской обл.) 13; *А. Терентьев* (Канаш) 13, 16, 17, 19, 20, 22—25, 27; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 13, 14, 17; *В. Толпекин* (Одесса) 13, 15—17, 20; *В. Третьяков* (Алма-Ата) 23—25, 27; *С. Тумаха* (Киев) 13—16, 19, 20, 23—26; *А. Тумашевский* (Северодвинск) 13, 14, 16, 17, 20, 23—25, 27; *Д. Федорец* (Харьков) 13, 16, 20, 22—25, 27; *А. Хадарцев* (Санкт-Петербург) 23, 25, 27; *А. Хамета* (Пружаны) 20; *А. Хамхидько* (Старый Оскол) 22, 23; *Р. Хапков* (Старый Оскол) 13, 19, 20, 22—24; *А. Хренков* (Москва) 19; *П. Хрущ* (Брест) 23; *Д. Чигирев* (Санкт-Петербург) 13, 15—17, 23, 25; *А. Чистый* (Брест) 13, 14, 16, 23—25, 27; *Д. Чичкан* (Барановичи) 17, 19, 20, 23—27; *Н. Чумерин* (Брест) 23; *И. Ширяев* (Кузнецовск) 16, 19, 20, 22; *А. Шишлянников* (Воронеж) 23; *А. Шпагин* (Мариуполь) 13, 15—17, 19, 20, 22—25, 27; *В. Шпырко* (Киев) 20; *И. Шпырко* (Киев) 20; *О. Шпырко* (Киев) 13—17, 19, 20, 23—27; *Д. Шумский* (Брест) 23; *Т. Шутенко* (Мариуполь) 13—17, 19, 20, 23, 24; *Д. Юдин* (Самара) 13, 15—17; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 13, 14, 16, 17, 19—27; *А. Ямилов* (Донецк) 16, 20, 23—25, 27; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 13, 16, 17, 19, 20.

Задачи



1. Укажите все целые числа, которые увеличиваются на 20 %, если их цифры записать в обратном порядке.

2. В мензурке с водой плавает деревянный цилиндр высотой 12 см. Он выступает над поверхностью на 3 см. Какое давление он окажет на стол, если его туда поставить?



3. В цепочке квадратов соединили вершины, как показано на рисунке. Что больше: сумма площадей внешних треугольников или внутренних?

4. Цена на туфли ежемесячно увеличивалась в одно и то же число раз. Полгода назад они стоили не меньше 150 рублей. Сейчас они стоят пока еще меньше 500 рублей. А сколько они стоят?

5. В двух кошельках находится по 98 копеек, причем в одном кошельке лежит 49 монет, а в другом — 50 монет. Можно ли уверенно утверждать, что деньги из первого кошелька можно разделить на две равные части? А деньги из второго кошелька?

У МММ НЕТ ПРОБЛЕМ!

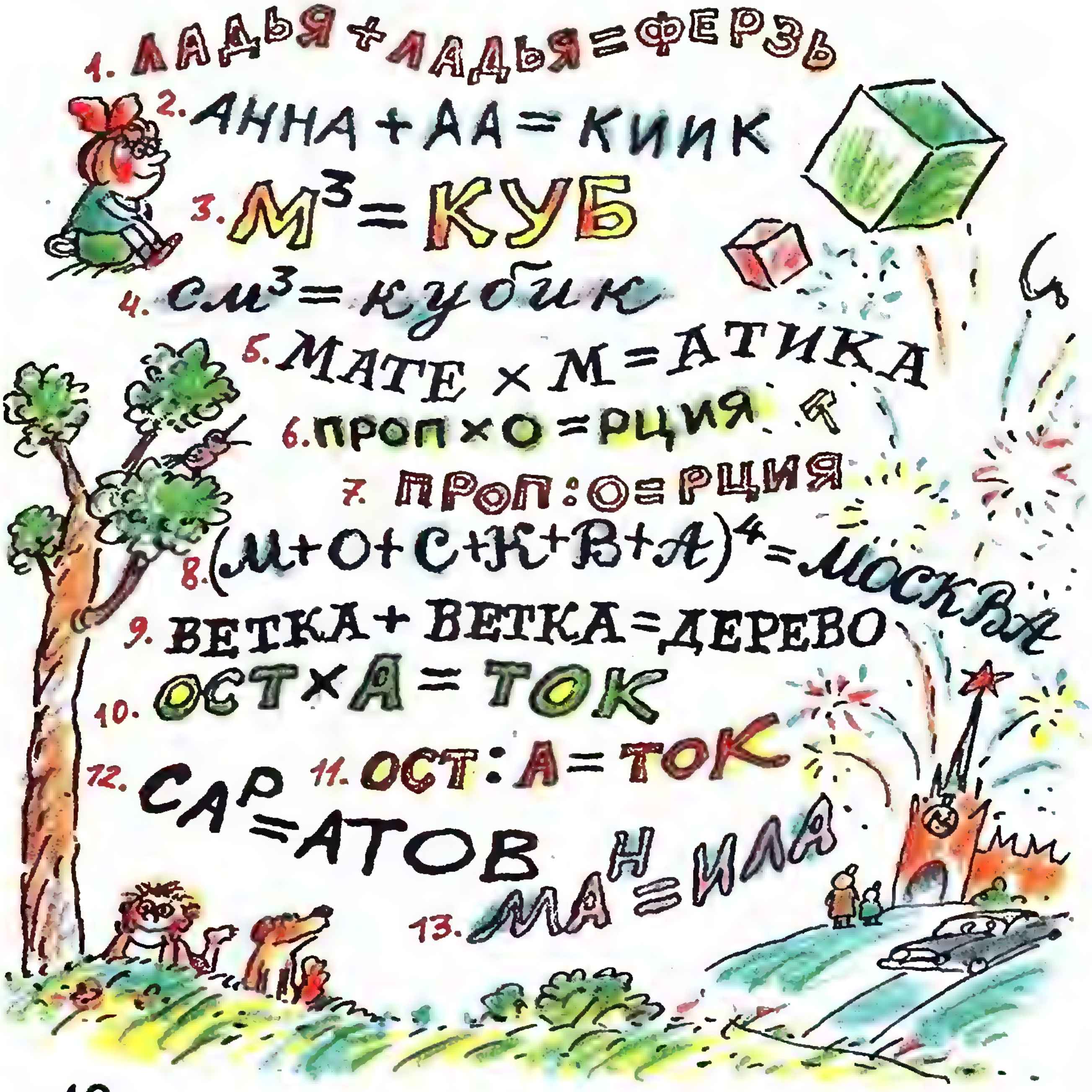
Эти задачи нам предложили Г. Щеголихин, В. Пидора, С. Дворянинов, И. Акулич и В. Произволов.

Ребусы, ребусы, ребусы...

В своих письмах многие читатели просят публиковать побольше ребусов, поэтому редакция решила в этот каникулярный номер дать кучу таких задач, посвятив им наш «Калейдоскоп». Мы надеемся, что в решении этих задач вам поможет статья И. Акулича «Решение ребусов на чашечных весах», опубликованная в предыдущем номере журнала.

Эти задачи нам предложили: *А. Кругляк* (1), *С. Баженов* (3, 4, 15, 16, 26, 29), *М. Штернберг* (2), *Л. Мочалов* (5, 23), *В. Радунский* (6, 7, 10, 11), *А. Акопян* (8, 9), *Р. Шиханян* (12, 13, 14), *И. Акулич* (17), *В. Чичин* (18), *М. Сафаралиев* (19, 27), *Н. Антонович* (20, 21, 22), *А. Горнов* (24), *А. Кючуков* (Болгария) (25), *С. Измалков* (28), *А. Швецов* (30).

Напоминаем, что в каждой задаче одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.



1. ЛАДЬЯ + ЛАДЬЯ = ФЕРЗЬ

2. АННА + АА = КИИК

3. $М^3$ = КУБ

4. $см^3$ = кубик

5. МАТЕ × М = АТИКА

6. ПРОП × О = РЦИЯ

7. ПРОП : О = РЦИЯ

8. $(М+О+С+К+В+А)^4$ = МОСКВА

9. ВЕТКА + ВЕТКА = ДЕРЕВО

10. ОСТ × А = ТОК

11. ОСТ : А = ТОК

12. $СА^Р$ = АТОВ

13. $МА^Н$ = ИЛА

14. $\text{ГАВ}=\text{АН}^{\text{А}}$

15. ПЛОМБА×5=АПЛОМБ

16. НИКЕЛЬ×6=ЕЛЬНИК

17. КВАНТ×30=ЖУРНАЛ

18. $\frac{\text{Ц}}{\text{Д}}+\frac{\text{И}}{\text{ЕС}}=\frac{\text{ФР}}{\text{ЯТЬ}}$

19. капля+капля+капля=озерко

20.
$$\begin{array}{r} \text{РАДИУС} \\ +\ \text{АДИУС} \\ \text{ДИУС} \\ \text{ИУС} \\ \text{УС} \\ \text{С} \\ \hline \text{ЗАДАЧА} \end{array}$$

21.
$$\begin{array}{r} \text{ИКС} \\ \times\ \text{ИКС} \\ \hline \text{РИС} \\ \text{ДАР}\phantom{\text{И}} \\ \text{ИКС}\phantom{\text{ИК}} \\ \hline \star\star\star\star\star \end{array}$$

22.
$$\begin{array}{r} \text{СЛАВА} \\ \times\ \text{ВЛАС} \\ \hline {*}{*}{*}{*}\text{О} \\ {*}{*}{*}{*}{*}{*} \\ {*}{*}{*}{*}{*} \\ {*}{*}{*}{*}\text{О} \\ \hline {*}{*}{*}{*}{*}{*}{*}{*} \end{array}$$

23.
$$\begin{array}{r} \text{РЕШИ} \\ \times\ \text{ЕСЛИ} \\ \hline \text{СИЛЕН} \\ \star\star\star\star\star \\ \star\star\star\star \\ \star\star\star\star\star \\ \hline \star\star\star\star\star\star\star\star \end{array}$$

24. SIX×TWO=TWELVE

25. $\text{СССР}=\text{Р}^{\text{Ф}}$

26. сорок×5=двести

27. ДВЕСТИ×5=ТЫСЯЧА

28. НАТАША+ТОНЯ=СЁСТРЫ

29.
$$\begin{array}{r} \text{Д} \\ \text{АД} \\ +\ \text{ЛАД} \\ \text{КЛАД} \\ \text{ОКЛАД} \\ \text{ДОКЛАД} \\ \hline 987654 \end{array}$$

30. $\text{БРА}^2=\text{БОМДОР}$

АЛИСА И ТОЧКА

Кандидат физико-математических наук
Л. ГЕНДЕНШТЕЙН

Девочку, изображенную на этой фотографии столетней давности, зовут Алиса Лидделл. Фотографом был ее взрослый друг, учитель математики Чарлз Лютвидж Доджсон, посвятивший ей ставшие всемирно известными книги «Алиса в стране чудес» и «Алиса в Зазеркалье». Известен он более под псевдонимом Льюис Кэрролл. Наш журнал в 1984—1986 годах опубликовал сказку «Алиса в стране чудес» с добавлением множества математических и физических вопросов и задач, возникающих по ходу приключений Алисы. В скором времени мы предполагаем познакомить читателей с письмами Л. Кэрролла к Алисе, ранее у нас еще не публиковавшимися, а сейчас представляем новые приключения Алисы, происходящие в математической стране, описанные Л. Генденштейном в стиле сказок Л. Кэрролла.

Алисе наскучило сидеть на пригорке рядом с сестрой; она устала от ничегонеделанья и разок-другой заглянула в книжку, которую читала сестра. Но там были только чертежи, отдельные буквы и какие-то значки.

— Что толку в книге,— подумала Алиса,— в которой буквы не складываются в слова?

И тут ей показалось, будто из одного чертежа выкатился кружок и покатился по дороге. Ничего удивительного в этом, конечно, не было (на то он и кружок, чтобы катиться, подумалось Алисе), но когда он остановился и подмигнул (вы представляете себе, как кружок может подмигнуть?), Алиса вскочила и побежала за ним. Она уже почти догнала кружок, но он вдруг превратился в восьмерку, лежащую на боку, оторвался от дороги и улетел, как мотылек.

Алиса остановилась и осмотрелась. Дорога, по которой она бежала, шла через огромное поле: оно расстилалось до самого горизонта.

— Может быть, мне лучше вернуться назад? — подумала Алиса.— Но в какую сторону будет вперед, а в какую назад?

Дело в том, что пока Алиса осматривалась, она несколько раз повернулась кругом, и узнать теперь, откуда она пришла, было невозможно: дорога шла в обе стороны совершенно одинаковая.

— Никогда еще я не попадала в такое глупое положение! — огорчилась Алиса.— Заблудиться посреди одной-единственной дороги — я ни за что бы не поверила, что такое возможно!

Но надо было решать, куда идти, потому что стоять было совершенно бесполезно.

— Куда-нибудь я обязательно дойду,— решила Алиса, вспомнив совет Чеширского Кота,— если только буду идти достаточно долго.

Девочка закрыла глаза, несколько раз повернулась и, снова открыв глаза, пустилась в путь.

Алиса шла очень долго, и ноги у нее уже подгибались от усталости. Но присесть было негде: дорога шла ровная, как стрела, на обочине не было ни деревца, ни кустика, а для того, чтобы присесть у дороги, непременно надо, чтобы глаз хоть за что-нибудь зацепился.

— Сколько же я прошла? — спросила себя Алиса.— И сколько мне еще осталось идти? Это, пожалуй, еще более важный вопрос!

Хотя Алиса и устала, она продолжала разговаривать сама с собой: на это у нее всегда хватало сил.

— А вдруг эта дорога никогда не кончится? — сказала Алиса и тут же испугалась: она никогда не задумывалась над словом «никогда».

И тут Алиса заметила на обочине крошечный столбик и бросилась к нему в надежде, что прочитает на нем какую-нибудь полезную надпись, например, что до ближайшего города 100 миль (сейчас она была бы рада даже и этому).

На столбике действительно было написано: «100». Алиса вовсе не удивилась тому, что угадала число; она сразу решила, что это и есть расстояние до ближайшего города. Конечно, она не надеялась пройти сто миль без передышки, но все-таки пошла быстрее, внимательно глядя по сторонам, чтобы не пропустить следующий столбик.

И он действительно вскоре появился. Алиса ожидала увидеть на нем число 99 (ей так хотелось к чему-нибудь *приближаться!*), но, увы, на столбике очень четко и красиво было написано «101».

— Я не приближаюсь, а *удаляюсь*! — в отчаянии воскликнула Алиса.

Ей подумалось, что сейчас самое время немного всплакнуть. Она села на землю, набрала воздуха, но вовремя спохватилась.

— Во-первых, меня здесь никто не видит и поэтому не сможет пожалеть,— рассудила вслух Алиса,— а во-вторых, надо беречь силы, потому что теперь мне придется идти обратно еще больше, чем я уже прошла... а прошла я очень много! — и слезы опять навернулись ей на глаза.

— А разве бывает *больше*, чем *много?* — раздался писклявый голосок. Алиса вздрогнула и оглянулась, но нигде никого не было.

— Кто со мной говорит? — спросила Алиса.— Я вас не вижу.

— Видеть совсем не обязательно! — сказал тот же голос.— Достаточно того, что ты меня слышишь.

— Для *меня*, по крайней мере, этого недостаточно! — возразила Алиса и решила прекратить этот разговор.

Писклявый голосок тоже замолчал, и минуты через две Алиса уже начала жалеть, что ответила так невежливо.

— Меня увидеть невозможно,— вдруг произнес голос.

— Значит, вы,— невидимка? — живо спросила Алиса, радуясь продолжению разговора.— Вот интересно: я никогда еще не видела невидимок! То есть... я хотела сказать, что я никогда раньше их *не встречала!*

— Меня не только нельзя увидеть, меня и *вообразить* трудно,— продолжал голос.

— Так кто же вы? — сгорая от любопытства, спросила Алиса.— Надеюсь, имя хотя бы у вас есть?

— Я — Точка,— сказал голос.

— Точка? — удивленно переспросила Алиса.— Но точки я видела много раз. Они стоят в конце каждого предложения! (Алиса была рада, что представился случай показать свои знания.)

— Я — *Геометрическая* Точка,— уточнил голос.

— Вы хотите сказать, что вы точка из учебника геометрии?— спросила Алиса, довольная тем, что вовремя вспомнила, как называлась книга, которую читала сестра.

— Нет,— сказал голосок.— Я точка без размеров.

— Без размеров? — удивилась Алиса.— Вы хотите сказать, что вы очень маленькая? Я тоже когда-то была очень маленькая...

— Я *бесконечно* маленькая,— сказала Точка.

— Бесконечно *маленькая?* — переспросила Алиса.— Мне казалось, что бесконечность всегда *большая*!

— Бесконечно малое можно понять с помощью бесконечно большого,—

после недолгого молчания сказала Точка.— Сейчас я попробую объяснить тебе...

Алиса вытерла наполовину высохшие слезы и устроилась поудобнее: она догадывалась, что разговор о бесконечном не может быть коротким.

— Ты помнишь, как быстро ты уменьшалась, когда обмахивалась веером Белого Кролика? — спросила Точка.

— Еще бы! — ответила Алиса.— Я уменьшалась вдвое каждую секунду! Хорошо, что я успела бросить веер: еще чуть-чуть, и я бы исчезла совсем!

— Совсем ты бы не исчезла! — важно сказала Точка (по крайней мере, это звучало бы важно, если бы не ее писклявый голосок).— Правда, через десять секунд ты уменьшилась бы больше чем в тысячу раз, через двадцать секунд — больше чем в миллион раз, через полминуты — больше чем в миллиард раз...

— Подождите, пожалуйста,— взмолилась Алиса,— я не успеваю!

— Не успеваешь *слушать*? — удивилась Точка.

— Я не просто слушаю,— сказала Алиса,— я пытаюсь *представить* себе то, что вы рассказываете. А представить, что ты уменьшилась в миллион раз, не так-то просто! У меня, по крайней мере, это не получается быстро...

— Ну конечно,— заметила Точка,— я и забыла, что ты еще незнакома с большими числами!

Алису это замечание обидело.

— С большими числами я знакома: я знаю, что миллион — это тысяча тысяч, а миллиард — это тысяча миллионов, а потом... потом...

Алиса надеялась, что Точка ее перебьет и тогда ей не придется вспоминать, как называется тысяча миллиардов (честно говоря, Алиса этого не только не помнила, но даже и не знала), но Точка продолжала молчать.

— Наверное, у нее сейчас очень вредное выражение лица,— подумала Алиса,— да, впрочем у нее и лица то нет!

Точка по-прежнему молчала, и Алиса решила обидеться на нее по-настоящему. Это нечестно: замолчать, когда другому нечего сказать.

Алиса собралась подняться, чтобы идти дальше (нет, *обратно*!), но тут снова услышала знакомый голосок:

— Во мне только что пересеклись две прямые, и я еле оправилась от этого потрясения. Давай продолжим: раз ты знаешь, что миллион — это тысяча тысяч, что мешает тебе представить, что ты уменьшилась в миллион раз?

— Мне хотелось бы знать, какой бы я тогда стала,— с готовностью ответила Алиса, мысленно ругая себя за то, что обиделась на Точку.

— Ровно в миллион раз меньше, чем сейчас,— сразу же сказала Точка.— Что же тут непонятного?

Алиса и вправду перестала понимать, что тут непонятного, а это — она знала — очень плохо! Ее учитель говорил ей, что когда она чего-то не понимает, это не страшно, но при одном условии: если она понимает, что именно ей непонятно. Поэтому Алиса взяла себя в руки и спросила себя:

— Что мне непонятно? Мне непонятно, что значит уменьшиться в тысячу тысяч раз. А просто в тысячу раз — понятно?

Алиса немного подумала и честно призналась себе:

— Тоже не очень. А в десять раз? Это, кажется, понятно: я стану ростом со свою ладошку.

Мысли Алисы побежали быстрее.

— Значит, если я уменьшусь еще в десять раз, я буду ростом с вишенку, а еще в десять — с булавочную головку! Вот что значит — уменьшиться в *тысячу* раз!

Алисе стало очень интересно, и она продолжала:

— А если я уменьшусь еще в десять раз, что тогда? Что в десять раз меньше булавочной головки? Вот что: толщина волоса! Это уже уменьшение в десять тысяч раз! До миллиона осталось совсем немного... Попробуем дальше... что в десять раз меньше толщины волоса?

— Поняла, поняла! — закричала Алиса.— Я поняла, чего я не понимала: я не могла представить себя такой маленькой, потому что никогда в жизни не видела таких маленьких предметов.

— Это еще не значит, что их не существует,— сказала Точка.— Но теперь ты, наконец, представляешь себе, что ты уменьшилась в миллион раз?

— Да... то есть нет! Почти представила,— выговорила, немного путаясь, Алиса,— я стала бы в сто раз меньше толщины волоса. Но это тоже очень трудно представить, — призналась она.

— Ну, если тебе даже это трудно представить...— сказала Точка и снова замолчала.

Алиса подождала немного: а вдруг опять в точке пересекаются какие-то загадочные прямые? Выждав пару минут, Алиса заботливо спросила:

— У вас все в порядке, Точка? Вы хотели объяснить мне бесконечно малое с помощью бесконечно большого,— напомнила Алиса.— Может быть, тогда мне легче будет вообразить вас.

— Ладно,— после недолгого молчания согласилась Точка.— У меня времени бесконечно много, поэтому я думаю, что успею... А тебе не жаль своего времени? — вдруг спросила Точка.

— Для вас — не жаль! — ответила Алиса. Так в книжках говорили самые благородные рыцари и, хотя Алиса никогда не мечтала сама стать рыцарем, они ей очень нравились.

— Тогда слушай,— начала Точка, и ее голосок стал мягче (может быть, ее тоже тронули слова Алисы).— Я продолжаю: через полминуты ты уменьшишься в миллиард раз, через сорок секунд — в триллион раз, через пятьдесят секунд — в квадриллион раз...

— Это надо запомнить! — быстро подумала Алиса,— за миллиардом идет триллион, а потом — квадриллион...

— ...а через одну минуту ты уменьшишься в квинтиллион раз. Ты меня слушаешь?

— Да, конечно, милая Точка. Вы дошли до квинтиллиона, и я пыталась его себе представить...

— Это все пустяки! — заорала вдруг Точка.— Не засоряй свое воображение, главное впереди! Слушай внимательно!

Алиса затаила дыхание: она чувствовала, что вот-вот перед ней откроется какая-то великая тайна.

— Представь себе,— продолжала Точка, и голос ее зазвенел,— что ты уменьшаешься с такой скоростью минута за минутой, час за часом, день за днем, месяц за месяцем, год за годом... Каждые двадцать секунд — в миллион раз!

Бедной Алисе никогда еще не приходилось так напрягать свое воображение: все сказки про зверей и драконов показались ей бледной выдумкой по сравнению с тем, о чем говорила Точка.

— Я продолжаю! — загремел (так показалось Алисе) голос Точки.— Проходят века и тысячелетия, гаснут и зажигаются звезды, а ты все уменьшаешься и уменьшаешься... И только через *бесконечно большое* число тысячелетий ты сможешь стать точкой!

Точка помолчала и потом добавила, но уже значительно тише:

— *Сможешь* стать, но *никогда не станешь!* Прощай, мы еще встретимся...

У Алисы голова пошла кругом: в ней перемешались звезды и тысячелетия, и Алисе почудилось, будто она увидела бездну звездного неба. Алиса тряхнула головой, но видение не исчезло: не было уже ни дороги, ни столбика с числом 101.

Алиса, балансируя, стояла на какой-то туго натянутой струне, которую, сколько ни силилась, не могла увидеть.

А над Алисой, и по сторонам, и под ней было бесконечное звездное небо.

Продолжение приключений Алисы в математической стране читайте в следующих номерах журнала.

Математический кружок

Об одной трудной геометрической задаче

Кандидат физико-математических наук
Е. КУЛАНИН

Среди заданий по математике, предложенных на всесоюзном конкурсе «Абитуриент—91» газетой «Поиск» (4—10 января 1991 г.), была и такая геометрическая задача: «Окружность, проходящая через основания биссектрис внутренних углов треугольника, касается одной из его сторон. Верно ли, что этот треугольник равнобедренный?»

Ответ на вопрос задачи отрицательный. Пример неравнобедренного треугольника, удовлетворяющего указанному условию, приведен в статье И. Шарыгина «Откуда берутся задачи?» («Квант» № 9, 1991 г.). В этом примере окружность, проходящая через основания биссектрис AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC, пересекает продолжения его сторон. Оказывается, это не случайно. Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Если окружность, проходящая через основания A_1, B_1, C_1 биссектрис треугольника ABC, касается одной из его сторон и пересекает остальные стороны (а не их продолжения!), то такой треугольник — равнобедренный.*

Утверждение этой теоремы является обратным очевидному утверждению, что окружность, проходящая через точки A_1, B_1, C_1 и пересекающая боковые стороны равнобедренного треугольника ABC, касается основания этого треугольника. Так что она может пополнить небольшую коллекцию обратных утверждений, приведенную в статье «Неожиданность обратной задачи» («Квант» № 2, 1991). Доказательство ее, по-видимому, не менее сложно, чем доказательство знаменитой теоремы Штейнера-Лемуса о том, что если две биссектрисы треугольника равны, то он равнобедренный.

Подготовительные результаты

Прежде чем начать доказывать нашу теорему, напомним некоторые факты, известные внимательному читателю нашего журнала.

Теорема Чевы. *Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC (рис. 1). Для того чтобы отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

(Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 называются *чевианами*.)

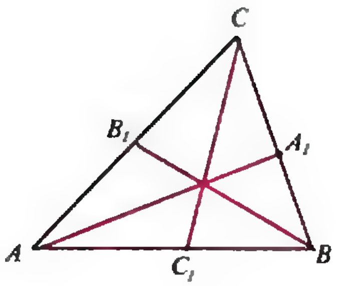


Рис. 1.

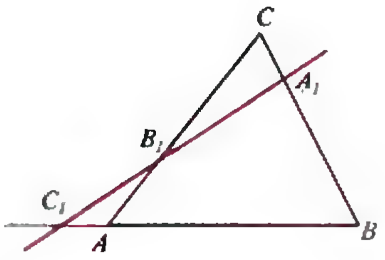


Рис. 2.

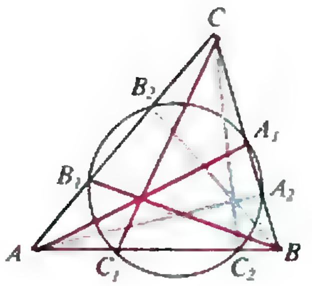


Рис. 3.

Теорема Менелая.*) *Пусть точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA треугольника ABC (рис. 2), а точка C_1 — на продолжении стороны AB этого треугольника. Для того чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

В дальнейшем нам также понадобятся следующие леммы (заметим, что каждая из них имеет и самостоятельное значение).

Лемма 1. *Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы треугольника ABC, A_2, B_2, C_2 — вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$, соответственно со сторонами BC, CA, AB треугольника ABC (рис. 3). Тогда отрезки AA_2, BB_2, CC_2 также являются чевианами треугольника ABC, т. е. пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Так как AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы треугольника ABC, то по теореме Чевы

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \qquad (1)$$

и, поскольку произведения секущих, проведенных к окружности из одной точки, на их внешние части равны, то $AC_2\cdot AC_1=AB_2\cdot AB_1$, $BA_2\times BA_1=BC_2\cdot BC_1$, $CB_2\cdot CB_1=CA_2\times CA_1$. Перемножив почленно эти равенства, получим

$$AC_2\cdot AC_1\cdot BA_2\cdot BA_1\cdot CB_2\cdot CB_1=$$
$$=AB_2\cdot AB_1\cdot BC_2\cdot BC_1\cdot CA_2\cdot CA_1,$$

или

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}\times$$
$$\times\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

откуда, учитывая (1), найдем, что

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_2}{B_2A}=1.$$

Лемма 2. *Пусть CC_1 — биссектриса внутреннего, а CD — внешнего угла при вершине C треугольника ABC (рис. 4). Тогда*

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC}{CB}, \qquad (2)$$

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}. \qquad (3)$$

Доказательство этого факта можно найти, например, в школьном учебнике геометрии (или провести самостоятельно).

Лемма 3. *Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — чевианы треугольника ABC (рис. 5), D — точка пересечения прямых B_1A_1 и AB. Тогда*

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AD}{DB}.$$

Доказательство. Поскольку точки A_1, B_1, D лежат на одной прямой, то по теореме Менелая

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BD}{DA}=1 \qquad (4)$$

и по теореме Чевы

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (5)$$

---

*) С доказательствами и некоторыми применениями теорем Чевы и Менелая к решению задач можно ознакомиться, прочитав, например, статьи П. Эрдниева и Н. Манцаева («Квант» № 3, 1990) и В. Орача («Квант» № 2, 1991). (*Прим. ред.*)

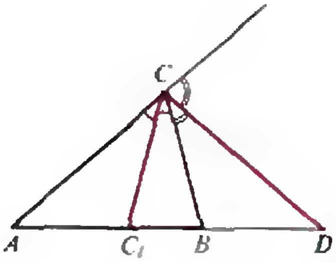


Рис. 4.

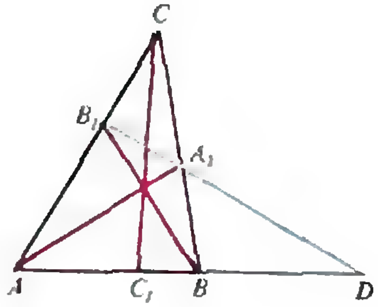


Рис. 5.

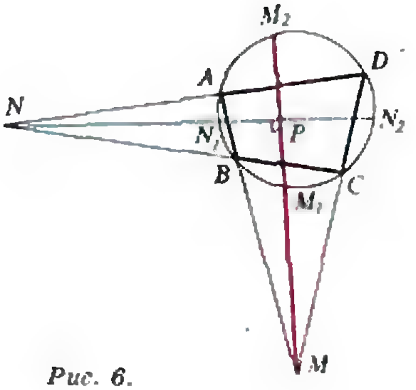


Рис. 6.

Перемножив почленно (4) и (5), найдем, что

$$\frac{AD_1}{C_1B}\cdot\frac{BD}{DA}=1 \text{ или } \frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AD}{DB}. \quad (6)$$

Лемма 4. *Пусть прямые AB и CD, AD и BC, содержащие стороны описанного четырехугольника $ABCD$, пересекаются соответственно в точках M и N (рис. 6). Тогда биссектрисы углов BMC и ANB перпендикулярны.*

Доказательство. Обозначим точки пересечения биссектрис углов BMC и ANB с описанной окружностью четырехугольника $ABCD$ соответственно через M_1, M_2, N_1, N_2 (см. рис. 6), и пусть угловые меры дуг BM_1, M_1C, CN_2, N_2D, DM_2, M_2A, AN_1, N_1B равны соответственно α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, α_8. Если P — точка пересечения прямых MM_1 и NN_1, то $\angle MPN=(\alpha_1+\alpha_8+\alpha_4+\alpha_5)/2$, но $\angle PNB=(\alpha_3-\alpha_8)/2=\angle PNA=(\alpha_4-\alpha_7)/2$, т. е. $\alpha_3-\alpha_8=\alpha_4-\alpha_7$ или $\alpha_3+\alpha_7=\alpha_4+\alpha_8$. Аналогично, $\alpha_6+\alpha_2=\alpha_5+\alpha_4$.

Сложив эти равенства, получим, что $\alpha_3+\alpha_7+\alpha_6+\alpha_2=\alpha_4+\alpha_8+\alpha_5+\alpha_1$. Итак, $\alpha_4+\alpha_8+\alpha_5+\alpha_1=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8)/2=360°/2=180°$, откуда $\angle MPN=90°$.

Доказательство теоремы 1

Приступим наконец к доказательству нашей теоремы. Пусть окружность, проходящая через точки A_1, B_1, C_1 пересекает стороны AC и BC неравнобедренного треугольника ABC в точках B_2 и A_2 и касается основания AC (рис. 7). Тогда из леммы 1 следует, что отрезки AA_2, BB_2, CC_1 — чевианы треугольника ABC, а из лемм 2 и 3 — что B_1A_1, B_2A_2 и AB пересекаются в одной точке D, совпадающей с основанием биссектрисы внешнего угла при вершине C (поэтому отрезки B_1A_1 и B_2A_2 не могут пересекаться внутри треугольника ABC, и точки B_1, B_2 на стороне AC расположены в том же порядке, что и точки A_1, A_2 на стороне BC). Проведем биссектрису DP угла B_1DB_2 и применим лемму 4 к вписанному четырехугольнику $A_1A_2B_2B_1$. Получим, что $\angle CPD=90°$, но $\angle PCD=90°$, как угол между биссектрисами CC_1 и CD смежных углов. Итак, оказалось, что из одной точки D на прямую CC_1 опущены два перпендикуляра. Полученное противоречие доказывает теорему.

Фактически мы доказали следующее более сильное утверждение: *пусть в треугольнике ABC отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются на биссектрисе CC_1, тогда, если окружность, проходящая через точки A_1, B_1, C_1, касается стороны AB и пересекает остальные стороны треугольника ABC (а не их продолжения), то этот треугольник — равнобедренный.*

Когда выполнены условия теоремы?

Выясним теперь, для каких треугольников окружность, описанная около оснований биссектрис, не пересекает продолжений их сторон. Покажем сначала, что если все углы треугольника ABC меньше 120°, то треугольник $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются основания биссектрис тре-

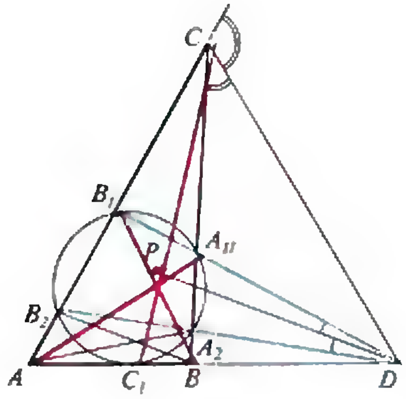


Рис. 7.

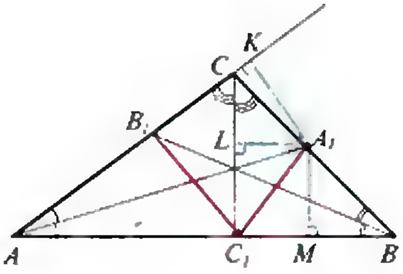


Рис. 8.

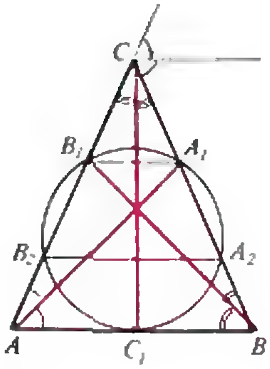


Рис. 9.

угольника ABC, остроугольный. Действительно, пусть в треугольнике ABC $\angle ACB<120^\circ$, K, L, M — основания перпендикуляров, опущенных из точки A_1 соответственно на прямые AC, CC_1, AB (рис. 8). Тогда, поскольку $\angle KCB>60^\circ$, а $\angle C_1CB<60^\circ$, то $\angle KCB>\angle C_1CB$ и $KA_1>LA_1$, но $KA_1=MA_1$, так как AA_1 — биссектриса угла CAB, поэтому $MA_1>LA_1$ и $\angle CC_1A_1<\frac{1}{2}\angle CC_1B$. Аналогично, $\angle CC_1B_1<\frac{1}{2}\angle CC_1A$, откуда $\angle B_1C_1A_1<\frac{1}{2}(\angle CC_1B+\angle CC_1A)=180^\circ/2=90^\circ$. Итак, против угла треугольника ABC, меньшего 120°, лежит острый угол треугольника $A_1B_1C_1$.

Поскольку для нетупоугольного треугольника ABC попарные суммы его углов с одноименными углами треугольника $A_1B_1C_1$ меньше 180°, то вершины треугольника ABC лежат вне описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, т. е. эта окружность не пересекает продолжений сторон треугольника ABC. Из этого факта и из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Если окружность, проходящая через основания биссектрис внутренних углов нетупоугольного треугольника, касается одной из его сторон, то этот треугольник — равнобедренный.*

Таким образом, неравнобедренный треугольник, у которого указанная окружность касается одной из его сторон, обязательно тупоугольный, причем точка касания лежит на большей стороне.

Окончательно прояснить ситуацию поможет следующий интересный факт, который мы приведем без доказательства*): окружность, описанная около оснований биссектрис некоторого треугольника, высекает на прямых, содержащих стороны этого треугольника, такие хорды, что одна из них равна сумме двух других.

Поскольку в нашем случае окружность, описанная около оснований биссектрис треугольника ABC, касается одной из его сторон, то хорды, высекаемые этой окружностью на двух других сторонах, равны. Предположим сперва, что рассматриваемая окружность *не пересекает продолжений* сторон треугольника ABC. Тогда $A_2A_1=B_2B_1$ (см. рис. 7) и вписанный четырехугольник $A_2A_1B_1B_2$ будет равнобочной трапецией.

С другой стороны, из леммы 3 вытекает, что если одна из прямых A_1B_1 и A_2B_2 пересекает прямую AB в точке D, то и вторая пересекает AB в той же точке. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 параллельны, это означает, что каждая из них в свою очередь параллельна основанию AB треугольника ABC. Итак, мы получили, что биссектриса CC_1 проходит через точку пересечения диагоналей трапеции ABA_1B_1, поэтому точка C_1 совпадает с серединой стороны AB и треугольник ABC — равнобедренный (рис. 9).

В этом случае биссектриса CC_1 внутреннего угла при вершине C является осью симметрии равнобочной тра-

---

*) Идея доказательства содержится в указании к задаче 198 на с. 153 книги И. Шарыгина «Задачи по геометрии. Планиметрия» (М.: Наука, 1986).

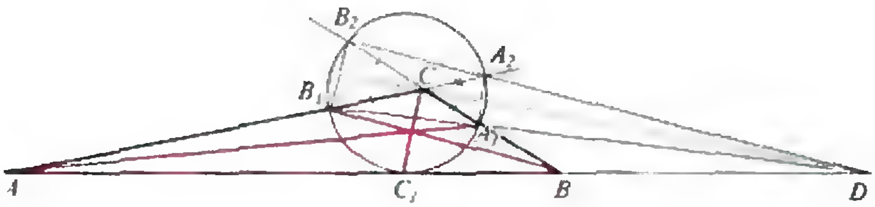


Рис. 10.

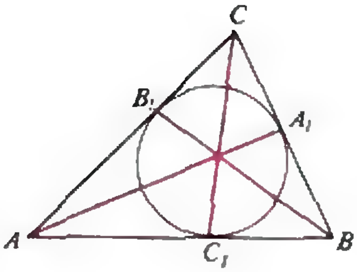


Рис. 11.

пеции $A_2A_1B_1B_2$, основания которой параллельны биссектрисе внешнего угла при этой вершине.

В случае, когда описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ пересекает продолжения сторон треугольника ABC, картина меняется: хотя вписанный четырехугольник $A_1A_2B_2B_1$ также будет равнобочной трапецией (в силу равенства диагоналей A_1B_2 и B_1A_2), основания этой трапеции параллельны внутренней биссектрисе CC_1, а осью симметрии трапеции $A_1A_2B_2B_1$ является внешняя биссектриса CD. В этом случае внешняя биссектриса CD может быть непараллельна основанию AB и поэтому треугольник ABC не обязательно равнобедренный (рис. 10).

Таким образом, из того, что окружность, описанная около оснований биссектрис нетупоугольного треугольника ABC, касается одной из его сторон, следует, что этот треугольник равнобедренный. Если же точки A_1, B_1, C_1 совпадают с основаниями медиан или высот произвольного треугольника ABC, то из факта касания описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ одной из сторон треугольника ABC вытекает, что треугольник ABC равнобедренный (как известно, основания медиан и основания высот произвольного треугольника лежат на одной окружности — так называемой окружности девяти точек этого треугольника, поэтому, если эта окружность касается одной из сторон треугольника, то одна из его высот совпадает с медианой, т. е. треугольник оказывается равнобедренным).

В связи с этим естественно поставить следующий вопрос. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — произвольные чевианы треугольника ABC и окружность, проходящая через точки A_1, B_1, C_1, касается одной из сторон этого треугольника. Для каких треугольников ABC из выполнения данного условия будет следовать их равнобедренность? Мы уже установили, что если точки A_1, B_1, C_1 совпадают с основаниями высот или медиан произвольного треугольника ABC, то выполнение указанного условия влечет равнобедренность треугольника. Если же точки A_1, B_1, C_1 являются основаниями биссектрис треугольника ABC, то при выполнении данного условия равнобедренными будут по крайней мере нетупоугольные треугольники ABC.

Рассмотрим теперь вписанную окружность треугольника ABC, касающуюся его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Поскольку $AB_1=AC_1$, $BC_1=BA_1$, $CA_1=CB_1$, то

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

и по теореме Чевы отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (рис. 11). Итак, вписанная окружность треугольника ABC проходит через основания A_1, B_1, C_1 чевиан AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC и касается всех его сторон в тех же точках A_1, B_1, C_1. Так как вписать окружность можно в любой треугольник, то касание окружности, описанной около оснований чевиан треугольника ABC, со сторонами этого треугольника может в общем случае не накладывать никаких ограничений на треугольник ABC.

Практикум абитуриента

Внимание: ловушка!

Б. КОРСУНСКИЙ

Абитуриент (лат.) — тот, кто должен уйти.

Все чаще в последнее время на устных экзаменах или собеседованиях по физике абитуриентам предлагаются нестандартные, парадоксальные задачи, где ответ, казалось бы, очевиден, но... неверен. Чтобы добраться до верного ответа, нужно вспомнить о таких физических эффектах, которые обычно не играют роли в «похожих» (в кавычках!) ситуациях. Вот несколько примеров.

Задача 1. *С воздушного шара, находящегося на большой высоте, отпускают без начальной скорости мяч для большого тенниса. Мяч падает на землю и упруго отскакивает. Найдите его ускорение сразу после отскока.*

Здесь надо вспомнить о том, что тела при падении не испытывают сопротивления воздуха только в вакууме или... в школьном задачнике по физике. Конечно же, «волосатый» и не слишком тяжелый теннисный мячик довольно быстро перестанет ускоряться — ведь сила сопротивления в этом случае пропорциональна скорости. Другими словами, при падении с «большой» высоты сила сопротивления воздуха около земли будет равна по модулю силе тяжести. А после отскока эти силы будут одинаковыми не только по модулю, но и по направлению. Тогда ответ становится очевидным: $a=2g$. (Это ровно вдвое больше вашего первоначального «очевидного» ответа, не так ли?)

Задача 2. *Плоский конденсатор заряжен до разности потенциалов U и отключен от источника. Небольшой заряд Δq берется с края одной обкладки и переносится на другую так, как это показано на рисунке 1. Найдите совершенную при этом работу.*

Известно, что напряженность электрического поля *снаружи* конденсатора равна 0, а значит, очевиден ответ: $A=0$. Теперь, не дожидаясь вопроса экзаменатора, спросите себя сами: а если заряд пронести *внутри* конденсатора (рис. 2)? Казалось бы, работа измениться не должна — ведь электрическое поле потенциально, т. е. работа по переносу заряда *не зависит* от траектории. Но тогда получается... второй очевидный ответ: $A=U\Delta q$. Он-то и верен!

К ошибке (в первом ответе) нас привело стандартное предположение об отсутствии силовых линий снаружи.

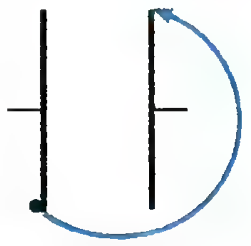


Рис. 1.

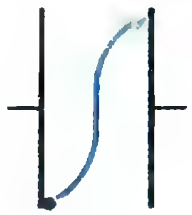


Рис. 2

Заметим, что в обеих рассмотренных задачах эффект, которым «хочется» пренебречь, отнюдь не мал. Но иногда и действительно малый эффект может оказаться определяющим.

Задача 3. *На край абсолютно гладкого горизонтального круглого стола осторожно положили гладкий шарик так, чтобы он не упал. Останется ли шарик в покое?*

Наученные горьким опытом, вы сразу скажете: «Нет!» А потом подумаете: «А почему, собственно?» Но если вы вспомните, что Земля — шар, то станет ясно, что положение равновесия нашего шарика находится в центре стола. Следовательно, шарик будет совершать колебания около этого положения.

Кстати, несложно рассчитать их период (проделайте это самостоятельно) и получить результат: $T=84$ мин. Как видно, ускорение здесь очень мало, но в «гладких» условиях вполне способно себя проявить.

В заключение — несколько «ловушек» для самостоятельного решения.

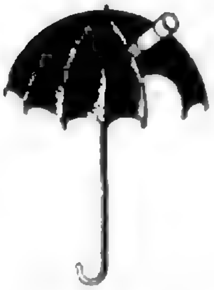
1. Мяч бросают вертикально вверх. Какое время больше: подъема или спуска?

2. Два автомобиля едут рядом по шоссе со скоростью v. Затем один из них удваивает скорость. В результате стоящий на шоссе наблюдатель считает, что кинетическая энергия первого автомобиля выросла на $^3/_2\ mv^2$, а отставший шофер уверен, что эта энергия выросла только на $^1/_2\ mv^2$. Рассудите их: ведь не может же быть так, чтобы из-за смены системы отсчета топливо стало гореть втрое «хуже» (а тем более — втрое «лучше»).

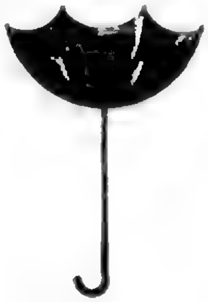
3. Гладкая однородная веревка длиной l и массой m переброшена через небольшой блок так, что вначале система находится в равновесии. Веревку немного смещают, и она начинает соскальзывать с блока. С какой силой действует веревка на блок в тот момент, когда длина веревки с одной стороны равна $l/3$? Подсказка: ответ $^8/_9\ mg$ — неверен.

„Квант" улыбается

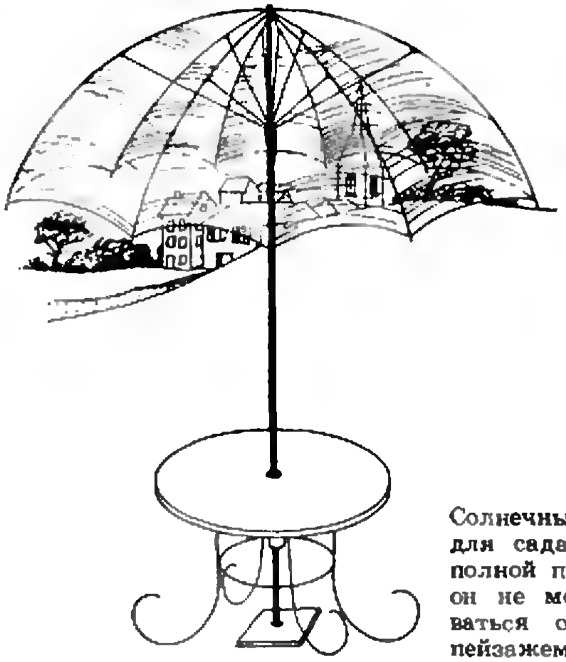
Из «Каталога невозможных объектов» Карельмана



Зонтик-обсерватория. Раздвигается, как купол астрономической обсерватории, позволяя просунуть подзорную трубу и продолжать наблюдение.



Зонтик для сухого климата. Благодаря вогнутой форме, позволяет собирать столь редкую в этих краях дождевую воду.



Солнечный зонтик для сада. Благодаря полной прозрачности, он не мешает любоваться окружающим пейзажем.

Перевод с французского

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском государственном университете работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 9—11 классов общеобразовательных школ любого государства, входившего в состав бывшего СССР.

В ЗШ 5 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 9—11 классов, на биологическое — только учащиеся 10 классов, на экономическое — только учащиеся 11 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школах под руководством учителей. Руководитель кружка набирает и зачисляет в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ и дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а работы членов кружка проверяет руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 10—11 классов ЗШ (тех, кто будет учиться в этих классах в следующем учебном году) приглашается в Летнюю школу при НГУ. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно-исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают и развлекаются. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление, оформленное по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
Класс, в котором вы учитесь в своей школе	9
Отделение ЗШ, на котором вы хотите учиться (можно указать два отделения)	математическое (математическое и физическое)
Подробный домашний адрес с обязательным указанием почтового индекса	632149, Новосибирская обл., с. Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября*.

Для получения ответа вложите конверт с маркой с написанным на нем вашим домашним адресом.

Решения задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работу отошлите вместе с заявлением, причем *только простой бандеролью* (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку, тетрадь должна быть тонкой, так как средства на почтовые расходы в ЗШ ограничены). В тетрадь с решениями вложите листок бумаги размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

За обучение в течение одного года на одном отделении необходимо заплатить 45 рублей. Бесплатное обучение в ЗШ сохраняется для детей-сирот, обучающихся в школах-интернатах, и детей из многодетных семей (в которых пять и более детей до 18 лет, находящихся на иждивении родителей).

Оплату следует производить почтовым переводом на р/с № 000141504 в Советском РКЦ г. Новосибирска. В графе «Вид платежа» напишите: «за обучение в ЗШ при НГУ». Квитанцию об оплате *вклейте в тетрадь с первым заданием.* Тетради без квитанции проверяться и возвращаться не будут.

Наш адрес: 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Первое задание по физике

После разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться с задачами для других классов, и понравившиеся задачи — попробовать решить.

Экспериментальная задача (одна для поступающих во все классы).

Длинную палку (желательно более метра) положите горизонтально на указательные пальцы рук, затем руки медленно сводите. Проделайте этот эксперимент и объясните наблюдаемое явление поочередного проскальзывания пальцев относительно линейки.

Теоретические задачи

9 класс

1. Две лампочки (одна мощностью 60 Вт, другая — 150 Вт) включены в сеть последовательно. Какая из них горит ярче?

2. Гантелька, состоящая из двух шариков, которые сделаны из одного и того же материала и соединены невесомым стержнем, находится внутри жидкости (рис. 1). Гантелька уравновешена так, что расстояния между центрами шариков и опорой равны l_1 и l_2. Объем одного из шариков V_1. Найдите объем V_2 другого шарика, если равновесие гантельки не нарушается и в отсутствие жидкости.

3. Снаряд разрывается на высоте h на множество мелких осколков. Определите радиус поверхности, которую покроют осколки к моменту времени t после взрыва, если они разлетаются во все стороны с одной и той же скоростью v. Считайте, что поле тяжести отсутствует.

4. Оцените, на каком расстоянии от вас находится человек, если его рост и диаметр заходящего Солнца кажутся вам одинаковыми.

10 класс

1. Решите задачу 4 для 9 класса.

2. Определите минимальное время движения автобуса от одной остановки до другой, если расстояние между остановками l. При разгоне автобус может развивать максимальное ускорение a_1, а при торможении — двигаться с ускорением $-a_2$.

3. С каким горизонтальным ускорением надо двигать кирпич, чтобы шайба, прислоненная к его вертикальной поверхности, не падала вниз (рис. 2)? Коэффициент трения скольжения между шайбой и поверхностью кирпича μ.

4. Два груза, массы которых одинаковы, связаны нитью, переброшенной через блок (рис. 3). Определите ускорение грузов, если наклонная плоскость составляет угол α с горизонтом. Трения нет.

5. Груз массой m, соединенный с невесомым тросом пружинной жесткостью k, опускают с постоянной скоростью v (рис. 4). Определите максимальное натяжение троса при его мгновенной остановке.

11 класс

1. Решите задачу 4 для 9 класса.

2. Решите задачу 2 для 10 класса.

3. Найдите ускорение длинной гусеницы, съезжающей по наклонной плоскости без проскальзывания (рис. 5). Массой рамы и колес можно пренебречь. Угол наклона плоскости к горизонту α.

4. Закрытый поршнем цилиндр объемом $V=1$ м^3, заполненный идеальным газом, находится на большой глубине в океане. Какое количество теплоты будет отведено от газа, если цилиндр опустить еще на $\Delta h=1$ м?

5. В замкнутом сосуде находятся порошок и газ. Когда температуру сосуда увеличили в 1,1 раза, давление газа увеличилось в 11 раз. Во сколько раз уменьшится давление газа, если температуру уменьшить в 1,1 раза? Объем порошка при увеличении температуры увеличивался, а при уменьшении уменьшался на одну и ту же величину. Объем сосуда не менялся.

6. Стержень массой m и длиной l висит на легких спицах длиной h в вертикальном однородном магнитном поле с индукцией B и может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси

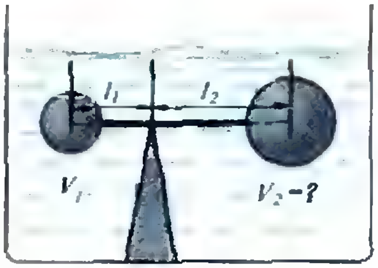


Рис. 1

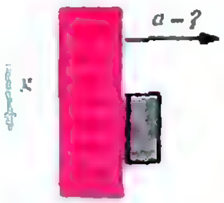


Рис. 2

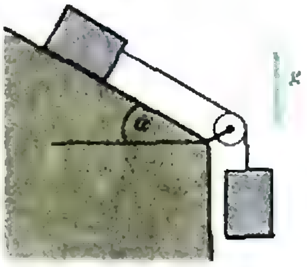


Рис. 3.

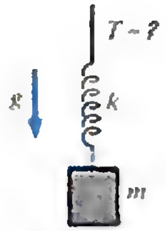


Рис. 4.

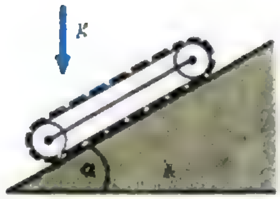


Рис. 5.

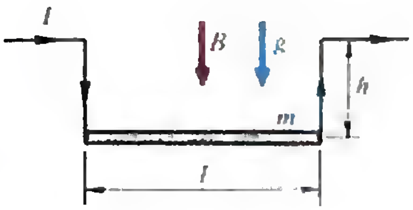


Рис. 6.

вместе со спицами как одно целое (рис. 6). Определите максимальную высоту подъема стержня после того, как по нему пропустили постоянный ток I.

Первое задание по математике

9 класс

1. У продавца имеется 2 мешка леденцов — в одном леденцы по 10 рублей за килограмм, другом — по 15 рублей за килограмм. Стоимости мешков одинаковые. Леденцы равномерно перемешали. По какой цене нужно продавать полученную смесь?

2. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 17°. Найдите угол между высотой и медианой, проведенными в этом треугольнике из вершины прямого угла.

3. Решите уравнение

$$|x-3|+|x-5|=2.$$

4. Решите уравнение

$$(9-x^2)\cdot\sqrt{2-x}=0.$$

5. Внутри окружности с центром O задана точка M. С помощью циркуля и линейки впишите в эту окружность равносторонний треугольник так, чтобы одна из его сторон проходила через точку M.

10 класс

1. Первая и вторая бригады вместе изготовили в два раза больше деталей, чем третья, а первая и третья вместе — в три раза больше, чем вторая. Какая бригада изготовила наибольшее количество деталей?

2. Решите уравнение

$$|x-|4-x||-2x=4.$$

3. Решите уравнение

$$2\sqrt{1-x^2}-x+2=0.$$

4. Каждая диагональ выпуклого четырехугольника делит его на два равных по площади треугольника. Докажите, что этот четырехугольник — параллелограмм.

5. Решите задачу 5 для 9 класса.

11 класс

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8.$$

2. Найдите угол между непересекающимися диагональю куба и диагональю грани.

3. В треугольнике две медианы пересекаются под прямым углом. Их длины равны n и m соответственно. Найдите площадь треугольника.

4. Постройте параллелограмм по одному углу и диагоналям.

5. При каких значениях параметра c уравнение $x-2\sqrt{x}+c=0$ имеет единственное решение?

Заочная школа программистов

При Высшем колледже информатики Новосибирского государственного университета (ВКИ НГУ) работает Заочная школа программистов (ЗШП) для учащихся 9 классов.

Чтобы стать учеником ЗШП, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ВКИ НГУ заявление с просьбой выслать первое задание.

Обучение в течение одного года стоит 30 рублей. Оплату следует производить почтовым переводом на р/с № 141009 в Советском РКЦ г. Новосибирска (МФО 224916). В графе «Вид платежа» напишите «За обучение в ЗШП при ВКИ НГУ». Квитанцию об оплате подклейте к заявлению. Вместе с заявлением вышлите конверт с вашим домашним адресом.

Наш адрес: 630058, Новосибирск-58, ул. Русская, 35, ВКИ НГУ, Заочная школа.

Р-значит ракета

Есть ли жизнь на Европе?

(интервью с членом-корреспондентом Российской академии наук Н. Кардашевым)

Ровно 30 лет назад вышла книга известного советского ученого-астрофизика И. Шкловского. Называется она «Вселенная, жизнь, разум». И хотя с тех пор книга эта неоднократно переиздавалась, резонанс, который был вызван тем первым выпуском, забыть невозможно. И это понятно. В то время звезды открылись нам всем совершенно под другим углом: ведь только что человек впервые вырвался в космос! Казалось, еще несколько лет и — начнется освоение планет, а затем — других звездных систем. Ну и, конечно, не за горами и встреча с внеземными цивилизациями.

Но шли годы. Все пристальнее изучали звездное небо ученые, все мощнее становились их приборы, постепенно ушли из жизни многие энтузиасты поиска внеземных цивилизаций, в том числе и сам автор книги, а результата все нет и нет... В чем причина этой «неудачи»?

Каков сегодняшний взгляд ученых на проблему поиска внеземных цивилизаций (ВЦ) и каковы перспективы? С этими вопросами наш корреспондент В. Николаев обратился к одному из учеников и ближайших соратников И. Шкловского, директору Астрокосмического центра Физического института им. П. Н. Лебедева, участнику и разработчику международной программы поиска ВЦ, члену-корреспонденту РАН Н. Кардашеву.

В. Н.: Николай Семенович, вы, конечно, помните ту тридцатилетней давности презентацию книги «Вселенная, жизнь, разум»?

Н. К.: Да, только я не знал, что это была презентация...

В. Н.: Действительно, тогда это звучало значительно скромнее. Просто в Доме ученых собрались соратники автора, ученые и энтузиасты космических исследований. Обсуждалась книга, но всех особенно волновала одна из центральных идей — теория множественности разумной жизни во Вселенной, приверженцем которой был сам Шкловский. Прошло, однако, не так много времени и, как мне кажется, автор не просто пересмотрел некоторые свои взгляды. Он стал сугубо скептически относиться к самой возможности существования ВЦ не только в окрестностях Солнечной системы, но и далеко за ее пределами.

Н. К.: Насколько я знаю, это не совсем так. В последние годы своей жизни, а умер Шкловский в 1985 году, он был слишком озабочен тенденциями развития нашей цивилизации. Именно размышления над политическими, экономическими и экологическими проблемами сделали его исключительно пессимистичным. Он предвидел большие потрясения, которые ожидают нашу цивилизацию, и полагал, что с подобными проблемами должны столкнуться и другие. Отсюда он делал вывод, что ВЦ, прошедших путь до стадии очень высокого развития, не должно быть много. В то же время он не исключал, что во Вселенной мы все же не одни.

В. Н.: Надо полагать, что уж вы-то точно не считаете нашу цивилизацию уникальной?

Н. К.: Нет, нет, появление ВЦ — это закон природы. Такой же, как закон тяготения. Нет никаких научных данных, заставляющих считать нашу цивилизацию уникальной.

В. Н.: Так же, как нет фактов и того, что мы не одни, а ведь поиски продолжаются уже десятки лет. Но, может быть, найдены «сомнительные» места в пространстве или явления, с ними связанные, которые дают надежды?

Н. К.: Нет, но ведь и больших капиталовложений в эти исследования не делалось. Использовались только те средства, которыми располагали астрономы, а не созданные специально для такого поиска. Причем применялись даже не лучшие телескопы, а рядовые, рядовая аппаратура. Поэтому и изучение идет не так быстро, как хотелось бы, ну и соответственно результаты... Но по мере развития техники астрономических исследований, я думаю, положение будет меняться.

Мы столкнулись с новыми объектами, которые, возможно, окажутся тесно связанными с проблемой ВЦ. Нам необходимо разобраться со многими вопросами, например с проблемой скрытой массы. Можно ли двигаться дальше, если 90 % материи Вселенной мы просто не видим и не представляем, что это такое...

В. Н.: Чтобы ее обнаружить, наверное, нужны принципиально новые приборы?

Н. К.: Так как неизвестно, что это такое, трудно сказать, какими должны быть приборы. Поэтому перебираются разные возможности. Используются телескопы всех диапазонов. Эксперименты, которые планируются на ближайшие 10 лет, может быть, позволят получить ответ, но пока, кроме того, что скрытая масса оказывает существенное влияние на тяготение в нашей галактике, в межгалактическом пространстве, мы ничего не можем сказать.

В. Н.: Ищем вдали, а со страниц газет и из телевизионных передач все больше «узнаем» о контактах с другими цивилизациями, о наблюдениях НЛО. Вот и полтергейст относят к «шуткам» представителей других форм жизни...

Н. К.: Я думаю, что здесь мы имеем дело с некой болезнью, типа массового психоза. И это психическое заболевание, как ни странно, связано, в основном, с нашей страной. Вызвано оно тяжелым экономическим положением, социальным разладом. За рубежом и раньше были люди, интересовавшиеся и увлекавшиеся «летающими тарелочками», но их количество не велико. Отношение же ученых к этим вещам всегда было крайне скептическим. Никаких фактических данных, зарегистрированных и научно подтвержденных, нет.

В. Н.: Но говорить об этом только как о сегодняшнем явлении, наверное, нельзя. Вам, безусловно, известна работа Циолковского «Воля Вселенной», в которой он пишет: «Есть еще ряд явлений, правда, в большинстве случаев столь же сомнительных... Они говорят нам о проникновении каких-то разумных сил в наш мозг и вмешательстве их в человеческие дела. Я сам два раза в жизни был свидетелем таких явлений и потому не могу их отрицать. ...На этом основании я допускаю, что некоторая часть такого рода явлений не иллюзия, а действительное доказательство пребывания в космосе неизвестных разумных сил, каких-то существ, устроенных не так, как мы, по крайней мере, из несравненно более разреженной материи. Может быть, это наследие убежавших дециллионов лет прошедшего времени, создавших эти существа. Последние, как видно, сохранились до сих пор»...

Н. К.: Для уровня науки того времени это были смелые идеи. Современная наука не исключает совершенно новых видов вещества, новых типов взаимодействий, неизвестных сегодня, и ученые работают над этим. Но одной из задач науки является и борьба с суевериями всякого рода. А вера в чертовщину отражает уровень грамотности, а вернее, неграмотности населения.

В. Н.: Вернемся снова в далекий космос. Чем сегодня отличается стратегия поиска ВЦ?

Н. К.: Исчезла эйфория первых лет, когда казалось, сто́ит включить чувствительный приемник и... радиопослания от ВЦ так и хлынут. Сегодня эту проблему наскоком никто не надеется решить. Мы перестали рассчитывать только на сигналы ВЦ, а ищем проявления их деятельности, например большие космические конструкции. Среди технических «новинок» — миллиметровый диапазон. С ним мы связываем большие надежды.

В. Н.: Ограничено ли расстояние, на котором ведутся поиски?

Н. К.: Практически нет, ведь уже сегодня мы можем заглянуть на 10 миллиардов световых лет. И скорее всего, это не предел.

В. Н.: Каким образом вы рассчитываете отличить искусственный объект от естественного образования?

Н. К.: Действительно, это весьма непросто. По-видимому, сначала надо обнаружить очень крупные образования твердого тела, соизмеримые, скажем, с Солнечной системой, что, по нашему мнению, является предпосылкой для возможности длительного хранения информации. Но это не единственный признак. Такие объекты должны иметь исключительно сложную конструкцию, выделяющую их среди других небесных тел.

В. Н.: А сохранился ли какой-нибудь шанс обнаружить жизнь (пусть хоть простейшие ее формы) в пределах нашей планетной системы? Тем более что результаты эксперимента, проведенного на поверхности Марса с помощью космического аппарата «Викинг», положительными не назовешь.

Н. К.: Я полагаю, программа «Викинга» когда-нибудь получит свое продолжение. Ведь эксперимент, который представляется очевидным, технически тогда не был еще возможен. Я имею в виду изучение структуры почвы с помощью чувствительного микроскопа. Это позволило бы провести поиски не только живых, но и умерших в далеком прошлом микроорганизмов.

Среди других объектов Солнечной системы очень интересным представляется спутник Юпитера — Европа. Она практически вся покрыта огромным слоем льда, в котором имеется множество трещин. Не исключено, что подо льдом находится вода, а в ней могут оказаться какие-то необычные живые организмы. К сожалению, такие исследования пока не планируются.

В. Н.: А исследование Марса?

Н. К.: В этом году намечается запуск американского аппарата «Марс орбитер», в 1994-м — наших космических аппаратов.

В. Н.: А существует ли космический аппарат или технический проект, основной целью которого был бы поиск ВЦ?

Н. К.: Специальных космических аппаратов пока нет, а вот наземные сооружения создаются. В частности, крупнейший в мире радиотелескоп, который строится в горах Узбекистана, на высоте 2500 метров над уровнем моря. Диаметр его антенны — 70 метров. В 1994 году телескоп должен начать работу в диапазоне коротких миллиметровых волн. Этот телескоп будет лучшим в мире. Несмотря на нашу бедность, хорошо подумав и все взвесив, мы решили его строить. С его помощью, в частности, будут осуществляться программы поиска жизни во Вселенной. Кстати, на нашем телескопе выразили желание работать и американские ученые.

Одновременно и в США создаются инструменты для наблюдения с поверхности Земли. Надо сказать, что в Соединенных Штатах даже создан институт по поиску ВЦ. Он финансируется, и очень прилично, Национальным управлением по космонавтике и аэронавтике (НАСА). У нас с этим институтом весьма неплохие отношения. Сейчас мы разрабатываем совместную программу.

Что касается космических аппаратов, то в начале 95 года планируется осуществить международный проект. На орбиту искусственного спутника Земли будет запущен «Радиоастрон» — спутник с 10-метровым радиотелескопом на борту. Спутник создается в НПО им. С. А. Лавочкина, но в его разработке принимают участие и узбекские конструкторы, и специалисты из Российской академии наук, и из НАСА, а также из многих крупнейших обсерваторий мира. Сам спутник хоть и не связан напрямую с поиском ВЦ, а ориентирован на поиск скрытой массы во Вселенной, позволит, надеюсь, продвинуться и в поисках ВЦ.

Эти два радиотелескопа, работая как единая система, позволят получать изображения небесных объектов с недостижимым на Земле разрешением — до миллионной доли угловой секунды.

В. Н.: Мы проводим эксперименты по обнаружению жизни на других планетах, а в будущем, вероятно, будем проводить эксперименты и по заселению планет земными формами. Наверное, поэтому можно предположить, что и на Земле жизнь появилась искусственным путем, в результате какого-то внеземного эксперимента?

Н. К.: Такая гипотеза существует. Но никакими данными, способными подтвердить ее, мы не располагаем.

В. Н.: Ну а какое определение понятия «жизнь» вам кажется наиболее точным? Ведь грань между живым и неживым весьма хрупкая.

Н. К.: Хороших определений много. Среди них я бы отметил такое: живым является то, что способно целенаправлено собирать информацию об окружающем мире и о самом себе. Правда, между живым организмом и вычислительной машиной есть много общего — в сборе информации, ее кодировании. Возможно, ученые и смогут создать искусственный разум. Вообще это очень интересная область исследований. Их предметом, например, является определение на научном уровне понятия души.

В. Н.: Отсюда один шаг к вечному вопросу о бессмертии души.

Н. К.: Никаких фактов об этом, к сожалению, нет. Хотелось бы верить в бессмертие, но, думаю, что говорить можно о «реализации» бессмертия лишь в далеком будущем. Может быть, успехи в создании искусственного разума приведут лет через 100 или 200 к возможности бессмертия для каждого индивидуума. Во всяком случае, никаким физическим законам это не противоречит...

В. Н.: Представим себе, что ВЦ обнаружена. Что это даст человечеству, не остановится ли оно в своем развитии?

Н. К.: Сам факт существования ВЦ, находящейся на очень высоком уровне развития, даст человечеству надежду на преодоление имеющихся сегодня трудностей, а более подробная информация, возможно, подскажет, как вести себя, укажет оптимальное направление.

Машина Тьюринга

А КОТОВА

Героиня этого повествования родилась в мае 1936 года в статье «О вычислимых числах с приложением к проблеме разрешения» английского логика Алана Мэтисона Тьюринга. По-видимому, идея носилась в воздухе, поскольку аналогичная работа американского математика Э. Поста появилась на свет всего лишь четырьмя месяцами позже.

Все современные вычислительные машины могут считать себя духовными наследницами нашей героини. Духовными потому, что она — персонаж вымышленный. Ее отец, Тьюринг, объяснив, как должно работать его детище, не стал вдаваться в технические подробности, а углубился в создание теории алгоритмов вообще и для своей машины в частности. (Строго говоря, «алгоритм для машины Тьюринга» — выражение неточное. По Тьюрингу, под каждую конкретную задачу изготовляется своя машина со всеми необходимыми для данной задачи атрибутами. По сути дела, эта машина — в некотором роде синоним понятия «алгоритм».)

Оставшись на бумаге и потеряв надежду воплотиться «в железе», машина Тьюринга начала странную жизнь воображаемого инструмента для изучения разрешимости математических проблем. На этом поприще она и прославилась, заняв прочное место в новом разделе математики — теории конечных автоматов.

Элементарные действия вычислителя

Представьте себе, что вам нужно вычислить значение некоторой функции, например $f(x, y, z)=(x+y)^2-\sqrt{z-(x+y)}$, для заданного множества значений аргументов, например $\{(1, 2, 3), (2, 3, 9)\}$. Выполняя это пустяковое задание, следите за своими действиями.

Итак, в вашем распоряжении конечный набор символов: буквы, цифры, скобки. Перед вами предписание, содержащее конечное число указаний: сложить, вычесть, возвести в степень, извлечь корень. Вы начинаете с того, что складываете 1 и 2, т. е. рассматриваете конечное число вхождений этих символов. Вычислив первое слагаемое, вы временно забываете о нем и переходите ко второму. Добравшись до подкоренного выражения, вы вспоминаете, что значение $x+y$ уже подсчитано, и используете его в вычислении. В конце концов, по прошествии какого-то времени, вы получаете некоторое выражение, представляющее собой значение функции для данного значения аргумента.

Тьюринг задался вопросом: нельзя ли действия вычислителя разложить на некоторые элементарные действия, так что каждый шаг, предпринимаемый им, был бы их комбинацией? Эти элементарные действия могли бы быть следующими: распознавание символа, стирание его, выписывание символа, перемещение из точки наблюдения символа в соседнюю точку и изменение имеющейся в памяти информации.

Вот тут-то и выходит на сцену машина, умеющая выполнять такие элементарные шаги.

Устройство машины Тьюринга

Машина состоит из бесконечной ленты, разделенной на клеточки, и считывающе-записывающей головки. Математики говорят, что лента «потенциально бесконечна». Это значит, что она, вообще говоря, может быть и конечной, но при необходимости к ней подклеиваются дополнительные куски. (Тот, кто все любит пощупать, даже теоретическую модель, может построить себе небольшую машинку Тьюринга из полоски клетчатой бумаги.) Клетка может находиться в одном из двух состояний: либо она пуста, либо в ней записан один из заданного конечного списка символов $s_1, \ldots, s_n$. Если обозначить пустую клетку символом Λ, то каждая ячейка ленты будет удовлетворять одному из $n+1$ условий (набор $\{\Lambda, s_1, \ldots, s_n\}$ называют *алфавитом* машины).

Считывающая головка в каждый момент времени видит ровно одну клетку, находящуюся в ее поле зрения, поэтому, чтобы приблизиться к условиям ее работы, вы можете сделать окошко соответствующего размера в куске картона и глядеть через него. Она может прочесть символ, содержащийся в данной ячейке, стереть его или впечатать на его место другой символ из алфавита, в том числе и тот же самый (тогда содержимое клетки не изменится). Ранее записанный символ при этом стирается. Кроме того, головка может переместиться на одну клетку вправо, влево или остаться на месте. Машина может находиться в одном из конечного числа *состояний* $q_0, q_1, \ldots, q_m$.

Информацию о том, что записано на ленте, какая клетка ленты в данный момент находится в поле зрения головки и какое следующее действие надо предпринять, Тьюринг называет «полной конфигурацией» машины.

Получив «на входе» символ из обозреваемой клетки, машина однозначно реагирует на него, сообразуясь со своим состоянием, и совершает элементарное действие (впечатывает в клетку какой-либо символ, перемещает или не перемещает головку, переходит в следующее состояние или останавливается).

Работа машины Тьюринга

Итак, по заданному набору символов на ленте наша машина должна выдать результат, состоящий из тех же символов (в том числе пустых), и остановиться.

Договоримся, что в начальный момент в поле зрения всякой машины Тьюринга находится самая левая непустая ячейка ленты.

Рассмотрим сначала простейшую машину Тьюринга, имеющую всего один непустой символ в алфавите (например, $s_1 = |$) и всего одно «активное» состояние q (второе ее состояние «пассивное», остановка). В начальный момент времени машина находится в состоянии q, т. е. работает. Предпишем ей при виде символа s_1 напечатать его в обозреваемую клетку (при этом ее содержимое не изменится), сдвинуться вправо и продолжать работать, т. е. оставаться в состоянии q. Будем записывать эту комбинацию элементарных действий так: $s_1\text{П}q$. Если же обозреваемая клетка пуста, пускай машина напечатает в ней символ s_1 и, не сдвигаясь, остановится: s_1Нстоп.

Такая машина полностью задается простой таблицей:

Состояние машины	Обозреваемый символ	
	Λ	s_1
q	s_1Н стоп	$s_1\text{П}q$

Проследим теперь, что будет делать машина, получив такие начальные данные, как на рисунке 1, *а*. В начале работы в поле зрения головки — отмеченная клетка, поэтому головка сдвигается вправо, не изменив содержимое клетки (рис. 1, *б*), снова видит отмеченную клетку и сдвигается вправо (рисунки 1, *б* и *в*). Но на четвертом шаге перед ней оказывается пустая клетка (рис. 1, *г*), и в действие вступает другое предписание: машина ставит метку в обозреваемую ячейку и останавливается (рис. 1, *д*).

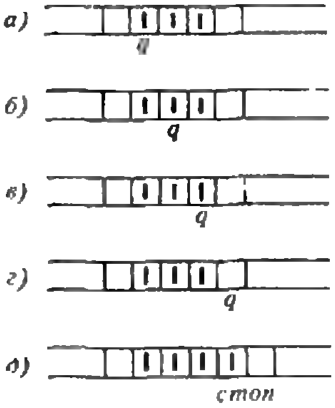


Рис. 1.

Теперь нетрудно построить машину Тьюринга, осуществляющую сложение двух натуральных чисел. Договоримся записывать число n в виде $n+1$ подряд идущих единиц и отделять на ленте два числа пробелом.

Пусть есть два числа m и n, записанные на ленте в начальный момент (рис. 2). По окончании работы мы должны получить последовательность из $m+n+1$ подряд идущих единиц. Одним активным состоянием тут не обойтись. Мне их понадобилось три:

Состояние машины	Обозреваемый символ	
	Λ	1
q_0		ΛПq_1
q_1	ΛПq_1	ΛПq_2
q_2	1Н стоп	1Пq_2

Эта машина, видя в начальный момент единицу, стирает ее и передвигается вправо, переходя в состояние q_1 (рис. 3). Если в поле зрения головки снова стоит единица, она стирает и ее, сдвигаясь вправо и переходя в состояние q_2. При виде же пробела она сдвигается вправо, не меняя состояния. В состоянии q_2 машина движется вдоль ленты до первого пробела, заполняет его единицей и останавливается. Убедитесь самостоятельно, что эта машина правильно находит сумму любых двух натуральных чисел.

Упражнение. Постройте машину Тьюринга, осуществляющую а) сложение трех чисел; б) умножение на 2; в) вычитание из большего числа меньшего.

Тезис Тьюринга

В той же статье «О вычислимых числах...» Тьюринг высказал гипотезу, что каждая функция, вычислимая в естественном смысле, вычислима и посредством некоторой машины Тьюринга. Эта гипотеза, конечно, не может быть формально доказана, ибо *невозможно формально определить* интуитивное понятие «вычислимости в естественном смысле». Однако в каждом конкретном случае, если установлена некая «эффективная процедура» вычисления данной функции, то удается построить и машину Тьюринга, осуществляющую эту процедуру.

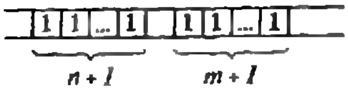


Рис. 2

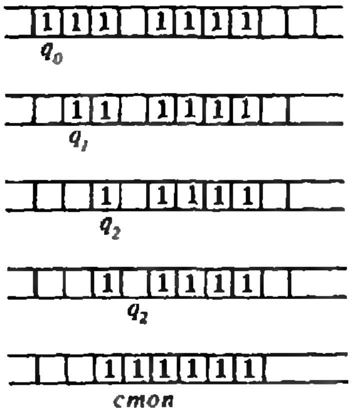


Рис. 3.

Те примеры, которые мы разобрали, не дают, конечно, твердой уверенности в этом. Уже для осуществления машины Тьюринга для операции вычитания нужен некий «буфер», чтобы учитывать в нем длину вычитаемого числа. Однако можно существенно расширить возможности машин Тьюринга, введя на ленте естественную систему координат (занумеровав ячейки целыми числами). Можно допустить, чтобы часть рассмотрения составляла запись на некоторых специально отмеченных клетках (конечном числе), если эти клетки расположены так, что вычислитель может найти их и вернуться (в частности, тот самый «буфер»). Можно разрешить специальные пометки, дополняющие данный символ; если есть n обыкновенных символов и k пометок, каждое подмножество которых может быть помещено на данную клетку, нужно лишь увеличить число условий, которым подчиняется каждая клетка, с $n+1$ до $(n+1)\cdot 2^k$. Число условий, разумеется, от этого не станет бесконечным. Эти «вольности», уравнивая до некоторой степени машину Тьюринга с живым вычислителем, не нарушают тем не менее математической строгости модели.

Канадские математические соревнования

Мы заканчиваем публикацию задач школьной математической олимпиады Канады (см. «Квант» № 3 и № 4, 1992). Здесь предлагаются задания для 12 и 13 классов канадской школы, что соответствует нашему 11 классу и старшим курсам техникума или первому курсу втуза. На решение каждого из заданий отводилось по 2,5 часа.

Euclid Contest (Grade 12)*)

Вопросы к выбором ответа

(по 3 очка за каждую задачу)

1. Если $x=1/6$, то $(2-1/2x)(3-1/3x)$ равняется

(*A*) -12; (*B*) -1; (*C*) $25/6$; (*D*) 1; (*E*) 12.

2. График функции $y=10(x+1)(x-3)$ пересекает ось x в двух точках — P и Q. Длина отрезка PQ равна

(*A*) 20; (*B*) 2; (*C*) 40; (*D*) 4; (*E*) $2/5$.

3. В треугольнике ABC (рис. 1) $AB=AC=10$ и $BC=12$. Косинус угла C равен

(*A*) $5/6$; (*B*) $3/5$; (*C*) $4/5$; (*D*) $3/2$; (*E*) $5/12$.

4. В кубе, изображенном на рисунке 2, острый угол между отрезками AB и BC равен

(*A*) 60°; (*B*) 90°; (*C*) 30°; (*D*) 45°; (*E*) 75°.

5. Через точки пересечения кривых $x^2+y^2=4$ и $y=x^2/3$ проходит прямая, уравнение которой

(*A*) $y=4$; (*B*) $y=-4$; (*C*) $y=\sqrt{3}$;
(*D*) $y=1$; (*E*) $y=-\sqrt{3}$.

6. Сумма 51 члена последовательности $\sin\pi/2+\sin 2\pi/2+\sin 3\pi/2+\ldots+\sin 51\pi/2$ равна

(*A*) -1; (*B*) 1; (*C*) 0; (*D*) 51; (*E*) 26.

7. Функция $f(x)$ определена следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x \text{ — рациональное число,}\\ 1, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.}\end{cases}$$

Значение выражения $2f(\sqrt{2})-3f(f(\sqrt{2}))$ равно

(*A*) -2; (*B*) -1; (*C*) 0; (*D*) 1; (*E*) 26.

8. Если $\log_x 2=a$ и $\log_x 3=b$, то $\log_x(9x^2/2)$ равен

(*A*) b^2-a+2; (*B*) $2b+a+2$; (*C*) $2b-a+2$;
(*D*) $a-2b-2$; (*E*) $2b^2/a$.

9. Если $f(x)=(3x-7)/(x+1)$ и $g(x)$ — функция, обратная к $f(x)$, то значение $g(2)$ равно

(*A*) -7; (*B*) -3; (*C*) $-1/3$; (*D*) 2; (*E*) 9.

10. Если вершина параболы $y=-2x^2-4ax+k$ находится в точке $(-2; 7)$, то коэффициент k равен

(*A*) 15; (*B*) -1; (*C*) $-1/3$; (*D*) 11; (*E*) 3.

11. Агент по продаже автомобилей (автомобильный дилер) продал два автомобиля. За один он получил прибыль в размере 40 %, а за другой — в размере 60 %. Его общая прибыль составила 54 % от первоначальной стоимости автомобилей. Цена, уплаченная дилером за первый автомобиль, относится к цене, уплаченной им за второй автомобиль, как

(*A*) 10:13; (*B*) 35:38; (*C*) 3:7;
(*D*) 7:12; (*E*) 2:3.

12. Три квадрата, длины сторон которого выражаются целыми числами, положены друг на друга так, как показано на рисунке 3. Если $BC=CD$ и заштрихованная площадь равна 31, то площадь наибольшего из квадратов равна

(*A*) 289; (*B*) 225; (*C*) 961; (*D*) 256;
(*E*) 324.

Задачи для полного решения

Часть А

(по 10 очков за каждую задачу)

1. (*a*) Точка A имеет координаты $(4; 2)$. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно к прямой $y=x$.

(*b*) Найдите точку в первом квадранте, в которой прямая $y=3$ пересекает параболу $y=x^2-x+2$.

2. (*a*) В одной и той же координатной системе нарисуйте графики функций $y=\sin\theta$ и $y=\cos\theta$ для $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Проведите оси и проградуируйте их.

(*b*) Используя графики из пункта (*a*), отметьте общую часть областей $y\leqslant\sin\theta$ и $y\geqslant\cos\theta$.

(*c*) Укажите границы изменения θ в области, описанной в пункте (*b*).

3. (*a*) У многочлена ax^3+bx^2+cx+d сумма коэффициентов равна нулю (т. е. $a+b+c+d=0$). Покажите, что этот многочлен делится на $x-1$.

(*b*) Решите уравнение $2x^3-3x^2+1=0$.

(*c*) Найдите сумму коэффициентов многочлена $g(x)=(x+2)(x^2+2x+1)$ после раскрытия скобок.

4. (*a*) Два крана наполняют водой некоторый бак. Кран B наполняет бак водой в три раза дольше, чем кран A. Если включить оба крана, то бак наполнится за 24 часа. За какое время наполнит бак кран A?

---

*) Евклидовы соревнования (12 класс).

(*b*) Найдите значения θ из промежутка $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, для которых косинус, тангенс и косеканс, взятые в этом порядке, образуют геометрическую прогрессию.

Часть В

(по 8 очков за каждую задачу)

5. Найдите x из уравнения $\log_2(9-2^x)=3-x$.

6. При каком значении числа a уравнение $4x^2+4(a-2)-8a^2+14a+31=0$ имеет вещественные корни с минимальной их суммой?

7. Точки A, B, C и D расположены на окружности в таком порядке, как на рисунке 4. Если E — произвольная точка на отрезке AB, то угол DEC меньше 180°. Покажите, что угол DEC максимален в том и только том случае, когда углы ADE и ECB равны.

Descartes Contest (Grade 13)

(по 10 очков за каждую задачу)

1. В задачах этого пункта достаточно указать ответ.

(*a*) Найдите $f'(0)$, если $f(x)=e^x-e^{-x}$.

(*b*) Определите значения h, при которых уравнение $3x^2+hx+2$ имеет два равных корня.

(*c*) Выразите $(3+i)/(1+i)$ в виде $a+bi$, где $i^2=-1$.

(*d*) Найдите $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin 2\theta \operatorname{ctg}\theta}{\theta}$.

(*e*) Определите наибольший коэффициент в разложении многочлена $(1+x)^6$.

2. (*a*) Покажите, что при $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ выполнено равенство

$$\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}=\operatorname{tg}\theta.$$

(*b*) Для каких θ из интервала $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$ это равенство неверно?

3. Оси симметрии эллипса совпадают с осями координат, причем большая полуось длиной 3 лежит на оси Ox, а меньшая, длиной 2, — на оси Oy. Касательная к эллипсу имеет тангенс угла наклона 1 и пересекает координатные оси в точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ.

4. (*a*) Найдите все геометрические прогрессии, у которых сумма двух первых членов равна 2, а сумма первых трех членов равна 3.

(*b*) Для каждой из прогрессий, определенных в пункте (*a*), вычислите сумму всех членов, величина которых меньше 1.

5. Дано преобразование T: $(x, y)\to(x+2y,\ y)$.

(*a*) Покажите, что при этом преобразовании образ любой прямой является снова прямой линией.

(*b*) Найдите площадь фигуры, полученной в результате преобразования T из четырехугольника $ABCD$, показанного на рисунке 5.

6. Семейство плоскостей задано уравнением $rx+y+z=4$, где r — вещественное число.

(*a*) Найдите уравнения всех плоскостей из этого семейства, наклоненных к плоскости $x+y-z=13$ под углом 60°.

(*b*) На плоскости $x+y-z=13$ существует точка, принадлежащая всем плоскостям данного семейства. Найдите ее.

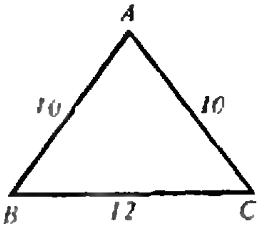


Рис. 1

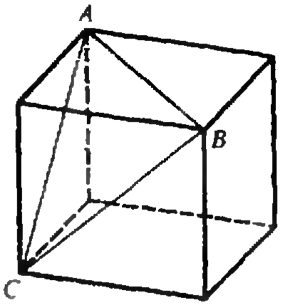


Рис. 2

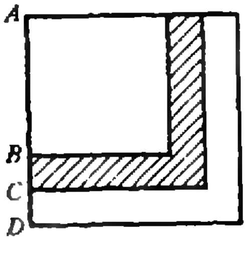


Рис. 3.

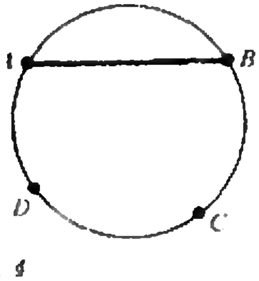


Рис. 4

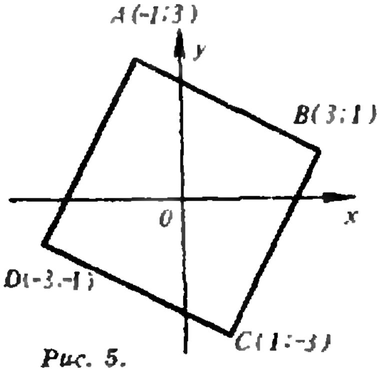


Рис. 5.

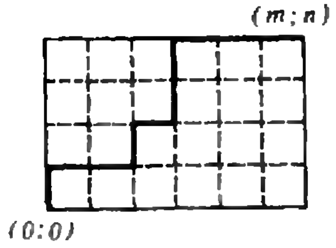


Рис. 6.

7. Даны четыре ненулевых числа: a, b, c, d.

(a) Докажите, что если $a/b+c/d=(a+c)/(b+d)$, то $ac<0$.

(b) Докажите, что если $a/b+c/d=(a+c)/(b+d)=0$, то $b=d$.

8. Найдите максимальное значение функции

$$f(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{x}{x+k}$$

для $x>0$. Число $k>0$ — параметр.

9. В треугольнике ABC выполнены соотношения: $ab^2\cos A=bc^2\cos B=ca^2\cos C$. Докажите, что этот треугольник равносторонний.

10. (a) Прямоугольник $m\times n$ разбит на mn квадратов. Путь, проложенный по линиям разбиения, ведет из точки (0; 0) в точку (m; n) так, что при движении координаты точки не уменьшаются (рис. 6). Докажите, что количество различных таких путей равно C_{m+n}^{n}.

(b) В кубе $n\times n\times n$ каждая грань разделена на n^2 квадратов. Путь, определенный в пункте (a), ведет по граням из точки (0, 0, 0) в точку (n, n, n). Найдите количество различных таких путей.

Публикацию подготовили
А. Котова, А. Савин

Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

С 10 по 19 октября 1991 года в живописном поселке Фирюза под Ашхабадом проходило соревнование школьников с довольно замысловатым наименованием — Международная тест-рейтинговая олимпиада «Интеллектуальный марафон».

Это был эксперимент, причем эксперимент очень удачный, и мы надеемся, что такие олимпиады станут традиционными.

Организаторы олимпиады — московский клуб «Глюон», Академия наук Туркмении и Туркменский государственный университет — при активной поддержке Президентского совета Туркмении провели весьма необычное соревнование.

Прибегая к спортивной терминологии, эту олимпиаду можно назвать лично-командным троеборьем по английскому языку, математике и физике.

Олимпиада состояла из трех туров. В первом — английском туре — ее участники состязались в умении читать, переводить и говорить по-английски. Второй — физический и третий — математический туры состояли из двух частей. Утром проводилась письменная индивидуальная олимпиада, задачи приводятся ниже (в скобках указано количество баллов, присуждавшихся за полное решение задачи), а вечером того же дня проводились устные командные соревнования. На устной части физического тура командам предлагалось за ограниченное время изучить подлинные старинные приборы, любезно предоставленные Московским политехническим музеем, выяснить, как и какие физические явления изучались с их помощью. Среди продемонстрированных приборов были «Электрометр Томсона», «Воздушные элементы Столетова», «Вольтов столб» и т. д.

Устная часть математического тура выглядела так. Команды-участницы сидели за отдельными столами в большой аудитории и решали сравнительно несложные задачи, которые им последовательно предлагались жюри. За каждую решенную задачу команда получала определенное количество очков. На обдумывание задач отпускалось, в зависимости от их трудности, от 5 до 15 минут.

Результаты выступления участников оценивались в баллах. На индивидуальных турах каждый участник мог получить максимум 100 баллов. Максимальное количество баллов, набираемых командой в командных состязаниях, также было равно 100.

По количеству баллов определялось место участника в каждом туре, а затем сумма мест по всем турам. При равенстве этих чисел предпочтение отдавалось участнику, набравшему больше баллов.

Командное первенство определялось по итогам командных туров, а также сумме мест и сумме баллов всех участников команды.

Участниками олимпиады стали 19 команд по три человека в каждой, из разных городов и ведущих физико-математических школ бывшего СССР. Приглашенные иностранные участники не приехали из-за нестабильности обстановки в стране.

Абсолютным победителем в личном зачете стал Недиков Николай, ученик 11 класса ФМШ при МГУ.

По английскому языку первое место разделили Н. Недиков, Дмитрий Потишко (Харьков, ФМШ № 27) и Иван Самохин (школа-лицей при МЭИ).

В физическом туре победил Андрей Малютин (академическая гимназия при СПбГУ).

В математическом туре одержал победу Михаил Дынин (физико-техническая школа-лицей, СПб).

В командном зачете победили школьники физико-технической школы-лицея Санкт-Петербурга.

Победители были награждены ценными призами. Были присуждены также специальные призы самым юным участникам. Ими стали Игорь Павловский из Омска и Саша Лебедев из Ашхабада.

Почетный приз «Мисс Олимпиада» получила Инна Гнездилова из Москвы (школа № 542) за лучший результат среди девушек-участниц.

Обширной была и культурная программа. В нее вошли посещения театров и музеев Ашхабада, экскурсии по городу и к подземному озеру в Бахардене и многое другое.

В целом это новое по форме соревнование прошло очень успешно, вызвало самый живой интерес участников, азартно боровшихся за победу.

Огромную работу провели гостеприимные хозяева олимпиады, сделавшие все возможное для ее успешного проведения. Особенно хочется отметить роль помощника Президента Туркмении М. И. Бродского и учителя физики ашхабадской школы № 17 В. Ф. Сухомлина.

Клуб «Глюон» планирует провести следующую олимпиаду в октябре 1992 года в Калининграде и приглашает команды школ с углубленным изучением математики и физики принять в ней участие.

Заявки об участии в олимпиаде просим присылать по адресу: 115580, Москва, а/я № 10, клуб «Глюон».

Задачи

Математика

1. Докажите, что число $53 \cdot 83 \cdot 109 + 40 \times 96 \cdot 66$ является составным. (5)

2. Найдите сумму:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{n}}}}}}+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{n}}}}}}$$

(5)

3. В треугольнике ABC расстояние от центра описанной окружности до стороны AB равно d, а $\angle ABC=60^\circ$. Точка D на стороне BC такова, что $BD=AB/2$. Найдите длину отрезка CD. (5)

4. Решите уравнение

$$(4x^3-8)(3^{\sin x}-1)+(2^{x^2}-4)\sin x=0.$$

(10)

5. Решите в целых числах уравнение

$$19x^3-91y^2=1991. \qquad (8)$$

6. Докажите, что если положительные числа a, b, k, n удовлетворяют неравенству

$$ab>ka+nb,$$

то

$$a+b>(\sqrt{k}+\sqrt{n})^2. \qquad (8)$$

7. На катете AC прямоугольного треугольника ABC отложен отрезок $AD=BC$, а на катете BC — отрезок $BE=CD$. Найдите угол между прямыми BD и AE. (9)

8. Рассматриваются всевозможные параболы $y=x^2+px+q$, пересекающиеся с осями координат в трех различных точках. Докажите, что окружности, описанные около всевозможных треугольников с вершинами в этих точках, имеют общую точку. (8)

9. Каждая грань кубика разделена на 9 квадратов и в каждый квадрат вписано некоторое число. Известно, что сумма пяти чисел, вписанных в любой квадрат и в четыре соседних с ним, равна 17. Могут ли все вписанные числа быть целыми? (6)

10. Числа a, b, c — корни уравнения $x^3-3x+1=0$, причем $a<b<c$. Докажите, что $b^2-a=c^2-b=a^2-c=2$. (12)

11. На сторонах AB, BC и AC данного остроугольного треугольника ABC во внешнюю от него сторону построены как на основаниях попарно подобные равнобедренные треугольники $A'BC$, $AB'C$, ABC'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке. (12)

12. Докажите, что из любых четырех положительных чисел можно выбрать два — x и y так, чтобы выполнялись неравенства

$$0\leq\frac{x-y}{1+x+y+2xy}<2-\sqrt{3}. \qquad (12)$$

Физика

1. При какой величине M_x груз массой $2m$ может оставаться в покое (рис. 1)? (6)

2. При каком ускорении блока груз массой $2m$ будет иметь ускорение, равное $g/10$ (рис. 2)? (8)

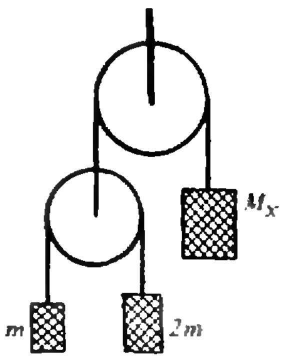


Рис. 1.

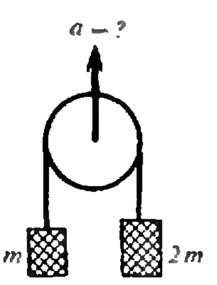


Рис. 2.

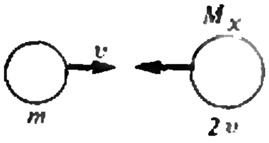


Рис. 3.

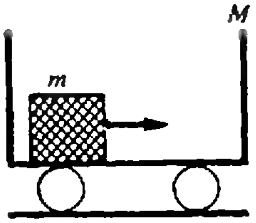


Рис. 4.

3. При какой массе груза, летящего со скоростью $2v$, он сможет остановиться после удара (рис. 3)? (8)

4. Кубик вначале находится у левого края тележки длиной $L=0,5$ м (рис. 4). Ему толчком сообщают скорость $v=1$ м/с вправо. На каком расстоянии от левого края тележки он остановится, если коэффициент трения $\mu=0,3$, $m=0,3$ кг, $M=1$ кг? (6)

5. Оцените размер молекулы воды, используя известные табличные данные о воде. Оцените среднее расстояние между молекулами насыщенного водяного пара при температуре 100 градусов по шкале Цельсия. Оцените также среднее число ударов между молекулами в 1 литре такого пара за 1 секунду. (10)

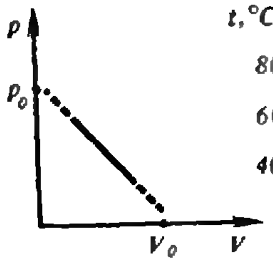


Рис. 5.

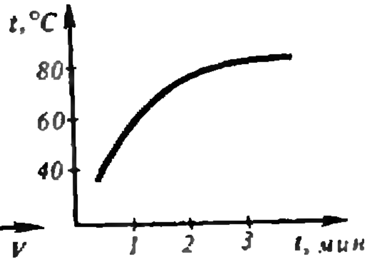


Рис. 6.

6. 1 моль идеального одноатомного газа расширяется по закону, изображенному на графике зависимости давления от объема прямой линией (рис. 5). Найдите максимальную температуру газа в этом процессе. На каком участке газ получает тепло, а на каком отдает? (12)

7. В стакан опустили нагреватель мощностью 200 Вт и включили в сеть. График изменения температуры со временем приведен на рисунке 6. Каким был бы график при мощности нагревателя 100 Вт? (8)

8. Найдите токи, текущие через каждый резистор в схеме, изображенной на рисунке 7. Батарейки считайте идеальными. (8)

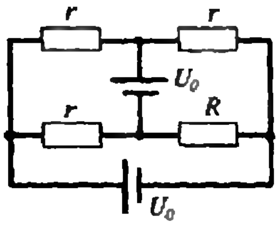


Рис. 7.

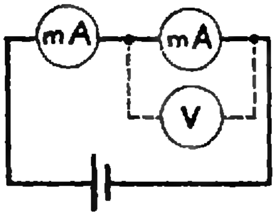


Рис. 8.

9. К идеальной батарейке подключили последовательно два одинаковых миллиамперметра, и они показали по 1 мА (рис. 8). Параллельно одному из приборов подключили вольтметр, и он показал 0,3 В, а показания миллиамперметра при этом уменьшились до 0,8 мА. Что показывает второй миллиамперметр? Чему равно напряжение батарейки? Найдите сопротивления приборов. (6)

10. Для измерения электростатического поля применяют конденсатор, состоящий из двух обкладок, в форме полукругов площадью $S=10$ см^2 каждый, находящихся на расстоянии $d=0,1$ см друг от друга (рис. 9). Один из полукругов неподвижен, а другой вращается со скоростью $n=100$ об/с так, что емкость конденсатора меняется от максимального значения практически до нуля. Собрана измерительная схема, включающая два диода и гальванометр с сопротивлением рамки $r=1$ кОм (рис. 10). Какой ток он покажет при напряженности поля $E=10\,000$ В/м? Что изменится, если сопротивление рамки прибора уменьшить или увеличить? (10)

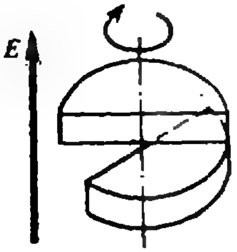


Рис. 9.

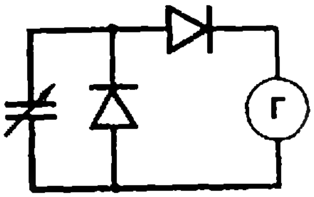


Рис. 10.

11. Найдите максимальный ток через катушку и ток через батарейку в момент достижения максимального тока через катушку (рис. 11). Найдите также максимальное напряжение на верхнем конденсаторе. Сопротивление батарейки и проводов считайте небольшим, $C=1$ мкФ, $L=1$ Гн, $U_0=10$ В. (12)

12. На тонкую линзу падает луч под углом $\alpha=4°$ к главной оптической оси. Он пересекает ось на расстоянии $L=12$ см от линзы и выходит после преломления под углом $\beta=8°$. Найдите фокусное расстояние линзы. (6)

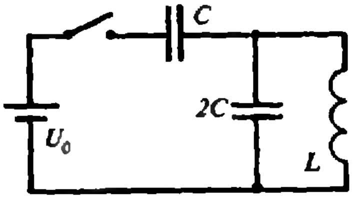


Рис. 11.

В. Альминдеров, А. Егоров

СЛОМАННАЯ ЛИНЕЙКА

(фантастический рассказ)

Т. ТОМАС

Под пальцами Картера логарифмическая линейка треснула и развалилась надвое. Он уронил обломки на стол и, подняв голову, встретился глазами с Сесилом Харди. Картер сказал одними губами:

— Я так хочу этого, Сесил, так хочу!

Харди медленно наклонил голову.

— Я знаю, Уолтер. Я понимаю тебя.

— Понимаешь? Я растил его чуть ли не с пеленок. Я сделал из него человека. Я сделал из него лучшего человека, который когда-либо учился в Академии. Я видел, на что он способен, и потому отдал ему все, что у меня было, и он впитал это как губка. Глубокий Космос у него в крови. Он...— Картер помолчал, потом добавил: — Если бы мой Уолт не погиб, он стал бы таким, как Лайтнер. Теперь ты знаешь, каково мне...

Харди поднялся со стула и положил руку на плечо Картеру.

— Я знал все эти годы, Уолтер.

— Ты хочешь сказать, что это было заметно?

Харди улыбнулся и покачал головой.

— Нет, не заметно в том смысле, в каком ты это понимаешь. Я знал, потому что в мои обязанности входит знать и потому что мы с тобою старые друзья. Я видел выражение твоих глаз, когда ты смотрел на Лайтнера. Но никто больше не замечал.

Картер выдохнул воздух и провел рукой по ежику стальных волос.

— Я старался не показывать...

— Ты и не показывал. Ты хорошо держал себя в руках. Может быть, даже слишком хорошо. Лайтнер думает о тебе совсем не так, как ты о нем.

— Я знаю, я не мог позволить ему догадаться о моих чувствах. Это было бы невыносимо. И он должен попасть в Глубокий Космос, хотя бы в награду за все эти годы. В один прекрасный день парень станет Начальником Космонавтов. И когда этот день наступит, Лайтнер будет лучше меня. Он обязан выдержать испытание — для меня, для себя, для всей Земли. Такие люди встречаются редко. Они нам нужны.

Харди взглянул на хронометр и сказал:

— Что ж, скоро все выяснится. Он сейчас спускается на автолете к городу. Мне пора к приборам.

Он повернулся к пульту.

Картер подошел к нему, остановился рядом и прошептал:

— Сесил...

Харди вопросительно взглянул на него.

— Зачем испытывать Лайтнера? Он все эти годы настолько превосходил остальных. Мы можем спокойно обойтись и без испытания.

Глаза Харди расширились.

— Уолтер, не может быть, чтобы ты говорил это всерьез. Последнее испытание — единственный способ заглянуть в душу человека. Чувства, испытанные им при возвращении домой, скажут нам, настоящий ли он разведчик Глубокого Космоса, или просто еще один искусный космонавт. У нас нет другого пути, чтобы узнать это. И ты знаешь, что мы обязаны провести испытание.— Он помолчал и добавил: — Почему ты боишься, Уолтер? Может, ты знаешь что-нибудь неизвестное мне? Ты опасаешься, что Лайтнер может не выдержать?

— Разумеется, нет. Давай начинать испытание. Мальчик его выдержит.

Перепечатывается по изданию «Библиотека современной фантастики. Том 10» (М., Молодая гвардия, 1967).

За тысячу миль от них Лайтнер опустился на автолете на небольшую поляну. Он не выключил двигателя, пока не осмотрелся. Вечерело. Ветерок угас, и воздух был спокоен. Лайтнет откинул голову назад и вдыхал запах нагретой солнцем травы. Он посмотрел на юго-восток, на садящееся солнце и увидел дуб. Дуб совсем не изменился. Какой это был сук? Третий сверху? Прикрыв глаза ладонью от солнца, он внимательно присмотрелся к суку, но на нем не осталось никаких следов воздушного змея, висевшего там несколько лет назад. Сейчас Лайтнер снова пережил размытые временем страдания мальчика, который увидел, как погибает воздушный змей. Он улыбнулся, вспомнив мягкий голос отца, его руку на своем плече, вспомнив, как они сделали новый змей, лучше старого, и он летал много дней подряд.

Лайтнер пошел к городку. Сначала быстро, но постепенно воспоминания заставили его замедлить шаги. Изгороди, по которой он когда-то пробегал целую четверть мили, не коснувшись земли, уже не было. Где это было? Здесь? Нет, вон там, там еще рос колючий кустарник, в котором он и Джо Нобб гонялись друг за другом. В конце концов они отправились домой вместе, сплошь покрытые царапинами и ссадинами. Лайтнер хмыкнул. Старик Картер не пришел бы в восторг от его доблести в том бою.

Впереди последний поворот, и над ним, как и раньше, нависая над дорогой, стояла старая ива. Лайтнер прошел под ней, по туннелю, прорубленному в ее ветвях для автомобилей. Ствол ивы окружали кусты, и сквозь них виднелось кладбище. Лайтнер различал могильные плиты, белые на фоне зелени. Он поглядел в ту сторону, где были похоронены отец с матерью, и свернул было с дороги, но передумал. За поворотом дорога превратилась в широкую полосу бетона, которая и была Главной улицей. Лайтнер остановился и посмотрел вдоль нее.

Солнце садилось за спиной, и косые лучи окрашивали улицу в красноватый цвет. Редкие прохожие виднелись на тротуаре, да изредка проезжала машина и исчезала за углом. Негромкие звуки голосов и урчание моторов доносились сквозь пелену теплого воздуха. Лайтнер покачал головой. Ничего не изменилось. Вот он, его город. В то время, когда люди стремятся к звездам, он остался таким же, каким был сто лет назад. Изменят ли его следующие сто лет? Латнер снова покачал головой и ступил на тротуар.

Он миновал гараж Мэрфи, примостившийся под деревьями на краю городка. Потом прошел мимо группы людей, одного из которых он узнал, но не стал останавливаться. Они вопросительно смотрели на высокого стройного человека в форме старшего кадета-космонавта. Но никто не сказал ни слова, пока ои не поравнялся с аптекой Мартина.

Мистер Мартин отделился от группы людей, стоявших у двери, подошел к нему и спросил:

— Уж не сын ли ты Лайтнера?

Лайтнер улыбнулся, протянул руку и сказал:

— Здравствуйте, мистер Мартин.

Мартин пожал руку и, не выпуская ее, обернулся к остальным:

— Посмотрите, кто к нам приехал. Это же сынишка Джона Лайтнера.

Многих из них Лайтнер узнал. Он пожимал им руки и говорил, что у него все в порядке.

Потом наступил момент, когда приглашения зайти в гости были сделаны, а новости исчерпаны. Наступило молчание. Они стояли, улыбаясь ему и поглядывая вдоль улицы. Они понимали, что Лайтнер хочет увидеть свой дом, и не стали его задерживать. Он помахал на прощание рукой и пошел дальше.

Он прошел мимо фуражной лавки, подле которой фермер грузил на машину мешки с концентратом. До Лайтнера донесся сухой сенной запах концентрата. Он повернул за угол, прошел два квартала и понял, что перед ним дом Энгесс Мур. Он поглядел на темный портик и вспомнил тот давнишний вечер, когда портик тоже был темным.

На прежнем месте стояла и лавочка, на которой они сидели тогда, не говоря ни слова, ощущая только громовые удары крови в сердце. Круглое плечо прилегало к его руке, и наступил момент, когда дыхание их оборвалось, чтобы вернуться через мгновение уже прерывистым и быстрым. И в этот момент на дорожке неожиданно появился ее отец и обнаружил их сидящими на разных концах лавочки. Если он что-нибудь и заподозрил, то не подал виду, только кивнул им и прошел в дом.

Лайтнер улыбнулся, вспомнив об этом. Он не чувствовал волнения. Только слегка удивился тому, что когда-то такие вещи представлялись ему значительными. В доме Муров горел свет, но он не стал сворачивать к их двери.

Он пошел дальше и через квартал остановился перед своим домом. Дом не был освещен: очевидно, его нынешние хозяева сейчас отсутствовали. В нем мало что изменилось. Живая изгородь была подстрижена ниже, чем раньше, и вдоль дорожки перед входом выросли новые кусты. Дом недавно перекрасили. Это был его дом. Космонавт стоял перед ним в сгущающейся темноте. Воспоминания заполнили его сердце и завладели умом.

В тысяче миль отсюда два человека напряженно всматривались в кривые, выписываемые приборами на бумажных лентах.

Лайтнер поглядел на деревья, окружавшие дом. Сквозь их ветви проглядывали звезды. Лайтнер отошел на середину улицы, откуда он мог видеть вечернее небо. Он стоял, широко расставив ноги, запрокинув голову, и смотрел на звезды. И звезды, казалось, смотрели на него.

Далекие солнца улыбались ему и маняще подмигивали. Как женщина, подумал он, далекая, холодная, но зовущая прийти и познать неведомое. У Лайтнера перехватило дыхание.

Это была его жизнь. Для нее он был создан. Долгие годы учебы, напряженные занятия, труд, отказ от всего ради того, чтобы стать существом этих далеких солнц. Многое старалось помешать ему, но он победил. Картер, старик Картер наказывал его так, как не наказывал никого в Акамедии,— длинными часами работы, когда все отдыхали, постоянной практикой, направленной к совершенству, которого не смог достичь никто, кроме Лайтнера. Но он-то им показал. Он не отказывался ни от чего, он все впитывал как губка. Теперь его не остановить. Он готов к Голубокому Космосу.

Руки Лайтнера медленно поднимались, пока не вытянулись кверху. Так он и стоял — широко расставленные ноги, откинутая назад голова и руки, протянутые к звездам.

Воздух бился у него в горле. И этот звук вернул его к действительности. Он уронил руки, обернулся и побрел к дому, улыбаясь ему сдержанной сухой улыбкой. Приятно снова увидеть дом. Но что ему здесь делать? Он не принадлежит этому дому. Он снова взглянул вверх. Там его судьба. В Глубоком Космосе. Он громко рассмеялся и почувствовал, как к нему приходит спокойствие. С поющим сердцем космонавт возвратился к автолету. Он шел быстро, не глядя по сторонам.

Покончив с графиками, Харди откинулся на стуле. Но Картер уже знал о его решении, прежде чем Харди заговорил, и Харди понял, что Картер знает. Он перегнулся через стол и накрыл своей ладонью руки Картера.

— Уолтер, мне очень жаль. Мне в самом деле очень и очень жаль.

Картер не ответил.

Харди сказал:

— Ты же понимаешь. Человек должен верить в нечто большее, чем собственные стремления. У него должны быть корни.

Картер ничего не ответил.

— Этому мальчику ни к чему возвращаться, у него нет настоящей связи с Землей. В глубине сердца он не думает ни о нас, ни о своей планете. Ему ничего не нужно, кроме Глубокого Космоса, он ставит космос превыше всего.

Картер ничего не ответил.

Харди сжал руки Картера и потряс их.

— Уолтер, послушай, этот мальчик — фанатик. И мы не можем допустить таких людей в Глубокий Космос. Лайтнер не годится ни для тебя, ни для космонавтики, ни для Земли. Неужели ты этого не видишь?

Картер поднял голову, и Харди увидел его глаза. В них горела ярость, которой Харди никогда прежде не видел.

Картер хотел заговорить, но Харди перебил его:

— Не говори этого, Уолтер. Пойми, что когда Лайтнеру придется попасть в необычные обстоятельства, он может принять неразумное решение. Он может действовать и нормально, но есть шанс, что это окажется не так. Он настолько любит Космос, что неуравновешен: человек должен любить что-то больше, чем то, чему он посвящает жизнь. Иначе он становится фанатиком, и ему нельзя доверять. То же самое, что творится сейчас с тобой. Ты же любишь этого парня, но... как это говорится?

Ты не была бы мне так дорога,
Не будь мне честь дороже.

Это и есть ответ на все.

Картер опустил голову. Он сидел неподвижно, но потом руки его дрогнули, пальцы побелели от напряжения. Он нагнулся и подобрал половинки сломанной линейки. Подержал их на ладони, разглядывая, а затем поднял на Харди глаза. Ярость ушла из них. Он сказал:

— Все в порядке, Сесил. Спасибо тебе. Большое спасибо.

И он выкинул обломки линейки в мусорную корзину.

Перевел с английского Кир Булычев

Нам пишут

О построении 17-угольника

В одном из писем в редакцию нас просили опубликовать метод построения Гауссом правильного 17-угольника. Такое построение с помощью циркуля и линейки может совершить каждый из читателей, воспользовавшись формулой, полученной одним из учеников Гаусса:

$$\cos(360^\circ/17)=-1/16+\sqrt{17}/16+$$
$$+\sqrt{34-2\sqrt{17}}/16+$$
$$+\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}/8.$$

Еще раз о числе π

Нам пишет Фирдаус Шафигуллин:

«Высылаю Вам два бесконечных ряда, сочиненных мной интуитивно. Вычисляя ряды на калькуляторе МК-51, *я доходил до погрешности* 10^{-7} *для обоих рядов и получал число* π. *Однако, прошу проверить результат на ЭВМ.*

$$\pi=2+\left(\ln\sqrt{e^{1/e}+\sqrt{e^{1/e}+\sqrt{e^{1/e}+\dots}}}\right)^{-1/4},$$
$$\pi=2+\left(\ln\left(1+\sqrt{e^{1/e}-\sqrt{e^{1/e}-\sqrt{e^{1/e}-\dots}}}\right)\right)^{-1/4}.$$

Первое, что мы сделали в редакции, — это освободились от необходимости рассматривать бесконечную последовательность под знаком логарифма. Обозначив это число через x, получаем очевидное уравнение: $x=\sqrt{e^{1/e}+x}$, из которого $x=(\sqrt{4e^{1/e}+1}+1)/2$. Последовательность корней во втором выражении вычисляется таким же образом и равняется $y=(\sqrt{4e^{1/e}+1}-1)/2$. Нетрудно видеть, что $y+1=x$, т. е. в обоих выражениях под знаком логарифма стоят одинаковые числа. Итак, осталось сравнить числа π и $2+(\ln((\sqrt{4e^{1/e}+1}+1)/2))^{-1/4}$. Первое равно 3,141592653589..., а второе равно 3,141592758733... . Таким образом число, полученное Фирдаусом Шафигуллиным, не равно π, но приближает его с большой точностью.

Игра го

Живые и мертвые группы

Наряду с правилами игры, одним из самых важных моментов, необходимых для понимания го, является умение разобраться, какие группы *живут*, а какие *умирают*. Для этого введем понятие *глаз* и дадим его определение.

Глазом (недоступным пунктом) называется свободный пункт группы, который не может быть занят противником, пока у этой группы существует еще хотя бы один свободный пункт.

На рисунке 1 приведена группа, у которой имеется один глаз в пункте «а». Эта точка не может быть занята, так как в противном случае ход будет самоубийственным, т. е. запрещенным правилами. Но после того, как будут закрыты все свободные пункты, ход в точку «а» будет возможен — теперь группа черных уничтожается (рис. 2). Следовательно, можно сделать важный вывод, что группа с одним глазом не живет.

Два глаза — жизнь! Группа, имеющая два глаза, не погибает, даже полностью окруженная противником. Это один из самых главных принципов го. На рисунке 3 приведена группа с двумя глазами в пунктах «а» и «в». Ход в любой из этих пунктов является запрещенным, и следовательно, группа живет.

Начинающих следует предостеречь от одной распространенной ошибки: они часто не могут отличить настоящего глаза от ложного.

Рассмотрим позицию на рисунке 4. Здесь показана конфигурация камней, которая очень похожа на единую группу с двумя глазами. Однако на самом деле это не так. На диаграмме — две отдельные группы. Одна группа, имеющая один глаз, состоит из восьми камней, вторая группа, состоящая из трех камней, глаза не имеет совсем. Пункт в точке «а» глазом не является, так как в него можно пойти и уничтожить группу черных, состоящую из трех камней. В данном случае пункт «а» является последним свободным пунктом группы из трех камней и внешним свободным пунктом группы из восьми камней. Такой свободный пункт называется *ложным глазом*.

Есть ли связь между глазом и территорией?

На рисунке 5 черные камни огораживают территорию, состоящую из 15 очков. Но если быть точным, то этот участок можно считать территорией только в том случае, если черные камни, при атаке их белыми, смогут построить два глаза. В данной позиции это, без всяких сомнений, территория черных, поскольку, куда бы белые ни пошли, они не могут помешать черным построить два глаза.

Часто бывает, что группа имеет территорию из нескольких пунктов, но построить на ней можно всего один глаз. Глаз, имеющий территорию из нескольких пунктов, называется *большим*.

Большой глаз легко свести к простому — из одного пункта территории. Для

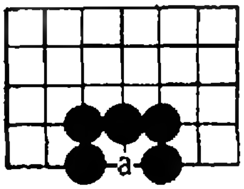


Рис. 1.

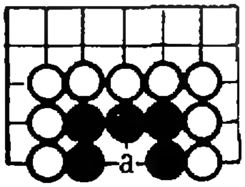


Рис. 2.

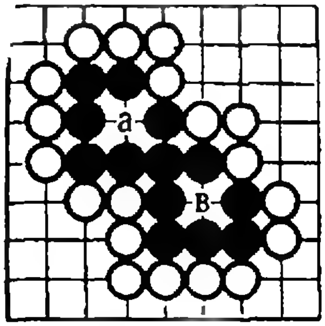


Рис. 3.

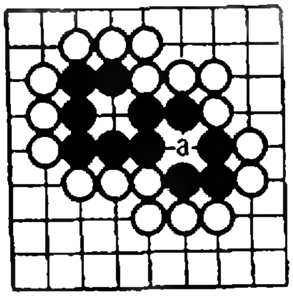


Рис. 4.

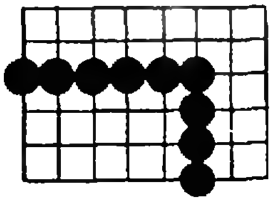


Рис. 5.

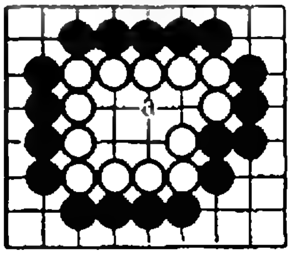
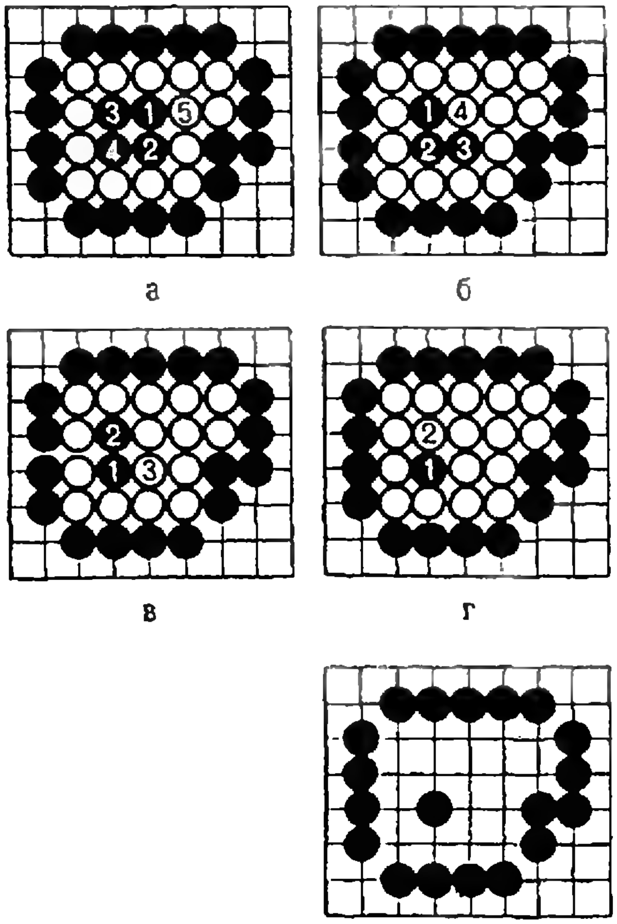


Рис. 6.

Продолжение. См. «Квант» № 6.



а б в г д

Рис. 7.

того чтобы понять, как это делается, разберем следующий пример.

На рисунке 6 приведена часто встречающаяся конфигурация большого глаза, которая обычно называется *автомобиль*. Судьба этой группы зависит от того, кто первым займет критический пункт «а». Если первыми пойдут туда белые, то они построят два глаза, если же черные, то группа белых гибнет.

Разберем, как это происходит. На рисунке 7, *а* черные продолжают занимать территорию противника камнями 2—4. После хода 4 белые камни оказываются в положении *атари*, т. е. под угрозой захвата. Поэтому они вынуждены сделать ход 5, и сами захватывают четыре черных камня. Но черные ходом 1 (рис. 7, *б*) продолжают последовательно занимать остальные пункты территории. В конце концов они поставят белые камни в положение атари, вынуждая белых ходить в свою территорию (ход 4), тем самым уменьшая ее. Постепенно она сведется к одному пункту (рис. 7, *в*, *г*). На рисунке 7, *д* приведена заключительная позиция: после того как был сделан последний ход и все камни белых сняты с доски. В реальной партии, если нет угрозы уничтожения камней игрока, такая операция по снятию камней противника не проводится, в этом нет необходимости. Группа, не имеющая возможности построить два глаза, считается пленной и снимается с доски лишь после окончания партии.

В го существует еще и другой вид жизни. На рисунке 8, *а* приведена группа, состоящая из семи пунктов территории. Если черные попытаются уничтожить белых, сыграв в критический пункт ходом 1, то им это не удастся, так как белые, противодействуя ходами 2 и 4, построят позицию *сэки* (рис. 8, *б*). В этой позиции ни одному из партнеров не выгодно ходить, так как в противном случае его камни погибнут. Территория, расположенная между камнями, считается нейтральной: никто из играющих не может претендовать на ее захват. На рисунке 9 приведены другие часто встречающиеся в игре ситуации сэки.

После всего сказанного можно дать один практический совет: не надо стремиться строить группы с двумя глазами. Как правило, это невыгодно — надо тратить лишние ходы, да еще занимать свою территорию. Правильным в этой ситуации будет создание таких групп, которые при атаке на них всегда смогут выжить.

Начало игры

Начальная стадия называется *фусэки*, она продолжается в среднем от 20 до 50 ходов.

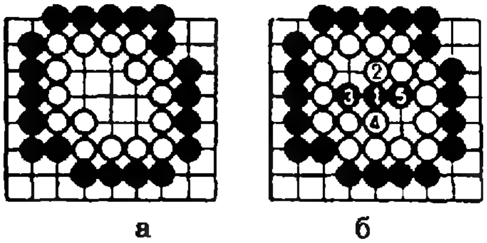
Один из главных принципов фусэки — экономия ходов.

На рисунке 10 хорошо видно, что для получения одной и той же территории из 9 пунктов в углу доски требуется 6 камней, на стороне — 9 камней и в центре — 12 камней. Отсюда делаем вывод, что выгоднее всего занимать углы, затем стороны и только после этого начинать борьбу за остальную часть доски.

Следующий основной принцип фусэки — игра по третьей и четвертой линиям.

Почему? Вторая от края доски линия не дает большой территории, поэтому ставить свои камни на нее в начале партии невыгодно. Вторую линию иногда называют линией поражения.

Пятая линия с первого взгляда кажется очень выгодной, так как намечает для захвата большую территорию, но го — это игра гармонии и баланса. В ней нельзя



а б

Рис. 8.

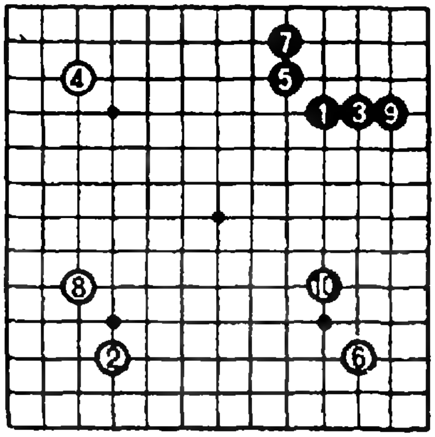


Рис. 11.

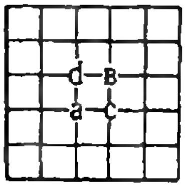
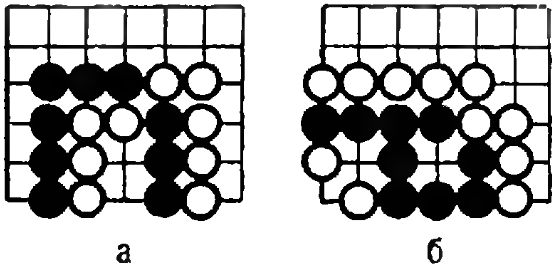


Рис. 12.



а б

Рис. 9.

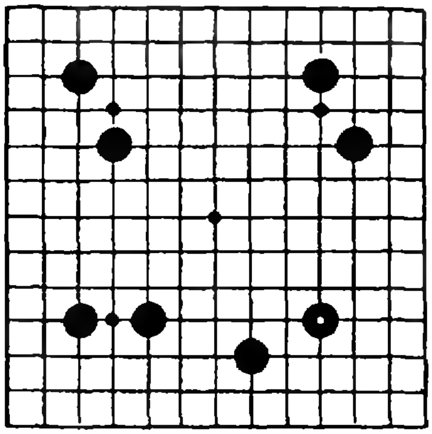


Рис. 13.

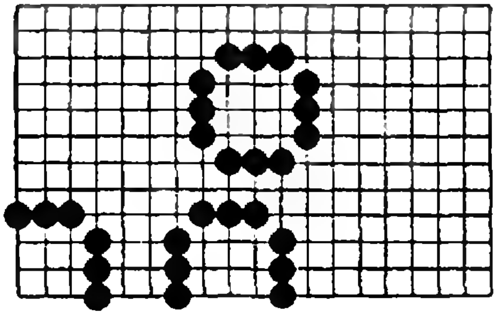


Рис. 10.

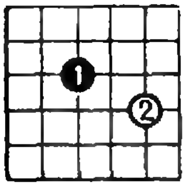


Рис. 14.

быть слишком азартным. Ход по пятой линии не может удержать намеченной территории. Еще хуже играть по шестой, седьмой и более высоким линиям. Поэтому основными для игры в начальной стадии партии являются, повторяем, третья и четвертая линии. Однако они имеют разные характеристики. Легче всего для создания территории использовать третью линию — ее называют «территориальной». Но играть все время только на третьей линии также нецелесообразно, и надо стремиться сочетать игру на третьей линии с игрой на четвертой.

Часто начинающие делают одну распространенную ошибку, пытаясь с самого начала строить прочную территорию. На рисунке 11 показано фусэки из партии двух начинающих игроков. Один из них стал с самого начала выгораживать себе территорию в углу, а второй расставлял камни по всей доске, намечая только контуры будущих территорий. В итоге второй игрок обогнал первого в развитии и одержал легкую победу.

Игра в углах

Существует несколько стандартных точек для игры в углах. На рисунке 12 показаны четыре наиболее распространенные — «а», «в», «с» и «d». Камень, поставленный в точку «а» (*сан-сан*), надежно удерживает угловую территорию, но его недостаток — слабое влияние на другие части доски. Камень в точке «в» (*хоси*), наоборот, имеет превосходное влияние, но недостаточно прочно удерживает территорию в углу. Точки «с» и «d» (*комоку*) обеспечивают контроль над частью угла и воздействуют на одну из сторон. При ходе в комоку возможность создания территории более велика в том месте, где камень находится ближе к краю доски (т. е. на третьей линии).

Для более эффективного контроля над углами применяются построения, которые называются *симари* (закрытые). На рисунке 13 приведены несколько различных типов симари. Однако симари служат не только для контроля над территорией в углу, они являются хорошей базой

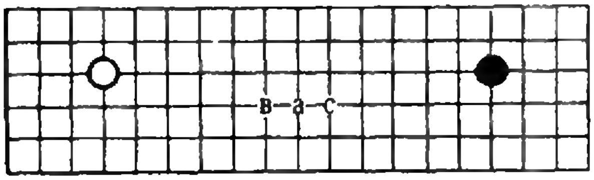


Рис. 15.

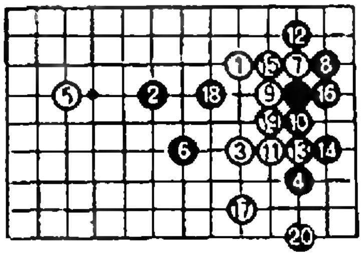


Рис. 16.

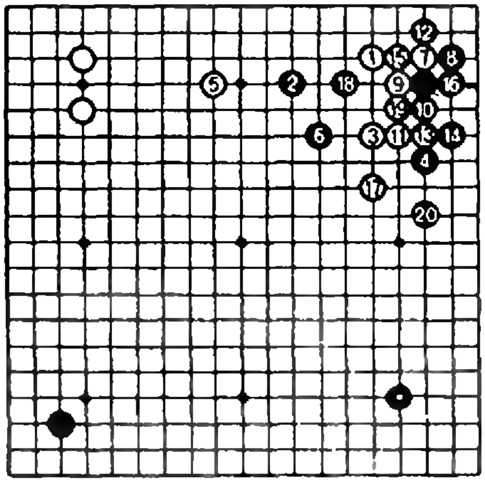


Рис. 18.

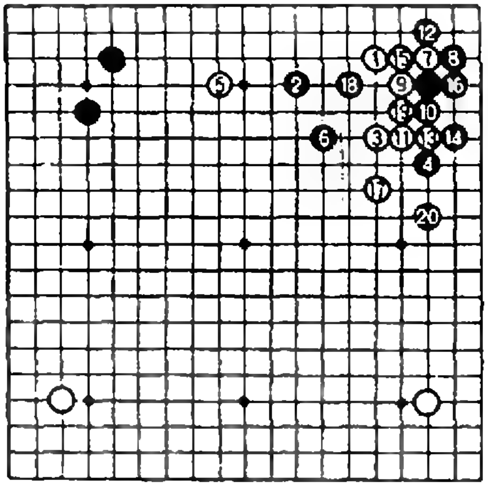


Рис. 17.

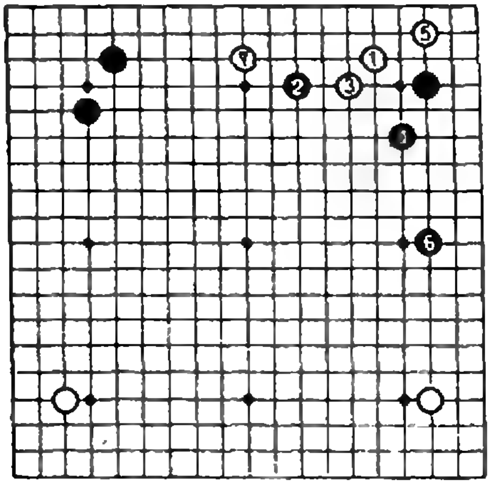


Рис. 19.

для распространения на стороны и центр доски.

Учитывая сложность борьбы против симари, противник часто не дожидается постановки второго камня в углу, а сам занимает эту точку (рис. 14). Такой ход называется *какари* (нападение). В результате атаки ходом какари часто возникает сражение, которое приводит иногда к очень сложной борьбе.

Хираки

После того как партнеры разыграли углы, их внимание переключается на стороны. Они вступают в стадию *хираки* (распространение). Лучшим и наиболее естественным является занятие центральной точки на стороне. На рисунке 15 показаны лучшие точки для развертывания от камня хоси. Трудно точно сказать, какая из этих точек лучшая, так как каждая из них имеет свои плюсы и минусы.

Ход в точку «а» является наиболее стандартным и часто встречающимся, поскольку занимает центр симметрии. Неплохо выглядит и ход в точку «в». С одной стороны, он очень эффективен — расширяет сферу влияния, но вместе с тем слабее связь со своим камнем в хоси, и ее легче разорвать.

Ход в точку «с» на один пункт ближе к своему камню в хоси, и поэтому связь гораздо прочнее, но эффективность в расширении сферы влияния слабее.

Дзесэки

Слово *дзесэки* в Японии используется для описания любой принятой нормы поведения. Однако в словаре про дзесэки написано, что это «камни, расположенные наилучшим образом в игре го»!

Розыгрыш дзесэки начинается всегда с угла, поэтому дзесэки дают и такое определение: «стандартный розыгрыш в углу».

В настоящее время существует огромное множество дзесэки — порядка 20 тысяч, причем каждый год эта цифра растет. Узнав о таком обилии дзесэки, которые надо изучать, многие начинающие приходят в ужас. Но пугаться не надо: механическое заучивание дзесэки может даже помешать росту мастерства, отучивая от самостоятельного мышления.

Возникает вопрос: а зачем же они нужны? Изучение дзесэки избавляет от бесполезной траты энергии на нахождение известных вариантов, а также помогает овладеть техническим мастерством и обрести навыки в нахождении *тэсудзи* (лучший ход).

Разберем несколько примеров.

На рисунке 16 приведено часто встречающееся дзесэки. Если рассматривать его на пустой доске, то розыгрыш за обе стороны является абсолютно равным. Однако для каждой конкретной позиции это дзесэки может оказаться как хорошим, так и плохим.

Сравним рисунки 17 и 18. На них приведены позиции из разных партий, но в обеих встречается наше дзесэки. После небольшого анализа можно сказать, что если на рисунке 18 позиция белых перспективнее, то на рисунке 17 результат для них крайне неудачен. Эта ситуация возникла из-за того, что в первой партии (см. рис. 17) белые неправильно выбрали дзесэки ходом 3. В результате у них образовались две слабые группы: камень 5 и камни 1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17. В позиции на рисунке 18 у белых только одна слабая группа (камни 1, 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17), которая уравновешивается слабостью черных камней 2, 6 и 18. Камень 5 здесь не только сильный, но имеет идеальное распространение от своего симари. Вместо хода 3 на рисунке 17 белым лучше было сыграть, как на рисунке 19, с равными шансами.

Е. Гик, А. Попов

(Окончание следует)

Ответы, указания, решения

Калейдоскоп «Кванта»

1. 48605 + 48605 = 97210.
2. 1991 + 11 = 2002.
3. КУБ $= 512 = 8^3$.
4. КУБИК $= 79507 = 43^3$.
5. МАТЕМАТИКА = 8692869536.
6. 2832 × 3 = 8496.
7. 8238 × 3 = 2746.
8. МОСКВА = 390625.
9. 74325 + 74325 = 148470.
10. 367 × 2 = 734.
11. 852 : 3 = 284.
12. $87^2 = 7569$.
13. $31^2 = 961$.
14. $529 = 23^2$.
15. 142857 × 5 = 714285.
16. 142857 × 6 = 857142.
17. 18749 × 30 = 562470.
18. 2/5 + 6/34 = 98/170.
19. 67954 + 67954 + 67954 = 203862.
20. РАДИУС = 489713, ЗАДАЧА = 589868.
21. ИКС = 136, ДАР = 408.
22. СЛАВА = 21545, ВЛАС = 4152.
23. РЕШИ = 4623, ЕСЛИ = 6183.
24. 986 × 345 = 340170.
25. $7776 = 6^5$.
26. 87172 × 5 = 453860.
27. 135964 × 5 = 679820.
28. 497919 + 7843 = 505762.
29. ДОКЛАД = 942389.
30. $897^2 = 804609$.

Внимание: ловушка!

1. Здесь надо, конечно, учесть сопротивление воздуха. Тогда получим, что кинетическая энергия в конце полета меньше, чем в начале. И вообще, на любой высоте скорость при спуске меньше, чем при подъеме. Отсюда ясно, что время подъема меньше времени спуска.

2. В этой ситуации вступает в игру такое обычно малозаметное в задачах тело, как Земля. Оказывается, не всегда можно пренебречь ее влиянием. Действительно, в системе отсчета, где Земля — массу ее обозначим M — вначале покоилась, по закону сохранения импульса имеем

$$2mv = m(2v - u) + m(v - u) + Mu,$$

где u — скорость, приобретенная Землей. Отсюда для этой скорости получаем

$$u = -v\cdot\frac{m}{M - 2m} \text{ (видно, что } u < v\text{).}$$

Работа двигателя за время ускорения равна

$$A = \frac{m(2v - u)^2}{2} + \frac{m(v - u)^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} - \frac{2mv^2}{2}.$$

Но

$$\frac{Mu^2}{2}\approx\frac{m}{M}\,\frac{mv^2}{2}<\frac{mv^2}{2},$$

значит,

$$A\approx\frac{3}{2}mv^2.$$

Рассмотрим теперь систему отсчета, движущуюся со скоростью v. Закон сохранения импульса в этой системе запишется так:

$$-Mv=mv+Mu',$$

где u' — новая скорость Земли. Отсюда получаем, что эта скорость равна

$$u'=-\frac{M+m}{M}v.$$

а работа двигателя —

$$A'=\frac{Mu'^2}{2}+\frac{mv^2}{2}-\frac{Mv^2}{2}.$$

Но теперь изменение кинетической энергии Земли отнюдь не мало́:

$$\frac{Mu'^2}{2}-\frac{Mv^2}{2}=\frac{mv^2}{2}\frac{m}{M}+mv^2\approx mv^2,$$

и

$$A'=\frac{3}{2}mv^2,$$

как и в первом случае.

3. Неправильный ответ получить легко. Запишем уравнения движения частей веревки:

$$\frac{2}{3}mg-T=\frac{2}{3}ma,$$

$$T-\frac{1}{3}mg=\frac{1}{3}ma,$$

откуда для силы натяжения веревки T и силы давления веревки на блок F получаем

$$T=\frac{4}{9}mg,\ F=2T=\frac{8}{9}mg.$$

Почему же этот ответ неверен? Оказывается, небольшой блок может сыграть дурную шутку: ведь часть веревки, которая находится на блоке, обладает центростремительным ускорением и таким образом «съедает» часть силы давления. Кажется, что эта часть очень мала (ведь блок мал), но это не так. Обозначим радиус блока r, тогда масса веревки на блоке $\Delta m\sim r$, а ее центростремительное ускорение $a_ц\sim 1/r$. Найдем силу ΔF, обеспечивающую это ускорение. Пусть в некоторый момент скорость веревки равна v. Рассмотрим малый промежуток времени Δt. За это время участок веревки массой $mv\Delta t/l$, перейдя через блок, поменял скорость с v на $-v$. В соответствии с законом сохранения импульса, можно записать

$$\Delta F\Delta t=2m\frac{v^2\Delta t}{l},$$

откуда получаем $\Delta F=2mv^2/l$. Найдя v^2 из закона сохранения энергии

$$-2\frac{m}{2}g\frac{l}{4}=-\frac{m}{3}g\frac{l}{6}-\frac{2m}{3}g\frac{l}{3}+\frac{mv^2}{2},$$

имеем $\Delta F=1/9mg$, а

$$F=\frac{8}{9}mg-\frac{1}{9}mg=\frac{7}{9}mg.$$

Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Математика

1. $53+96=109+40=83+66=149$. Поэтому данное число делится на 149.

2. Ответ: 1. Исходное выражение равно

$$\frac{1}{1+1/(1+x)}+\frac{1}{2+x},$$

где x — дробь в знаменателе второго слагаемого.

3. Ответ: $d\sqrt{8}$. Пусть O — центр, а R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, OE — перпендикуляр, опущенный из точки O на AB. Воспользуйтесь подобием прямоугольных треугольников AOE и ADC.

4. Ответ: $x=\sqrt[3]{2}$ и $x=\pi n$, $n\in Z$. Если слагаемые в левой части уравнения не равны 0, то они имеют одинаковые знаки.

5. Ответ: Решений нет. Представим уравнение в виде

$$19(x^3-100)=91(y^2+1),$$

правая часть делится на 7, а левая — нет.

6. Сложите неравенства $a>k+nb/a$ и $b>n+ka/b$ и воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим.

7. Ответ: 45°.

8. Все такие окружности проходят через точку (0; 1).

9. Ответ: Не могут. Подсчитайте двумя способами сумму всех чисел.

10. Докажите, что если a — корень данного уравнения, то a^2-2 — тоже его корень.

11. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения прямых AA', BB' и CC' со сторонами BC, AC и AB треугольника ABC. Докажите, что

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

и воспользуйтесь теоремой Чевы (накануне олимпиады на консультации для участников теорема Чевы была доказана).

12. Пусть $x_1<x_2<x_3<x_4$ — данные положительные числа. Можно считать, что они попарно различны. Воспользуемся тем, что

$$\frac{x-y}{1+x+y+2xy}=\frac{(1+1/y)-(1+1/x)}{(1+1/x)(1+1/y)+1}=$$
$$=\operatorname{tg}(\alpha-\beta),$$

где $\alpha=\operatorname{arctg}(1+1/y)$, $\beta=\operatorname{arctg}(1+1/x)$, причем числа α и β принадлежат интервалу $(\pi/4;\ \pi/2)$, так что среди чисел $\operatorname{arctg}(1+1/x_i)$, $i=1, 2, 3, 4$ найдутся два, разность которых меньше, чем $\pi/12$ $(\operatorname{tg}\pi/12=2-\sqrt{3})$.

Физика

1. $M_x=8m$.

2. $a=7/20g$, если ускорение груза массой $2m$ направлено вверх, и $a=13/20\,g$, если его ускорение направлено вниз.

3. $m/2<M_x<2\,m$, при этом левый груз движется влево и его энергия не больше первоначальной энергии системы.

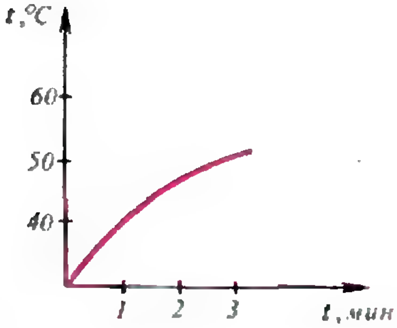


Рис. 1.

4. $x = Mv^2/(2\mu g(M+m)) \approx 0{,}13$ м.

5. $d_в \approx 3{,}11 \cdot 10^{-10}$ м; $d_{нп} \approx 3{,}72 \cdot 10^{-9}$ м; $\alpha \approx$ $\approx 5{,}4 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}\cdot$ с$^{-1}$. Указание. Давление насыщенного пара воды при 100 °С составляет 1 атм.

6. Максимальная температура $T_{max} = p_0V_0/(4R)$ достигается при объеме $V^* = 5/8\ V_0$; на участке $V < V^*$ газ получает тепло, на участке $V > V^*$ — отдает.

7. См. рис. 1.

8. $I_2 = I_3 = U_0/r$; $I_1 = I_4 = 0$.

9. $I_2 = 1{,}2$ мА; $U_0 = 0{,}75$ В; $R_V = 0{,}75$ кОм; $R_A = 0{,}375$ кОм.

10. $I = EdSn \approx 8{,}85 \cdot 10^{-9}$ А; от сопротивления рамки прибора показания практически не зависят.

11. $I_{mL} = U_0\sqrt{C/(3L)}$; $I_6 = U_0\sqrt{C/(27L)}$; $U_{mC} = 4/3\ U_0$.

12. $F = 4$ см, если линза собирающая, и $F = -12$ см, если линза рассеивающая.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. Подсчитаем число танцевавших пар. С одной стороны, оно равно утроенному числу кавалеров, а с другой — утроенному числу дам, поэтому число кавалеров равно числу дам.

2. См. рис. 2.

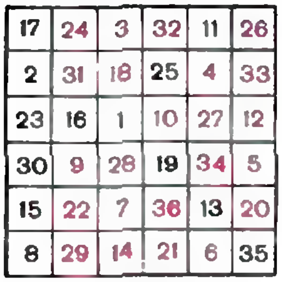
3. Нетрудно понять, что в задаче фигурируют не арабские, а римские цифры. Небольшим перебором убеждаемся, что единственно возможным вариантом является 1091 год XI века. Этот год записывается римскими цифрами как MXCI.

4. 77 копеек.

5. Если обозначить радиус одной из вписанных окружностей через x, а другой — через y, то искомая площадь равна

$$S = \pi(x+y)^2 - \pi x^2 - \pi y^2 = 2\pi xy.$$

Но t является высотой в прямоугольном треугольнике (рис. 3), откуда $t^2 = 4xy$, следовательно, $S = \pi t^2/2$.



17	24	3	32	11	26
2	31	18	25	4	33
23	16	1	10	27	12
30	9	28	19	34	5
15	22	7	36	13	20
8	29	14	21	6	35

Рис. 2.

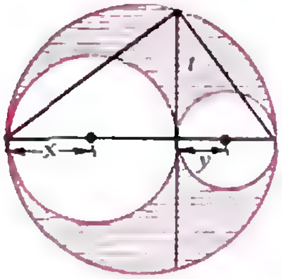


Рис. 3.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 6)

Вопросы и задачи

1. Когда человек станет на матрац, его вес распределится на меньшую площадь, чем когда он ляжет. Поэтому состояние равновесия наступит в первом случае при большем давлении.

2. Давление уменьшается.

3. Форма котла должна быть такой, чтобы сила давления, приходящаяся на единицу длины периметра сечения котла, была наименьшей. Это условие обеспечивает сферическая форма котла.

4. Сила давления жидкости на дно в два раза больше, чем на каждую из боковых граней.

5. Давление в трубке на уровне крана A меньше давления атмосферы. Поэтому при открывании крана атмосферное давление не позволит воде выливаться. Через кран в трубку будет поступать воздух до тех пор, пока внутри трубки не установится атмосферное давление и вода не опустится до первоначального уровня.

6. В исходном состоянии давление воздуха в пузырьке совпадает с давлением воды у дна сосуда. При подъеме пузырька вверх объем его практически не меняется (так как жидкость несжимаема), а следовательно, не меняется и давление воздуха в пузырьке. Значит, когда пузырек поднимется, давление воды у крышки будет равно давлению у дна в исходном положении, т. е. давление у дна увеличится.

7. Если бутылка подвергнется с наружной и внутренней сторон давлению, то вместимость ее уменьшится.

8. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то барометр будет находиться практически в состоянии невесомости. Под действием атмосферного давления трубка целиком заполнится ртутью, поэтому барометр будет показывать давление, соответствующее давлению высоты столбика ртути в трубке.

9. Динамометр показывает сумму веса трубки и силы атмосферного давления, равной весу ртути в трубке. При изменении атмосферного давления показания будут изменяться.

10. Когда бьет струя, на доску кроме силы гидростатического давления действует еще сила, обусловленная движением жидкости. Когда доска прижата, то вода неподвижна и на доску действует лишь сила гидростатического давления.

11. Когда мы пьем, под губами над поверхностью воды создаем область пониженного давления воздуха. Благодаря атмосферному давлению вода устремляется в эту область и попадает к нам в рот.

12. Поскольку высота башен одинакова, одинаковым будет и создаваемый ними напор воды. Однако предпочтительнее более вместительная башня, поскольку чем больше ее резервуар, тем ближе к постоянному будет оставаться давление в магистрали.

13. Сила светового давления убывает пропорционально квадрату расстояния до Солнца.

14. За счет большой скорости движения воздуха или воды давление внутри струи меньше атмосферного. Снизу шарик поддерживается

напором струи, а с боков — статическим атмосферным давлением.

15. Диаметр мячика увеличится, так как скорость воды в узкой части трубы больше, а давление соответственно меньше, чем в широкой части трубы.

Микроопыт

Через трубку, пропущенную сквозь пробку внутрь бутылки, надо вдуть воздух. При этом давление воздуха в бутылке увеличится, и он выдавит часть воды наружу через ту же трубку.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 3)

19. Когда играют 15 команд, такое случиться может. Это может произойти, например, следующим образом. Разобьем команды на пять троек, в каждой тройке пусть первая и вторая команды сыграют между собой вничью и обе обыграют третью команду. Во встречах команд из разных троек первые, вторые и третьи команды сыграют между собой вничью, первые команды выиграют у вторых, но проиграют третьим, вторые проиграют первым и выиграют у третьих, а третьи выиграют у первых, но проиграют вторым.

Если в турнире участвуют 16 команд, то такой результат также возможен. Расставим команды по кругу, и пусть каждая команда выиграет у 5 команд, идущих за ней по часовой стрелке, сыграет вничью со следующими пятью командами и проиграет остальным пяти командам.

В случае 17-ти команд такой результат невозможен. Действительно, всего сыграно $17\times16:2=136$ матчей и набрано 272 очка. Каждая команда набрала количество очков, кратное трем, поэтому и общая сумма очков должна делиться на 3, но число 272 на 3 не делится.

20. Условию задачи удовлетворяют только два числа: $1122250000=33500^2$ и $4422250000=66500^2$. Любопытно, что при этом все значки, кроме креста, определяются однозначно.

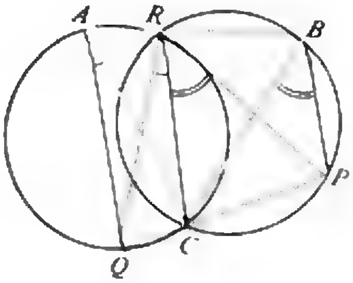


Рис. 4.

21. Так как $\angle RAC=\angle RQC$, то около четырехугольника $ARCQ$ (рис. 4) можно описать окружность. Но тогда $\angle CRQ=\angle CAQ$. Аналогично, $\angle CBP=\angle CRP$. Значит, $\angle CAQ+\angle CBP=60^\circ$. Отсюда $\angle PBR+\angle RAQ=180^\circ$, и следовательно, $BP\parallel AQ$.

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов
Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко,
С. Табачников, В. Тихомирова, В. Уроев,
А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс, И. Шарыгин
Г. Яковлев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, А. Калинин,
Л. Кардасевич, С. Коновалов, А. Котова,
А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Г. Антонов, Н. Кузьмина, Э. Назаров,
А. Хоменко, П. Чернуский, Г. Шиф, О. Шмелев,
В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
Г. Шиф

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор В. Сорокина

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»
тел. 250-33-54, факс 251-55-57

Сдано в набор 29.04.92. Подписано к печати 18.06.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,76.
Тираж 80865 экз. Заказ 496. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

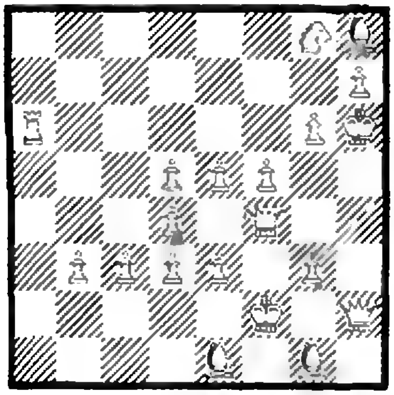
Шахматная страничка

ЗАГЛЯДЫВАЯ В ПРОШЛОЕ

В прошлый раз мы изучили одну классическую задачу ретроанализа. Рассмотрим еще две интересные задачи, для решения которых требуется заглянуть в прошлое позиции.

Раскрасить фигуры

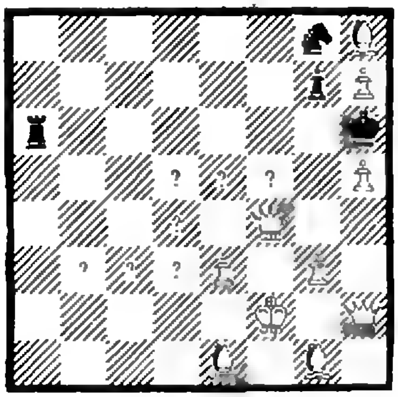
На рисунке все фигуры одного цвета. На самом деле некоторые из них — белые, а некоторые — черные, просто их «забыли» раскрасить. В этом и состоит задание.



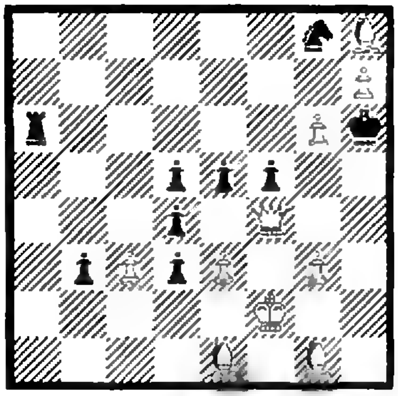
Займемся исследованием позиции. Два ферзя одновременно нападают на двух королей. Чтобы положение было законным, очевидно, ферзи должны быть одного цвета. При это возможен единственный вариант: ферзи и пешка g6 — белые, а король h6 — черный. Только в этом случае возможен двойной шах — последним ходом белые сыграли h5:g6++ (на проходе). Поскольку взятие на проходе возможно только сразу после хода пешки на два поля, предыдущий ход черных g7—g5. Теперь фиксируем, что слон h8 — белый: черному слону при черной пешке g7 на поле h8 не проникнуть. Поскольку белый слон h8 — превращенный, то пешка h7 — тоже белая: при черных пешках h7 и g7 положение даже превращенного слона на поле h8 невозможно.

Окраска остальных фигур, удары которых действуют на королей, такова: конь g8 — черный, слоны e1 и g1 и пешки e3 и g3 — белые. Снова заглянем в прошлое позиции. Вернем назад последний ход белых h5:g6++ и предыдущий ход черных g7—g5.

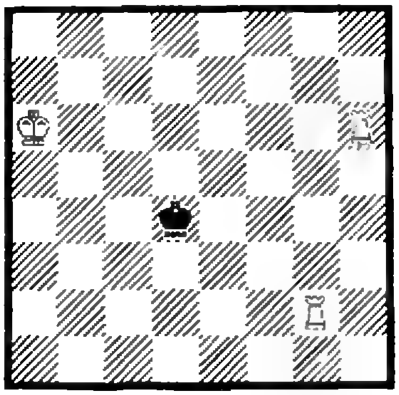
Только что был дан шах ферзем с f4, поэтому ладья a6 — черная; иначе король на h6 оказался бы под невозможным двойным шахом. Цвет семи пешек, еще не раскрашенных, пока под вопросом.



Подведем промежуточный итог. На три превращенные белые фигуры — один из ферзей и два из трех чернопольных слонов — затрачено три белых пешки. Кроме того, еще четыре пешки уже раскрашены в белый цвет. Всего пока учтено семь белых пешек. Теперь обратим внимание на расположение белых пешек королевского фланга. Вот примерная схема их движения: h2—h5, g2—g6:h7—h8С, f2:g3, e2—e4:f5:g6:h7 и d2:h3. Конечно, возможны и другие маршруты, но в любом случае белые пешки должны были взять минимум шесть черных фигур. Значит, всего в позиции на втором рисунке может остаться не более десяти (10=16—6) черных фигур. Четыре уже раскрашены в черный цвет. Поэтому одна из еще не раскрашенных пешек — белая, и это пешка c3. Только в этом случае белые пешки a2 и b2 могли превратиться в ферзя и в чернопольного слона, пройдя на a8 и b8 (черное поле!) без взятий. Наконец, перед нами искомая раскраска фигур.

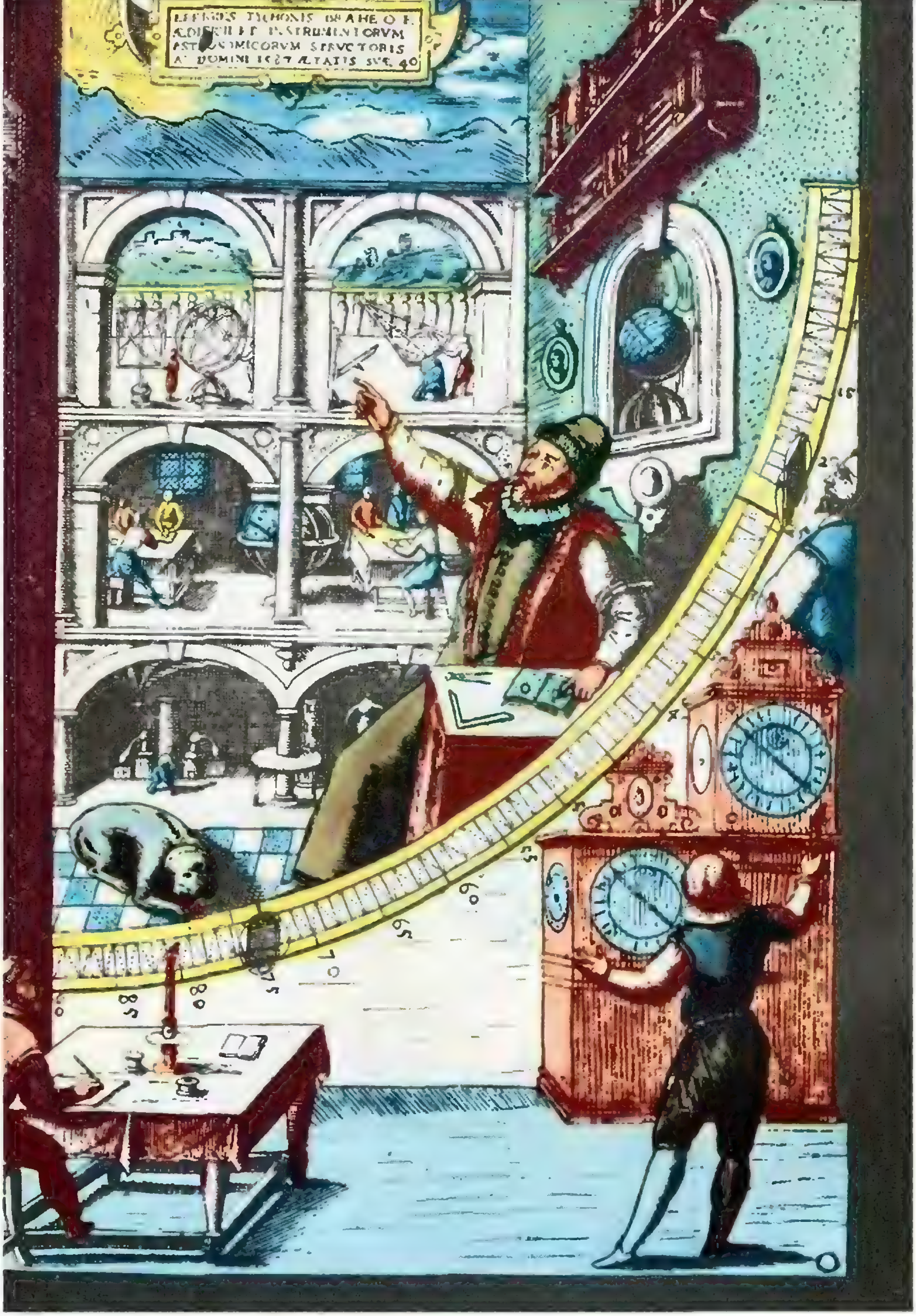


Следующая позиция более проста, но не менее изящна. **Белые начинают и выигрывают, но сделано уже 47 ходов без взятий.** В течение трех ходов белые должны объявить мат, иначе грозит ничья по правилу 50-ти ходов. Но заматовать так быстро неприятельского короля они не в состоянии. Что же делать? Разгадка состоит в том, что белым нужно временно забыть о мате и заставить черных за три хода взять одну из ладей. Правило 50-ти ходов прекратит свое действие, и тогда уже можно будет спокойно заняться матованием.



48. Лd6+! Кре4 49. Лf2! Кре5 50. Лf4!, и черные вынуждены взять одну из ладей. Если 49...Кре3, то 50. Лd4 с тем же итогом. Не спасают и другие отступления короля: 48...Крс4 49. Лb2! Крс5 50. Лb4 если 49...Крс3, то 50. Лd4!; 48...Кре3 49. Лd4! Крf3 50. Лe4; 48...Кре5 49. Лg4! Крf5 50. Лe6; 48...Крс5 49. Лg4! А на 48...Крс3 вообще следует 49. Крb5 Крb3 и 50. Лd3×.

Е. Гик


EFFIGIES TYCHONIS BRAHE O F.
ÆDIFICII ET INSTRUMENTORUM
ASTRONOMICORUM STRUCTORIS
A° DOMINI 1587 ÆTATIS SUÆ 40
15
20
55
60
65
70
75
80
85

1 р. 10 к.

Индекс 70465

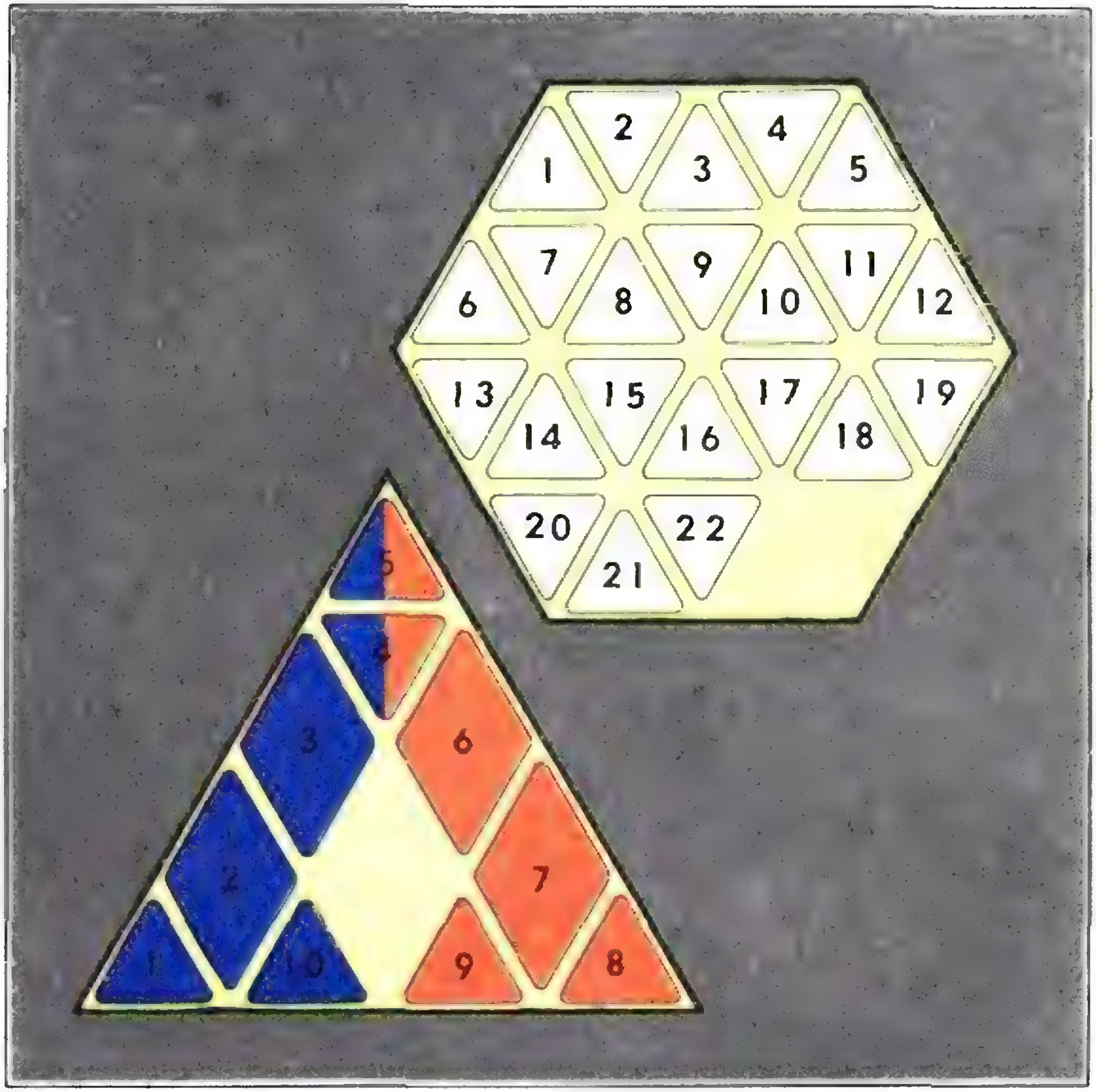
ИГРЫ С «ДЫРКОЙ»

Известная всем «игра 15» или «пятнашки», имеет множество «родственников». Объединяет их общее свойство: на игровом поле есть свободное место — «дырка», и за счет этого фишки можно менять местами, не вынимая из коробочки.

В большинстве случаев «родственников» отличает от «игры 15» бóльшая трудность решения. Это относится и к двум головоломкам, которые вы видите на рисунке. Та, что имеет треугольное поле, придумана в начале века. В ней требуется переставить фишки так, чтобы номера шли не по часовой стрелке, а против. Можно рассмотреть вариант этой головоломки, в котором отсутствуют цифры. В этом случае задача состоит в том, чтобы слева оказался розовый цвет, а справа — фиолетовый.

Головоломку на треугольном поле удается решить за 68 ходов, а вот лучшее решение для второй игры — на шестиугольном поле, пока не знает даже ее автор — Л. Мочалов. В ней требуется поменять местами все фишки так, чтобы порядок нумерации сменился на обратный, т. е. чтобы на место фишки с номером n встала фишки с номером 23—n. За сколько ходов вам удастся решить эту задачу?

А. К.



НОМЕР
8

Квант

8 1992

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Российской академии наук,
Президиум
Академии педагогических наук
и коллектив редакции
журнала «Квант»

Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *А. Кикоин.* Нейтрон и ядерная энергия
10 *Ю. Соловьев.* Творцы новой астрономии
15 *Б. Олдридж.* Натуральный логарифм
20 *М. Гарднер.* Шифр Бэкона

Задачник «Кванта»

29 Задачи М1356—М1360, Ф1363—Ф1367
31 Решения задач М1326—М1330, Ф1343—Ф1347

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

42 Задачи
43 *В. Сурдин.* Задачи старика Хоттабыча

Новости науки

46 Перетягивание каната

Лаборатория «Кванта»

48 *Дж. Уокер.* «Тепловые фантазии и прочие удовольствия»

Практикум абитуриента

51 *В. Можаев.* Постоянный электрический ток

Игры и головоломки

58 Игра го

Информатика

62 *Л. Штернберг.* ЭВМ перебирает варианты

Олимпиады

67 Болгарская олимпиада по математике
68 XV Московская экономико-математическая олимпиада

Фантастика

70 *Ф. Дик.* О неутомимой лягушке

77 **Ответы, указания, решения**

К нашим читателям *(9)*

Нам пишут *(39)*

«Квант» улыбается *(27)*

Реклама *(28, 47, 57)*

Наша обложка

1 *Именно так Евклид доказывал бы справедливость равенства, написанного под рисунком. Смотрите! И убедитесь, что формула верна.*

2 *Прочитав нашу «Шахматную страничку», вы поймете, почему мы выбрали этот «Натюрморт с шахматной доской» Ю. Васнецова. Доска, конечно, нужна для того, чтобы расставить фигуры. А полка? Чтобы черные не увиливали от обратного мата!*

3 *Шахматная страничка.*

4 *«Заколдованная петля» — топологическая головоломка.*

© «Квант», 1992

НЕЙТРОН И ЯДЕРНАЯ ЭНЕРГИЯ

(знаменательные даты)

Профессор
А. КИКОИН

В 1896 году было открыто явление радиоактивности, а в следующие несколько лет усилиями многих исследователей были выяснены все характерные его особенности. Для химиков полной неожиданностью был тот факт, что радиоактивные элементы способны превращаться один в другой: уран сам собой превращается в торий, торий в радий, радий в радон и т. д. Оказалась несостоятельной давняя уверенность в том, что атомы ни при каких условиях не могут превращаться один в другой, делиться. Физиков же поразило испускание атомами радиоактивных элементов огромной энергии в виде быстрых положительно и отрицательно заряженных частиц и квантов электромагнитного излучения. То, что атомы могут испускать энергию, было известно и раньше: так, энергия выделяется атомами при излучении света, при химических реакциях. Но ни одна, ни другая энергия не превышает нескольких электронвольт*) в расчете на каждый атом. Радиоактивные же превращения сопровождаются выделением энергии порядка миллионов электронвольт на атом.

Кладовая или... кладбище? Грандиозная кинетическая энергия вылетающих из атома частиц не может появиться иначе, как за счет столь же огромной потенциальной энергии внутри атома. А она свидетельствует о чудовищных взаимодействиях внутри атома. Понятно, что не мог не возникнуть вопрос о возможности их практического использования.

Та энергия, которая в природе выделяется атомами радиоактивных элементов, большого практического интереса не представляет. Испускается она редкими, можно сказать, экзотическими элементами в малых количествах, и притом она совершенно неуправляема. Светящиеся стрелки приборов да некоторые применения в медицине — вот и все, что удалось использовать на практике. Но если вновь открытая энергия содержится в атомах радиоактивных элементов, то, наверное, она должна существовать и в атомах других элементов. И нужно только суметь ее оттуда извлечь или, как тогда говорилось, освободить. Можно ли это сделать?

Здесь мнения разделились. Одни считали, что атом (всякий атом, а не только радиоактивный!) — склад энергии, из которого ее можно извлечь, раз это «умеет» делать природа с радиоактивными атомами. Другие утверждали, что атомы — это кладбище энергии, в котором она надежно захоронена, и освободить ее оттуда никогда не удастся. Так думало большинство специалистов.

Надо иметь в виду, что тогда, в самом начале века, никто не знал, как устроены атомы. Известно было лишь, что в атомах содержатся отрицательно заряженные частицы — электроны и положительный заряд — неизвестно в каком виде. Об «архитектуре» атома лишь строились догадки. Но ясно, что, не зная строения и состава атома, нельзя решить спор о внутриатомной энергии. И проблема

---

*) Напомним, что в электронвольтах (эВ) принято измерять энергию микрочастиц, имеющих электрический заряд; 1 эВ$=1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж. (*Прим. ред.*)

строения атома надолго становится главной проблемой физики.

В решении этой проблемы приняли участие самые блестящие физики века. Причем они не были озабочены выяснением того, кто прав в споре, о котором мы здесь говорили. Они искали ответ на вопрос, как устроен атом и какие процессы в нем происходят или могут происходить. Но мы, знающие теперь, чем все это кончилось, можем принять, что целью исследований были и поиски способа получения и использования той энергии, которая таится в недрах атома. Вспомнив известные строки А. С. Пушкина, мы можем сказать, что вся физика «была залогом свиданья верного с» ... тем, что мы теперь называем атомной энергией. О том, как, шаг за шагом, физика пришла к этому «свиданью верному», и будет кратко рассказано дальше.

Шаг за шагом. В 1911—1912 годах, через 15 лет после открытия явления радиоактивности (и кстати, с помощью этого явления) усилиями экспериментатора Э. Резерфорда и теоретика Н. Бора был решен вопрос об устройстве атома. Появилась так называемая планетарная модель атома, согласно которой атом состоит из положительно заряженного ядра и окружающей его электронной оболочки. Стало также ясно, что химические процессы, при которых выделяется энергия порядка одного или нескольких электронвольт, разыгрываются в электронной оболочке, а поразившая физиков энергия в миллионы электронвольт рождается в недрах атомного ядра. Именно ее теперь чаще всего и называют атомной энергией, хотя следовало бы ее называть ядерной энергией.

В 1919 году, год спустя после первой мировой войны, Э. Резерфорд выполнил замечательную работу по бомбардировке (именно тогда появился этот военный термин в физике) атомов азота альфа-частицами, испускаемыми радиоактивным полонием ($^{214}_{84}Po$). При этом из ядер азота вылетали быстрые частицы, оказавшиеся ядрами водорода. Эту ядерную реакцию можно записать так:

$$^{14}_{7}N + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{17}_{8}O + ^{1}_{1}H.$$

Эрнест Резерфорд (1871—1937).

Похожие реакции наблюдались и при бомбардировке альфа-частицами других элементов — бора, фтора, хлора, алюминия и т. д. (всего 13 элементов). Во всех случаях бомбардируемые элементы испускали ядра водорода.

Об опытах Резерфорда говорили и писали, что их главным результатом было открытие одной из составных частей ядра любого элемента — ядра атома водорода, уже в 1920 году названного Резерфордом протоном. И это, конечно, верно. Об этих опытах говорили и писали также, что в них впервые наблюдалось искусственное превращение одних элементов в другие (азот превращался в кислород, алюминий — в кремний и т. д.). Это, разумеется, тоже верно. Но для нас важно то, что в опытах Резерфорда было показано, что́ именно надо сделать, чтобы извлечь из атомов (точнее — из их ядер) энергию. Для этого, оказывается, нужно ввести в ядро дополнительные частицы (или частицу). На такое «вторжение» ядро реагирует очень бурно — оно испускает быструю частицу (иногда не одну). Кинетическая энергия испускаемой частицы — это и есть «освобожденная» ядерная энергия.

Нильс Бор (1885—1962).

Так, на вторжение альфа-частицы в ядро азота оно ответило испусканием протона. Правда, для того чтобы альфа-частица могла попасть в ядро, она должна обладать достаточной для этого энергией — ведь она отталкивается от ядра. И если мы интересуемся практическим использованием ядерной энергии, то нужно сравнить затраченную энергию — энергию альфа-частицы — с полученной — с энергией протона. В случае с азотом сравнение это показывает, что выигрыша энергии нет — потраченная энергия больше полученной. Но в упомянутой уже выше реакции с алюминием —

$$^{27}_{13}\mathrm{Al}+^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow^{30}_{14}\mathrm{Si}+^{1}_{1}\mathrm{H}$$

картина совсем другая. Здесь энергия вылетевшего протона на 3 МэВ больше энергии альфа-частицы. Это означает, что каждый атом алюминия дает энергию почти в миллион раз большую, чем атом углерода, участвующий в реакции горения. Казалось бы, задача решена. Надо проектировать и строить установки, в которых роль топлива будет играть алюминий, и перестать сжигать уголь, нефть, газ. Тем более, что алюминия на земле в сотни раз больше, чем углерода. Но никто не спешил создавать такие установки. Дело в том, что положительно заряженные альфа-частицы, у которых положительный заряд равен удвоенному заряду электрона, сильно отталкиваются от ядер, и далеко не всякая альфа-частица проникает в ядро. Лишь одной из сотен тысяч удается это сделать. А значит, КПД процесса не превышает десятых долей процента. Такой КПД не заинтересует ни одного инженера.

Следующий шаг состоял в том, чтобы бомбардировать ядра не альфа-частицами, а протонами, у которых положительный заряд вдвое меньше, а значит, меньше и силы отталкивания от ядер-мишеней. Но в отличие от альфа-частиц, энергия которых достается «бесплатно», протонам надо сначала сообщить кинетическую энергию. А это можно сделать только с помощью достаточно сильного электростатического поля. Так появились ускорители заряженных частиц.

60 лет тому назад, в 1932 году, впервые для бомбардировки ядер были использованы протоны, вылетевшие из ускорителя. И сразу был достигнут впечатляющий успех. Ученики Резерфорда Д. Кокрофт и Э. Уолтон в Англии, а также А. Вальтер, А. Лейпунский и К. Синельников в Харькове осуществили ядерную реакцию на быстрых протонах с литием, который «устоял» перед альфа-частицами в опытах Резерфорда. Реакция, которую они наблюдали, была такой:

$$^{7}_{3}\mathrm{Li}+^{1}_{1}\mathrm{H}\rightarrow 2^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Литий превратился в две альфа-частицы, и, что особенно замечательно, их энергия была равна 17,2 МэВ. А энергия протона, вызвавшего реакцию, была всего около 100 кэВ, т. е. выигрыш энергии составлял порядка 17 МэВ.

Тем не менее, и протоны не решали задачу практического использования ядерной энергии. И по той же причине, что и альфа-частицы. Протоны тоже отталкиваются от ядер, и лишь один из многих сотен тысяч попадает в ядро и участвует в реакции. А ускорять приходится все протоны, в том числе и те, что тратят свою энергию лишь на нагревание литиевой мишени.

В том же 1932 году было сделано

еще одно, важное для всей физики и решающее для интересующей нас проблемы ядерной энергии, открытие. Д. Чедвик (тоже ученик Резерфорда) из анализа собственных исследований и опытов других физиков установил, что при бомбардировке бериллия альфа-частицами из него вылетают неизвестные до того частицы с массой почти такой же, как у протона, но лишенные электрического заряда. Чедвик назвал их нейтронами. Реакция Чедвика записывается так:

$$^{9}_{4}\mathrm{Be}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}\rightarrow{}^{12}_{6}\mathrm{C}+{}^{1}_{0}n.$$

Нейтрон (его обозначают $^{1}_{0}n$), как выяснилось, это вторая (после протона) составная часть ядра.

Открытие нейтронов оживило надежды на возможность использования ядерной энергии. Ведь лишенные заряда нейтроны не отталкиваются от ядер и должны легче попадать в ядра. Правда, их нельзя ускорять, как протоны. Но, как оказалось, их и не надо ускорять. Медленные нейтроны легче проникают в ядра, чем быстрые, так что их даже нужно замедлять. Объясняется это тем, что медленно движущийся нейтрон проводит большее время вблизи ядра и имеет больше шансов быть втянутым в него ядерными силами притяжения.

Нейтрон был сразу принят «на вооружение» исследователями ядра. Он в самом деле оказался много эффективнее, чем протон и альфа-частица. Не один из сотен тысяч, а один нейтрон из ста попадал, например, в ядро азота и вызывал реакцию

$$^{14}_{7}\mathrm{N}+{}^{1}_{0}n\rightarrow{}^{11}_{5}\mathrm{B}+{}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

При этом энергия вылетающей альфа-частицы во много раз больше энергии вызвавшего реакцию нейтрона.

Казалось бы, теперь есть чем извлекать ядерную энергию. Выяснилось, однако, что задача так просто не решается. В отличие от протонов, нейтроны в свободном виде, вне ядра, не существуют. Нейтрон — частица радиоактивная. С периодом полураспада около 11 минут он испускает бета-частицу (электрон) и превращается в протон. Значит, чтобы получить нейтроны для обстрела ядра, их нужно перед самым «употреблением» выбить из ядер. Это можно сделать, например, пользуясь реакцией бомбардировки бериллия альфа-частицами. Но ведь такие реакции, как мы знаем, малоэффективны, и нейтронов получается так мало, что о техническом энергетическом устройстве на этой основе не может быть и речи. Сложилось парадоксальное положение: частицы, которые имеются в изобилии (альфа-частицы и протоны), непригодны для массового получения энергии, а те частицы, которые для этого как нельзя более подходят (нейтроны), не существуют в природе и их нельзя получить в достаточно большом количестве. Казалось, все-таки правы те, кто считал ядро не складом, а кладбищем энергии.

В 1938 году О. Ган и Ф. Штрассман сделали важное открытие, а в 1939 году Л. Мейтнер поняла и объяснила его. Состояло оно в том, что при попадании нейтрона в уран ядро урана реагирует совсем не так, как на это реагировали другие ядра. Вместо того, чтобы испустить одну-две частицы с энергией в несколько миллионов электронвольт, ядро урана после поглощения нейтрона раскалывается на два осколка с энергией в 80 МэВ каждый. При этом осколки ядра урана, которые тоже представляют собой ядра атомов, оказываются бета-радиоактивными, и к 160 МэВ энергии осколков добавляются еще около 40 МэВ энергии бета-частиц и сопровождающего их гамма-излучения. Так что на каждое ядро урана, испытавшего, как говорят, деление, приходится энергия в 200 МэВ — это даже для ядерных процессов впечатляющая величина. А нейтрон, вызвавший этот взрыв, может быть очень медленным, т. е. почти лишенным энергии.

Само по себе это удивительное явление для решения проблемы использования ядерной энергии ничего не дает, потому что остается прежний вопрос — где взять нейтроны. При-

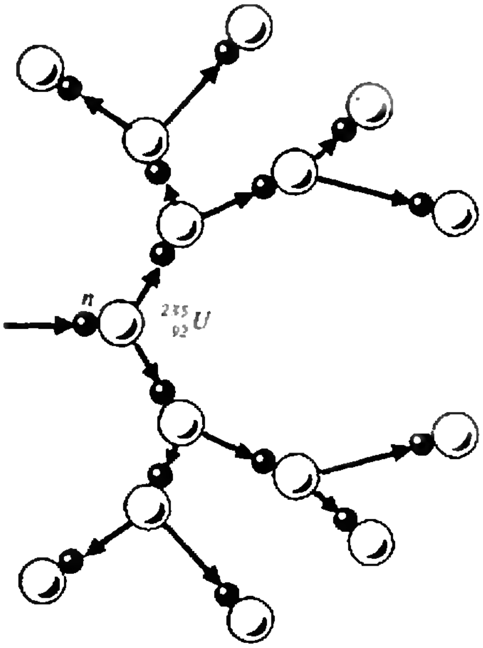
Фредерик Жолио-Кюри (1900—1958).

рода, однако, дала ответ и на него. В том же 1939 году многими исследователями (среди них Ф. Жолио-Кюри) было установлено, что осколки деления ядер урана, сильно перегруженные нейтронами, как бы теряют по 2—3 (в среднем 2,5) нейтрона в каждом акте деления. Некоторые из них теряются в самый момент деления, некоторые немного позже (так называемые запаздывающие нейтроны). Вот эти-то, как их называют, нейтроны деления и могут вызывать деления других ядер.

Оказалось, таким образом, что при делении ядер урана выделяется не только вожделенная ядерная энергия, но и столь же вожделенные нейтроны, которые так трудно получить в большом количестве. Достаточно одному-единственному нейтрону попасть в одно из ядер куска урана и вызвать его деление, чтобы возникла так называемая цепная реакция. И действительно, первое ядро превратится в два осколка и появятся два (или три!) нейтрона. Они очень быстро попадут в другие два ядра, вызовут их деление, и появятся уже 4 осколка и 8 нейтронов. Попав в новые 8 ядер, они, в свою очередь, дадут 16 осколков и 32 нейтрона и т. д. Как снежный ком (но несравненно быстрее) будет расти число осколков и число нейтронов. Разумеется, некоторая часть нейтронов может быть потеряна для процесса цепной реакции. Одни нейтроны могут еще до встречи с очередными ядрами вылететь из куска урана, другие могут попасть в ядра, но не вызвать деления, и т. п. Тем не менее, цепная реакция, должна возникнуть и иметь взрывной характер. Кусок урана должен превратиться в огненный шар.

Но природа приберегла для физиков еще один сюрприз, вернее сюрприз-преграду. Выяснилось, что все описанное выше — деление ядер урана с выделением огромной энергии, нейтроны деления, обеспечивающие возможность цепной реакции,— относится только к так называемому легкому изотопу урана — ${}^{235}_{92}U$. А в природном уране такого изотопа всего 0,7 %. Ядра же тяжелого изотопа — ${}^{238}_{92}U$ — только мешают течению цепной реакции, так как они поглощают нейтроны и выводят их из процесса. Перед физиками возникла трудно разрешимая проблема разделения изотопов — выделения из природного урана его легкого изотопа.

И все же оказалось возможным получить цепную ядерную реакцию даже на природном уране — были приняты меры к тому, чтобы нейтроны деления урана-235 не поглощались ураном-238. Этого можно до-



Цепная реакция деления тяжелых ядер.

биться, если сделать нейтроны деления, которые рождаются быстрыми, нейтронами медленными. Что и удалось осуществить Э. Ферми, рассчитавшему и построившему специальную конструкцию из урана и графита. Графит замечателен тем, что он не поглощает, а только замедляет нейтроны. Пятьдесят лет тому назад, 2 декабря 1942 года, в Чикаго Ферми впервые в истории осуществил цепную ядерную реакцию в устройстве, называемом ядерным реактором (тогда оно называлось котлом). Это был гигантский успех: был найден способ получения управляемой ядерной энергии. Об этом событии в условиях тогдашней строгой секретности было сообщено начальству в такой телеграмме: «Итальянский мореплаватель добрался до Нового Света и был дружественно встречен туземцами» (в 1942 году исполнилось 450 лет со времени открытия Америки Колумбом, который, как и Ферми, был итальянцем). В 1946 году, и тоже в декабре, успех Ферми был повторен в нашей стране И. В. Курчатовым.

Интересно, что тяжелый изотоп урана в реакторе оказался не только помехой цепной реакции. Нейтроны определенной энергии при попадании в ядро ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ превращают его в изотоп ${}^{239}_{92}\mathrm{U}$ с испусканием гамма-кванта:

$${}^{238}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{239}_{92}\mathrm{U} + \gamma.$$

Новый изотоп урана радиоактивен и, *испустив бета-частицу, превращается* в ядро элемента нептуния:

$${}^{239}_{92}\mathrm{U} \to {}^{239}_{93}\mathrm{Np} + {}^{0}_{-1}e.$$

Этот нептуний тоже радиоактивен и превращается в ядро плутония:

$${}^{239}_{93}\mathrm{Np} \to {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} + {}^{0}_{-1}e.$$

Причем превращение урана в плутоний происходит довольно быстро: у ${}^{239}_{92}\mathrm{U}$ и ${}^{239}_{93}\mathrm{Np}$ периоды полураспада невелики — 23 минуты и 2,3 дня соответственно. Изотоп же плутония испускает *альфа-частицу и превращается* в... ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$:

$${}^{239}_{94}\mathrm{Pu} \to {}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Энрико Ферми (1901—1954).

Казалось бы, счастливая находка: вредный *тяжелый уран превращается* в нужный для цепной реакции легкий уран. Но... у радиоактивного плутония период полураспада около 24 000 лет, так что пользы от этого превращения не дождаться. Однако ждать и не нужно: ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ во всем сходен с ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ и годится для осуществления цепной реакции. Ядерный реактор оказался не *только источником энергии, но и поставщиком* ядерного горючего (и взрывчатого вещества).

Тем временем велась работа и по выделению чистого ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$. Нужно заме-

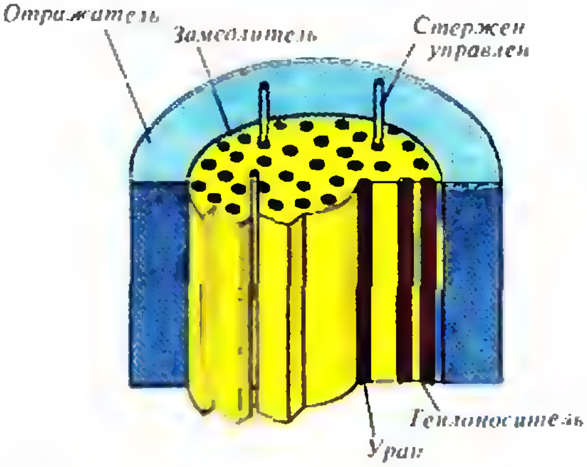


Схема активной зоны атомного реактора.

Игорь Васильевич Курчатов (1903—1960).

тить, что физики умели разделять изотопы еще до войны. Но разработанные лабораторные методы позволяли получать лишь миллионные доли грамма чистого изотопа. Этого было достаточно для научных исследований, но для проведения цепной реакции требовались килограммы, десятки килограммов. Значит, нужно было увеличить масштаб «производства» в миллиарды раз. Двадцать тысяч рабочих, инженеров и специалистов — физиков и химиков — все же справились с этой задачей. В 1945 году нужное количество урана было накоплено, и ядерная энергия была получена в ее взрывном варианте — появилось ядерное оружие, тут же использованное американцами для атаки на японские города Хиросима и Нагасаки. В нашей стране задача разделения изотопов урана тоже была решена*), и в 1949 году была испытана наша первая ядерная бомба.

Так решился вопрос о том, что же такое атомное ядро — кладовая или кладбище энергии. Безусловно, атомное ядро — склад энергии, причем с очень надежным замком. Но ключ к этому замку есть. Это нейтрон.

Что такое хорошо и что такое плохо? В этой статье развитие атомной и ядерной физики представлено как поиск ответа на вопрос, можно ли получить и использовать ядерную энергию. В действительности вплоть до второй мировой войны физики не ставили перед собой такой задачи. Они, как и полагается исследователям природы, изучали атом, а затем и атомное ядро, чтобы узнать, какие законы там действуют и какие явления там происходят. Оказалось, что эти законы и явления допускают возможность получения и использования ядерной энергии, которая немедленно властно вторглась в жизнь людей, в политику государств. Уж очень эта энергия велика!

О законах природы, о научных открытиях не принято, да и не имеет смысла, говорить и спорить, хороши они или плохи. Но о ядерной энергии вот уже полвека идут споры именно такого рода. Говорят, например, что ядерное оружие — это оружие массового уничтожения и что оно таит в себе опасность гибели человеческой цивилизации и человечества. Это верно, и это, конечно, плохо.

Но с другой стороны, не надо забывать, что, по-видимому, именно ядерное оружие предотвратило третью мировую войну. Сейчас мир явно движется к тому, чтобы ядерные бомбы, как орудие войны, были запрещены. Но ядерные бомбы можно использовать и для мирных, полезных целей. Оказалось, например, что подземные ядерные взрывы помогают существенно увеличить добычу нефти в глубоких месторождениях. Предотвращение мировой войны, мирные ядерные взрывы заслуживают, очевидно, оценки «хорошо».

Ядерные реакторы, используемые для получения энергии на ядерных электростанциях (их, впрочем, называют атомными станциями), за пятьдесят лет получили широкое применение. Во многих странах они дают 20—40 процентов потребляемой энергии, а во Франции даже 70 % (в нашей стране — около 10 %). Ядерные

---

*) В нашей стране научным руководителем работ по разделению изотопов урана и созданной на их основе отрасли промышленности был основатель журнала «Квант» И. К. Кикоин. (*Прим. ред.*)

станции не дымят и не отравляют атмосферу. Они сберегают уголь, нефть, газ — ценное химическое сырье. К тому же запасы этих видов топлива истощаются и рано или поздно иссякнут. Получается, что ядерная энергия пришла к людям своевременно. Это как будто хорошо.

Но... эксплуатация ядерных электростанций связана с возможностью новых для человечества загрязнений — радиоактивных. Ведь осколки деления сильно радиоактивны. Насколько эта опасность серьезна, показала авария в Чернобыле. Об этом, конечно, ничего хорошего сказать нельзя. Необходимо, чтобы физика, сделавшая возможным использование ядерной энергии, сделала ее и вполне безопасной. И прежде всего нужно, чтобы у пультов управления на ядерных электростанциях находились хорошо подготовленные и добросовестные люди.

Еще одна годовщина. Сорок лет тому назад была открыта другая возможность получения ядерной энергии. В 1952 году на атолле Бикини в Тихом океане американцы осуществили первый взрыв так называемой термоядерной бомбы, а вскоре такой взрыв был проведен и в нашей стране. Этот способ получения ядерной энергии во многом прямо противоположен описанному выше ураново-плутониевому способу. В урановом варианте «зачинщиком» реакции является нейтрон, а конечным «продуктом» — высокая температура. В термоядерном способе, наоборот, все начинается с создания очень высокой температуры, а нейтроны — один из конечных продуктов реакции. В урановом способе «действующие лица» — ядра атомных элементов конца таблицы Менделеева, в термоядерном — са́мого ее начала.

И еще одно различие. Как мы видели, сначала был создан урановый ядерный реактор, а через три года ядерная бомба. В термоядерном же случае оружие появилось 40 лет тому назад, а управляемый термоядерный реактор не удалось пустить в ход и до сих пор, несмотря на усилия физиков многих стран. Но можно не сомневаться в том, что термоядерная энергия — это энергия XXI века и последующих веков. Надеюсь, что те школьники — читатели этой статьи,— кто выберет своей специальностью физику, станут участниками разработки и создания термоядерных реакторов. А в том, что все читатели будут потребителями термоядерной энергии в XXI веке, я почти не сомневаюсь.

Дорогие читатели!

У вас в руках очередной, уже 8-й номер журнала «Квант».
В наши дни это совсем не тривиальное событие,
ибо закрываются одни журналы, сокращаются объемы других.
Причина понятна всем — резкое удорожание бумаги,
типографских и почтовых услуг, увеличение других расходов.
В результате денег, собранных по подписке, например, на наш журнал,
едва хватило на два номера.
Благодаря поддержке правительства России, учредителей и издательства
нам все же удалось выпустить 8 из 12 номеров,
но их помощь не может быть беспредельной.
И сегодня мы обращаемся к вам — нашим читателям:
найдите возможность выделить из своего бюджета 25 рублей
(если это для вас много, то можно и меньше, если нет, можно и больше),
дойдите до ближайшей почты и вышлите их в адрес:

р/с 362505 в Октябрьском отделении МИБ г. Москвы,
МФО 201070 (редакции «Кванта»).

Только не откладывайте — завтра может быть поздно.
А мы приложим все усилия, чтобы вы получили все 12 номеров.

ТВОРЦЫ НОВОЙ АСТРОНОМИИ

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

В 1609 году вышла в свет «Новая астрономия, причинно обоснованная, или Физика неба, изложенная в исследованиях движения звезды Марс по наблюдениям благороднейшего мужа Тихо Браге». В этой гениальной книге Кеплер впервые сформулировал те положения, которые мы называем теперь первым и вторым законами Кеплера.

Первый закон. *Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.*

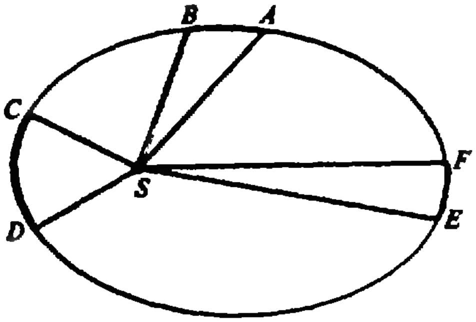
Второй закон. *Планеты движутся по своим орбитам с переменной скоростью таким образом, что площади, описываемые радиусом-вектором от центра Солнца до планеты за равные промежутки времени, оказываются равными.*

Первоначально «Новая астрономия» не обратила на себя такого внимания, какое выпало на ее долю впоследствии. Материальное положение Кеплера не улучшалось. Поэтому в 1612 году он поселился в Линце в качестве директора местной гимназии. Здесь он снова занялся исследованием строения планетной системы. Несколько лет бесконечных вычислений, сотни неудачных выкладок не останавливали Кеплера. 8 марта 1618 года ему пришла в голову мысль сравнить числа, выражающие квадраты времен обращения планет, с числами, равными кубам их средних расстояний. Однако Кеплер ошибся в вычислениях и не нашел никакого совпадения. Лишь 15 мая того же самого года он нашел допущенную им раньше ошибку и получил искомое соотношение. Кеплер писал по этому поводу: «Это соотношение представляло такое блистательное завершение моей семнадцатилетней работы над наблюдениями Тихо, что сперва я подумал, уж не грежу ли я, принимая искомое за данное». Так был найден третий закон Кеплера.

Третий закон. *Квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.*

Этот результат был опубликован Кеплером в 1619 году в «Гармонии мира», пожалуй самом его значительном сочинении. В нем больше, чем в других его сочинениях, нашла отражение его непоколебимая вера в то, что мир отлит в математической изложнице. Он искал гармонии планетных движений с геометрическими фигурами, с теорией чисел, с музыкой сфер. Многое из того, что вдохновляло его, оказалось ложным. Но последующие поколения нашли у Кеплера то, что послужило фундаментом новой астрономии.

А частная жизнь складывалась трагично. Его жена и сын умерли во время эпидемии оспы. Кеплер женился во второй раз, но вынужден был



Ко второму закону Кеплера.

Окончание. Начало см. в № 7.

скитаться по Германии, охваченной Тридцатилетней войной. В конце концов Кеплер нанимается на службу к известному полководцу той эпохи, герцогу Валленштейну, в качестве астролога. Нужда вновь заставляет его обратиться к императору с просьбой выплатить ему жалованье за годы императорской службы. Кеплер решает лично поехать к императору в Регенсбург. В дороге в осеннее ненастье он простудился и заболел. 15 ноября 1630 года он умер в бедной гостинице на старом рыбном рынке Регенсбурга, без помощи, вдали от семьи, на 59-м году жизни. При нем нашли 57 экземпляров изданного им календаря на 1631 год, 16 экземпляров его астрономических таблиц и 7 пфеннигов.

Нельзя не сожалеть о том, что жизнь Кеплера протекала в такое печальное время. Лишь только после своей смерти он занял подобающее ему место в науке, увлекая своим примером будущих исследователей.

Весть, полученная от звезд

Время возникновения новой астрономии — рубеж шестнадцатого и семнадцатого веков — было и временем возрождения античности. «Мы — истинные древние!» — восклицал Фрэнсис Бэкон. В этом плане творчество Кеплера, его подход к изучению Вселенной близко примыкает к античности. Для него мироздание было по сути своей математично, он считал, что, изучая геометрию, мы изучаем мироздание. Это скорее античное, чем современное восприятие мира. Кеплер почти не нуждался в экспериментальных фактах — чертеж мира находился внутри него. По-видимому, первым человеком, который попытался узнать, что говорит природа, а не человеческое воображение, был Галилео Галилей.

Галилео родился в итальянском городе Пиза в 1564 году в семье бедного флорентийского дворянина. В детстве получил хорошее домашнее образование, учился в Пизанском университете, но не окончил его за отсутствием средств. Тем не менее он быстро обнаружил свой талант создателя остроумных физических приборов, смелого экспериментатора. Некоторое время он преподавал в Пизе, потом перебрался в Падую. Увлеченно занимался опытами по механике, конструировал новые машины и механизмы, применял свои силы в инженерном деле и фортификации. Преподавая астрономию, Галилей познакомился с учением Коперника, но астрономия как таковая долго не входила в круг его интересов. Так продолжалось до 1609 года, когда в его жизнь вошла зрительная труба.

Кем и когда она была изобретена, доподлинно неизвестно. Во всяком случае, уже спустя пятьдесят лет после ее первого появления, никто не мог указать точных обстоятельств, при которых возник этот чудесный инструмент. Однако остается фактом, что в 1608 году шлифовальщик оптических стекол, родом из Невеля, по имени Ганс Липперсгей, живший в Миддельбурге, представил Генеральным штатам Голландии инструмент — «чтобы далеко видеть». В то же время он просил о привилегии на тридцать лет или о выдаче ежегодной пенсии. Вследствие этой просьбы Генеральные штаты собрали 2 октября названного года особую комиссию, которой и поручили испытать предложенный инструмент. Комиссия дала благосклонный отзыв, и представленный Липперсгеем инструмент, а также три других аналогичных инструмента были куплены у него за необычайно высокую сумму в 900 гульденов. Но в привилегии ему было отказано, так как по мнению комиссии другим лицам было уже известно об этом изобретении.

Без сомнения, это не было простой отговоркой, так как вскоре поступило новое ходатайство Якоба Мециля, жившего в Алькмааре. Представляя свою зрительную трубу, Мециий сообщал, что это результат двухлетнего труда и размышлений. Он не сомневается, что настоящий инструмент можно еще значительно усовершенствовать, и просит о привилегии, чтобы никто не имел права в течение 22 лет, под страхом конфискации и штрафа в 100 гульденов, продавать такой инструмент. А кроме того, он (Меций) просит наградить его приличной суммой денег. Согласно решению Генеральных штатов, 17 октября 1608 года Мецию было поручено улучшить свой инструмент. Но в привилегии ему было также отказано.

Таковы исторически несомненные факты относительно первого появления зрительной трубы. Таким образом, ясно, что мы совершенно не знаем, кто был ее первым изобретателем.

Предание гласит, что дети Липперсгея как-то играли стеклами от очков. Случайно они расположили их одно за другим так, как расположены стекла в наших нынешних театральных биноклях. Когда они стали глядеть в них, то соседнюю церковь они увидали в увеличенном виде и так, словно она придвинулась к ним. Они сказали об этом своему отцу, который пришел, таким образом, к мысли об устройстве зрительной трубы. По другому преданию, к Липперсгею пришел иностранец и заказал ему отшлифовать два круглых стекла, одно выпуклое, а другое вогнутое. Потом он явился за стеклами. Получив стекла, он расположил их на некотором расстоянии друг от друга и унес с собой. Липперсгея это навело на мысль повторить то же с другими стеклами. К своему удивлению, он увидел отдаленные предметы совсем близко от себя.

Насколько верны эти рассказы — теперь уже невозможно установить. Во всяком случае, нужно допустить, что уже до 1608 года, или самое позднее, в первой его половине, кто-то изобрел простую зрительную трубу. А когда Липперсгей подал свое прошение, то это изобретение было уже достаточно известно. Но как бы там ни было, одно несомненно: вновь изобретенный инструмент быстро получил распространение за пределами Голландии, во Франции и Италии. Ибо уже в следующем году какой-то голландец доставил такой инструмент в Венецию, где он возбудил сильный интерес.

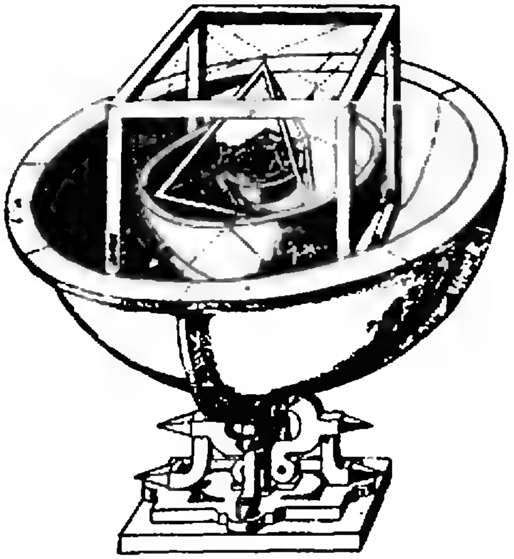


Рисунок из первой книги Кеплера «Космографическая тайна».

В Венеции как раз находился тогда Галилей. Видал ли он сам голландский инструмент — неизвестно. Но дошедшая до него техническая новость побудила его заняться изучением нового изобретения. Галилей сумел соорудить себе сначала трубу с трехкратным увеличением, а потом в короткий срок довел увеличение своих инструментов до тридцатикратного. Его величайшей заслугой является то, что он первым широко использовал зрительную трубу для астрономических целей.

Мы не знаем, случайно ли Галилей обратил свою зрительную трубу к небесам, или он предполагал увидеть небесные тела так, как их не видел еще никто, но описания первых ночей, которые он провел у телескопа, сложились в одну из самых волнующих научных книг, когда-либо появлявшихся за всю историю человечества. Это был «Звездный вестник», опубликованный в 1610 году. Все ее страницы дышат страстной увлеченностью, и легко вообразить, в каком состоянии жил Галилей в первые месяцы его работы с телескопом. Почти сразу он открыл лунные кратеры, медленно ползущие по солнечному диску пятна, фазы Венеры и — самое главное — четыре спутника, которые обращались вокруг Юпитера, словно воспроизводя в миниатюре коперниковскую модель Солнечной системы. Он получил неопровержимое доказательство истинности гелиоцентрической системы: Земля не была неподвижна.

Галилей назвал спутники Юпитера в честь тосканского герцога Козимо II Медичи «Медичейскими звездами». Название это очень понравилось тосканскому владыке, который поспешил обласкать Галилея, и тот впервые добился сносных условий для продолжения научной работы, избавившись от необходимости преподавать.

Телескоп Галилея разделил облака Млечного Пути на звезды, чем завершил многовековые словопрения философов о его природе. Млечный Путь оказался на деле массой звезд, собранных в скопления. Противопоставления Земли и неба больше не существовало: все звезды — это далекие Солнца, все планеты подобны Земле.

Один-единственный человек из современных Галилею ученых мог по достоинству оценить открытия своего итальянского коллеги — Иоганн Кеплер. Кеплера больше всего поразило то, что Галилей открыл в пределах Солнечной системы четыре новые планеты. Слух об этом дошел до Кеплера через его друга Иоганна Вакхера за несколько недель до того, как в Праге появился экземпляр «Звездного вестника». Кеплер писал: «Вакхер поведал мне об этом из окна кареты, остановившись перед моим домом. Великое удивление охватило меня, когда я обдумал эту странную новость... Когда я расстался с Вакхером, я начал размышлять о том, может ли увеличиться число планет, не повредив моей «Тайне Вселенной», которую я выпустил в свет тринадцать лет назад. В этой книге пять геометрических тел Евклида допускают лишь шесть планет вокруг Солнца и не более».

Кеплеровскому толкованию строения Солнечной системы, казалось, был нанесен смертельный удар, так как для добавочных планет уже не оставалось геометрических тел Евклида. Вакхер предположил, что новые планеты, возможно, находятся возле какой-нибудь звезды, вокруг которой они и обращаются, доказывая тем самым множественность миров. Когда книга была наконец получена, Кеплер воспрял духом, узнав, что четыре новых небесных тела оказались лунами Юпитера и не опровергают его «Тайны Вселенной». В то же время он был избавлен от необходимости признать множественность миров — идею, которую до конца жизни Кеплер называл «мерзкой философией».

1610 год был годом беспримерных успехов для Галилея. Затем наступили годы разочарований. По поводу открытия солнечных пятен возник вскоре горячий спор, из которого Галилей не вышел безусловным победителем. Фрисландский астроном Фабриций во всяком случае опередил его в публикации открытия, а иезуитский патер Шейнер, в свою очередь настаивавший на правах первенства, сделался его заядлым врагом. В сочинении, вышедшем в 1614 году, некий Симон Мариус утверждал (по всем признакам, совершенно неосновательно), что уже летом 1609 года он наблюдал спутники Юпитера, из чего следовало, что он начал использовать зрительную трубу для исследования небесных явлений раньше Галилея. Такого рода неприятности не могли, однако, поколебать спокойствия его духа. Гораздо хуже было то, что его противники, видя свое бессилие на научном поле битвы, принялись настраивать против него духовные власти.

В 1616 году отцы церкви делают Галилею устное внушение о недопустимости поддержки учения Коперника. Галилей перебрался во Флоренцию и жил здесь спокойно до 1623 года, успешно занимаясь механикой и храня молчание относительно движения Земли.

В 1623 году на папский престол восходит под именем Урбана VIII кардинал Маффео Барберини, друг

Галилея, который за три года до того восхвалял Галилея в латинских стихах. Узнав о восшествии на престол своего доброжелателя, обрадованный Галилей поспешил в Рим, и действительно был принят максимально любезно. После такого приема Галилей ободрился и счел возможным приняться за окончание своего давно задуманного сочинения о системах Вселенной. В течение 1628—1630 годов он был дважды в Риме и уже при первой поездке отдал свой труд на суд духовных цензоров. В 1630 году он получил разрешение печатать его. Это сочинение — «Диалог о двух важнейших системах мира, птолемеевой и коперниковой» — вышло в свет во Флоренции в 1632 году. В нем проводится сравнение между Вселенными Птолемея и Коперника в форме диалога, продолжающегося четыре дня. В беседе участвуют, с одной стороны, сторонники коперниковой системы Сагредо и Сальвиати, а с другой — философ Симплиций, защитник птолемеевой системы. Первый день посвящен общим вопросам движения тел и опровержению аристотелевой механики. Предметом беседы второго дня служит вращение Земли вокруг оси, причем старое воззрение опровергается частью доводами Коперника, частью же новыми, собственными. Движение Земли вокруг Солнца составляет предмет рассуждений третьего дня. Галилей защищает это движение доводами Коперника и, кроме того, разрабатывает теорию, в силу которой земная ось неизменно сохраняет параллельное себе положение. Это — знаменитый закон инерции Галилея. Беседа четвертого дня посвящена объяснению приливов и отливов в связи с движением Земли; это, впрочем, слабейшая из всех теорий Галилея.

Галилей полагал, что поступает предусмотрительно, указав в своем предисловии, что данное сочинение вполне согласно с намерениями церковных владык и даже полезно для их целей. Тем не менее скоро разразилась жестокая буря против новой защиты Коперника. Папа Урбан VIII, настроенный недругами, уже видит в Галилее своего личного врага. Галилея вызвали на суд. 21 июня 1633 года он прибыл в Рим, оставался день и ночь в инквизиционном помещении, а на другой день был переведен в доминиканский монастырь Алла Минерва, где его заставили на коленях отречься от всех своих заблуждений. Что происходило в ночь с 22 на 23 июня в здании инквизиции с 69-летним больным стариком, вероятно, навсегда останется тайной. Нет никакого сомнения, что ему грозили пыткой, но пытали ли его на самом деле — это спорный вопрос, которым историки нашего века много занимались, но окончательно его так и не разрешили. Галилей был приговорен не только к отре-

Телескоп Галилея.

(Окончание см. на с. 19)

НАТУРАЛЬНЫЙ ЛОГАРИФМ

Билл Д. Олдридж — исполнительный директор Национальной ассоциации преподавателей естественных дисциплин (National Science Teachers Association, USA), один из организаторов и руководителей русско-американского журнала «Quantum». Статья написана для американских школьников и опубликована в этом журнале в 1990 году.

Б. ОЛДРИДЖ

Интересно, что такого «натурального» в числе 2,71828...?

Вы, конечно, знаете, что такое логарифм — это слово используется для обозначения показателя степени некоторого числа n. Выберем основание степени, например число 10, и представим n в виде $n=10^x$; тогда число x записывается так: $x=\log_{10} n$ (для десятичных логарифмов обычно используется обозначение $\lg n$). Наибольший интерес в логарифмической записи чисел представляет то, что с ее помощью сильно упрощаются вычисления.

Великий математик Лаплас (1749—1827) как-то сказал: «Изобретение логарифмов позволило в считанные дни производить те вычисления, которые раньше делались месяцами, и вычислители теперь живут вдвое дольше» (в те времена существовала профессия «вычислитель» — человек, занимающийся вычислениями вручную). Вот простейший пример: чтобы «логарифмически» перемножить два числа, нужно просто сложить показатели степеней. Чему равно произведение 5673 на 1347? Посмотрев в таблицы десятичных логарифмов, мы видим, что $\lg 5673=3{,}75381$ и $\lg 1347=3{,}12937$. Задача умножения, таким образом, сводится к умножению $10^{3{,}75381}$ на $10^{3{,}12937}$. Сложив показатели степеней, получаем $10^{6{,}88318}$. Обратившись снова к таблице логарифмов и считая $\lg n=6{,}88318$, находим n, которое приблизительно равно $7{,}6415\times\times10^6$, или 7641500. Если бы мы перемножили наши два числа обычным образом, мы бы получили 7641531. Как вы уже заметили, использование логарифмических таблиц дает определенную погрешность. Это происходит из-за того, что значения логарифмов, приведенные в таблицах, были вычислены с определенной точностью (с определенным количеством знаков после запятой). Однако для большинства приложений полученная точность вполне достаточна.

Возможно, в приведенном примере вы не увидели особого упрощения вычислений, но при вычислении сложных выражений, особенно содержащих корни, использование логарифмов (и правил работы с ними) давало существенное упрощение. Я употребил слово «давало», поскольку сегодня с помощью карманного калькулятора можно за доли секунды произвести вычисления, на которые раньше даже с использованием логарифмов требовалось несколько часов, а то и дней. Однако и сегодня другие важные свойства логарифмов находят применение и в науке, и в технике.

Основание 10 (десятичных логарифмов) связано с использованием десятичной системы счисления. А в реальном мире у всех логарифмических зависимостей другое основание. Поэтому такие логарифмы называются реальными или натуральными. В отличие от десятичного натуральное основание есть число иррациональное. Если так, то что же в нем такого «натурального»?

Это число обозначают буквой e, и, как правило, используют его рациональное приближение 2,71828... Хотя я изучал натуральные логарифмы и в школе, и в колледже, и вычислял число *e* математическими методами, в действительности я никогда не понимал, откуда оно взялось. Вычисление числа *e* можно найти во многих работах по математике, и всегда это число представало как некая абстракция. Это меня тревожило.

В конце концов, спустя уже много времени после окончания школы, я все-таки решил для себя выяснить, как можно «извлечь» число *e* из реального мира. Я мог бы выбрать для этой цели процесс радиоактивного распада, или процесс разрядки конденсатора в электрической цепи, или абстрактную теорию энтропии для статистической термодинамики. Но, хотя я по профессии физик, я решил исследовать число *e* на примере биологического явления.

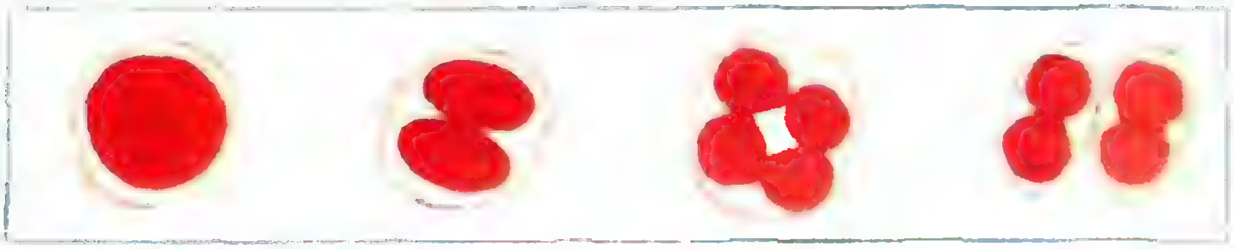
Биологический аспект размножения бактерий

Я изучал размножение бактерий стафилококка в особой питательной среде (Staphylococcum 110 agar). Процесс протекает примерно так. Клетка начинает увеличиваться в размерах, через некоторое время в ней образуется перегородка и в конце концов эта увеличившаяся клетка разделяется на две совершенно одинаковые дочерние клетки. Все компоненты старой клетки равномерно распределяются по двум новым. В свою очередь каждая из дочерних клеток также начинает увеличиваться в размерах, готовясь к новому циклу деления. Каждый раз при делении клеток количество бактерий удваивается. Этот процесс называется бинарным поперечным делением.

Время размножения, т. е. время, которое требуется для удвоения количества бактерий, колеблется от 20 минут до нескольких дней, в зависимости от специфических особенностей бактерий и питательной среды, в которой они размножаются. Среднее время размножения можно определить, пронаблюдав за несколькими циклами размножения. (Поскольку для этого мне потребовался бы микроскоп, которого у меня под рукой не было, я взял цифры из соответствующего пособия.)

Оказывается, бактерии размножаются экспоненциально (удваиваясь каждые 20 минут) только на протяжении определенного отрезка времени. Вначале бактерии должны адаптироваться к среде (время замедленного размножения), затем их размножение идет экспоненциально. Когда питательное вещество уже все использовано, наступает *стационарный период*, и в конце концов бактерии начинают погибать, а кривая, описывающая данный процесс, резко идет вниз. Я ограничился рассмотрением фазы экспоненциального роста.

Если начать наблюдение в тот момент, когда первые дочерние клетки только сформировались, можно заметить, что они размножаются синхронно, по крайней мере на протяжении некоторого времени, а затем начинают выбиваться из ритма. Однако, если рассматривать случайную выборку бактерий, можно заметить, что часть бактерий уже готовы к делению, некоторые только начали увеличиваться в размерах, а остальные находятся в стадии роста. *Поскольку все бактерии* находятся в разных фазах, любая произвольно выбранная бактерия может начать делиться в произвольное



время. Если бактерий достаточно много, деление клеток происходит асинхронно и почти непрерывно.

Размножение бактерий с точки зрения математики

Из каждой бактерии через определенный период времени получаются две бактерии. Каждая из двух новых дочерних бактерий в свою очередь начинает расти, а затем тоже делится на две части, процесс продолжается до тех пор, пока для новых бактерий достаточно пространства и питательного вещества.

Если у нас вначале имеется 5000 бактерий, а время размножения равно 20 минутам, то сколько бактерий будет через 2 часа? Предположим, мы начали наблюдения в 8 часов. В 8:20 у нас будет 10 000 бактерий, в 8:40 — 20 000 бактерий, в 9:00 — 40 000 бактерий, в 9:20 — 80 000 бактерий, в 9:40 — 160 000 бактерий, а в 10:00, спустя 2 часа, наши 5000 бактерий вырастут до 320 000. Сколько же их будет еще через 2 часа?

Следующим моим шагом была попытка составить уравнение, описывающее взаимосвязь между временем t и количеством бактерий N (за время t из N_0 бактерий получается N бактерий). (Можно допустить, что вначале у нас такое количество бактерий и в таких различных фазах развития, что процесс деления клеток является случайным и непрерывным.) Время t мы можем разделить на n маленьких равных отрезков времени, каждый из таких отрезков обозначим Δt, т. е. мы можем записать

$$\Delta t = t/n.$$

Пусть в течение каждого промежутка времени Δt делится ΔN клеток. Предположим, что $\Delta t = 0{,}01$ секунды и за это время происходит определенное количество делений. Если этот интервал увеличить, скажем, до 0,02 или 0,03 секунды, то и количество делений также увеличится в 2 или 3 раза. Если в начале промежутка времени у нас было бы в два раза больше клеток, то в конце этого промежутка их также было бы вдвое больше. Другими словами, количество клеток ΔN, которые делятся в течение промежутка времени Δt, пропорционально этому отрезку времени и количеству клеток N, которое было в начале рассматриваемого промежутка времени. Математически эту зависимость можно представить в виде пропорции

$$\Delta N \sim N\Delta t.$$

Эта пропорция означает, например, что если Δt или N удвоится, то и количество клеток, которые могут разделиться, также удвоится, а если один из сомножителей будет вдвое меньше, то и количество клеток также уменьшится вдвое.

Введя коэффициент пропорциональности k и записав эту пропорцию в виде равенства, я получил

$$\Delta N = kN\Delta t.$$

Как я уже упоминал, имеется очень большое количество n очень маленьких отрезков времени Δt. Для каждого такого отрезка времени можно записать уравнение, определяющее количество новых бактерий ΔN. Для первого отрезка

$$\Delta N = kN_0\Delta t,$$

где N_0 — количество бактерий на начало первого отрезка времени, т. е. начальное количество клеток.

Количество бактерий в конце первого отрезка времени равно $N_0 + \Delta N$, а если использовать предыдущее равенство, то количество бактерий можно записать как

$$N_1 = N_0 + kN_0\Delta t = N_0(1 + k\Delta t).$$

Теперь я должен был определить количество бактерий в конце второго отрезка времени. Прирост бактерий ΔN должен быть опять пропорционален начальному количеству бактерий N_1 и длине отрезка времени. Использовав снова коэффициент пропорциональности k, получим уравнение для прироста бактерий за второй отрезок времени:

$$\Delta N = kN_1\Delta t.$$

Очевидно, общее количество бактерий в конце второго отрезка времени есть количество бактерий в начале этого отрезка времени плюс прирост бактерий за этот временной промежуток:

$$N_2=N_1+kN_1\Delta t=N_1(1+k\Delta t)=$$
$$=N_0(1+k\Delta t)(1+k\Delta t)=N_0(1+k\Delta t)^2.$$

Теперь, я уверен, вы догадались, что следующим моим шагом было определить количество бактерий в конце третьего отрезка времени. К началу третьего отрезка времени было N_2 бактерий, так что прирост бактерий записывается как

$$\Delta N=kN_2\Delta t.$$

Как и раньше, количество бактерий в конце третьего отрезка времени равно $N_2+\Delta N$. Итак, мы имеем

$$N_3=N_2+kN_2\Delta t=\ldots=N_0(1+k\Delta t)^3.$$

По этим вычислениям вы, конечно, уже поняли способ решения задачи, и, вероятно, он вам изрядно надоел. Однако теперь мы уже можем заняться обобщением результатов, что всегда приятно.

Если мы продолжим вычислять количество бактерий в конце каждого промежутка времени, то увидим, что это количество равно количеству бактерий в конце предыдущего отрезка времени, умноженному на $(1+k\Delta t)$. Переходя последовательно от одного промежутка к другому вплоть до начального момента, получим следующее уравнение для количества бактерий в конце n-го отрезка времени:

$$N_n=N_0(1+k\Delta t)^n.$$

Величина N_n есть общее количество бактерий, которое было получено по истечении времени t. Время t мы разделили на n интервалов длиной Δt. Таким образом, $t=n\Delta t$ и $\Delta t=t/n$. (Я приношу свои извинения за утомительные повторы, однако моей целью является полное изложение цепочки моих умозаключений, поэтому я и останавливаюсь на тех моментах, которые обычно опускают.) Итак, подставив вместо Δt его значение из предыдущего равенства, я получил

$$N_n=N_0(1+kt/n)^n.$$

Выражение $(1+kt/n)^n$ можно разложить в биномиальный ряд:

$$\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n=1+n\frac{kt}{n}+n(n-1)\frac{(kt/n)^2}{2!}+$$
$$+n(n-1)(n-2)\frac{(kt/n)^3}{3!}+\ldots$$

Если интервал Δt достаточно мал, время t состоит из огромного количества таких интервалов. Мы хотим вычислить сумму членов этого биномиального ряда при очень большом n. При достаточно больших значениях n любой член этого разложения существенно упрощается. Это происходит за счет того, что все члены, включающие n, такие как $n(n-1)(n-2)$, становятся просто степенями n, в данном случае просто n^3. А раз так, то они все сокращаются со степенями n в знаменателях выражений (kt/n), причем показатели степеней всегда совпадают. Таким образом, предел нашего биноминального ряда равен

$$1+kt+\frac{(kt)^2}{2!}+\frac{(kt)^3}{3!}+\ldots+\frac{(kt)^m}{m!}+\ldots$$

Итак, количество бактерий, полученных за время t, можно представить в виде

$$N_n=N_0\left(1+kt+\frac{(kt)^2}{2!}+\frac{(kt)^3}{3!}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(kt)^m}{m!}+\ldots\right).$$

Предположим, что $kt=1$, подставим это значение в наш ряд и, например, для $m=8$ получим

$$1+1+1/2+1/6+1/24+1/120+$$
$$+1/720+1/5040+1/40320,$$

или в десятичном виде

$$1+1+0{,}5+0{,}1666666667+$$
$$+0{,}0416666667+0{,}0083333333+$$
$$+0{,}0013888889+0{,}0001984127+$$
$$+0{,}0000248016.$$

Когда я сложил все эти числа, получилось 2,71828... Eureka! (А может, правильнее сказать «déjà vu» — «я это уже где-то видел»?)

Маленькая, удобная, непериодическая константа

Самое интересное в этом то, что если положить $kt=2$, то сумма этого ряда будет 7,389056..., что в точности равно $(2{,}71828...)^2$. Если $kt=3$, то сумма этого ряда равна кубу числа 2,71828..., и т. д. Эта бесконечная непериодическая десятичная дробь, которую мы получили как основание степени, даже не является рациональным числом. Давайте обозначим это число буквой «*e*». (Это красиво и иррационально, не правда ли?) Значение этого числа (до 16 знаков) — 2,718281828459045. Тогда наше уравнение для количества бактерий, которые получились за время t, станет совсем простым:

$$N=N_0e^{kt}.$$

Теперь определим (как мы уже однажды сделали) натуральный логарифм как степень, в которую надо возвести число e, чтобы получить данное число. (Аналогично тому, как логарифмы по основанию 10 обозначаются lg, краткая запись логарифма по основанию e — ln.) Переписав наше уравнение для размножения бактерий в логарифмической форме, получим

$$kt=\ln(N/N_0),$$

или для времени t —

$$t=1/k\ln(N/N_0).$$

Последнее уравнение показывает, какое время потребуется для того, чтобы из начального количества бактерий N_0 получилось N бактерий. Чтобы пользоваться данным равенством, вам потребуется таблица натуральных логарифмов, но такие таблицы приводятся в пособиях, а также почти все электронные калькуляторы умеют вычислять натуральные логарифмы.

Конечно, я остался очень доволен, когда все мои вычисления были успешно завершены и я выяснил для себя связь между основанием натуральных логарифмов — числом 2,71828...— и явлением реального мира. Однако ничего бы и не произошло, если бы я не решил для себя, что тут что-то не так. Так что, если вам когда-нибудь что-то покажется бессмысленным, не пугайтесь этого и не стыдитесь, а постарайтесь разобраться в этом, каким бы тривиальным занятием это кому-то ни казалось.

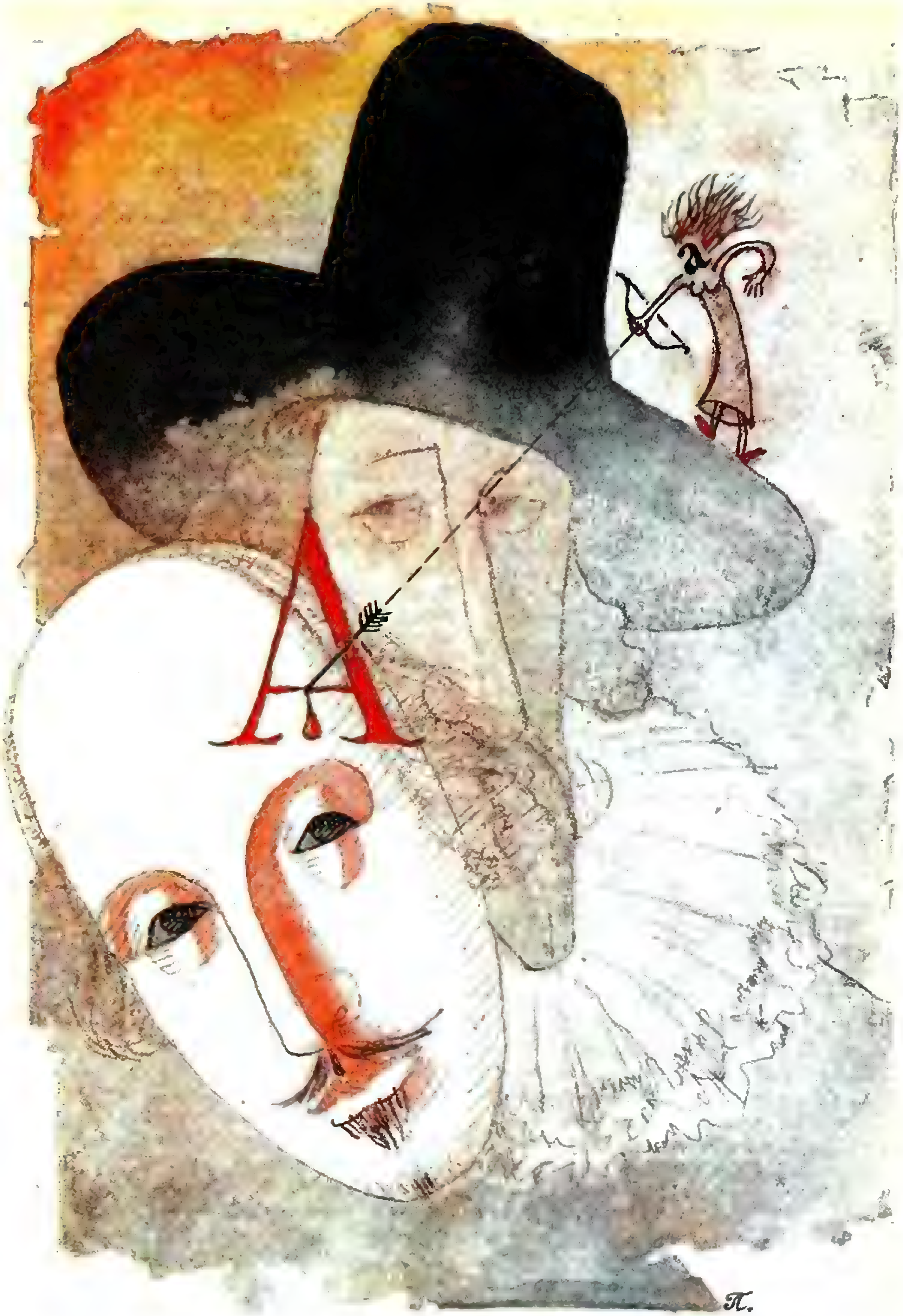
Перевод с английского И. Вахуриной

Творцы новой астрономии

(Начало см. на с. 10)

чению от своих заблуждений, но и к тюремному заключению. Последнее было, однако, тотчас же заменено домашним арестом на вилле Монте-Ривальто в церковном приходе Арчетри. Здесь Галилей умер 8 января 1642 года от изнурительной лихорадки. Даже смерть не примирила с ним церковь; на его могиле не было произнесено надгробной речи, его тело не позволили поместить в семейном склепе Галилеев, на его могиле не разрешили установить ни памятника, ни надгробия. Лишь через сто лет прах Галилея был с почестями погребен в достойной его памяти усыпальнице собора Санта-Кроче во Флоренции, рядом с могилой Микельанджело.

Научное творчество Кеплера и Галилея очень легко охарактеризовать — они создали новую астрономию. В историю культуры, в историю смены мировоззрений они входят совместно и нераздельно; они в равной мере подготовили то окончательное слияние механики и астрономии, которое было сделано Ньютоном, утверждавшим, что он «стоял на плечах гигантов».


А
П.

ШИФР БЭКОНА

М. ГАРДНЕР

> *Дешифровка — дедуктивная наука, использующая контролируемый эксперимент. Она формирует гипотезы, которые проверяются и часто отбрасываются. Однако то, что остается после проверки, обрастает новыми фактами, и вот наконец исследователь начинает ощущать твердую почву под ногами: его гипотеза согласуется с фактами, осмысленные куски текста высвобождаются из вековой тьмы. Ключ к шифру найден. И тут хорошего материала начинает появляться так много, что за ним трудно бывает уследить. Это — как начало цепной реакции в атомной физике: когда перейден критический порог, реакция безудержно нарастает.*
>
> Джон Чэдуик.
> Дешифровка линейного письма Б.

Нетрудно понять, почему философы и историки науки столь сильно расходятся в мнении относительно сэра Френсиса Бэкона, писателя, философа и лорда-канцлера елизаветинской эпохи. С одной стороны, его представления о сущности научного метода были примитивны и ошибочны, с другой стороны, он пророчески усматривал в науке обширное поле совместной систематической деятельности, которая могла бы принести человечеству неслыханный расцвет знания. А знание, по утверждению Френсиса Бэкона,— это сила. Человек впервые обретал способность покорять природу и управлять своей собственной судьбой.

Хотя Бэкон не был особенно искусен в математике, он изобрел остроумную шифровальную систему, представляющую значительный интерес для любителей занимательной математики и словесных игр. «Двухлитерный шифр», как называл его Бэкон, стал одним из самых первых примеров того, как легко может быть передана информация с помощью простого двоичного кода. Система Бэкона связана с увлекательной комбинаторной задачей, которая находит практическое применение в кодах, исправляющих ошибки.

Отнюдь не последнюю роль играет и то обстоятельство, что шифр Бэкона самым непосредственным образом связан с наиболее забавными и фантастическими притязаниями бэконистов — неутомимых псевдоученых, которые не покладая рук продолжают изыскивать все новые и новые «доказательства», способные убедить мир в том, что пьесы Шекспира в действительности написаны Бэконом.

Намеки на двухлитерный шифр встречаются в сочинении Бэкона «О приумножении наук» (1605 г.), но подробно он изложил свой метод лишь в более позднем энциклопедическом издании этого сочинения на латинском языке под названием «О достоинстве и приумножении наук» (1623 г.), основательно расширив краткие замечания, которыми ограничился в издании 1605 г. В книге VI Бэкон повторил сформулированные им ранее три достоинства, которыми должен обладать любой хороший шифр: он должен быть (1) «незамысловатым и несложным в работе», (2) «надежным и не поддающимся дешифровке» и (3) «по возможности не вызывать никаких подозрений».

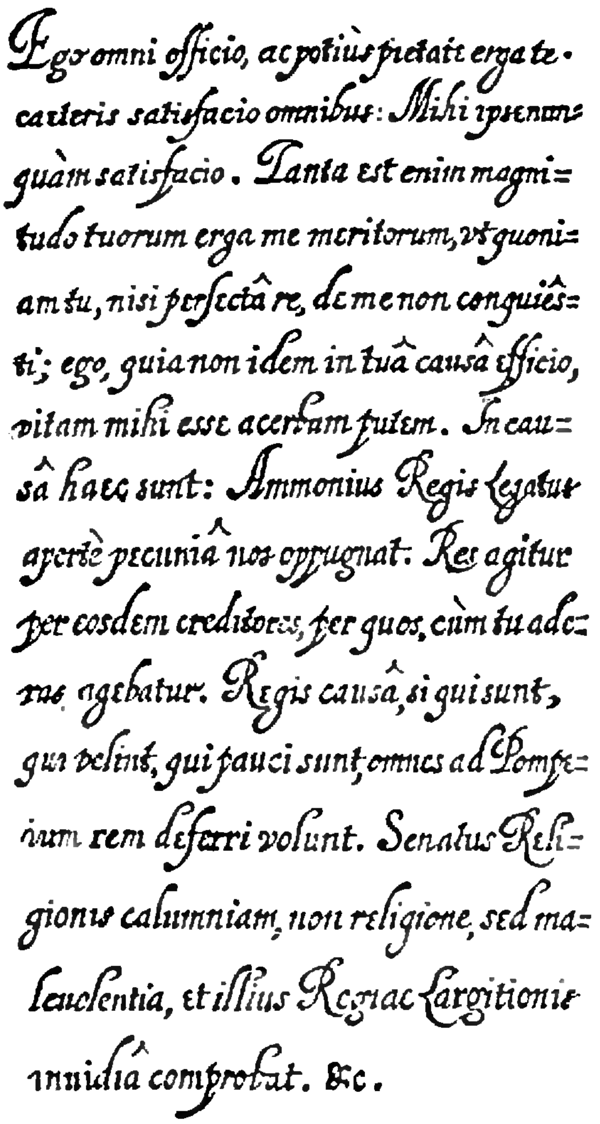
Шифр, обладающий третьим достоинством, принято называть «тайным», или «скрытым», шифром. Он отличается тем, что о самом существовании истинного зашифрованного текста никто и не подозревает. Бэкон был первым, кто изложил хитроумный прием сокрытия текста, использующий два шифровальных алфавита. Подлинное сообщение записывается с помощью одного набора символов, после чего ложное сообщение записывается с помощью второго набора символов. Оба шифра, переплетаясь, образуют единый шифротекст. Если этот текст оказывается перехваченным и от отправителя требуется расшифровка, то он вычеркивает символы истинного текста, поясняя, что они представляют собой «пустые» символы, или «нули»,— так на языке современных криптографов принято называть не имеющие никакого смысла символы, вводимые лишь для того, чтобы затруднить разгадывание шифра. Затем отправитель применяет ключ к оставшимся после «вычеркивания» символам. Поскольку возникает осмысленный текст, пишет Бэкон, кому придет в голову заподозрить, что вычеркнутые «нули» в действительности таят в себе другое послание?

«Впрочем, во избежание подозрений,— продолжает Бэкон,— я присовокупил еще одно ухищрение, которое разработал в бытность свою в Париже, когда был совсем молодым.» Это дополнительное ухищрение представляет собой двухлитерный шифр с ключом, который ставит в соответствие каждой букве алфавита отличную от всех прочих перестановку двух символов в группах из пяти символов. Как объясняет Бэкон, всего существует 32 такие перестановки, что более чем достаточно для представления английского алфавита, который во времена Бэкона состоял из 24 букв (буквы I и J, а также U и V были попарно неотличимы и использовались одна вместо другой). В качестве двух символов Бэкон выбрал буквы *a* и *b* и сопоставил букве A пятерку символов *aaaaa*, букве B — пятерку символов *aaaab*, букве C — пятерку символов *aaaba* и т. д.

«Таким способом удается решить отнюдь не пустяковую проблему,— пишет Бэкон.— Например, мы видим, каким образом мысли можно передавать на какое угодно расстояние с помощью любых предметов, воспринимаемых зрением или слухом, если они могут пребывать в двух разных состояниях, т. е. посредством шаров, сигнальных рожков, факелов, выстрелов и тому подобного.» И действительно, телеграфная азбука Морзе по существу представляет собой двухлитерный звуковой шифр, хотя паузы используются как своего рода третий символ (поэтому для передачи каждой буквы английского алфавита требуется не более четырех точек и тире).

Бэкон намеревался использовать свой шифр для того, чтобы «спрятать» исходный текст (сообщение, подлежащее шифровке) в тексте — «прикрытии», выглядящем внешне вполне невинно. Необходимо только различать для каждой буквы английского алфавита два типографских шрифта. В простейшем случае можно было бы условиться использовать курсивные литеры вместо буквы *a* и прямые вместо буквы *b*. Тогда слово *B*acon (Бэкон) с курсивной первой буквой соответствовало бы перестановке *abbbb*, которая в алфавите Бэкона означала букву Q. Ясно, что любой текст-прикрытие, если он по длине в пять раз превышает исходный текст, может быть напечатан указанным выше образом и передает тайное послание.

Разумеется, различие между прямым шрифтом и курсивом слишком бросается в глаза. Бэкон предложил использовать два типографских шрифта, различия между которыми едва заметны. Лишь тот, кто осведомлен об этих тонких различиях, сумеет «прочитать» печатный текст, пометить каждую его букву, соответственно, символом *a* или *b*, разделить получившиеся символы на пятерки и прочитать скрытое за ними послание. Бэкон привел два примера того как предложенные им типографские ухищрения могут скрыть истинный текст. В одном из них краткий латинский текст-прикрытие, смысл которого сводится к просьбе «не уходи, пока я не приду», расшифровывается как совет противоположный по смыслу: «Беги». Более длинный пример того, как «что угодно может быть записано с помощью чего угодно», представляет собой отрывок, выбранный Бэконом из письма Цицерона (рис. 1). Если заменить все буквы символами *a* и *b* в соответствии с двумя типографскими шрифтами, то появится «скрытый» латинский текст (копия подлинного спартанского донесения, некогда посланного с помощью цилиндрического шифровального валика, известного под названием скитала*)), который в переводе гласит: «Все пропало. Миндар убит. Съестные припасы солдат исчерпаны. Мы не можем раздобыть провизии и, следовательно, не можем оставаться здесь дольше.»



Ego omni officio, ac potius pietate erga te caeteris satisfacio omnibus: Mihi ipse nunquàm satisfacio. Tanta est enim magnitudo tuorum erga me meritorum, vt quoniam tu, nisi perfectâ re, de me non conquiêsti; ego, quia non idem in tuâ causâ efficio, vitam mihi esse acerbam putem. In causâ haec sunt: Ammonius Regis legatus apertè pecuniâ nos oppugnat. Res agitur per eosdem creditores, per quos, cùm tu aderas agebatur. Regis causâ, si qui sunt, qui velint, qui pauci sunt, omnes ad Pompeium rem deferri volunt. Senatus Religionis calumniam, non religione, sed malevolentia, et illius Regiae largitionis inuidiâ comprobat. &c.

Рис. 1.

Типографское искусство во времена Елизаветы по современным меркам стояло на столь низком уровне, что при разглядывании в сильную лупу двух отпечатков одной и той же литеры на одной и той же странице всегда можно было обнаружить небольшие различия. Свинцовые литеры были несовершенны, набор нередко повреждался, типографская краска высыхала неравномерно на грубой увлажненной бумаге, к тому же наборщики часто путали два шрифта на одной и той же странице. Неудивительно, что каждый, кто разделял теорию о том, будто все пьесы Шекспира написаны Бэконом, был склонен подозревать, что Бэкон мог воспользоваться своим шифром, дабы запечатлеть признание своего авторства в ранних изданиях своих сочинений и, быть может, даже испещрил их страницы тайными сообщениями о других своих свершениях.

Типографское искусство елизаветинской эпохи предоставило бэконианцам великолепную арену для ничем не ограниченной игры подсознательных импульсов. С лупой в руке и гибкими двухлитерными правилами, позволяющими (неоднозначно) отождествлять каждую букву латинского алфавита с любой возможной комбинацией символов *a* и *b*, хитроумный бэконианец может извлечь из достаточно длинного отрывка шекспировского текста почти все что угодно. Так, первая буква *T*, встречающаяся на странице, может быть отождествлена с символом *a*, поскольку верхняя черта у нее тоньше, чем у других букв *T*. Следующая буква *T* может быть отождествлена с символом *a* потому, что на конце верхней перекладины у нее имеется крохотная завитушка, и т. д. Ключи шифров могут варьироваться от одного отрывка к другому. Если бэконианец не дурак, то обнаруживаемые им тайные послания будут исходить из глубины его подсознания, наподобие посланий, принимаемых на спи-

---

*) Донесение писалось вдоль образующих цилиндра на обвитом вокруг валика ремне. Ремень после записи снимался. Чтобы прочитать послание, получатель должен был намотать ремень на такой же валик. (*Прим. перев.*)

ритических сеансах с помощью дощечки с буквами или автоматического письма, или передаваемых медиумом из потустороннего мира.

Как ни странно, первая основательная попытка расшифровать пьесы Шекспира не использовала шифр Бэкона. Процветающий популистский политический деятель из Миннесоты Игнатиус Доннелли в своем тысячестраничном «научном труде» «Великая криптограмма» (1888 г.) исходил из гораздо более искусственной шифровальной системы. (Это обширное сочинение вместе с другими книгами того же автора «Атлантида» и «Рагнарок» принадлежат к числу наиболее впечатляющих сочинений «чокнутых» авторов, написанных в Америке до 1900 г.) Применить шифр Бэкона с несгибаемым упорством к пьесам Шекспира и получить лучшие и наиболее причудливые тексты за всю историю бэконианы выпало на долю миссис Элизабет Уэллс Гэллап (1848—1934), учительнице и директору средней школы из Миссисипи.

Подобно Доннелли, миссис Гэллап явила собой великолепный образчик интеллигентного, образованного, честного и искренне заблуждающегося любителя. Ее опус «Двухлитерный шифр сэра Френсиса Бэкона, открытый в его трудах и расшифрованный миссис Элизабет Уэллс Гэллап» (1899) глубоко потряс собратьев-бэконианцев. Миссис Гэллап обнаружила тайные послания не только в пьесах Шекспира, но и в сочинениях Марлоу, Спенсера, Бертока и других авторов, все книги которых по ее мнению были написаны Бэконом. «Королева Елизавета моя истинная мать,— гласило одно из тайных посланий,— и я законный наследник престола. Найдите в моих книгах зашифрованную историю; она поведает великие тайны, каждая из которых, если излагать ее открыто, поставила бы под угрозу мою жизнь.» Многочисленные «великие тайны» оказались пикантными подробностями из жизни елизаветинского двора.

«Сюрприз следовал за сюрпризом,— писала миссис Гэллап,— по мере того, как я расшифровывала одно тайное послание за другим, но не обходилось и без разочарований. Некоторые из открытий во многих отношениях были по духу абсолютно неприемлемыми для меня... Но как у дешифровщика у меня не было выбора, и я отнюдь не несу ответственности за эти открытия, если не считать правильность написания слов.»

«Полковник» Джордж Фабиан (воинское звание было почетным), состоятельный текстильный промышленник, стал одним из рьяных последователей миссис Гэллап. Он пригласил ее в «Ривербэнк Лэбораториз», расположенные в его огромном поместье в Женеве (штат Иллинойс), где создал группу криптоаналитиков, работавших под руководством миссис Гэллап. На посту руководителя криптоаналитической группы миссис Гэллап оставалась на протяжении 20 лет, изучая увеличенные фотокопии елизаветинских рукописей и пытаясь научить своих сотрудников (к их немалому замешательству), как следует расшифровывать такие рукописи.

По иронии судьбы, как отмечает Давид Кан в своей книге «Взломщики кодов», именно в Ривербэнк впервые познакомился с искусством дешифровки молодой Уильям Ф. Фридман. Впоследствии он стал одним из величайших криптоаналитиков мира. (Группа Фридмана раскрыла во время второй мировой войны японский «пурпурный код».) В бытность свою в Ривербэнк Фридман познакомился с одной из ассистенток миссис Гэллап Элизабет Смит. Вскоре они поженились. Супружеская чета Фридманов стала самой знаменитой парой в истории криптоанализа. Спешу уведомить читателей, что они оба довольно скоро поняли, каким образом миссис Гэллап вводила себя в заблуждение. Посвященные миссис Гэллап главы в написанной ими книге «Исследуя шекспировские шифры» не оставляют от дела всей жизни миссис Гэллап камня на камне.

Но вернемся к математической реальности. В последние десятилетия математики разработали множество остроумнейших процедур, позволяющих строить циклические цепочки, в которых все возможные перестановки из n символов по k задаются только один раз каждым набором из k идущих подряд символов. Например, рассмотрим цепочку из 32 символов
aaaaabbbbbabbbaabbababbaaababaab.

Если рассматривать эту цепь как циклическую (соединить конец с началом), то каждая группа из пяти идущих подряд символов представляет собой одну из $2^5=32$ перестановок символов *a* и *b* в группах из пяти символов. Построить такую цепь можно 2048 способами, если считать различными цепи, получающиеся при считывании символов одной и той же цепи по и против часовой стрелки. Для двух символов формула, задающая число цепей, имеет следующий вид:

$$2^{(2^{k-1}-k)},$$

где k — число символов в группе. Любая из 2048 цепей дает удобный способ записи какого-то ключа к двухлитерному шифру. Напечатайте по кругу современный английский алфавит (из 26 букв), повторите первые 6 букв еще раз, чтобы довести общее число букв до 32, и припишите изнутри круга цепь из символов *a* и *b* (рис. 2). Чтобы получить перестановку, например, для буквы *R*, выпишите пять символов, начиная с буквы *R*, по часовой стрелке (или, если угодно, против нее).

Двухлитерный шифр имеет множество необычных применений. Например, колоду из 52 игральных карт можно разложить так, что цвета карт (или их четные и нечетные значения, старшие и младшие карты или любое другое разбиение по двоичному признаку) будут зашифровывать слово или фразу из 10 букв. Разумеется, цепи из 3 символов порождают трехлитерные шифры, из 4 символов — четырехлитерные шифры (генетический код!) и т. д.

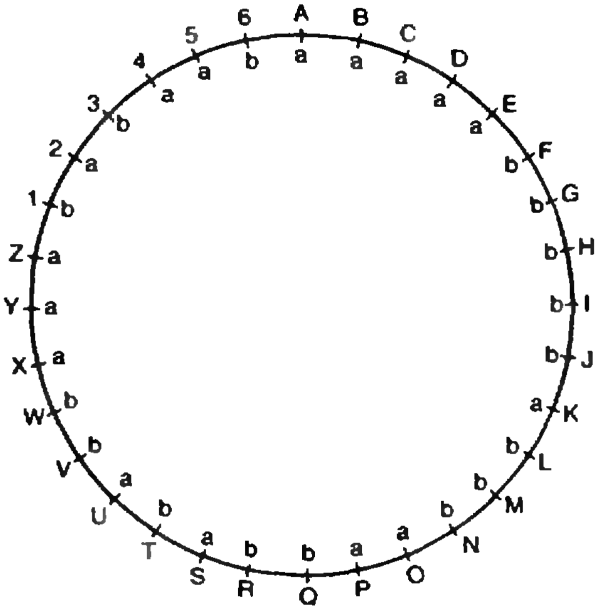


Рис. 2.

Хотя шестикратная длина шифротекста по сравнению с исходным текстом относится к недостаткам шифра Бэкона, несомненным достоинством шифровальной системы Бэкона следует считать то, что она позволяет скрыть в одном и том же шифротексте несколько сообщений. Необходимо только тщательно подобрать типографский шрифт так, чтобы литеры можно было разделить на символы *a* и *b* более чем одним способом. Рассмотрим, например, следующий текст:

GkwRt ceUya porrE.

Ключом к шифру мы снова выбираем концентрические круги, изображенные на рисунке 2, который надлежит считывать по часовой стрелке. Если символ *a* означает буквы латинского алфавита, стоящие на местах с нечетными номерами (*a, c, e*,...), а символ *b* — буквы, стоящие на местах с четными номерами (*b, d, f*,...), то приведенный выше текст расшифровывается как *aaabb aaaaa babba*, что соответствует слову *CAT* (кошка). Если же символ *a* означает букву из первой половины алфавита, а символ *b* — букву из второй половины алфавита, то тот же текст расшифровывается как *aabbb aabba bbbba*, что соответствует слову *DOG* (собака). Если символ *a* означает прописную букву, а символ *b* — строчную, то текст расшифровывается как *abbab bbabb bbbba*, что соответствует слову *PIG* (свинья).

А вот упражнение для читателя:

QUZGF MTXYZ JLUIY XNEEN WLREW TSNJE.

Используя тот же ключ, что и раньше, попробуйте определить три способа разбиения английского алфавита на 2 равные части так, чтобы приведенный выше текст допускал три различных перевода — три фамилии знаменитых математиков, каждая из которых (в английском варианте) состоит из 6 букв. (Указание: три разбиения алфавита, о которых идет речь, имеют отношение к фамилии поэта, ногам и топологии.)

Хотя сам Бэкон никогда не использовал подобную метафору в явном виде, его шифр можно рассматривать как своего рода символическое воплощение его взглядов на научное знание. И поныне этих взглядов придерживаются многие философы и ученые, работающие в области естественных наук. Бэкон был убежден в том, что число законов природы не бесконечно велико. Подобно своим собратьям-англиканцам, он считал, что Господь сотворил естественный мир, отделенный четкой границей от мира сверхъестественного. Именно в естественном мире конечное число простых принципов, комбинируясь наподобие букв в *n*-литерном шифре, образуют все законы природы.

В XIX веке английский логик Джон Венн отметил это обстоятельство на странице 357 своей «Эмпирической логики». Позицию Бэкона Венн охарактеризовал как «*алфавитный* взгляд на Вселенную в своей наиболее крайней форме... Мы обнаруживаем, что [Вселенная] разбита, разделена на части и тщательно перенумерована по всем направлениям, в результате чего, сколь ни чудовищно велико возможное число комбинаций, образуемых этими элементами, оно все же *конечно*, и, следовательно, комбинации открывают свои секреты усидчивому терпению при неукоснительном следовании надлежащим правилам».

Наука, если продолжить эту метафору, представляет собой грандиозную задачу криптографического анализа. Бэкон был убежден в том, что в конце концов, причем не в отдаленном будущем, все шифры будут раскрыты и человечество познает не всю истину любой ценой, а все основные естественные законы. Будущее науки, таким образом, сводится к восполнению деталей и к использованию законов природы в новых изобретениях.

Хотя немногие из современных ученых могли бы отважиться на подобное предсказание, они нередко высказывают не столь универсальные бэконианские суждения применительно к той или иной конкретной науке. Так, Найджел Коулдер в своем живо написанном обзоре новой астрономии «Кипящая Вселенная» (1969 г.) говорит о том, что XX столетие может оказаться уникальным в истории астрономии как столетие, в котором астрономы впервые стали «всезнайками», познав в общих чертах основные направления развития всего космоса. «Неужели,— добавляет Коулдер,— у наших потомков наши идеи будут вызывать такую же снисходительную усмешку, какую вызывают у нас идеи наших предков?»

Кто может с уверенностью сказать, даже если речь идет о какой-то конкретной науке, окажется ли в конце концов (что бы это ни значило) Бэкон прав или неправ? Мы можем лишь утверждать, что сейчас природа представляется нам гораздо более «непричесанной» и сложной, чем казалось лорду-канцлеру. Существуют шифры внутри шифров, которые в свою очередь также заключены в шифрах, и пока мы не ухватили даже за кончик нити, ведущей к ответу на вопрос, обрывается ли этот процесс на каком-нибудь этапе или продолжается до бесконечности.

Перевод с английского Ю. Данилова

„Квант" улыбается

Груки

Имя Пита Хэйна (род. в 1905 г.) широко известно не только на его родине в Дании, но и во всей Скандинавии и во многих англоязычных странах. Такая популярность неудивительна. XX век вряд ли насчитает много людей, в которых счастливо уживались поэт, романист, эссеист, художник, архитектор и инженер-изобретатель и которые к тому же сумели во всех этих ипостасях проявить себя талантливо.

Наибольшую славу П. Хэйну принесли его короткие стихи — груки (название придумано им самим). Он начал писать их во время нацистской оккупации в Дании. Двуплановость, двусмысленность груков позволяли датчанам говорить о том, что их действительно волновало. Эта особенность груков сохраняется и впоследствии. Создатель кибернетики Н. Винер, большой почитатель таланта П. Хэйна, особенно выделял эту черту: «Его стихи следует читать по крайней мере на двух уровнях — внешнем и более глубоком. И в том и в другом случае они вызывают во мне восхищение. Какое богатство значительных мыслей заключено в них!» Когда П. Хэйн работал в знаменитом Копенгагенском институте теоретической физики, Нильс Бор избрал именно его своим партнером по «интеллектуальному пинг-понгу». Многие строчки Хэйна стали поговорками, крылатыми словами. Они настолько прочно вошли в обиход, что в свою очередь дали одному критику основание для следующего афоризма: «Блестящий оратор — это человек, способный произнести хорошую речь, ни разу не процитировав Пита Хэйна».

П. Хэйн издал около 20 сборников груков — на английском и датском языках. Их популярности в немалой степени способствовали рисунки автора к своим стихотворениям.

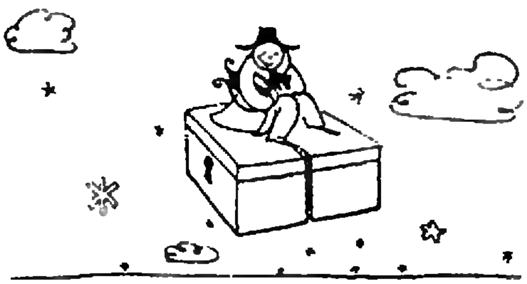
Предлагаем вам несколько груков с авторскими иллюстрациями. Оригинальные тексты содержатся в английских сборниках, вышедших в 1966—1972 гг. в Копенгагене в издательстве Borgen. Для тех, кто захочет попробовать свои силы в переводе, мы приводим тексты груков на английском языке.

П. ХЭЙН

ПАРАДОКС ЖИЗНИ

Философский грук

Когда я думаю о замысле Творца,
когда меня загадка жизни мучит,
встают перед глазами два ларца,
и в каждом заперт
　　от другого ключик.



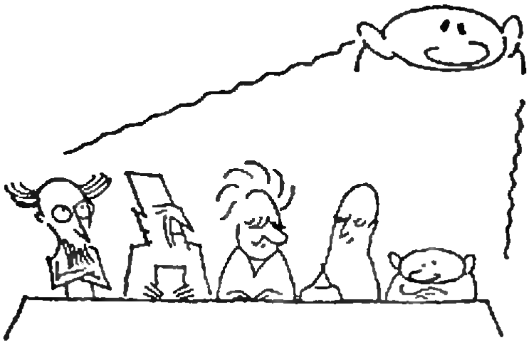
THE PARADOX OF LIFE

Philosophical grook

A bit beyond perception's reach
I sometimes believe I see
that Life is two locked boxes, each
containing the other's key.

АРИФМЕТИКА СОТРУДНИЧЕСТВА

К законам общности
от сути частности
приходишь без долгих раздумий:
сумма талантов
равна их разности,
а сумма бездарностей — сумме.



THE ARITHMETIC OF CO-OPERATION

When you're adding up committees
there's a useful rule of thumb:
that talents make a difference,
but follies make a sum.

ВСЕЗНАНИЕ

Знать, где предел
твоих знаний проложен
и что за пределом этим,
пожалуй, единственно возможное
всезнание на свете.

OMNISCIENCE

Knowing what
thou knowest not
is in a sense
omniscience.

ПРИ СВЕЧЕ

Когда бы мы
могли начать
с печальной
мудрости огарка,
как помогла бы нам
свеча,
когда она
горела ярко.

CANDLE WISDOM

If you knew
what you will know
when your candle
has burnt low,
it would greatly
ease your plight
while your candle
still burns bright.

Перевел с английского и
подготовил публикацию Г. Варденга

Поступающим в вузы и школьникам

КООПЕРАТИВ «УЧИТЕЛЬ» предлагает методические пособия
Для подготовки к экзаменам:
МАТЕМАТИКА — пять пособий (способы решения задач): для 9 кл., 11 кл.;
для поступающих в вузы № 1 (алгебра и тригонометрия);
№ 2 (начала анализа и геометрия); № 3 (системы уравнений, задачи
на составление уравнений, задачи с параметрами).
Семь пособий (общих для 11 кл. и поступающих в вузы):
ФИЗИКА — пособие № 1 (ответы на билеты), № 2 (способы решения задач);
ХИМИЯ — пособие № 1 (ответы на билеты), № 2 (способы решения задач);
БИОЛОГИЯ (ответы на вопросы); **АНГЛИЙСКИЙ ЯЗЫК** (темы с переводом);
НЕМЕЦКИЙ ЯЗЫК (темы с переводом).
РУССКИЙ ЯЗЫК — для 9 кл. (ответы на билеты).

Для поступающих в вузы:
ФИЗИКА — пособие № 3 (ответы на вопросы программы, механика и молекулярная физика);
№ 4 (электричество, магнетизм, атомная физика).
ХИМИЯ — пособие № 3 (способы решения задач), № 4 (ответы на вопросы программы).
СОЧИНЕНИЕ — пособие № 1 (по программным произведениям); № 2 (по современной
литературе: «Дети Арбата», «Плаха», «Белые одежды», «Жизнь и судьба» и др.);
№ 3 (о новинках литературы, о молодежи, об экологии и т. д.).

Для школьников:
СОЧИНЕНИЕ — общее пособие для 9—11 кл. № 1
(по ряду ведущих программных произведений); общее пособие для 9—11 кл.
№ 2 (на свободные темы и по произведениям, включенным в новую программу:
«Поединок», «Доктор Живаго», «Мастер и Маргарита» и др.); три отдельных пособия
для 9, 10 и 11 кл. (по основным произведениям, изучаемым в этих классах).
В каждом пособии 14—17 сочинений. Темы нигде не повторяются.

Цена одного пособия 100 рублей. Оплата при получении на почте.
Заказы присылайте по адресу: 400067, г. Волгоград, п/о 67, а/я 48/1,
кооператив «Учитель». Школы и организации могут заказать по безналичному расчету,
прислав гарантийное письмо по вышеуказанному адресу (тел.: 42-24-00).
КООПЕРАТИВ «УЧИТЕЛЬ» предлагает на выгодных условиях сотрудничество
по распространению (продаже) своих пособий на местах.
Желающие могут писать по вышеуказанному адресу на имя Петровой Е. С.
Им будут высланы условия сотрудничества. Телефон для справок:
42-41-69 (с 14 до 17 часов).

Задачник „Кванта"

Задачи

М1356 — М1360, Ф1363 — Ф1367

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1992 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1356» или «Ф1363». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи Ф1363 — Ф1367 предлагались на Межреспубликанской физической олимпиаде 1992 года.

М1356. Докажите, что если $abc=4Rrr_c$, где a, b, c — стороны треугольника, R, r, r_c — радиусы описанной, вписанной и одной из вневписанных окружностей, то треугольник прямоугольный. (Вневписанная окружность касается стороны и продолжений двух других сторон.)

Б. Турешбаев, ученик 11 класса

М1357. Докажите, что оба числа $91!\cdot 1901!-1$ и $92!\cdot 1900!+1$ делятся на 1993.

Ю. Калиниченко

М1358. Назовем кубоидом шестигранник, все грани которого — четырехугольники. Докажите, что если три из четырех его диагоналей (не лежащих на его гранях) пересекаются в одной точке, то и четвертая проходит через эту точку.

В. Дубровский

М1359. Пусть $0<a_0\leqslant a_1\leqslant\ldots\leqslant a_n$. Докажите, что уравнение $a_0+a_1\cos x+\ldots+a_n\cos nx=0$ имеет на отрезке $[0, \pi]$

а) хотя бы один корень;

б)* ровно n корней.

А. Белов, В. Сендеров

М1360. Обозначим через p_{mn} число различных покрытий шахматной доски размерами $m\times n$ клеток $mn/2$ костями домино (прямоугольниками 1×2 клетки; разумеется, мы считаем одно из чисел m и n четным).

а) Докажите, что $p_{2\,n}=f_n$ — последовательность, задаваемая соотношением $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$; $f_1=1$, $f_2=2$ (последовательность Фибоначчи).

б)* Докажите, что (для четных n) верны оценки:

$$(3/2)^{n^2/2}<p_{n\,n}<2^{n^2/2}.$$

А. Китбалян

Ф1363. Масса Харона, недавно открытого спутника Плутона, в 8 раз меньше массы планеты. Плутон и Харон обращаются по круговым траекториям вокруг общего центра масс, причем они все время «смотрят друг на друга», т. е. система вращается как единое твердое тело. Расстояние между центрами тел $R=19\,640$ км, радиус Харона $r=593$ км. Определите относительное различие в ускорениях свободного падения для наиболее близкой к Плутону и наиболее удаленной от него точек Харона.

В. Белонучкин

Задачник „Кванта“

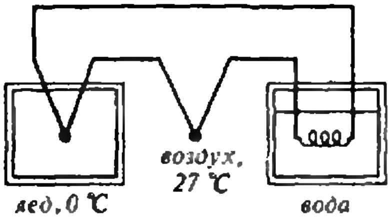


Рис. 1.

Ф1364. Один из спаев термопары находится в комнате при температуре $t_1=27$ °C, а второй — в теплоизолированном сосуде со льдом, имеющим температуру $t_2=0$ °C (рис. 1). Мощность, развиваемая термопарой, выделяется на сопротивлении нагревателя, который помещен в другой теплоизолированный сосуд, содержащий воду. Оцените, на сколько повысится температура воды к моменту окончания плавления льда. Считайте, что все сопротивление цепи сосредоточено в нагревателе. Массы воды и льда одинаковы. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=335$ кДж/кг.

А. Шеронов

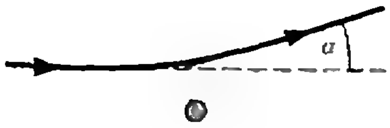


Рис. 2.

Ф1365. Заряженная частица с кинетической энергией W пролетает мимо длинного равномерно заряженного провода. Частица движется в плоскости, перпендикулярной проводу, и в результате отклоняется на небольшой угол α от первоначального направления полета (рис. 2). Найдите этот угол, если заряд частицы e, а заряд единицы длины провода q. На расстоянии R от длинного провода напряженность поля $E=q/(2\pi\varepsilon_0 R)$.

В. Можаев

Ф1366. В «черном ящике» находятся постоянный резистор и нелинейный элемент, которые могут быть включены последовательно или параллельно. Вольт-амперные характеристики для обоих включений приведены на рисунке 3. Найдите по этим данным сопротивление резистора. Какой нелинейный элемент может находиться в «ящике»?

А. Зильберман

Ф1367. Полуцилиндр изготовлен из оптически прозрачных цилиндрических слоев с разными значениями показателя преломления n. Полученная зави-

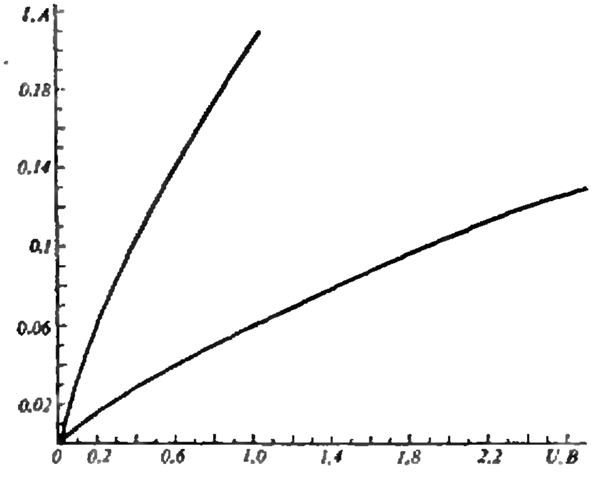


Рис. 3.

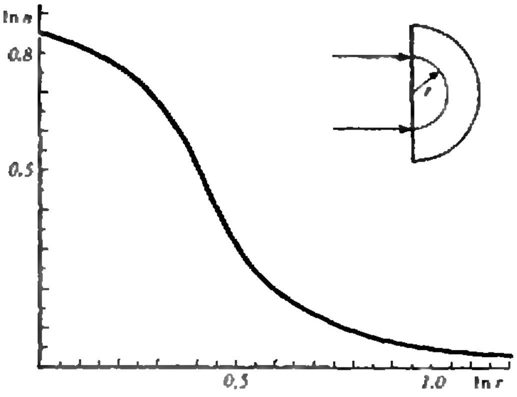


Рис. 4.

симость n от радиуса слоя r изображена на рисунке 4 в координатах $\ln n$ и $\ln r$. Используя данную зависимость, найдите радиусы полуокружностей, по которым сможет распространяться тонкий пучок света при нормальном падении на плоскую поверхность полуцилиндра.

В. Можаев

Решения задач

М1326—М1330, Ф1343—Ф1347

М1326. Последовательность $\{a_n\}$ определяется по следующим правилам: $a_0=9$, $a_{k+1}=3a_k^4+4a_k^3$ для любого $k>0$.
Докажите, что a_{10} содержит более 1000 девяток (в десятичной записи).

Докажем, что если a_k оканчивается l девятками, т. е. имеет вид $a_k=a\cdot10^l-1$, где a — натуральное число, то a_{k+1} оканчивается не меньше чем $2l$ девятками.

В самом деле,

$$a_{k+1}=3(a\cdot10^l-1)^4+4(a\cdot10^l-1)^3.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$a_{k+1}=14\cdot10^{2l}-12a\cdot10^l+3+N\cdot10^{2l}+12a\cdot10^l-4=$$
$$=P\cdot10^{2l}-1,$$

откуда видно, что последние $2l$ цифр числа a_{k+1} — девятки. Поскольку $a_1=9$, число a_{10} оканчивается не меньше чем на $2^{10}>1000$ девяток.

Н. Вялый

М1327. Круг поделили хордой AB на два круговых сегмента и один из них повернули вокруг точки A на некоторый угол. Пусть при этом повороте точка B перешла в точку D. Докажите, что отрезки, соединяющие середины дуг сегментов с серединой отрезка BD, перпендикулярны друг другу.

При этом повороте середина H хорды AB переходит в середину K хорды BD. Пусть $AB=2h$.

Рассмотрим наш круг еще до поворота (рис. 1). Высота $BH=h$ прямоугольного треугольника EBC делит его на два подобных треугольника с некоторым коэффициентом подобия k:

$$\frac{EH}{h}=\frac{h}{CH}=k.$$

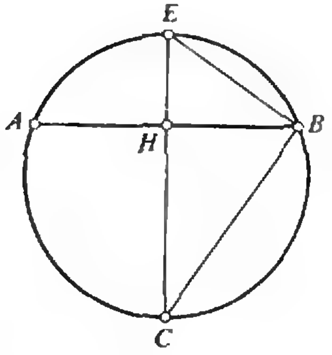


Рис. 1.

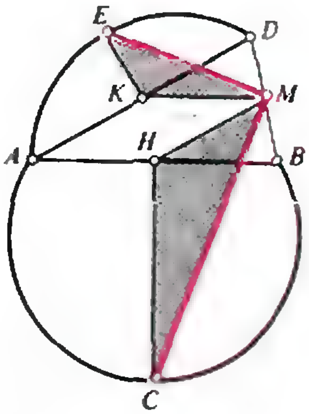


Рис. 2.

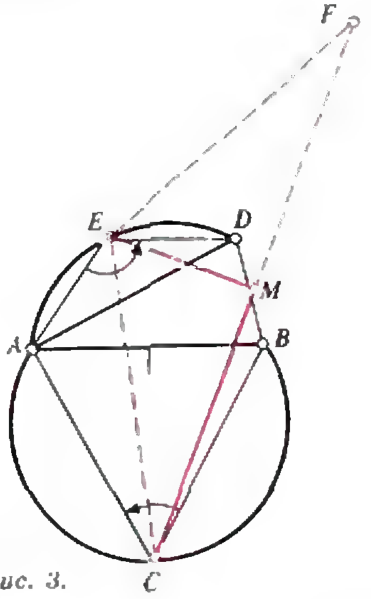


Рис. 3.

Рассмотрим теперь конфигурацию после поворота (рис. 2). Докажем, что треугольник EMC — прямоугольный с тем же отношением катетов k.

Отрезки MK и MH — средние линии треугольника ABD, так что $MKAH$ — ромб (со стороной h). Треугольники EKM и MHC подобны, поскольку углы EKM и MHC равны, а стороны, их заключающие, пропорциональны:

$$\frac{EK}{h}=\frac{h}{MC}=k.$$

Более того, $EK\perp MH$, $MK\perp CH$, так что один треугольник получается из другого поворотом на 90° и сжатием с коэффициентом k, поэтому и третьи стороны этих треугольников — ME и MC — перпендикулярны, что и требовалось доказать.

Существуют и другие решения этой задачи, в частности, использующие композиции геометрических преобразований. Вот одно из них.

Рассмотрим композицию R двух поворотов: первый — с центром C на $\angle BCA=\gamma$, второй — с центром E на $\angle AED=\varepsilon$ (рис. 3).

Поскольку $\gamma+\varepsilon=180^\circ$, R — поворот на 180°, т. е. симметрия относительно некоторой точки M. (В самом деле, направление любого вектора на плоскости после применения такого преобразования меняется на противоположное; отсюда следует, что для любой точки X плоскости из $R(X)=Y$ следует, что $R(Y)=X$ и что середина отрезка XY — неподвижная точка преобразования R.)

Ясно, что $R(B)=D$, поэтому центр симметрии M как раз и есть середина отрезка BD. Пусть $R(C)=F$ (рис. 3), тогда F получается из C поворотом с центром E на $\angle CEF=\varepsilon$; при этом M — середина основания CF равнобедренного треугольника CEF, поэтому $EM\perp CF$.

З. Насыров, В. Дубровский

М1328. *Вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[-1; 1]$, причем сумма кубов этих чисел равна 0. Докажите, что сумма $x_1+x_2+\ldots+x_n$ не превосходит $n/3$.*

Первое решение. Рассмотрим многочлен

$$P(x)=4(x+1)(x-1/2)^2=(x+1)(4x^2-4x+1)=$$
$$=4x^3-3x+1.$$

Сложив n очевидных неравенств $P(x_i)\geqslant 0$, где $i=1, 2, \ldots, n$, получим

$$-3(x_1+x_2+\ldots+x_n)+n\geqslant 0,$$

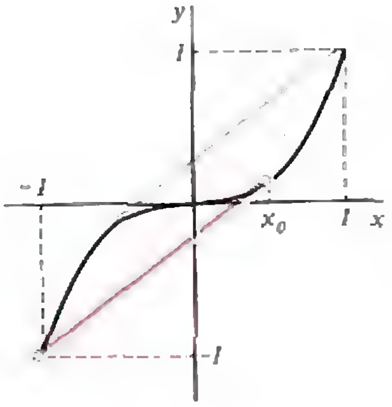
откуда

$$x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant n/3.$$

Конечно, не очень понятно, как додуматься до такого решения. Вот один из возможных подходов — основанный на геометрических соображениях.

Разместим на графике функции $y=f(x)=x^3$, $-1\leqslant x\leqslant 1$ (см. рисунок) n одинаковых масс в точках с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть

$$X=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n},\quad Y=\frac{x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3}{n}$$



— координаты центра C этих n масс. Ясно, что точка C лежит в пределах «выпуклой оболочки» нашего графика, в частности, выше касательной к графику, проведенной из точки $(-1,\ -1)$,— красной прямой на рисунке. Найдем уравнение этой касательной. Это — прямая $y=g(x)=t(x+1)-1$, где t выбрано так, что разность функций

$$f(x)-g(x)=x^3-(t(x+1)-1)=(x+1)\,(x^2-x+1-t) \qquad (*)$$

имеет, кроме $x=-1$, кратный корень $x=x_0$. Для этого дискриминант квадратного трехчлена $x^2-x+1-t$ должен обращаться в 0: $1-4(1-t)=0$, откуда $t=3/4$, а соответствующий корень $x_0=1/2$. Поскольку точка $C(X,Y)$ лежит не ниже красной прямой $y=g(x)$, т. е.

$$Y\geqslant \frac{3}{4}X-\frac{1}{4},$$

при $Y=0$ получаем требуемую оценку $X\leqslant 1/3$.

(Заметим, что многочлен $(*)$ — это, с точностью до множителя, тот самый «взятый с потолка» многочлен $4(x+1)\,(x^2-x+1/4)=4(x+1)\,(x-1/2)^2$, который фигурировал в первом решении.)

Второе решение. Пусть $x_1,\ \dots,\ x_n$ — набор чисел, удовлетворяющий условиям задачи. Пусть среди них k неотрицательных: $y_1,\ \dots,\ y_k$ и $l=n-k$ отрицательных: $-z_1,\ \dots,\ -z_l$. Тогда

$$s=x_1+\dots+x_n=y_1+\dots+y_k-z_1-\dots-z_l.$$

По условию,

$$y_1^3+\dots+y_k^3=z_1^3+\dots+z_l^3.$$

Обозначим эту сумму через x. Поскольку положительные числа $z_i\,(i=1,2,\dots,l)$ не превосходят единицы, имеем $l\geqslant x$, т. е. $k\leqslant n-x$.

Оценим число s сверху. Так как $z_j^3\leqslant z_j$ при $1\leqslant j\leqslant l$, то $z_1+\dots+z_l\geqslant x$. С другой стороны, поскольку *)

$$\left(\frac{y_1+y_2+\dots+y_k}{k}\right)^3\leqslant\frac{y_1^3+y_2^3+\dots+y_k^3}{k},$$

то

$$y_1+\dots+y_k\leqslant k^{2/3}x^{1/3}\leqslant(n-x)^{2/3}x^{1/3}.$$

Таким образом,

$$s\leqslant(n-x)^{2/3}x^{1/3}-x.$$

Докажем, что

$$(n-x)^{2/3}x^{1/3}-x\leqslant\frac{n}{3}.$$

После преобразований этого неравенства получаем равносильное неравенство

$$(n-x)^2x\leqslant\left(x+\frac{n}{3}\right)^3,$$

или

$$3x^2-\frac{2}{3}nx+\frac{n^2}{27}\geqslant 0,$$

---

*) См., например, «Квант», 1990, № 4, с. 58.

т. е.

$$\left(3x-\frac{n}{3}\right)^2\geqslant 0.$$

Утверждение задачи доказано.

Из решения видно, что неравенство задачи может переходить в равенство лишь при n, кратных 9. При этом $k=8n/9$; $y_i=1/2$ при $i=1, \ldots, k$; $z_i=1$ при $i=1, \ldots, l$.

Н. Васильев, Ф. Назаров, В. Сендеров

М1329. *Докажите, что в выпуклом шестиугольнике ABCDEF три прямые, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в одной точке в том и только в том случае, если площади треугольников ACE и BDF равны.*

Пусть K, R, L, P, M, Q — середины сторон шестиугольника $ABCDEF$ (рис. 1), малые жирные буквы означают векторы, идущие в соответствующие точки A, B, ..., F, K, R, ..., Q из некоторой точки O. Тогда $\mathbf{k}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})/2$, $\mathbf{r}=(\mathbf{b}+\mathbf{c})/2$, ..., $\mathbf{q}=(\mathbf{f}+\mathbf{a})/2$, поэтому $\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}=\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}$ (обе суммы равны $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\ldots+\mathbf{f})/2$).

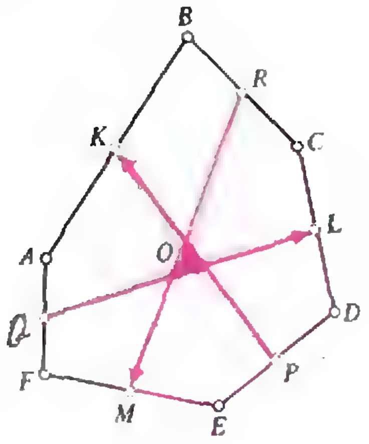


Рис. 1.

Удобнее всего воспользоваться для записи решения операцией $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ — *псевдоскалярным произведением* векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$. Напомним ее определение и основные свойства.

$[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ — это произведение длин векторов на синус угла от первого вектора до второго, с учетом направления вращения (угол отсчитывается против часовой стрелки), другими словами — это площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ с учетом ориентации. Тогда для любых $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$

$$[\mathbf{u}, \mathbf{u}]=0,\ [\mathbf{u}, \mathbf{v}]=-[\mathbf{v}, \mathbf{u}],\ [\mathbf{u}, \mathbf{v}+\mathbf{w}]=[\mathbf{u}, \mathbf{v}]+[\mathbf{u}, \mathbf{w}].$$

Площадь треугольника с вершинами в концах векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равна по модулю

$$|([\mathbf{a}, \mathbf{b}]+[\mathbf{b}, \mathbf{c}]+[\mathbf{c}, \mathbf{a}])/2|$$

(причем знак последней суммы зависит от ориентации треугольника; рис. 2). Наконец, момент силы $\overrightarrow{AB}$, приложенной к твердому телу, относительно точки O (произведение силы на плечо) равен $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]/2$ (рис. 3).

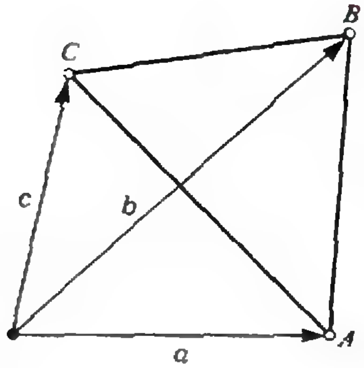


Рис. 2.

Записать условие, что отрезки PK, QL и RM пересекаются в одной точке, нам поможет как раз соображение из механики твердого тела. Рассмотрим $\overrightarrow{PK}$, $\overrightarrow{QL}$ и $\overrightarrow{RM}$ как три силы, приложенные к твердой пластине. Заметим, что сумма этих трех векторов равна нулю: $(\mathbf{k}-\mathbf{p})+(\mathbf{l}-\mathbf{m})+(\mathbf{m}-\mathbf{r})=0$. Для того чтобы пластина под их воздействием не вращалась, необходимо и достаточно, чтобы сумма их моментов (относительно некоторой точки O) равнялась нулю:

$$[\mathbf{k}, \mathbf{p}]+[\mathbf{l}, \mathbf{q}]+[\mathbf{m}, \mathbf{r}]=0, \qquad (*)$$

а это будет лишь в том случае, когда три силы проходят через одну точку.

Объяснить условие (*) можно и геометрически. Заметим, что от выбора точки O сумма моментов, стоящая в левой части (*), не зависит, поскольку сумма сил равна 0 (это нетрудно проверить вычислением). Если три

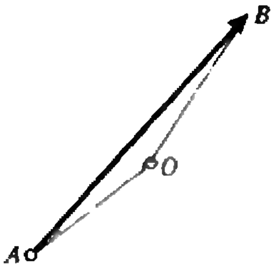


Рис. 3.

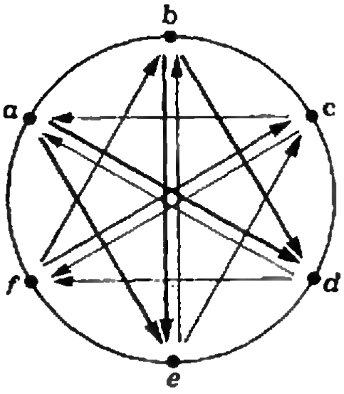


Рис. 4.

отрезка проходят через одну точку, то, взяв именно ее за точку O, мы получим, что все три члена суммы (*) равны нулю. Если же при их пересечении образуется треугольничек (как на рисунке 1), то, взяв за точку O любую точку внутри этого треугольничка, мы увидим, что все три прилегающие к отрезкам PK, QL и RM узкие треугольники OPK, OQL и ORM ориентированы одинаково, а значит, все три члена суммы (*) имеют один знак, так что сумма отлична от нуля.

Остается подставить в (*) выражения $k=(a+b)/2$, $r=(b+c)/2$, ..., $q=(f+a)/2$ и раскрыть скобки:

$$4([k,p]+[l,q]+[m,r])=[a+b,e+d]+\ldots=$$
$$=[a,e]+[a,d]+[b,e]+[b,d]+\ldots$$

Чтобы от полученных 12-ти слагаемых не рябило в глазах, мы не будем их выписывать, а вместо этого рассмотрим схему (рис. 4), на которой точками изображены векторы, а стрелками соединены те пары векторов, произведения которых (в указанном порядке!) входят в сумму. По правилу $[u,v]=-[v,u]$ три пары произведений, изображаемых противоположно идущими стрелками, уничтожаются; в итоге получаем

$$4([k,p]+[l,q]+[m,r]=$$
$$=[b,d]+[d,f]+[f,b]-([a,c]+[c,e]+[e,a])=$$
$$=2(S_{BDF}-S_{ACE}).$$

Отсюда следует утверждение задачи, а также дополнительный результат: для любого шестиугольника $ABCDEF$ удвоенная сумма площадей треугольников OPK, OQL и ORM (с учетом ориентации) равна разности площадей BDF и ACE.

Конечно, этот результат можно получить и с помощью элементарной геометрии — рассматривая многочисленные параллелограммы и треугольники, сравнивая их площади, а также с помощью метода координат; но такие решения более громоздки.

Н. Васильев, Н. Седракян

Решению задачи М1330 будет посвящена отдельная заметка в одном из следующих номеров.

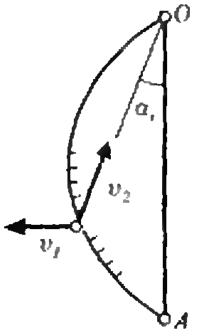
Ф1343. *Лиса видит зайца на расстоянии $l=160$ м. Заяц бежит по прямой с постоянной скоростью $v_1=6$ м/с. Скорость лисы равна $v_2=10$ м/с и в каждый момент направлена по прямой, соединяющей лису и зайца. В начальный момент скорость зайца перпендикулярна этой прямой. Где произойдет встре-*

В таких задачах важно выбрать наиболее удобную систему отсчета. Если мы «пересядем на зайца», т. е. перейдем в систему отсчета, которая движется, например вправо, со скоростью $v_1=6$ м/с, то «точка назначения» остановится, и решать задачу будет проще.

Итак, в выбранной системе отсчета заяц покоится, а лиса движется по некоторой кривой (см. рисунок). Разобьем эту кривую на множество маленьких участков и посмотрим, что изменится за время Δt_i прохождения очередного такого участка. Расстояние от лисы до зайца (до точки O) уменьшится на

$$\Delta l_i=(v_2-v_1\sin\alpha_i)\Delta t_i.$$

ча? На сколько секунд раньше она могла бы произойти, если бы лиса была умнее?



За это же время лиса удалится от прямой AO на

$$\Delta x_i=(v_1-v_2\sin\alpha_i)\Delta t_i.$$

Ясно, что лиса вначале удаляется от прямой AO, затем приближается к ней, и за время всего путешествия суммарное удаление будет равно нулю:

$$\Sigma\Delta x_i=0.$$

Запишем последнее выражение подробнее и учтем, что $\Sigma\Delta t_i=t$ — это искомое время погони:

$$\Sigma(v_1-v_2\sin\alpha_i)\Delta t_i=$$

$$=\Sigma v_1\Delta t_i-\Sigma v_2\sin\alpha_i\Delta t_i=$$

$$=v_1t-v_2\Sigma\sin\alpha_i\Delta t_i=0.$$

Отсюда можно выразить сумму произведений вида $\sin\alpha_i\Delta t_i$, которые входят в формулу для Δl_i, и найти сумму изменений расстояния от лисы до зайца:

$$\Sigma\Delta l_i=\Sigma v_2\Delta t_i-\Sigma v_1\sin\alpha_i\Delta t_i=$$

$$=v_2t-v_1^2t/v_2=t(v_2-v_1^2/v_2).$$

Но за все время пути расстояние от лисы до зайца менялось от l до 0, значит,

$$\Sigma\Delta l_i=l.$$

И теперь можно записать ответ:

$$t=\frac{l}{v_2-v_1^2/v_2}=\frac{lv_2}{v_2^2-v_1^2}=25\text{ с.}$$

За это время заяц убежит на 150 м.

Если бы лиса была умнее и бежала по прямой — «с опережением», то ей хватило бы 20 с (убедитесь в этом сами).

А. Зильберман

Ф1344*. *В теплоизолированном цилиндрическом сосуде под поршнем находится сильно разреженный гелий при температуре $T_0=100$ К. Поршень очень медленно отодвигают на некоторое расстояние, после чего в сосуде устанавливается температура $T_1=99$ К. Какая температура установится в сосуде, если поршень передвинуть очень быстро? Что такое «очень быстро» в этом случае? Сделайте оценку такой скорости передвижения поршня, при которой изменение температуры составит $\Delta T=0{,}5$ К.*

Скорости молекул при ударе об удаляющийся поршень уменьшаются. Если скорость поршня u, а молекула догоняет поршень со скоростью v_x, то после абсолютно упругого удара ее скорость будет $v_x^*=v_x-2u$. Потеря энергии молекулы составит

$$\Delta w=\frac{mv_x^2}{2}-\frac{mv_x^{*2}}{2}=2mu(v_x-u).$$

Оценим обычным способом число ударов за малый промежуток времени Δt, считая $u\ll v_x$:

$$N=\frac{1}{2}nSv_x\Delta t,$$

где n — концентрация молекул, S — площадь поршня. Тогда потеря энергии всех столкнувшихся с поршнем молекул будет

$$\Delta W=N\Delta w=\frac{1}{2}nSv_x\Delta t\cdot 2mu(v_x-u)\approx$$

$$\approx nmv_x^2Su\Delta t=nmv_x^2\Delta V,$$

где ΔV — изменение объема цилиндра.

Это соответствует обычному адиабатическому расширению. Если поршень движется быстрее, число ударов уменьшается и потери энергии становятся меньше. В пределе при $u \gg v_x$, т. е. когда поршень перемещают очень быстро, температура газа вообще не уменьшается (происходит так называемое расширение идеального газа в пустоту — без ударов о поршень). Мы сделаем довольно грубую оценку — при аккуратном расчете пришлось бы «честно» учитывать распределение молекул по скоростям — и получим

$$N' = \frac{1}{2}\, nS(v_x - u)\Delta t,$$

$$\Delta W' = N'\Delta w = \frac{1}{2}\, nS(v_x - u)\Delta t \cdot 2mu(v_x - u) = nm(v_x - u)^2 \Delta V.$$

Мы видим, что в этом случае нужно брать среднее значение не от v_x^2, а от $(v_x - u)^2$. Эта величина по условию должна быть в 2 раза меньше ($\Delta T = {}^1/_2(T_0 - T_1)$), т. е.

$$\overline{(v_x - u)^2} = \frac{1}{2}\,\overline{v_x^2}, \text{ или } u \approx 0{,}3\,|v_{x\,\text{ср}}|.$$

Для оценки $v_{x\text{ср}}$ примем

$$|v_{x\,\text{ср}}| \approx \sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{RT_0/\text{M}},$$

где R — универсальная газовая постоянная, M — молярная масса гелия. Тогда

$$u \approx 0{,}3\sqrt{RT_0/\text{M}} \approx 140 \text{ м/с}.$$

Более аккуратная оценка $|v_{x\,\text{ср}}|$ не имеет особого смысла — при расчете числа ударов о поршень мы не были особенно точны.

А. Зильберман

Ф1345. *На расстоянии $d = 10$ см от точечного заряда находится равномерно заряженная квадратная пластинка размером 20×20 см, как показано на рисунке 1 (заряд расположен на продолжении нормали к центру пластинки). Во сколько раз изменится сила взаимодействия между пластинкой и зарядом, если расстояние d увеличить в 100 раз?*

Для расчета силы электрического взаимодействия между пластинкой и зарядом придется записать сумму элементарных сил взаимодействия между зарядом и элементарным участком пластинки (рис. 2):

$$F = \Sigma \Delta F_i = \Sigma\, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{Q\sigma\Delta S_i \cos\alpha_i}{r_i^2},$$

где σ — поверхностная плотность заряда. Рассчитывать эту сумму «в лоб» — занятие довольно утомительное, однако задачу можно сильно упростить.

Заметим, что похожая сумма появится при расчете потока вектора напряженности электрического поля от заряда Q через поверхность:

$$\Phi = \Sigma\, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{Q\Delta S_i \cos\alpha_i}{r_i^2}.$$

(Эта красивая идея подробно обсуждается в задаче 6.1.19 Сборника задач по физике под редакцией

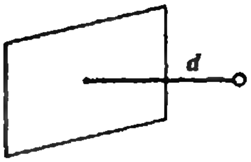


Рис. 1.

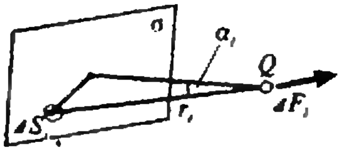


Рис. 2.

О. Савченко, 2-е издание). Можно сказать, что наш заряд находится в центре куба, одна из граней которого и есть наша заряженная пластинка; значит,

$$\Phi=\frac{1}{6}\Phi_{\text{полн}}=\frac{1}{6}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}4\pi r^2=\frac{1}{6}\frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Тогда вначале

$$F_1=\frac{1}{6}\frac{Q\sigma}{\varepsilon_0}.$$

При увеличении расстояния d в 100 раз можно считать, что заряд поверхности сосредоточен в точке, поэтому

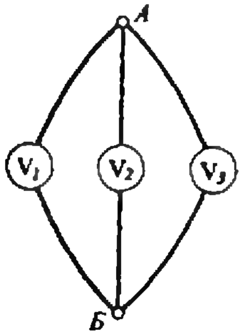
$$F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\sigma(2d)^2}{(100d)^2}=\frac{Q\sigma}{10^4\pi\varepsilon_0}.$$

И окончательно:

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{10^4\pi}{6}\approx 5\cdot 10^3.$$

Д. Александров

***Ф1346.** Три одинаковых вольтметра подключены длинными проводами к точкам А и Б, как показано на рисунке. Система находится в медленно изменяющемся магнитном поле. В некоторый момент показания крайних вольтметров составляют $U_1=0{,}35$ В и $U_3=0{,}1$ В. Что показывает средний вольтметр в это время?*



Решение этой задачи совсем простое. Если магнитное поле изменяют так, что показания двух приборов неизменны (т. е. по каждому из них течет неизменный ток), то третий прибор должен показать либо сумму, либо разность показаний первых двух:

$$U_2=U_1+U_3=0{,}45\text{ В} \quad \text{либо} \quad U_2=U_1-U_3=0{,}25\text{ В}.$$

В самом деле — сумма (алгебраическая) токов в узле должна быть равной нулю, а сопротивления вольтметров по условию одинаковы. Поскольку полярность подключения приборов (т. е. направления токов через них) нам не известна, ничего более определенного сказать нельзя.

И еще одно замечание. Обычные приборы могут оказаться весьма чувствительны к внешним магнитным полям — мы тут не учитываем прямого воздействия внешнего магнитного поля на рамку с током.

Д. Александров

***Ф1347.** Тонкая сферическая линза из стекла имеет толщину $d=3$ мм и диаметр $D=4$ см. Линзу плашмя положили на по-*

При расчете геометрии линзы мы воспользуемся тем, что она тонкая, и получим соотношение

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{8d}{D^2}.$$

верхность воды, наполовину погрузив в нее. При этом изображение Солнца, стоящего в зените, оказалось на глубине $h_1 = 17{,}5$ см. Когда линзу «притопили» другой стороной, получили $h_2 = 13{,}5$ см. Чему равны радиусы кривизны поверхностей линзы? Коэффициент преломления воды $n = 1{,}33$.

Задачник „Кванта"

Для расчета оптических свойств линзы мы будем считать ее составленной из двух плосковыпуклых полулинз. Воспользуемся тем, что оптическая сила системы тонких линз, расположенных вплотную друг к другу, равна сумме оптических сил составляющих. Тогда в первом случае можно записать

$$\frac{1}{F_1} = \frac{n_{\text{ст}}-1}{R_1} + \frac{n_{\text{ст}}/n_{\text{в}}-1}{R_2} = \frac{1}{h_1}, \qquad (2)$$

где $1/F_1$ — оптическая сила системы, $n_{\text{ст}}$ — коэффициент преломления стекла, $n_{\text{в}} = n$ — коэффициент преломления воды. Аналогично, во втором случае —

$$\frac{1}{F_2} = \frac{n_{\text{ст}}-1}{R_2} + \frac{n_{\text{ст}}/n_{\text{в}}-1}{-R_1} = \frac{1}{h_2}.$$

Суммируя уравнения (2) и (3) и используя соотношение (1), найдем $n_{\text{ст}}$:

$$\frac{8d}{D^2}(n_{\text{ст}} + n_{\text{ст}}/n_{\text{в}} - 2) = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \Rightarrow n_{\text{ст}} \approx 1{,}64.$$

Вычитая из уравнения (2) уравнение (3), получим

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1/h_1 - 1/h_2}{0{,}25 n_{\text{ст}}}.$$

Окончательно найдем

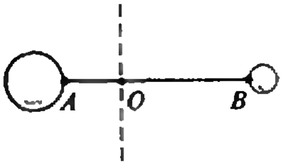
$$R_1 \approx 10{,}5 \text{ см}, \; R_2 \approx 18{,}5 \text{ см}.$$

А. Зильберман

Нам пишут

В восьмом номере «Кванта» за 1990 год в рубрике «Калейдоскоп «Кванта» была помещена задача следующего содержания:

Два шарика массами 9 грамм и 3 грамма соединены нитью и вращаются в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью. При каком соотношении длин нитей AO и OB (см. рисунок) их натяжение будет одинаковым?



В следующем номере был дан ответ:

AO : OB = 1 : 3. Натяжения нитей одинаковы, если центр вращения совпадает с центром масс системы.

Ответ этот верен только в том случае, если радиусы шаров пренебрежимо малы по сравнению с длиной нити. А как у нас?

Во-первых, в условии об этом ничего не сказано, а во-вторых, рисунок-иллюстрация к задаче как раз показывает, что радиусами пренебрегать нельзя. В этом можно убедиться, если считать, что рисунок выполнен строго в масштабе (наподобие фотографии).

Измерив необходимые размеры (в «Кванте» № 8—90), находим, что расстояние AB равно 21 мм, а диаметры шаров равны 7 мм и 3 мм. Отсюда сразу следует, что шары изготовлены из разных материалов (иначе отношение диаметров равнялось бы $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$), но это не помешает. Если точка O — центр масс системы, то должно выполняться соотношение $A_1O : OB_1 = 1 : 3$, где A_1 и B_1 — центры соответствующих шаров. Тогда получаем

$$A_1B_1 = (21 + 7/2 + 3/2) \text{ мм} = 26 \text{ мм},$$

$$A_1O = 26\,(1/4) \text{ мм} = 6{,}5 \text{ мм},$$

$$OB_1 = 26\,(3/4) \text{ мм} = 19{,}5 \text{ мм},$$

$$AO = (6{,}5 - 7/2) \text{ мм} = 3 \text{ мм},$$

$$OB = (19{,}5 - 3/2) \text{ мм} = 18 \text{ мм},$$

откуда

$$AO : OB = 1 : 6.$$

А это значительно отличается от данного в журнале ответа 1 : 3. Расхождение немалое!

И. Акулич

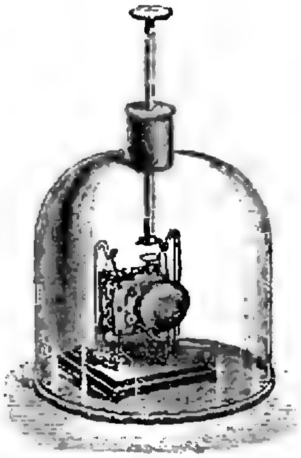
Калейдоскоп „Кванта"

...теория звука, в обычном ее понимании, охватывает ту же область, что и теория колебаний вообще... Мы, как правило, будем ограничиваться теми классами колебаний, для которых наши уши оказываются готовым и чувствительным инструментом исследования. Не обладая слухом, мы едва ли много больше интересовались бы колебаниями, чем глаз — светом.

Дж. У. Рэлей

А так ли хорошо знаком вам

Звук
?



Физика звука — одна из самых «живых» областей физики. Достаточно сказать, что в акустике (наряду с оптикой) человек долгое время чувствовал себя самым совершенным «прибором». Но постепенно открылось, что мир наполнен и неслышимыми звуками, недоступными нашему уху. И только внимательно наблюдая за живой природой, «оснащенной» заметно богаче нас акустическими средствами, воспроизводя их и создавая новые, искусственные, мы необыкновенно расширили палитру звуков, поставив их себе на службу.

Архитектура, музыка, медицина, техника — вот некоторые сферы использования современных знаний о звуке. Примеры — в сегодняшнем выпуске «Калейдоскопа».

Вопросы и задачи

1. Звук артиллерийского выстрела дошел до первого наблюдателя через 3 секунды, а до второго — через 4,5 секунды после вспышки. Определите графически местоположение орудия, если расстояние между наблюдателями 1 километр.

2. Известно, что если источник звука и человек находятся примерно на одной высоте, то в направлении ветра звук слышен дальше, чем в противоположном. Как это можно объяснить?

3. Почему ветер воет?

4. Продольными или поперечными являются волны, возбуждаемые смычком?

5. Давление воздуха в баллоне колеса автомашины можно оценить по звуку, получаемому при ударе по баллону металлическим предметом. Как это можно сделать?

6. Почему у банджо звенящий звук, а у арфы — мягкий, певучий?

7. Громкость звука убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от источника. Ученик, сидящий в пятом ряду, находится примерно втрое дальше от учителя, чем сидящий в первом ряду, однако условия слышимости в обоих случаях мало отличаются друг от друга. Почему?

8. Какой камертон звучит дольше: закрепленный в тисках или стоящий на резонансном ящике?

9. Звукопоглощаемость стекла значительно меньше звукопоглощаемости воздуха, однако, закрывая окно, мы значительно ослабляем слышимость уличного шума (а наличие двойных рам почти полностью прекращает его доступ в комнату). Чем это можно объяснить?

10. Почему после снегопада становится так тихо?

11. Почему неполный чайник перед закипанием воды «шумит» сильнее, чем полный?

12. В окнах, под которыми проезжают автомашины, нередко назойливо дребезжат стекла. Это неприятное явление можно значительно ослабить, если в центре стекла прикрепить кусочек пластилина. Как объяснить этот эффект?

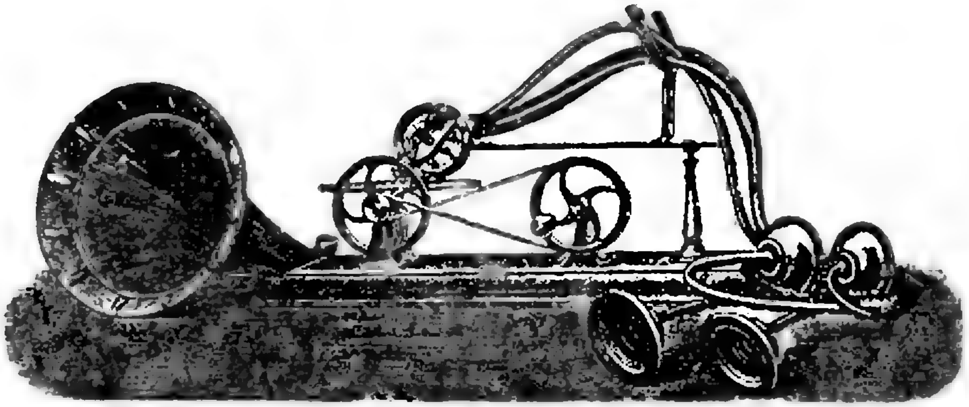
13. Оперный певец способен разбить большой винный бокал, спев очень громко определенную высокую ноту в течение нескольких секунд. Почему?

14. Почему возникает звук, когда щелкают бичом?

15. Почему при выстреле из ружья пуля вылетает со свистом, а брошенная рукой летит бесшумно?

16. Какую форму имеет фронт ударной волны, возникающей в воздухе при полете сверхзвукового реактивного самолета?

17. Почему дверь, лишь чуть-чуть приоткрытая в шумный коридор, практически не уменьшает шума?



Микроопыт

Если вы подуете около отверстия ключа, получится звук определенной частоты. Попробуйте оценить ее.

Любопытно, что...

...на Руси еще в X веке проводилась «акустическая обработка» внутренностей церквей и храмов. Для этого в их стены и своды закладывались специальные глиняные сосуды — голосники, служащие резонаторами звуков.

...система звуковых сигналов у некоторых африканских племен была разработана так хорошо, что их можно было считать обладателями телеграфа, причем более совершенного, чем оптический телеграф европейцев, предшествовавший электрическому. Так, сообщение о гибели «Лузитании» — «Большой корабль белых людей потонул, много белых погибло» — прогремело на барабанном языке через все земли от Каира до Ибадана.

...в замке Вудсток, в Англии, эхо отчетливо повторяет 17 слогов. А в замке близ Милана — в еще одном «царстве эха» — громко сказанное слово повторяется эхом 30 раз!

...частотный диапазон человеческого голоса намного уже диапазона человеческого слуха (20—20 000 герц). Так, самые высокие ноты, до которых «добираются» современные певицы, соответствуют частотам около 2350 герц, а рекорд в области низких частот составляет 44 герца.

...энергия, которую обычно переносят звуковые волны, очень мала. Если бы стакан с водой полностью поглощал всю падающую на него звуковую энергию, соответствующую громкости в 70 децибел (уровень громкой речи), и был бы полностью теплоизолирован от окружающей среды, то для того, чтобы нагреть воду от комнатной температуры до кипения, потребовалось бы примерно тридцать тысяч лет.

...секрет ультразвукового «разглядывания» дельфинами удаленных предметов — в узкой направленности акустических сигналов. Например, черноморские афалины способны безошибочно подплывать к дробинке диаметром 4 миллиметра, брошенной в море на растоянии 20—30 метров от животного.

...одно из многочисленных применений ультразвука в медицине основано на возможности его концентрации на чрезвычайно ограниченных участках ткани без влияния на весь остальной организм.

Что читать в «Кванте» о звуке

(публикации последних лет)

1. «Акустика в Океане» — 1987, № 3, с. 8;
2. «Физика музыкальной гармонии» — 1987, № 5, с. 41;
3. «Музыкальные пульсары» — 1988, № 6, с. 11;
4. «Глобальные резонансы» — 1989, № 2, с. 16;
5. «В мире мощного звука» — 1989, № 9, с. 18;
6. «Ультразвук в медицине» — 1990, № 9, с. 17;
7. «Об интерференции, дельфинах и летучих мышах» — 1991, № 5, с. 18;
8. «О водяном звере и акустическом резонансе» — 1991, № 7, с. 8.

Материал подготовил А. Леонович

„Квант" для младших школьников

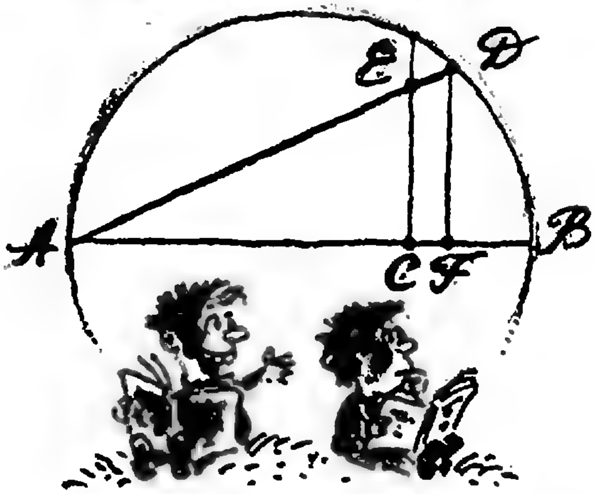
Задачи

Фуки – от скуки!
Глюки – от сердечной муки!
Друки – заместо одной штуки!
По три в руки!!!

1. Мужичок привез продавать на рынок фуки, глюки и друки. Пройдясь по рынку, он решил увеличить запланированные им цены, добавив еще по одному нулю, но не в концы, а в середины чисел. В результате цена за один фук увеличилась в 6 раз, за глюк — в 7 раз, а за друк — в 9 раз. Сколько они стали стоить, если первоначальная цена каждого из них была меньше 100 рублей?

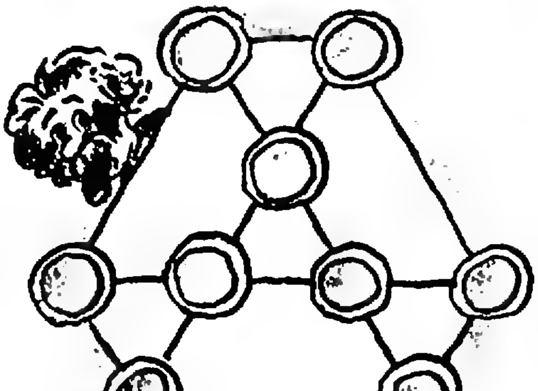
NEW MOSCOW
OLD VASUKEE

2. Перед началом международного шахматного турнира в городе Нью-Москва (б. Васюки) туда была проведена железная дорога из города Старые Васюки (б. Москва) длиной 1993 км. На первом километровом столбе этой дороги написаны числа 1 и 1992, на втором — 2 и 1991, на третьем — 3 и 1990 и т. д. Докажите, что числа на каждом из этих столбов всегда взаимно простые.



3. Диаметр AB окружности равен 1. На нем отложен отрезок AC длиной a. Проведена также хорда AD длиной b. Из точки C восстановлен перпендикуляр к AB, пересекающий хорду AD в точке E, а из точки D опущен перпендикуляр DF на AB (см. рисунок). Оказалось, что $AE=AF$. Докажите, что $a=b^3$.

4. Витя и его младший брат Митя купили по книге. Каждый из них подсчитал сумму цифр всех страниц книги и выяснил, что она равна году его рождения. Как зовут того из братьев, который ходит учиться в школу с математическим уклоном?



5. Расставьте в кружках на рисунке цифры 1, 2, 3,...,9 так, чтобы суммы чисел в вершинах каждого из семи равносторонних треугольников были равны.

Эти задачи нам предложили Н. Антонович, Н. Авилов, В. Касаткин, И. Акулич, а последняя задача принадлежит Альберту Эйнштейну.

ЗАДАЧИ СТАРИКА ХОТТАБЫЧА

Кандидат физико-математических наук
В. СУРДИН

Вероятно, многие из вас читали сказочную повесть Л. Лагина «Старик Хоттабыч» или хотя бы видели фильм о приключениях старого джинна и его юных друзей — Вольки и Жени. Но многие ли помнят что Волька Костыльков был большим любителем астрономии, действительным членом астрономического кружка при Московском планетарии и даже его старостой? Наверное, именно поэтому в повести немало эпизодов, заставляющих задуматься каждого юного любителя астрономии (а заодно и физики). Вот некоторые из них. Вчитайтесь в текст повести и подумайте над поставленными вопросами, но не торопитесь заглядывать в ответ.

1. Наручные солнечные часы. Помните, каким был первый подарок Хоттабыча Вольке? Это были наручные часы. Сначала — из цельного куска золота и без всякого механизма внутри. Они, разумеется, не показывали время.

«— А разве там что-то должно быть, внутри? — забеспокоился старый джинн. Вместо ответа Волька молча отстегнул часы и вернул их Хоттабычу.

— Хорошо,— кротко согласился тот.— Я тебе подарю такие часы, которые не должны иметь ничего внутри.

Золотые часики снова оказались на Волькиной руке, но сейчас они стали тоненькими, плоскими. Стекло на них исчезло, а вместо минутной, секундной и часовой стрелок возник небольшой вертикальный золотой шпенечек в середине циферблата с великолепными, чистейшей воды изумрудами, расположенными там, где полагалось быть часовым отметкам.

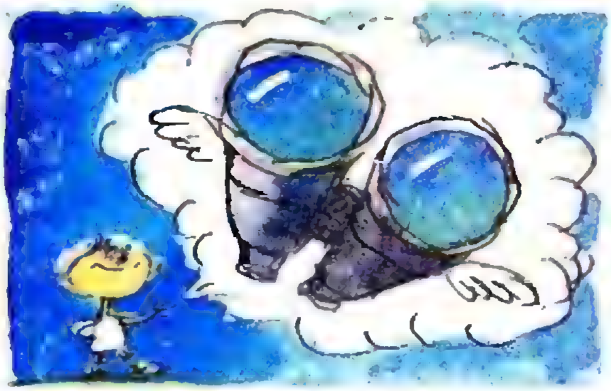
— Никогда и ни у кого, даже у богатейших султанов вселенной не было наручных солнечных часов! — снова расхвастался старик.— Были солнечные часы на городских площадях, были на рынках, в садах, во дворцах, и все они сооружались из камня. А вот такие я только что сам придумал. Правда, неплохо?

Действительно, оказаться первым и единственным во всем мире обладателем наручных солнечных часов было довольно заманчиво.»

Итак, можно ли сделать наручные солнечные часы? Если да, то почему же таких часов не было даже у султанов?

2. Морской бинокль. «Благословенный Волька,— сказал после завтрака Хоттабыч, блаженно греясь на солнышке,— все время я делаю тебе подарки, по моему разумению ценные, и каждый раз они тебе оказываются не по сердцу. Может быть, сделаем так: ты мне сам скажешь, что тебе... угодно было бы от меня получить в дар, и я почел бы за счастье... немедленно доставить желаемое.

— Подари мне, в таком случае, большой морской бинокль,— ответил Волька не задумываясь.»



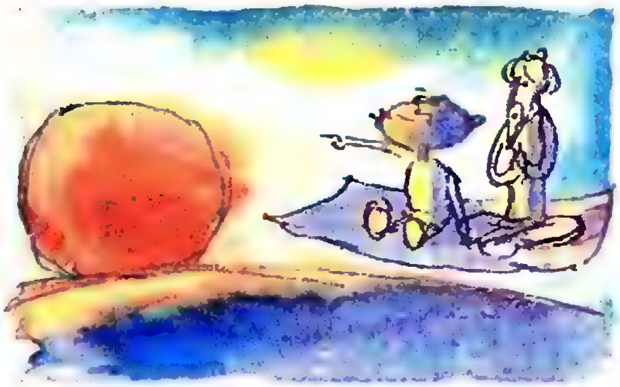
Почему Волька выбрал себе именно такой подарок?

3. Ковер-самолет. Волька и Хоттабыч отправились на ковре-самолете выручать Женю из рабства.

«Вечерняя темнота окутала город, а здесь, наверху, еще виден был багровый солнечный диск, медленно оседавший за горизонт.

— Интересно... — промолвил Волька задумчиво,— интересно, на какой мы сейчас высоте?

— Локтей шестьсот-семьсот,— отвечал Хоттабыч, продолжая что-то высчитывать на пальцах.»



Правильно ли Хоттабыч определил высоту полета? Напомним, что локоть составляет около полуметра.

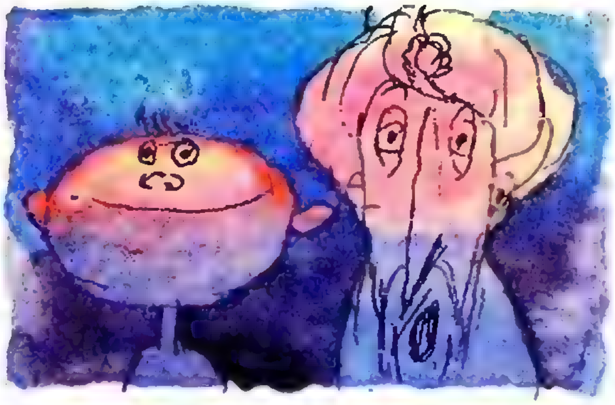
4. Продолжение полета. «Стемнело. Теперь на ковре-самолете стало особенно неуютно, и Волька предложил Хоттабычу подняться локтей на пятьсот выше.

— Тогда мы снова увидим солнце.

Хоттабыч глубоко сомневался, можно ли до завтрашнего утра увидеть уже закатившееся дневное светило, но спорить с Волькой не стал.

Можете себе представить, как он удивился и насколько вырос в его глазах Волькин авторитет, когда, поднявшись повыше, они действительно снова увидели солнце, которое как ни в чем не бывало снова только-только касалось своим багровым краем черной линии далекого горизонта.

— Если бы, подчиняясь твоей скромности, о Волька, не дал я тебе обещания, ничто не удержало бы меня от того, чтобы назвать тебя величайшей в мире балдой! — восхищенно произнес Хоттабыч...»



Верно ли Волька рассчитал необходимую высоту и действительно ли он достоин звания «величайшей в мире балды»?

5. Полет на Луну. Вы помните, как сварливый брат Хоттабыча Омар Юсуф решил слетать на Луну? Волька предупредил его:

«— Ты должен вылететь с земли со скоростью не меньше, чем одиннадцать километров в секунду. В противном случае, ты, уверяю тебя, никогда не доберешься до луны.

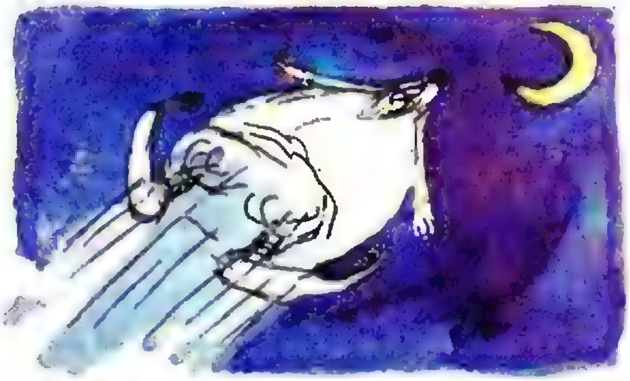
— С радостью и удовольствием! — Омар Юсуф поджал свои тонкие губы.

— А сколь велик километр? Скажи, ибо я не знаю такой меры длины.

— Ну, как тебе объяснить... — призадумался Волька.— Ну вот: километр — это примерно тысяча четыреста шагов.

— Твоих шагов? — спросил джинн.— Значит, моих шагов в километре не больше тысячи двухсот, даже немного меньше.

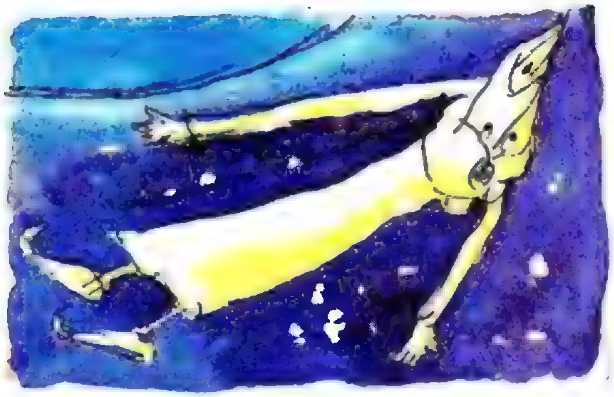
Омар Юсуф был преувеличенного мнения о своем росте. Он был не выше Вольки».



С какой скоростью джинн вылетел с Земли?

6. Хоттабыч в космосе. Помните, как старик Хоттабыч описывал свой полет в космосе? Сначала он превратился в спутник Земли, чтобы встретиться на орбите со своим братом. «А потом, когда я увидел, что мне пора возвращаться на землю, я обратился лицом в ее сторону и придал своему телу как раз такую скорость, какая требовалась для преодоления силы, которая вращала меня вокруг земного шара.»

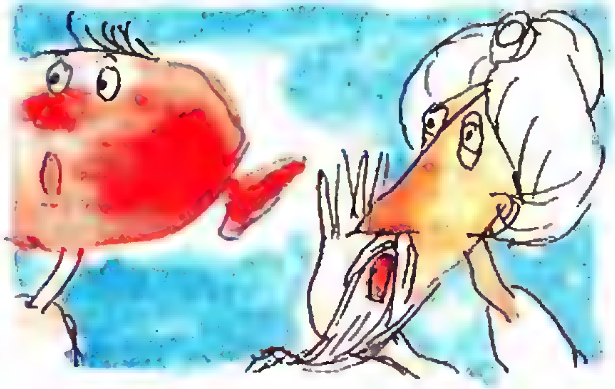
Описание этого космического маневра можно понять так, что Хоттабыч двигался по круговой орбите, а затем сообщил себе добавочную скорость, равную первой космической и направленную к центру Земли.



Мог ли Хоттабыч после такого маневра вернуться на Землю?

7. Экзамен по географии. Собираясь подсказывать Вольке на экзамене по географии, джинн обещал: «Никто моей подсказки не заметит... То, что я буду иметь счастье подсказывать, пойдет прямо из моих почтительных уст в твои высокочтимые уши».

Почему для направленной передачи звука нужны были магические способности Хоттабыча, тогда как направленную передачу света может осуществить любой из нас, например с помощью карманного фонарика?



8. Волшебная борода. Как вы помните, борода Хоттабыча теряла свою волшебную силу, когда намокала. Юные любители науки решили помочь джинну:

«— Придумал! — возбужденно вскочил на ноги Женя.— Ей-богу, придумал!.. Нужно смазать бороду каким-нибудь жиром.

— Ну и что тогда? — пожал плечами старик.

— Тогда она не промокнет даже под водопадом, вот что тогда!..

— Я достаточно сведущ в науках,— обиделся Хоттабыч,— но не знаю, какая это наука учит смазкой предохранять от порчи волшебную бороду».

Объясните старому джинну, почему смазанная жиром борода не промокает.

Перетягивание каната

Каждый, по всей видимости, знает, что наши мышцы состоят из мышечных волокон, те, в свою очередь,— из более тонких миофибрилл («мышечное волоконце»), а они — из нитей актина («действующий») и миозина («мышечный») — белков, которые, как оказывается, несут ответственность за все мышечные сокращения.

Даже под обычным оптическим микроскопом видно, что мышечные волокна наших бицепсов и трицепсов выглядят как бы исчерченными поперечными — к длине мышцы — полосками. Вот почему наша скелетная мускулатура получила название поперечно-полосатой. Полоски эти, как разглядели под электронным микроскопом, состоят из толстых молекул миозина, каждая из которых состоит приблизительно из 4600 молекул аминокислот — тех «кирпичиков», из которых построены все белки.

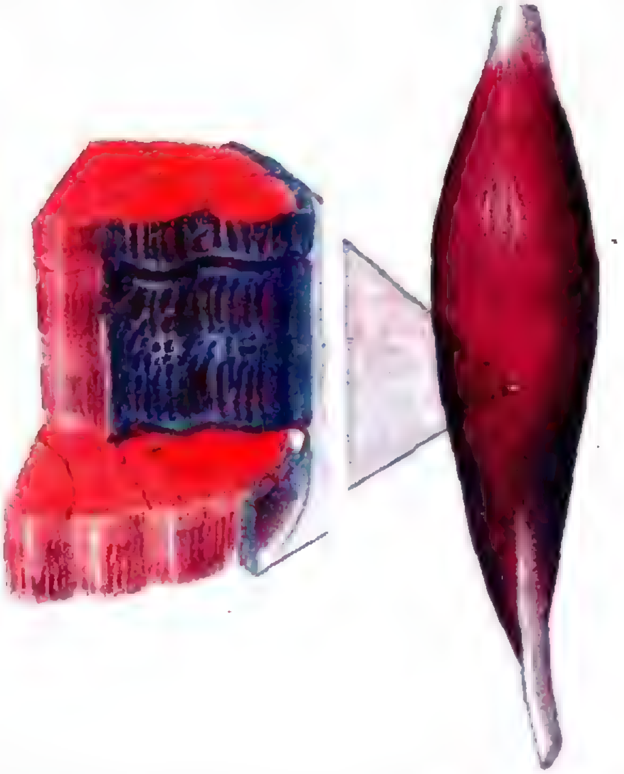
Отдельные миозиновые молекулы похожи на двуглавых змей с размером каждой головки примерно 20 нанометров. С помощью этих головок миозин заставляет актиновые нити скользить вдоль него самого, причем на довольно большие расстояния, в результате чего и происходит мышечное сокращение. Действие головок миозина можно сравнить с действием лопастей мельничного колеса либо плиц колесных пароходов, когда-то ходивших по Волге да и поныне «шлепающих» по Миссисипи (именно на таком пароходе путешествовали Том Сойер и Гекльберри Финн).

Мельничное колесо крутится за счет кинетической энергии падающей воды. Пароход движется за счет тепла, образующегося при сжигании дров или угля в топке. А за счет какой же энергии происходит сокращение наших мышц?

Оказывается, внутренним источником энергии наших клеток является так называемая аденозинтрифосфорная кислота (АТФ), открытая в 20-х годах нашего столетия. Несколько позже было обнаружено, что энергия, необходимая для мышечных сокращений и других процессов жизнедеятельности, освобождается при расщеплении, или гидролизе, АТФ. Поясним, в чем тут дело.

Молекула АТФ имеет «хвост», составленный из трех последовательно соединенных друг с другом остатков фосфорной кислоты. При отщеплении концевого фосфата, которое происходит с участием молекулы воды (отсюда и название реакции — «гидролиз»), выделяется энергия.

«АТФ — центральная ось, вокруг которой развертывается мое изложение»,— писал один из основоположников молекулярной биологии в нашей стране академик В. А. Энгельгардт, открывший, что именно миозин осуществляет гидролиз АТФ. Так возникло учение о механобелках, которые способны



Справа: внешний вид бицепса — поперечно-полосатой мышцы внутренней поверхности руки. Слева: так выглядит мышечное волокно под электронным микроскопом. Толстые нити — миозин, тонкие нити — актин, поперечные полосы — «диски», к которым прикрепляются белковые нити.

совершать механическую работу за счет энергии расщепления молекул. К этому можно добавить, что сам миозин был открыт в конце прошлого века русским микробиологом Г. Н. Габричевским.

Большой вклад в изучение мышечного сокращения внес известный американский биохимик А. Сент-Дьёрдьи, нобелевский лауреат 1937 года. Так случилось, что сначала он бежал из Будапешта от немцев, а потом — в 1948 году — от русских, оказался в Нью-Йорке, где сумел убедить мясопромышленников в том, что изучение мышцы поможет им сохранять мясо. Именно Сент-Дьёрдьи установил, что «челюсти», отгрызающие у АТФ концевой фосфат, находятся в головках миозина.

И вот недавно новый успех в мире биомеханики. Японские и американские ученые создали молекулярные системы для определения сил в пиконьютоновом диапазоне.

Ученые Осакского университета (Япония) «протягивали» нить актина длиной в несколько десятков микрон, прикрепленную к тончайшей (диаметром 0,3 мкм) стеклянной микроигле размером 50—100 мкм, по поверхности, образованной молекулами миозина (оба белка были получены из скелетной мышцы кролика). Среда содержала различные ферменты и АТФ. Регистрацию осуществляли с помощью высокочувствительной аппаратуры, которая реагировала на светимость окрашенного флюоресцентным красителем актина и блеск крупинки никеля (диаметром 2 мкм), укрепленной на кончике иглы. С помощью компьютера передвижение нити актина было «выведено» на телевизионный экран.

В этих опытах нить актина перемещалась по поверхности миозиновых молекул на расстояния до 100 нм и более. Механическое усилие, создаваемое одной головкой миозина, равнялось 0,15—0,18 пН. На 1 мкм длины актина приходилось 150 головок миозина. В покое каждая головка расщепляла около 6 молекул АТФ за секунду. При движении актиновой нити скорость гидролиза повышалась примерно до 30 мол/с. Заметим, что одной молекулы АТФ хватает, чтобы «протянуть» нить актина на расстояние 60—200 нм со скоростью порядка 1 мкм/с.

С японскими учеными не во всем согласны специалисты Стэнфордского университета (США), которые считают, что головка миозина «перетягивает» нить актина не все время расщепления АТФ, а лишь небольшую его часть — не более 5 %. Т. е. сходство скорее не с перетягиванием каната, а с зацеплением зубьев шестеренки.

Квантовая биомеханика действительно начинает жить!

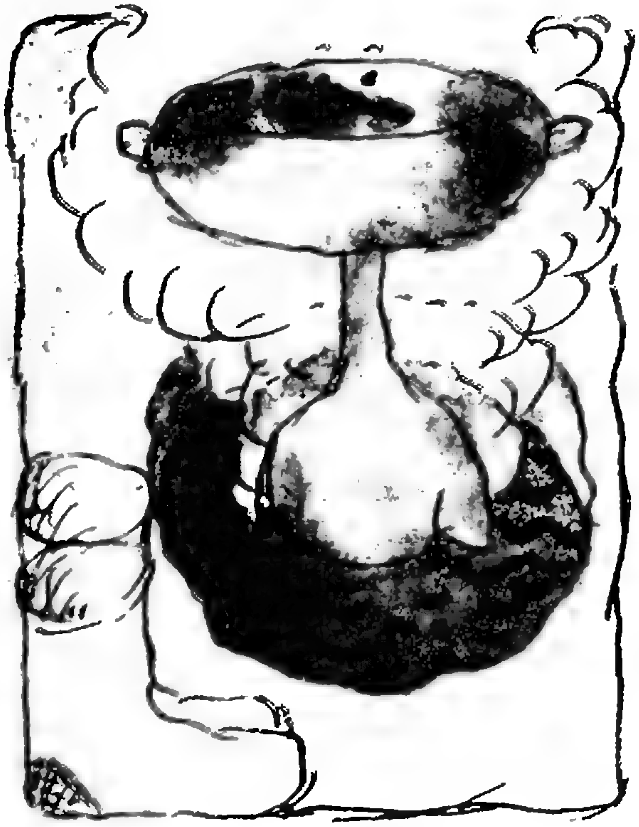
И. Лалаянц

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
Российского Открытого Университета,
созданный на интеллектуальной базе ведущих академических
институтов страны — ИПМ РАН, ВЦ РАН, МГУ, МФТИ,
объявляет прием

на подготовительное отделение — без экзаменов
(студенты научатся свободно работать на компьютере,
овладеют элементарной математикой, физикой и английским языком в объеме,
достаточном для продолжения образования на факультете
или поступления в любой другой вуз);
на отделение бакалавров — после собеседования
(студенты на 1—4 курсах получат фундаментальное образование по математике, физике,
информатике, а также специальную подготовку по английскому языку, праву и бизнесу).
Факультет начинает подготовку магистров и кандидатов наук
со специализацией в следующих областях:
моделирование и синергетика, математическая физика, нелинейный анализ,
исследование операций, математическая экономика, математическая психология.

Принимаются лица, имеющие незаконченное или законченное высшее образование.
Руководители студентов и аспирантов — ведущие ученые России.

Обучение очное (вечернее) или заочное. Ориентировочная стоимость обучения —
5 тысяч рублей в год. Занятия начинаются 1 сентября 1992 г.
Заявления и информацию о себе направляйте ***по адресу:***
125047, Москва, Миусская пл., д. 4, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
ФПМ РОУ или позвоните по телефону: 250-79-19 (ежедневно с 10 до 17).



Лаборатория „Кванта"

«Тепловые фантазии и прочие удовольствия»

Предлагаемые вашему вниманию задачи-вопросы взяты из одноименной главы книги американского физика Дж. Уокера «Физический фейерверк», выдержавшей уже два издания на русском языке. Почти все задачи так или иначе связаны с окружающим нас миром, а ответы к ним, как правило, лишь уточняют задачу или подсказывают путь к ее решению. Итак, наблюдайте и экспериментируйте.

1. Что удерживает облако? Почему облако не «рассыпается»? Почему в малооблачную погоду часть неба закрыта облаками, а часть — совершенно чистая? Не кажется ли вам, что облака должны были бы распределяться по небесному своду более равномерно?

2. Влажность и прохлада. Почему, выходя из-под душа или из бассейна, вы ощущаете прохладу? Попробуйте оценить скорость потери тепла в этих случаях. (Для оценки эффекта охлаждения при ветре в настоящее время иногда используют так называемый фактор ветроохлаждения.)

Почему больных, чтобы облегчить им боль, порой растирают метиловым спиртом? Почему для этой цели не применяют просто воду?

Когда я был маленьким и ездил с родителями отдыхать, обычно на переднее крыло машины мы прикрепляли холщовую сумку с водой. Как бы жарко ни было, вода в сумке оставалась прохладной. Почему? Можете ли вы рассчитать ее температуру при заданных температуре воздуха, влажности и скорости автомобиля?

3. Испытание кипящей водой. Один из самых удивительных примеров искусства восточной магии — испытание кипящей водой, которому подвергались последователи японской религии Синто.

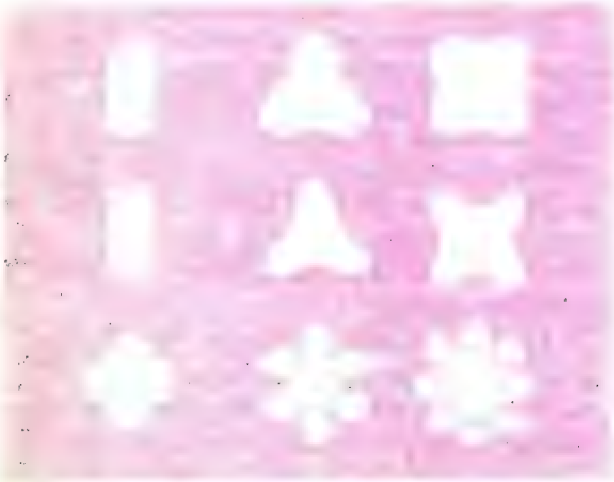
Участник действа подходил к огромному котлу с кипящей водой, резким движением погружал в него две связки бамбуковых прутьев и, взметнув их вверх, осыпал себя горячим дождем. Вода попадала в огонь под котлом, и вокруг клубились облака пара — так продолжалось пока котел не пустел. Тогда облака рассеивались, и все видели человека целого и невредимого; это служило подтверждением всемогущества Синто.

Кипящая вода, несомненно, должна была сжечь кожу человека, так что здесь наверняка скрывался какой-то фокус. Конечно, вам не стоит проделывать этот трюк. Однако попытайтесь ответить на вопрос: помогло ли бы человеку, если бы это жестокое испытание началось в тот момент, когда вода только-только закипала? Какова в это время температура воды?

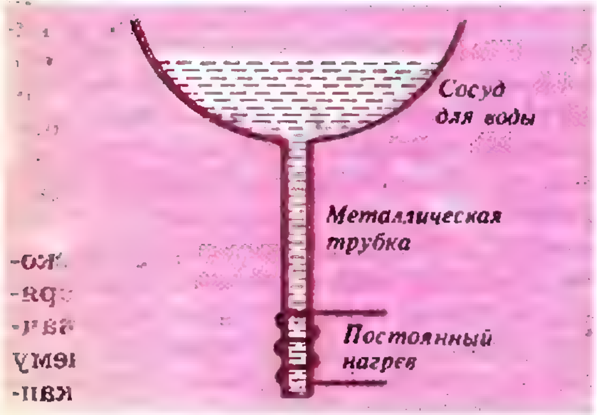
4. Капли, пляшущие на горячей сковородке. Если брызнуть водой на горячую сухую сковородку, то на ней начнут прыгать и плясать капли. Почему вода не испаряется сразу? Почему капли движутся? Как это ни удивительно, но капли испаряются быстрее, если сковородка менее горячая. Почему?

Рассмотрите внимательно прыгающую каплю и вы заметите, что она принимает самые разнообразные формы. В действительности капля вибрирует, но глаз не в состоянии уследить за столь быстрым движением, поэтому вы видите какую-то усредненную форму. Чтобы увидеть отдельное состояние капли, придется пользоваться стробоскопом или применять скоростную киносъемку. Почему капли вибрируют?

5. Гейзеры. Что вызывает извержения гейзеров? Почему некоторые гейзеры, как например Верный служака, извергаются через строго определенные промежутки времени? Может ли источником тепла для гейзера служить простая теплопередача через окружающие породы или здесь требуется более быстрый нагрев?



Формы капель на горячей поверхности.



Искусственный гейзер.

Предположим, вы хотите сделать искусственный гейзер с постоянным источником тепла. Какой длины должна быть трубка и какой мощности требуется нагреватель? С какой частотой и на какую высоту будет извергаться такой гейзер?

6. Почему вам холодно? Почему вам будет холодно, если вы холодным зимним днем выйдете в поле раздетым? Каким образом тело теряет тепло: путем теплопроводности или как-то иначе? Почему вам тепло в шубе? Ведь шуба тоже проводит тепло.

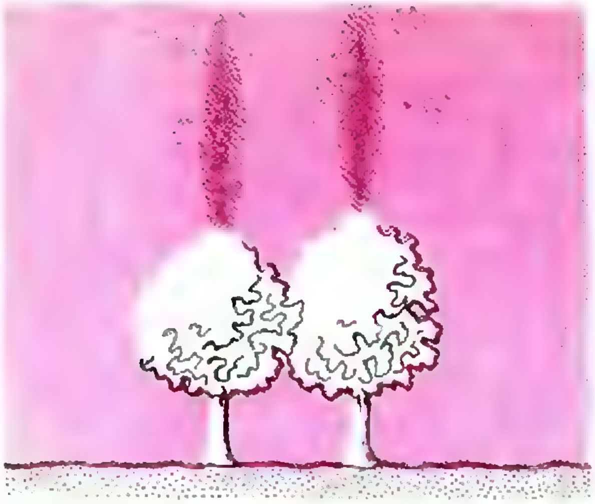
В холодный день, находясь в помещении, постойте некоторое время лицом к окну, а потом отвернитесь от него. Скорее всего, вы ощущали прохладу на лице, когда оно было обращено к окну. Почему? В конце концов, температура воздуха не изменилась, когда вы отвернулись от окна.

В фильме «Космическая одиссея: 2001» астронавт выходит на несколько секунд в открытый космос без защитного скафандра. (Артур Кларк, автор одноименного романа, считает, что это возможно без особого вреда для астронавта.) Будет ли у человека ощущение холода при такой прогулке в космосе?

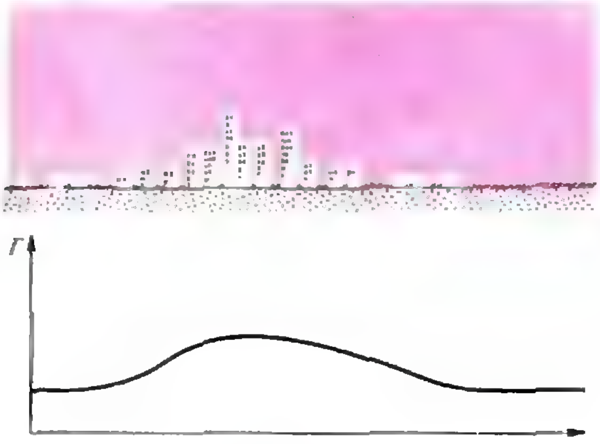
Каким образом некоторые люди приспосабливаются работать на сильном холоде? Некоторые религиозные фанатики, чтобы доказать стойкость своего духа, даже предпочитают противоестественно холодные условия существования. Уникальный пример приспособленности к холоду обнаружил Чарлз Дарвин у индейцев племени Яган в Южной Америке: при температуре, близкой к 0 °С, они едва прикрывают плечи меховой накидкой. Какие физические изменения должны происходить в организме, чтобы подобная адаптация к холоду стала возможной?

Почему, наконец, вы дрожите, когда вам холодно?

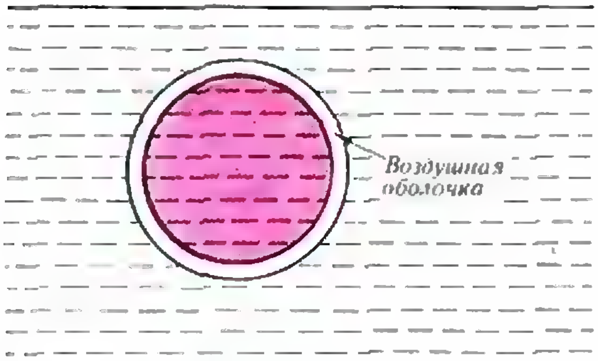
7. Рои насекомых над деревьями. Часто незадолго до захода солнца над вершинами деревьев можно видеть темные облачка. Они похожи на дым, однако при ближайшем рассмотрении оказывается, что это плотные рои на-



Насекомые и деревья.



«Остров тепла» в городе.



Воздушный пузырь в воде.

секомых, чаще всего комаров, которые собираются над деревьями. Рои эти вытянуты вверх и резко очерчены — порой создается впечатление, что дерево горит. Такие рои можно наблюдать также над телевизионными антеннами и церковными шпилями. Рассказывают, что однажды пожарная команда выехала по тревоге тушить пожар в церкви, но обнаружила, что над церковью клубится не дым, а рой насекомых. Почему насекомые собираются в такие тучи?

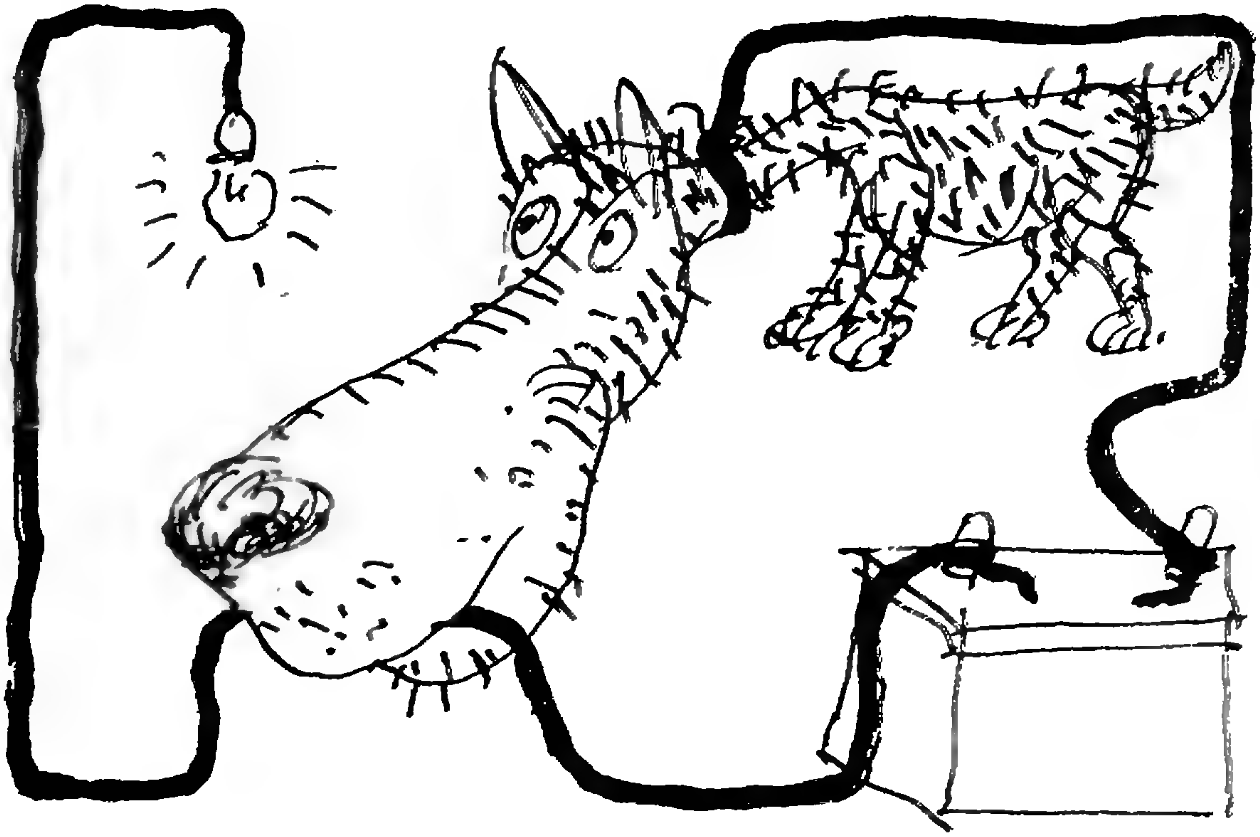
8. «Острова тепла». Почему температура воздуха в городе на 3—5 °C выше, чем в окрестности? Очевидно, что в городе большое количество тепла выделяется промышленными объектами. Но помимо этого как влияют на температуру многоэтажные здания, значительные пространства, покрытые камнем и бетоном, быстрый сток дождевой воды, уборка снега, наличие пыли в воздухе, туманы, «смоги»?

Метеорологи, составляя температурную карту города — большого или маленького,— всегда обнаруживают там «остров тепла», расположенный вблизи городского центра. По мере удаления от центра температура воздуха понижается. По этой причине, кстати, в центре города цветы весной начинают распускаться раньше, чем на окраинах и в пригородах.

9. Жаровни во фруктовом саду. Зачем садовод, опасаясь утренних заморозков, на ночь ставит в своем саду дымящиеся жаровни? Поскольку жаровни расставлены довольно далеко друг от друга, то они, конечно, не могут согреть деревья. В чем же тогда их смысл? Пользуются ли ими в дневное время?

10. Мыльные пузыри «наоборот». Мыльные пузыри «наоборот», у которых вода и воздух меняются местами, можно без труда получить, осторожно вливая с высоты нескольких миллиметров мыльную воду в тарелку с чистой водой. Если лить медленно, по поверхности воды покатятся капли. Если вы станете лить чуть быстрее, какая-нибудь капля может пробить поверхность и остаться под ней, окруженная тонкой воздушной оболочкой. Это и есть мыльный пузырь «наоборот».

Будут ли эти пузыри играть разными цветами, как обычные? Равномерна ли толщина их оболочек? Тонут ли они в тарелке или всплывают? Не будет ли внутренняя капля испаряться в воздушную оболочку, способствуя тем самым гибели пузыря?



Практикум абитуриента

Постоянный электрический ток

Кандидат физико-математических наук
В. МОЖАЕВ

Электрический ток представляет собой упорядоченное перемещение носителей заряда. Существует много способов привести их в движение. Это можно сделать механическим способом: например, заставив двигаться заряженную ленту (генератор Ван-де-Граафа) или воспользовавшись свободным падением заряженных капель воды в атмосфере (часть системы электрических токов Земли). На электростанциях свободные носители заряда в обмотках генератора приводятся в движение силой Лоренца. Но главным действующим лицом, создающим электрический ток, является, конечно, электрическое поле. Именно под его действием свободные носители заряда (как правило, это электроны) в наших бытовых электроприборах совершают упорядоченное движение, т. е. в их обмотках течет электрический ток. В этой статье мы рассмотрим лишь частный случай, когда ток — постоянный.

Для простых неразветвленных цепей токи и напряжения можно рассчитать с помощью закона Ома. В случае разветвленных электрических цепей соотношения для токов и напряжений устанавливаются с помощью так называемых правил Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа вытекает из закона сохранения заряда и состоит в том, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в точке разветвления проводников (узле), равна нулю. Принято втекающие в узел токи считать положительными, а вытекающие из него — отрицательными, но можно и наоборот.

Второе правило Кирхгофа является следствием закона Ома для простейшей замкнутой цепи. Оно гласит: в любом замкнутом контуре, выделенном в сложной цепи, алгебраическая сумма ЭДС, действующих в этом контуре, равна алгебраической сумме падений напряжений на отдельных участках контура. При этом в качестве положительной можно выбрать любую ЭДС контура, а все остальные уже будут иметь вполне определенный знак — в зависимости от их полярности по отношению к выбранной. Если какой-то источник включен последовательно с выбранным нами опорным источником, ЭДС которого мы считаем положительной, то его ЭДС будет тоже положительной, а если навстречу, то ЭДС будет отрицательной. Теперь относительно алгебраической суммы падений напряжений. Сначала нужно разобраться с направлениями токов в цепях, поскольку знаки падений напряжений будут определяться этими направлениями. Так вот, положительным будет тот ток, который течет по направлению, совпадающему с направлением тока, который тек бы по данному участку под действием только одной выбранной нами опорной ЭДС (при отсутствии других источников ЭДС). Противоположное направление тока будет соответствовать его отрицательному значению.

Поясним эти правила на конкретном примере.

Задача 1. *Источниками электрического тока в системах электрического оборудования автомобилей являются генератор Г постоянного тока и соединенный с ним параллельно аккумулятор А (рис. 1). ЭДС аккумулятора $\mathcal{E}_1 = 12$ В, его внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}15$ Ом. ЭДС генератора $\mathcal{E}_2 = 14$ В, его внутреннее сопротивление $r_2 = 0{,}05$ Ом. Найдите зависимость силы тока I_A, протекающего через аккумулятор, от силы тока $I_н$, потребляемого нагрузкой (резистор сопротивлением R). Нарисуйте график зависимости $I_A(I_н)$.*

Направление тока $I_{\text{н}}$ в нашем случае однозначно: он всегда будет направлен так, как это изображено на рисунке 2. Направления же токов $I_{\text{Г}}$ (через генератор) и $I_{\text{А}}$ (через аккумулятор) могут быть выбраны произвольно — наш выбор показан на рисунке 2.

Для узла *a* по первому правилу Кирхгофа можно записать

$$I_{\text{Г}} + I_{\text{А}} - I_{\text{н}} = 0.$$

В этом уравнении содержатся три неизвестных, но нас интересует связь между $I_{\text{А}}$ и $I_{\text{н}}$, поэтому фактически задача сводится к нахождению двух неизвестных.

Второе уравнение получим, используя второе правило Кирхгофа. Для этого выберем замкнутый контур *abcdefa*. (В нашем случае выбор однозначен, поскольку мы не можем использовать два других контура — нам не известно сопротивление *R*.) Если в качестве опорного источника выбрать генератор, то алгебраическая сумма ЭДС в контуре будет равна $\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1$, алгебраическая сумма падений напряжений будет равна $I_{\text{Г}} r_2 - I_{\text{А}} r_1$, а второе правило Кирхгофа будет иметь вид

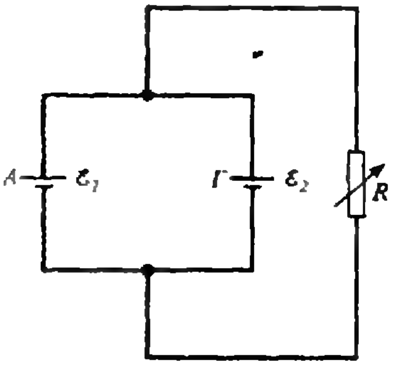


Рис. 1.

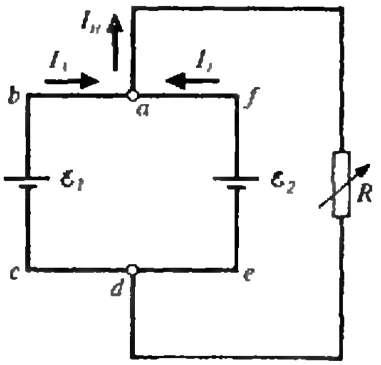


Рис. 2.

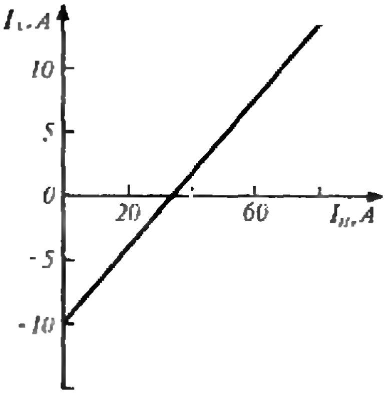


Рис. 3.

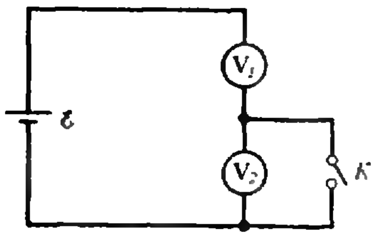


Рис. 4.

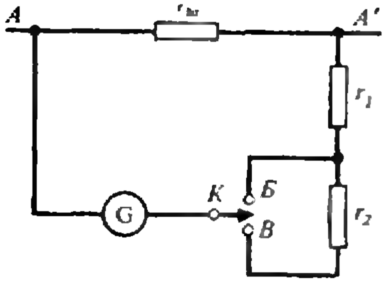


Рис. 5.

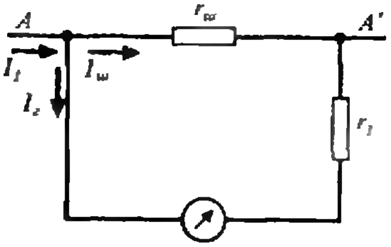


Рис. 6.

$$\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1=I_г r_2-I_А r_1.$$

Исключая из полученных двух уравнений $I_г$, найдем связь между $I_А$ и $I_н$:

$$I_А=I_н\frac{r_2}{r_1+r_2}-\frac{\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1}{r_1+r_2}.$$

Эта линейная зависимость $I_А(I_н)$ для заданных числовых параметров изображена на рисунке 3. Как видно, при токах нагрузки $I_н<40$ А будет происходить подзарядка аккумулятора ($I_А<0$), а при токах $I_н>40$ А аккумулятор будет разряжаться.

Задача 2. *При замкнутом ключе К вольтметр V_1 показывает $0{,}8\mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ — ЭДС батареи (рис. 4). Что покажут вольтметры V_1 и V_2 при разомкнутом ключе, если их сопротивления равны?*

В условии задачи ничего не сказано о внутреннем сопротивлении батареи, но показание вольтметра V_1 при замкнутом ключе K не равно значению ЭДС источника, следовательно, как и всякая реальная батарея, данная батарея обладает некоторым внутренним сопротивлением. Обозначим его через r.

В первом случае, когда ключ K замкнут, вольтметр V_2 можно убрать из схемы: ток через него не течет и разность потенциалов на нем равна нулю. Тогда силу тока I_1 в цепи можно найти по закону Ома для простейшей замкнутой цепи:

$$I_1=\mathscr{E}/(R+r),$$

где R — сопротивление вольтметра. С другой стороны, по закону Ома для участка цепи (вольтметр V_1)

$$I_1=0{,}8\mathscr{E}/R.$$

Из этих выражений найдем

$$r/R=0{,}25.$$

При разомкнутом ключе показания вольтметров будут одинаковыми, поскольку они соединены последовательно, а их сопротивления равны. Пусть показание каждого вольтметра U. Запишем уравнения для тока I_2 в новой цепи: с одной стороны,

$$I_2=\mathscr{E}/(2R+r),$$

с другой стороны,

$$I_2=U/R.$$

Из этих выражений, используя полученное ранее отношение r/R, найдем

$$U=\mathscr{E}/(2+r/R)=4/9\mathscr{E}.$$

Задача 3. *Для измерения больших токов в цепи AA' в качестве шунта используется резистор сопротивлением $r_ш$, параллельно которому через резисторы сопротивлениями $r_1=2$ Ом и $r_2=91$ Ом подключается гальванометр G с внутренним сопротивлением $r_г=8$ Ом. (рис. 5). В положении Б переключателя К вся шкала прибора соответствует силе тока в цепи AA' $I_1=10$ А, а в положении В — силе тока $I_2=100$ А. Найдите сопротивление шунта.*

Рассмотрим случай, когда переключатель K находится в положении $Б$ (рис. 6). Пусть в цепи AA' течет ток $I_1=10$ А, при этом стрелка гальванометра отклонилась на всю шкалу. Обозначим силу тока, протекающего через шунт, $I_ш$, а через гальванометр —

$I_г$. Согласно первому правилу Кирхгофа,

$$I_1 = I_ш + I_г.$$

Второе правило Кирхгофа для замкнутой цепи имеет вид

$$I_ш r_ш - I_г(r_г + r_1) = 0.$$

Исключая из этих уравнений силу тока $I_ш$, получим

$$I_1 r_ш = I_г(r_1 + r_г + r_ш).$$

Рассмотрим теперь второй случай, когда переключатель *К* находится в положении *В*, а в цепи *АА′* течет ток $I_2 = 100$ А. Поскольку и в этом случае стрелка гальванометра находится на конце шкалы, сила тока через гальванометр сохранит свое значение. По аналогии с первым случаем, можно сразу записать

$$I_2 r_ш = I_г(r_1 + r_2 + r_г + r_ш).$$

Совместное решение этого уравнения с аналогичным уравнением для первого случая позволяет найти $r_ш$:

$$r_ш = \frac{I_1}{I - I_1} r_2 - r_1 - r_г \doteq 1/9 \text{ Ом}.$$

З а д а ч а 4. *Будет ли течь ток через идеальный диод D в цепи, изображенной на рисунке 7? Если да, то чему он будет равен?*

Предположим, что ток через диод не течет (диод заперт). Это может быть только в том случае, когда потенциал точки *b* больше потенциала точки *a* или равен ему:

$$\varphi(b) - \varphi(a) \geqslant 0.$$

Но при отсутствии тока через диод потенциалы этих точек относительно земли будут равны соответственно:

$$\varphi(a) = \frac{U_0 R_3}{R_1 + R_3} = +75 \text{ В},$$

где $U_0 = 100$ В, $R_1 = 1$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, и

$$\varphi(b) = \frac{U_0 R_4}{R_2 + R_4} = +66\frac{2}{3} \text{ В},$$

где $R_2 = 2$ кОм, $R_4 = 4$ кОм.

Как видно, $\varphi(a) > \varphi(b)$. Это означает, что диод должен быть открыт и через него должен идти ток. Именно для этого случая на рисунке 7 стрелками изображены токи I_1, I_2, I_3, I_4, $I_д$, текущие в цепи. Мы имеем пять неизвестных, и наша задача — составить пять уравнений.

Поскольку сопротивление открытого диода равно нулю, потенциалы точек *a* и *b* равны: $\varphi(a) = \varphi(b)$. Из этого следует

$$I_1 R_1 = I_2 R_2, \quad I_3 R_3 = I_4 R_4.$$

Из условия сохранения заряда получаем

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4, \quad I_1 = I_3 + I_д.$$

Разность потенциалов U_0 равна сумме падений напряжений на R_1 и R_3:

$$U_0 = I_1 R_1 + I_3 R_3.$$

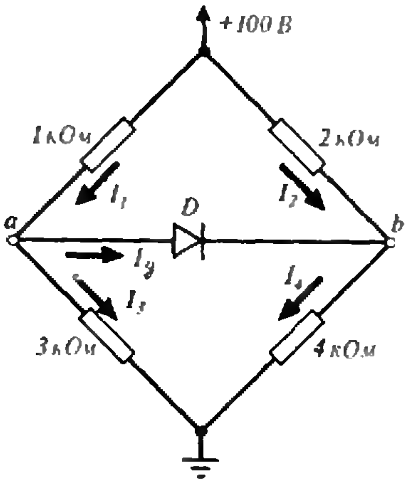


Рис. 7.

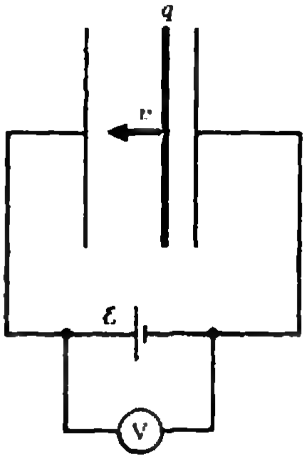


Рис. 8.

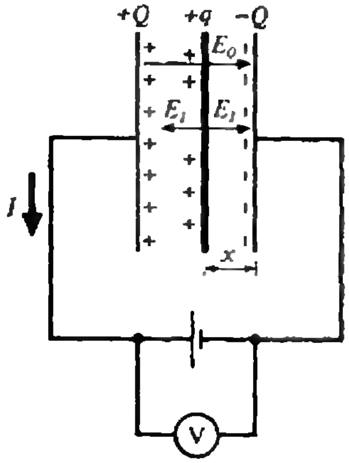


Рис. 9.

Совместное решение системы пяти уравнений позволяет найти искомый ток:

$$I_{\text{д}}=4\ \text{мА}.$$

Задача 5. *В плоский конденсатор, подключенный к источнику с постоянной ЭДС* $\mathcal{E}$ *и внутренним сопротивлением r, помещена плоская пластина, имеющая заряд q (рис. 8). Что будет показывать идеальный вольтметр, подключенный к клеммам источника, если двигать пластину с постоянной скоростью v? Расстояние между обкладками конденсатора d.*

Мы будем рассматривать установившийся режим, когда заряженная пластина двигается с постоянной скоростью, а в цепи течет постоянный ток.

Пусть в некоторый произвольный момент времени заряженная пластина находится на расстоянии x от правой пластины конденсатора и на $d-x$ от левой и пусть в этот момент времени заряд на пластинах конденсатора равен Q, а сила тока в цепи равна I (рис. 9). Разность потенциалов между пластинами конденсатора, с одной стороны, равна $E_0d+E_1(2x-d)$, где $E_0=Q/(\varepsilon_0S)$ — напряженность электрического поля, создаваемого зарядами пластин конденсатора (S — площадь пластин), а $E_1=q/(2\varepsilon_0S)$ — напряженность поля, создаваемого зарядом движущейся пластины. С другой стороны, эта разность потенциалов, с учетом выбранного направления тока, равна $\mathcal{E}+Ir$. Приравнивая два выражения для разности потенциалов, получим уравнение

$$\frac{Q}{\varepsilon_0S}d+\frac{q}{2\varepsilon_0S}(2x-d)=\mathcal{E}+Ir.$$

Продифференцировав обе части этого уравнения по времени и учтя, что $Q'=-I$, $x'=v$, а $I'=0$ (в нашем случае $I=\text{const}$), мы получим значение силы тока:

$$I=qv/d.$$

При этом вольтметр будет показывать напряжение

$$U=\mathcal{E}+\frac{qv}{d}r.$$

Все, что мы рассматривали до сих пор, касалось как бы технической стороны законов постоянного тока. Но и в законе Ома для участка цепи, и в правилах Кирхгофа скрыта также физическая сторона механизма проводимости. Обсудим и ее тоже.

Задача 6. *Найдите связь между плотностью тока j и напряженностью электрического поля E внутри однородного проводника, удельное сопротивление которого* ρ.

Пусть по однородному проводнику с поперечным сечением S и удельным сопротивлением ρ течет ток I, а напряженность электрического поля внутри проводника равна E (рис. 10). Выделим внутри проводника небольшой элемент с площадью поперечного сечения ΔS и длиной Δl. Его сопротивление равно $\Delta R=\rho\Delta l/\Delta S$. Закон Ома для этого элемента будет иметь вид

$$I\frac{\Delta S}{S}=\frac{\Delta U}{\Delta R}=\frac{E\Delta l}{\rho\Delta l/\Delta S}=\frac{1}{\rho}E\Delta S.$$

В случае равномерного распределения тока по сечению плотность тока

$$j=\frac{I}{S}=\frac{1}{\rho}E.$$

Мы получили связь между абсолютными величинами j и E. Но, как оказывается, такая же связь существует и между векторами $\vec{j}$ и $\vec{E}$:

$$\vec{j}=\frac{1}{\rho}\vec{E}.$$

Это фундаментальное соотношение, связывающее в любой точке однородного вещества плотность тока с напряженностью электрического поля, называется дифференциальным законом Ома.

Задача 7. *Через два последовательно соединенных проводника с одной и той же площадью поперечного сечения S, но разными удельными сопротивлениями* ρ_1 *и* ρ_2 ($\rho_2>\rho_1$) *течет постоянный ток I (рис. 11). Определите поверхностную плотность зарядов, возникающих на границе раздела проводников.*

Из равенства поперечных сечений проводников следует, что плотности токов в обоих проводниках будут оди-

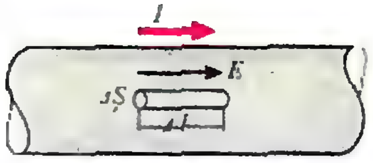


Рис. 10.

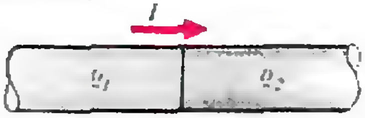


Рис. 11.

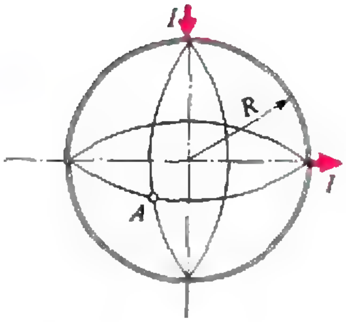


Рис. 12.

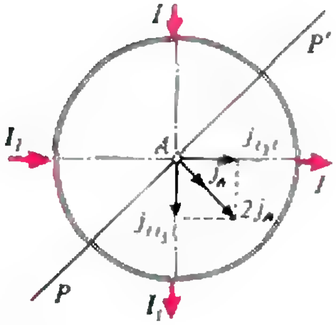


Рис. 13.

наковы:

$$j_1=j_2=I/S.$$

Согласно дифференциальному закону Ома, напряженности электрического поля внутри проводников будут равны соответственно

$$E_1=\varrho_1 I/S \text{ и } E_2=\varrho_2 I/S.$$

Мы видим, что при переходе через границу раздела проводников напряженность электрического поля испытывает скачок

$$\Delta E=E_2-E_1=(\varrho_2-\varrho_1)I/S,$$

а это означает, что на границе раздела находится нескомпенсированный заряд.

Пусть поверхностная плотность нескомпенсированного заряда равна σ. Этот заряд будет создавать по обе стороны границы раздела дополнительную напряженность электрического поля, равную $\sigma/(2\varepsilon_0)$. Если обозначить через E_0 напряженность электрического поля, создаваемого только источником тока, то суммарная напряженность поля в первом проводнике равна

$$E_1=E_0-\sigma/(2\varepsilon_0),$$

а во втором проводнике —

$$E_2=E_0+\sigma/(2\varepsilon_0).$$

Следовательно, скачок напряженности поля равен

$$\Delta E=E_2-E_1=\sigma/\varepsilon_0.$$

Приравнивая два выражения для ΔE, получим

$$\sigma=\varepsilon_0(\varrho_2-\varrho_1)I/S.$$

Знак заряда на границе раздела проводников определяется разностью $\varrho_2-\varrho_1$. В нашем случае эта величина положительная, поэтому и заряд будет положительным.

Задача 8*. *Через мыльный пузырь радиусом R и толщиной пленки δ пропускается ток силой I, как это изображено на рисунке 12. Определите величину и направление вектора напряженности электрического поля внутри пленки в точке A. Удельное сопротивление материала пленки ϱ.*

Понятно, что плоскостью симметрии для распределения плотности тока по пленке пузыря будет плоскость PP', расположенная под углом 45° к осям симметрии шара, вдоль которых течет ток I (рис. 13). Эта плоскость будет являться одновременно и эквипотенциальной поверхностью, поэтому векторы напряженности электрического поля и плотности тока в точках пересечения плоскости PP' с шаром будут перпендикулярны этой плоскости.

Пропустим через пленку пузыря, симметрично току I, еще один ток — I_1, как это показано на рисунке 13. Плоскость PP' будет являться эквипотенциальной поверхностью и для тока I_1, а напряженность электрического поля и плотность тока в точке A будут такими же, как и при токе I. Если мы обозначим плотность тока в точке A при токе I через $\vec{j}_A$, то при одновременном протекании токов I и I_1 она будет равна $2\vec{j}_A$.

Теперь посмотрим на нашу суперпозицию токов с другой стороны. Можно считать, что по пленке пузыря текут два тока по взаимно перпендикулярным направлениям — вдоль горизонтальной и вертикальной осей. Плотности токов в точке A, создаваемые такими токами, будут одинаковы и равны $j_{II}=j_{I,I}=I/(2\pi R\delta)$. Тогда

$$2j_A=\sqrt{j_{II}^2+j_{I,I}^2}=I/(\sqrt{2}\pi R\delta),$$

а

$$E_A=\varrho j_A=I\varrho/(2\sqrt{2}\pi R\delta).$$

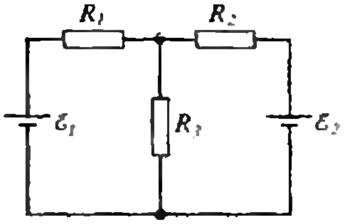


Рис. 14

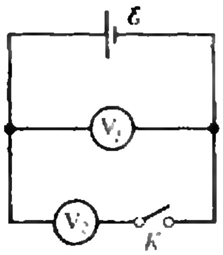


Рис. 15.

Упражнения

1. Электрическая цепь, состоящая из резисторов, сопротивления которых R_1, R_2 и R_3, подключена к двум источникам с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ (рис 14). При каких условиях ток через резистор сопротивлением R_3 будет равен нулю? Внутренними сопротивлениями источников можно пренебречь.

2. При разомкнутом ключе K вольтметр V_2 показывает $0{,}9\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — ЭДС батареи (рис. 15). Что покажут вольтметры при замкнутом ключе, если сопротивление вольтметра V_2 вдвое меньше сопротивления вольтметра V_1?

3. При подключении к неизвестному источнику вольтметра, рассчитанного на измерение напряжений до 10 В, вольтметр зашкаливает. Если одновременно подключить два таких вольтметра — параллельно или последовательно, — то они в обоих случаях покажут одинаковые значения $U=8$ В. Определите ЭДС неизвестного источника.

4. Присоединение к вольтметру некоторого добавочного сопротивления увеличивает предел измерений напряжения в n раз. Другое добавочное сопротивление увеличивает предел измерений в m раз. Во сколько раз увеличится предельно измеряемое вольтметром напряжение, если последовательно с вольтметром включить эти два сопротивления, соединенные между собой параллельно?

5. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено жидкостью с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ϱ. Найдите силу электростатического взаимодействия между пластинами конденсатора, когда через конденсатор течет ток I. Площадь пластин конденсатора S.

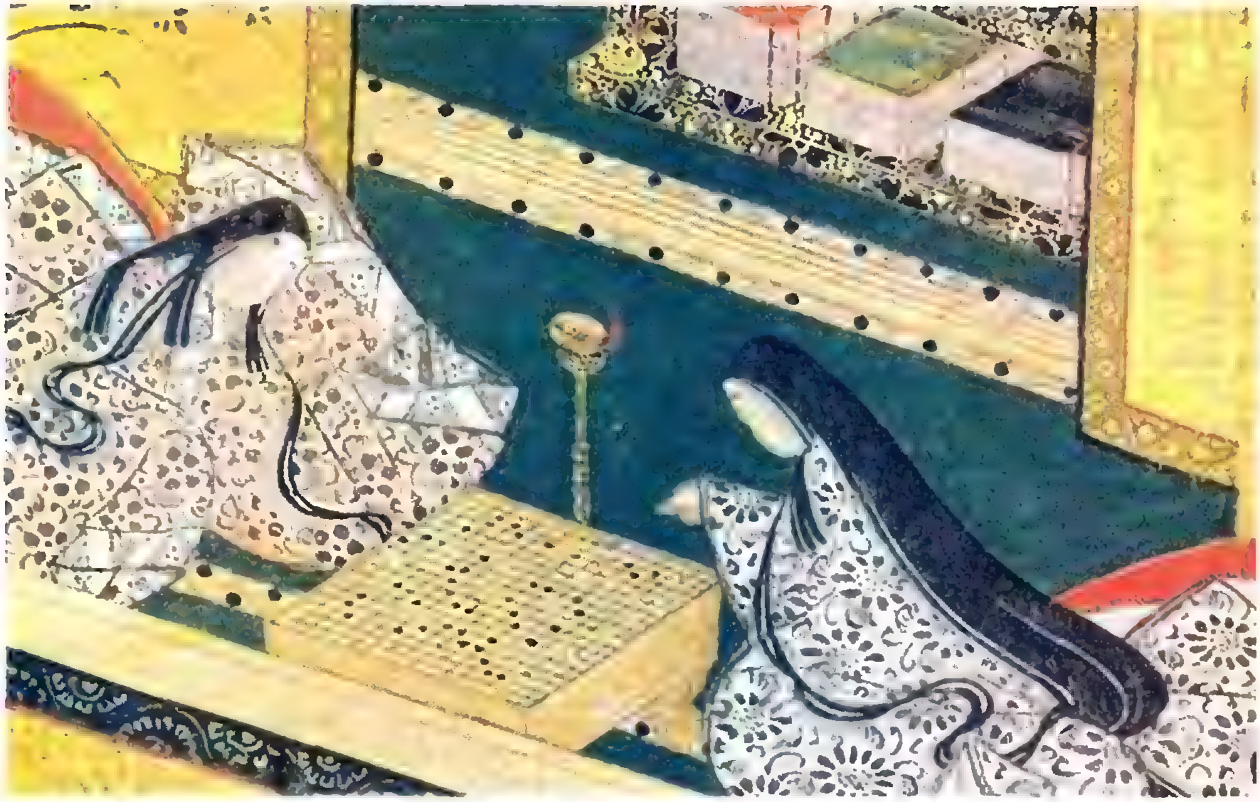
ШКОЛА МОЛОДОГО ПРЕДПРИНИМАТЕЛЯ
при экономическом факультете МГУ
и Международном центре развития малых предприятий
приглашает школьников 9—11 классов 19 сентября 1992 года
на вступительный экзамен.

В школе изучаются: менеджмент, маркетинг, биржевое и банковское дело,
микро- и макроэкономика, практика акционирования и приватизации,
математические методы в экономике и бизнесе.
А также проводится системная специализированная подготовка к экзаменам
на экономический факультет МГУ по математике, истории и литературе.
Занятия проводятся 2 раза в неделю
профессорско-преподавательским составом МГУ, студентами старших курсов
и специалистами-практиками. Слушатели обеспечиваются необходимыми
методическими материалами. По окончании курса обучения выдается
свидетельство установленного образца.
Обучение платное.
В рамках ШМП функционирует ШКОЛА БИЗНЕСА.

Адрес: Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й гуманитарный корпус, ауд. 428а.
Тел. 939-09-50 (ШМП), 939-33-76 (канцелярия экономического факультета).

Сбор состоится в южном вестибюле 2-го гуманитарного корпуса 19 сентября в 16 часов.

Для школьников, проживающих вне г. Москвы, ШМП совместно с ВЗМШ Российской академии
образования при МГУ в новом учебном году открывает заочное отделение.
О своем желании учиться на заочном отделении ВЗМШ и ШМП
по одному из предложенных направлений:
— Экономическая теория и международная экономика,
— Экономика бизнеса и предпринимательства,
— Математические методы в экономике и бизнесе
Вы можете сообщить по адресу: 119823, ГСП, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ.



Игры и головоломки

Игра го

Разрезание и соединение камней

Важное значение в партии имеет взаимосвязь камней. Совместные действия групп представляют значительную силу, разрозненные слабые группы подвергаются атаке и, в лучшем случае, обеспечивают себе жизнь.

На рисунке 1 приведена позиция, в которой два белых камня не являются соединенными между собой в одну группу. Ходом 1 черные разделяют их на две части. В результате белые попадают в затруднительное положение, и велика вероятность, что какой-нибудь из камней погибнет. Если же белые успеют соединиться в точке 1, то их камни будут представлять значительную силу, и их будет не так-то легко захватить в плен.

Прямые соединения выполняют важную роль, особенно при непосредственном столкновении с камнями противника. Когда же прямого столкновения нет, намного выгоднее соединить свои камни не вплотную, а более широко, но таким образом, чтобы при их атаке они всегда могли соединиться.

Рассмотрим две позиции (рис. 2, *а*, *б*). На рисунке 2, *а* показан пример, в котором играющий, памятуя о том, что соединять камни хорошо, расставил их в цепочку (ходы 1—9). Это неэффективный путь игры. Более удачно расставил свои камни на рисунке 2, *б* другой игрок (ходы 1—5). В обоих случаях очерчены одинаковые территории, однако на рисунке 2, *а* для этого потрачено пять камней, а на рисунке 2, *б* — только три.

Можно, конечно, сказать, что на рисунке 2, *б* беспокойство вызывают промежутки между камнями «а» и «в». Но здесь нет повода волноваться. Если противник попытается ворваться туда (ход 1 на рисунке 2, *в*), то после хода 2 его постигнет неудача.

Окончание. Начало см. в «Кванте» № 6 и № 7.

Ко-борьба

Ко-борьба — сложный раздел тактики. Применение ее приводит к острым продолжениям, обменам больших групп камней и требует хорошего понимания игры в целом.

Рассмотрим позицию на рисунке 3, *а* и возможное продолжение партии. Белые, избирая спокойный путь игры, делают в центре ход 1. Черные ходом 2 создают ситуацию сэки в правом верхнем углу, тем самым избавляясь от возможных осложнений. Последующая игра приведет к следующему результату: 15 камней у белых против 16 у черных. Такой результат не может устроить белых. Поэтому они завязывают своим первым ходом ко-борьбу в правом верхнем углу. Эта более сложная игра позволяет белым использовать свое преимущество в ко-ударах («а» и «в»), каждый из которых угрожает черным потерей группы. У черных всего лишь одна серьезная ко-угроза в «с».

На рисунке 3, *б* демонстрируется применение белыми ко-борьбы, в которой происходит естественный обмен четырех отмеченных белых камней (11 очков) на группу черных в углу (20 очков). Черные получают на 7 очков больше по сравнению с позицией на рисунке 3, *а*. Теперь подсчет очков в пользу белых: 29 против 28 у черных. Из разобранного примера видно, что применение ко-борьбы необходимо в случаях, когда более простая игра не приводит к успеху.

Тэсудзи

Мы уже упоминали, что ходы, использующие наилучшим образом недостатки в построении противника, называются тэсудзи. Знание различных типов тэсудзи очень важно, так как они используются во всех стадиях игры — будь то фусэки, середина или ёсэ.

Разберем несколько наиболее популярных тэсудзи.

Ситё. Так называется один из способов захвата камней. В го существует даже поговорка: «Не знаешь ситё — не умеешь играть в го».

В позиции на рисунке 4 черные ходом 1 захватывают камень белых в ситё. Если белые попытаются убежать от захвата и сыграют в 2, то черные последуют за белыми камнями и сыграют в 3, снова ставя их в положение атари. Белые играют в 4, черные — в 5 и так далее до хода 17. Здесь белые попадают на край доски, бежать им некуда, и поэтому все их камни оказываются захваченными. Расположение камней во время побега напоминает по конфигурации лестницу, поэтому ситё еще иногда называют лестницей.

Позиция на рисунке 5 очень похожа на предыдущую. Однако если черные и в этом случае попытаются захватить белый камень в ситё, то они потерпят неудачу, так как на пути у них окажется отмеченный камень белых, который называется *ситё-прерыватель*. Прежде чем за-

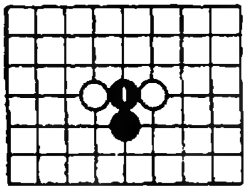


Рис. 1.

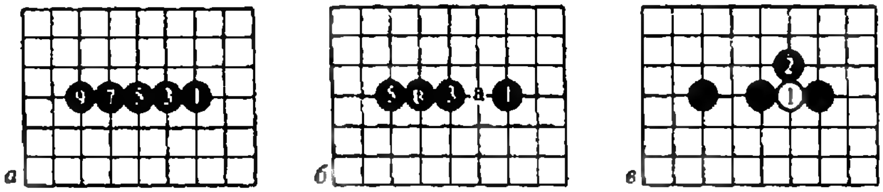


Рис. 2.

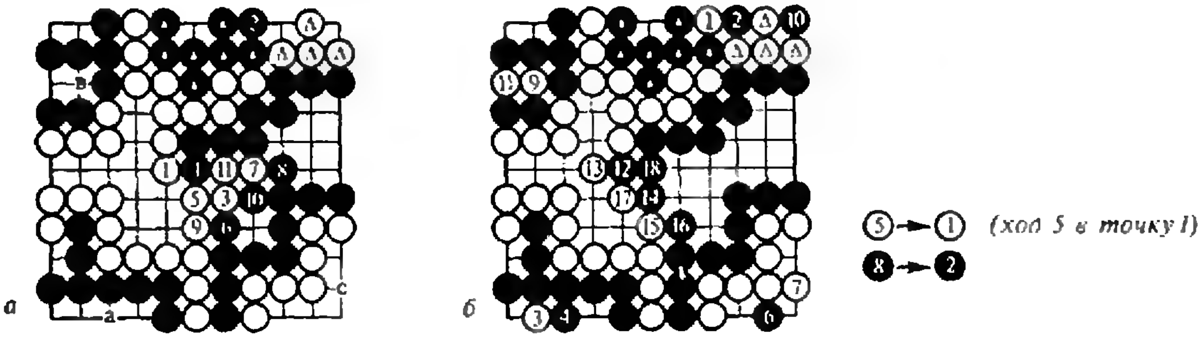


Рис. 3.

хватить в ситё, надо посмотреть, нет ли *на пути ситё-прерывателя.*

В заключение отметим, что ситё не самый лучший способ захвата разрезающих камней. Он применяется лишь в том случае, если нет ничего лучшего. Ведь стоит только появиться ситё-прерывателю, и захваченный камень может вырваться из окружения. Поэтому чаще всего тратят еще один ход для окончательного захвата камня.

Гэта. Так называется другой способ захвата камней — ход 1 на рисунке 6.

Защелка. Одно из наиболее известных тэсудзи, применяемое для захвата камней противника.

На рисунке 7 черные сделали ход 1, пытаясь избежать захвата трех своих камней. На первый взгляд, это им удалось, так как обычные способы съедания камней в точке 3 ни к чему не приведут. Однако у белых имеется тэсудзи. Ходом 2 они жертвуют один камень и затем после ходов 3—6 захватывают камни черных в плен.

Есэ

В заключительной стадии игры вся доска уже разделена на контролируемые игроками территории, но границы их еще до конца не оформлены. Поэтому партнеры стремятся как можно больше увеличить свою территорию и уменьшить территорию противника.

В начале или в середине партии невозможно рассчитать ценность того или иного хода. В конце игры позиция становится более определенной, и такой расчет можно практически сделать для каждого хода, хотя это и бывает довольно трудно.

На рисунке 8 рассмотрен наиболее простой случай расчета ценности хода. Отмеченные черный и белый камни на рисунке 8, а обозначают границы своих территорий, но пограничные камни еще не достигли первой линии доски и территории еще полностью не достроены.

Предположим, что результат партии зависит только от разницы между этими двумя территориями. Тогда все будет зависеть от очередности хода. Если ход черных (рис. 8, *б*), то они завершают свою территорию ходами 1 и 3. Подсчитав очки, можно увидеть, что у черных шесть очков территории, а у белых только пять и черные добиваются победы с перевесом в одно очко. Если же ход белых (рис. 8, *в*), то они ходами 1 и 3 завершают свою территорию. Теперь у них будет шесть очков территории, а у черных пять. Сравнив результаты, мы видим, что разница между ними два очка, т. е. ценность хода на данном участке доски составляет два очка.

Но не всегда так просто подсчитать величину хода. В реальной партии встречаются более сложные ситуации. Рассмотрим одну из них.

На рисунке 9 приведена позиция с неразыгранным местом (в правом верхнем углу), в котором надо рассчитать величину хода. Правильный ход белых — 1. Черные отвечают ходами 2 и 4, после чего белые, сохраняя инициативу, играют в другом месте. Позже черные проведут обмен ходами 6 и 7. Затем белые, в свою очередь, проведут обмен 9 и 10. Подсчитав территорию, мы увидим,

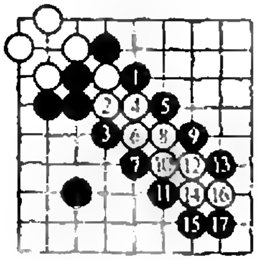


Рис. 4.

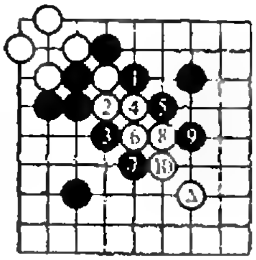


Рис. 5.

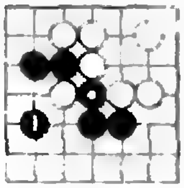


Рис. 6.

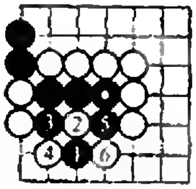


Рис. 7.

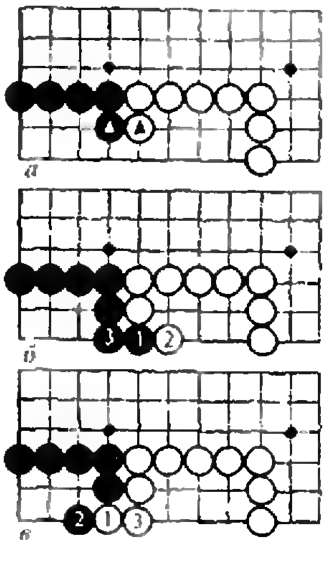


Рис. 8.

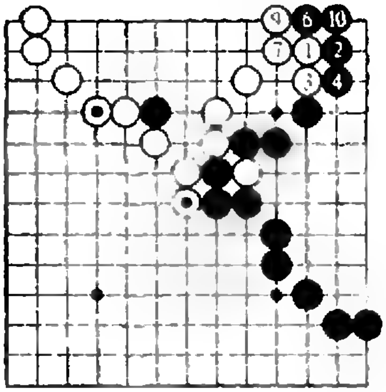


Рис. 9.

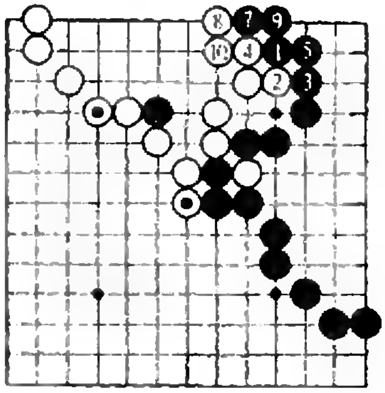


Рис. 10.

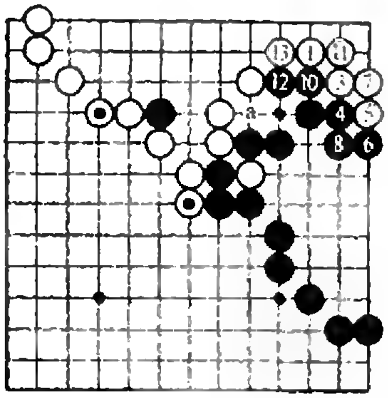


Рис. 11.

что у белых она равняется 23 очкам против 26 у черных.

Разобранный пример показывает, что определить величину хода в ёсэ довольно трудно. Однако еще сложнее оказывается не расчет ходов, а их взаимоотношение — с потерей или без потери темпа они делаются.

Если же здесь первыми сыграют черные (ход 1 на рисунке 10), то после обменов (ход 6 сделан в другом месте) белые имеют территорию 19 очков, черные — 30. Разница с предыдущим розыгрышем составляет 8 очков. Следовательно, ценность хода в этой позиции равна 8 очкам. Но обратим внимание, что белые могут получить эти 8 очков без потери темпа, а черные с потерей.

Возникает вопрос: всегда ли белые ход 1 могут сделать с темпом? Рассмотрим рисунок 11. Если черные не отвечают на ход белых 1 (т. е. играют в другом месте), то те играют в пункт 3 и до хода 8 сохраняют инициативу. В дальнейшем черные без потери темпа делают ходы 10 и 12. После проведения этой операции территория белых составит 28 очков, а черных — 19,5 очка (ход в точку «а» дает одно очко с потерей темпа, и поэтому в расчет берется 0,5 очка).

Сравнивая этот результат с двумя предыдущими, видим, что выгода белых теперь составляет 19,5 очка с потерей темпа. Белые могут его делать, когда наибольший ход на доске с потерей темпа равен 19 очкам или меньше.

Для понимания некоторых тонкостей ёсэ рассмотрим два термина — *сэнтэ* и *готэ*.

Сэнтэ называется такой ход, который делается без потери темпа. Соответственно, готэ — ход с потерей темпа.

Существуют три основных сэнтэ-готэ соотношения:

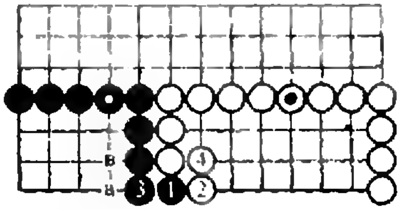


Рис. 12.

— *обоюдное сэнтэ;*
— *обоюдное готэ;*
— *сэнтэ-готэ* (обратное сэнтэ).

Ситуация на рисунке 8 является примером обоюдного готэ. Пример сэнтэ-готэ разобран на рисунках 9, 10. Остается рассмотреть обоюдное сэнтэ (рис. 12). Здесь, кто бы ни играл первым, заканчивает в сэнтэ. Это очень хорошие ходы, и оба партнера стараются как можно раньше сыграть их. Поэтому в ёсэ важно не только подсчитать ценность хода, но и определить, какой он — сэнтэ или готэ.

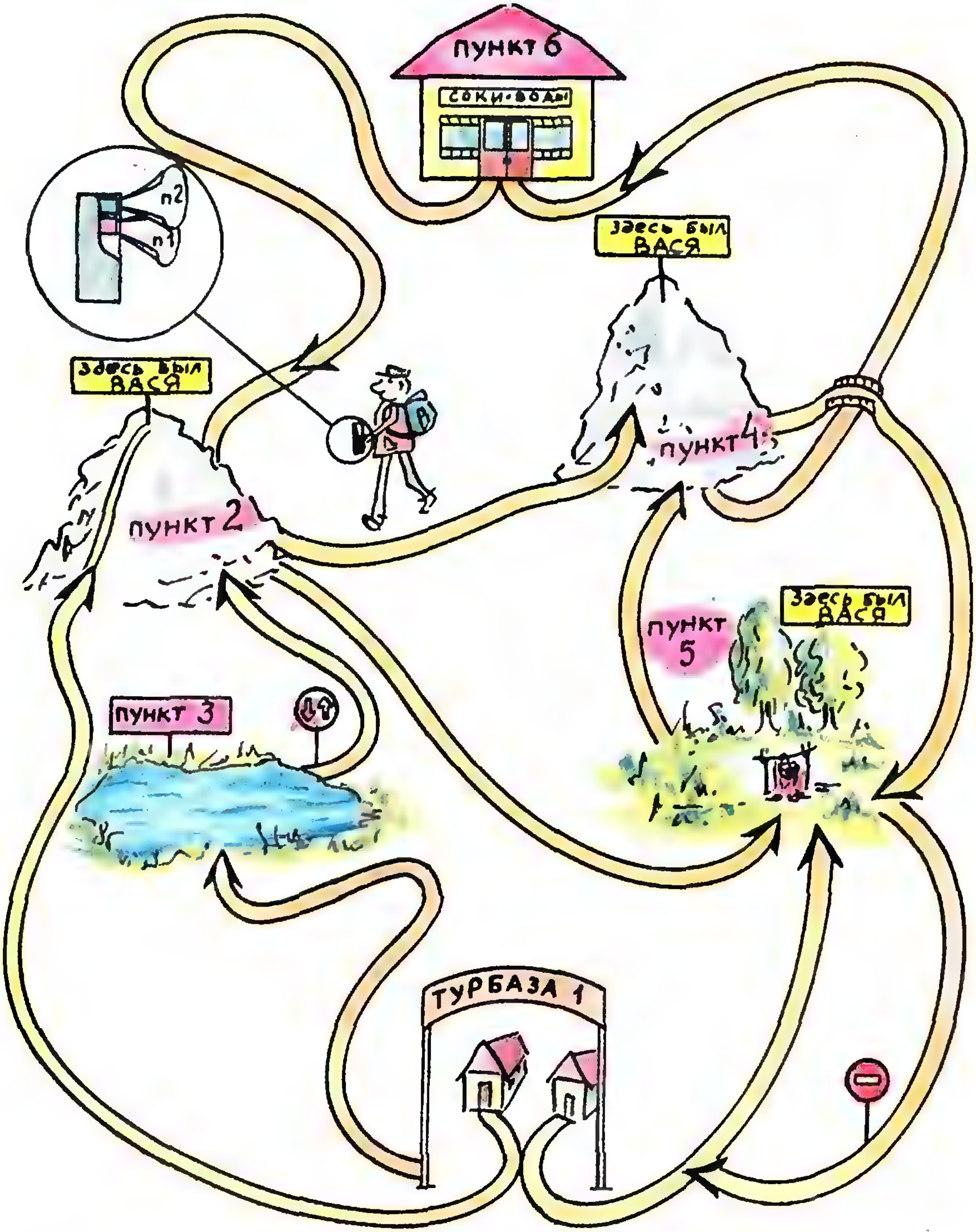
Вы научились играть в го, познакомились с основами стратегии и тактики. Но наступит момент, когда вам захочется принять участие в официальных соревнованиях, померяться силами с мастерами, получить спортивный разряд. Тогда вы можете обратиться в клуб «Восток» по адресу: *105484, Москва, 16-я Парковая ул., д. 27, кв. 165; тел. 463-20-11; 461-21-14.*

Е. Гик, А. Попов

Информатика

ЭВМ перебирает варианты

Л. ШТЕРНБЕРГ


пункт 6
СОКИ-ВОДЫ
n2
n1
Здесь был ВАСЯ
Здесь был ВАСЯ
пункт 2
пункт 4
Здесь был ВАСЯ
пункт 5
пункт 3
ТУРБАЗА 1

«В течение нескольких секунд ЭВМ проанализировала огромное количество возможных вариантов и выдала наилучший»,— такую или подобную фразу нередко можно увидеть в газете, когда рассказывают о широких возможностях ЭВМ. Но для того чтобы перебирать варианты, ЭВМ должна иметь соответствующую программу. Какую же?

Если надо просмотреть таблицу и выбрать наибольший (наименьший, наи...) элемент, то достаточно воспользоваться в программе простым циклом. Если надо перебрать все возможные сочетания пар элементов, один из которых берется из одной таблицы, а другой — из второй таблицы, то придется сделать вложенный цикл:

```
   ...таб A [1:M], ...таб B[1:N]
нц для i от 1 до M цикл
 | нц для j от 1 до N цикл обработка
 | |                       пары (A[i], B[j])
 | кц
кц
```

Ну а если надо просмотреть все сочетания из 10 элементов — что делать: 10 вложенных циклов? А если из 100 элементов? А если число элементов заранее не известно и вообще различно в разных вариантах — что делать тогда?

Пусть, например, надо определить кратчайший маршрут из пункта A в пункт B, до которого можно добраться разными способами. Для этого придется просмотреть все маршруты, одни из которых содержат лишь одну пересадку, а другие 5 или 6 пересадок.

Как организовать циклы перебора возможных вариантов? И сколько их должно быть? Простым вложенным циклом здесь не поможешь, нужна явно какая-то другая идея.

Итак, перед нами элемент высшего программистского пилотажа — *переборная задача.* Но оказывается, что для ее решения *всегда достаточно всего лишь двух циклов и одного магазина.* Магазин нам потребуется не тот, в котором что-то покупают, а тот, который имеется у винтовки или автомата, точнее, его программный аналог. Особенностью магазина является то, что патрон в него *можно положить только с одного конца* (через *окно* магазина), при этом бывшие там патроны проталкиваются вглубь. И достать патрон *можно только через окно,* с того же конца, при этом в окне появляется новый патрон из глубины магазина. Нетрудно видеть, что доставать патроны можно *только в порядке, обратном тому, в котором их клали* — это и есть нужная нам особенность магазина. Программисты еще называют магазин *стеком* (от. англ. *Stack* — пачка: в пачку кладут сверху и берут сверху).

Программный аналог магазина — это массив и переменная-индекс, показывающая, до каких пор этот массив заполнен:

... таб МАГ [1:*K*] цел

Значение im показывает первую свободную ячейку магазина.*) Запись значения E в магазин производится так (рис. 1):

$$\text{МАГ}[im]:=E;\ im:=im+1,$$

а извлечение так (рис. 2, 3):

$$im:=im-1;\ E:=\text{МАГ}[im].$$

Попробуем разобрать простейшую переборную задачу. Предположим, что инструктору по туризму Васе поставлена задача просмотреть все N-дневные (мы возьмем $N=3$) маршруты, начинающиеся на Васиной турбазе, проверить проходимость троп, оборудовать стоянки и т. д., т. е., попросту говоря, пройти по очереди все маршруты. Проходить их можно в любом порядке, и Вася, не мудрствуя лукаво, всегда начинает с самой левой дороги. Первый маршрут очевиден: 1—2—4—6. Но по дороге были развилки. Значит, надо вернуться и пройти по развилкам. Из пункта 2 можно уйти еще в 5, затем в 1, или в 6, или в 4. Прошли маршрут 1—2—5—1, верну-

---

*) Есть вариант магазина, в котором im указывает последнюю занятую ячейку.

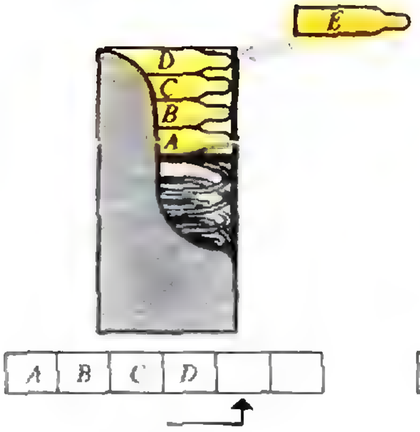


Рис. 1.

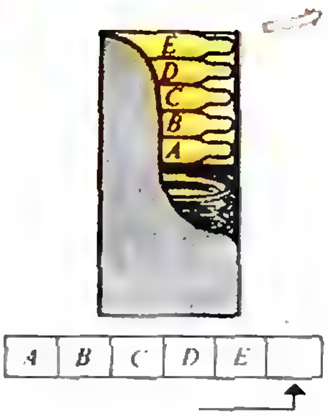


Рис. 2.

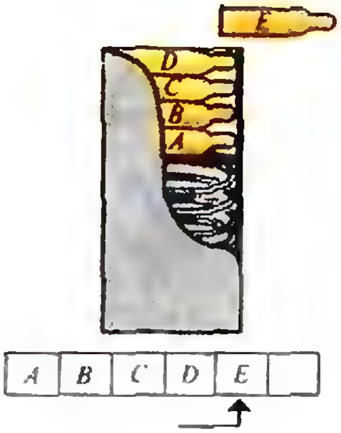


Рис. 3.

лись в 5; а откуда мы приходили в 5: из 1, 2 или 3? И сколько дней в пути: если шли через 1—2—5, то 2 дня, а если через 1—5, то — один? Всё, Вася запутался окончательно. (И мы с ним тоже.) Конечно, маршруты записаны, но в совершенном беспорядке, и найти уже пройденный и определить, какой нужен следующий, довольно сложно.

И тут Вася вспомнил, что в рюкзаке у него есть магазин, и решил, что уходя из пункта, он запишет номер пункта на бумажке, бумажку положит в патрон, патрон — в магазин: тогда в магазине будет накапливаться маршрут, а количество патронов будет определять его длину. Для удобства (чтоб не забыть, где родная турбаза) на дно магазина был положен красный патрон с записью «1». На третий день Вася добрался до пункта 5 и записал в дневник первый маршрут: 1—2—4—5.

Утром вспоминать, откуда он пришел в 5, не потребовалось: в окне магазина был патрон с запиской «пункт 4» — значит, надо возвращаться в пункт 4. Обработав маршрут 1—2—4—6 и опять вернувшись в пункт 4, Вася обнаружил, что больше из пункта 4 идти некуда. Надо возвращаться назад, но куда? И тогда он вынул патрон из магазина, и в окне магазина увидел патрон с запиской: «пункт 2». Вернувшись в пункт 2, он пошел от развилки правее — в пункт 5 и изучил маршруты 1—2—5—1, 1—2—5—6. Пройдя все маршруты вида 1—2—..., он вытащил из магазина и патрон с запиской «пункт 2», вернулся в пункт 1, прошел маршруты по очередной правой дороге: 1—3—2—4, 1—3—2—5, 1—3—5—1 и т. д., по самой правой: 1—5—... и, наконец, исчерпал все варианты выхода из пункта 1. Теперь надо выбросить красный патрон и отходить назад, но больше отходить некуда: магазин пуст, а значит, все маршруты исчерпаны. И перебраны они оказались в лексикографическом порядке (т. е. упорядочены, как в словаре: сначала слова на «А», затем на «Б» и т. д., причем слово «АБ...» стоит раньше, чем «АВ...»).

Запишем алгоритм, которым пользовался Вася.

```
Предстартовая подготовка
Отметить 1-й вариант (левую дорогу) в стартовой точке
нц пока магазин не пуст цикл
   искать очередной вариант пути (дорогу, по которой еще не шли)
   если дороги нет
     то выбросить патрон из магазина;
        вернуться в пункт, записанный в окне магазина
     иначе если маршрут завершен
             то обработать маршрут (записать его)
             иначе положить в магазин патрон, с номером пункта, из которого ушли; пройти до нового пункта; отметить в этой точке 1-ю (левую) дорогу
           все
   все
кц
```

Но это — алгоритм для Васи, а как его записать для ЭВМ? Сеть дорог с точки зрения математики представляет собой *граф*, т. е. множество из M точек, соединенных дугами (или ребрами), который задается с помощью таблицы размером $M \times M$, называемой *матрицей смежности*. Ее элемент c_{ij} равен 1, если из точки i в точку j есть путь (т. е. дуга), и равен 0, если пути нет. Граф может быть *ориентированным* — по ребру можно идти только в одном направлении, и *неориентированным*, если каждое ребро проходимо в обоих направлениях. В этом случае матрица получается симметричной, т. е. $c_{ij}=c_{ji}$ (это все равно, что соединять вершины парой направленных дуг: одна дуга туда, вторая — обратно). Если считать, что по Васиным тропам можно водить туристов только в направлении, показанном стрелкой (по каким-то причинам), то эта сеть задается графом:

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Предстартовая подготовка заключается в том, чтобы положить в магазин красный патрон. Строго говоря, его можно и не класть: стартовую точку несложно запомнить, но с ним удобнее программировать, ибо без него возврат в стартовую точку придется программировать не так, как в другие. Поэтому в магазине предусмотрим еще нулевую ячейку для красного патрона. С выбором дорог будем поступать так: поскольку их надо перебирать в каком-то порядке, а какая из них левее, по матрице не определишь, то просто будем перебирать пункты по возрастанию их номеров и брать тот пункт, в который есть дорога. Т. е. более «левой» считаем дорогу в пункт с меньшим номером. Переменная Нп будет определять номер пункта, куда мы хотим идти. В качестве отметки 1-го варианта мы будем Нп присваивать значение 0, т. е. покажем, что еще не проверяли пути ни в один пункт. Проверка на завершение маршрута проста: если в магазине есть N элементов, то маршрут пройден. В итоге получаем программу:

```
    цел таб МАГ [0: N], цел i, j, Нп; N;
    МАГ [0]:= номер стартовой точки; im:=1
    Нп:=0; |еще ни один путь не пройден|
    Нп:=im+1
нц пока im>0 цикл |магазин не пуст|
|   нц пока Нп≤M и C[МАГ[im−1], Нп]=0
|   |       Нп:=Нп+1
|   кц
|   если Нп>M |больше путей из этой точки нет|
|   | то  im:=im−1;  Нп:=МАГ[im]  |вернулись назад|
|   | иначе если  im=N  |маршрут завершен|
|   |         | то печать (МАГ[0]...МАГ[im−1], Нп)
|   |         | иначе МАГ[im]:=Нп; im:=im+1 |положили в магазин
|   |         |       патрон с номером пункта, из которого уходим|
|   |         |       Нп:=0 |отсюда еще ничего не проходили|
|   |         все
|   все
кц
```

Отметим, что внутренний цикл пока завершает свою работу в двух случаях: а) либо Нп$>M$, т. е. просмотрели все дороги и ничего не нашли, б) либо C[МАГ[$im-1$], Нп]$=1$, т. е. из пункта, который мы записали в магазин как покидаемый, в пункт Нп есть путь. Во втором случае мы идем в пункт Нп и тут же записываем Нп в магазин, так как теперь мы собрались покидать этот пункт. Только последний пункт маршрута нет смысла записывать в магазин, так как его оттуда придется тут же извлечь. Таким образом, при печати пунктов маршрута их надо брать из магазина, а последний пункт — из Нп. При возврате в какой-либо пункт из магазина выбрасывается патрон, но содержимое его попадает в Нп, т. е. в Нп оказывается номер пункта, из которого вернулись, и можно проверять пути в пункты с бóльшими номерами.

Теперь попробуем усложнить задачу. Давайте запретим кольцевые и самопересекающиеся маршруты, т. е. маршрут не должен дважды проходить через один и тот же пункт. Что изменится в алгоритме? Почти ничего. Усложнится только внутренний цикл: если раньше он искал любой пункт, в который есть дорога из текущей точки, то теперь он должен проверить, не было ли ее уже на нашем пути, т. е. просмотреть содержимое магазина.

Задача 1. *Напишите программу, дающую все маршруты длины N, без самопересечений, исходящие из данной точки.*

Изменим задачу: пусть нам нужны все маршруты не заданной длины, а приводящие из пункта A в пункт B. Что меняется в алгоритме? Только проверка на конец маршрута: она выглядит так:

если Нп$=B$ то...

Но не всегда нам нужны все маршруты. Пусть мы хотим найти кратчайший путь из A в B. Что меняется? Опять мало что: только блок обработки. Если раньше мы просто печатали очередной маршрут, то теперь надо первый маршрут запомнить в другой таблице, и если очередной маршрут оказался короче, то запоминать его. (Здесь, правда, потребуются и дополнительные присваивания в предстартовой подготовке.)

Задача 2. *Напишите полностью алгоритм поиска кратчайшего маршрута.*

До сих пор мы работали с графом, который напоминает скорее не дорожную, а телеграфную сеть: переход из пункта в пункт идет всегда за одно и то же время. Для задания дорожной сети придется несколько изменить матрицу C: ее элементы будут принимать любые положительные значения, которые задают длины путей (или время в пути). Теперь длина пути (время в пути) должна подсчитываться не по количеству пройденных пунктов, а путем суммирования *веса* дуги (т. е. числового значения элемента c_{ij}) при проходе в очередной пункт и вычитания при возврате.

Задача 3 (задача про плечо обслуживания локомотивного депо). *Дан взвешенный граф (т. е. граф, на дугах которого заданы числа-веса), описывающий дорожную сеть. Вес — время прохождения дуги. В пункте A находится локомотивное депо. Определите пункты, в которых надо построить депо для смены локомотивов, исходя из того, что локомотив (точнее его бригада) должен быть в пути не более T часов.*

В переборных задачах магазин иногда состоит из нескольких массивов, а иногда нужны и дополнительные массивы для разных целей. Использование дополнительных массивов мы видели в задаче поиска минимального пути. Пример двухмассивного магазина дает такая

Задача 4. *Пусть тот же взвешенный граф задает трубопроводную сеть: числа на дугах определяют толщину (пропускную способность). Толщина маршрута определяется минимальной толщиной входящих в него дуг. Надо найти самый толстый маршрут из A в B.*

Здесь удобно взять магазин из двух массивов: МАГ и ТОЛ (элемент массива ТОЛ показывает текущую толщину маршрута). Запись в магазин выглядит так:

$$\begin{gathered}\text{МАГ}\,[im]:=\text{Нп};\\ \text{ТОЛ}\,[im]:=\min\{\text{ТОЛ}\,[im-1],\\ \text{С}\,[\text{МАГ}\,[im-1],\ \text{Нп}]\};\\ im:=im+1\end{gathered}$$

(если дуга из пункта с номером МАГ$[im-1]$ в Нп тонкая, то она уменьшает толщину всего маршрута), а выбрасывание из магазина не меняется. Окно магазина теперь состоит из двух значений: ТОЛ$[im-1]$ показывает текущую толщину маршрута.

Задача 5. *Напишите поиск самого толстого пути полностью.*

В заключение отметим, что умение программировать переборные задачи позволяет переложить на плечи машин как раз ту работу, где машины незаменимы: когда математические методы бессильны найти оптимум, расчеты просты, но надо проверять варианты, варианты, варианты...

Болгарская олимпиада по математике

Честно говоря, я надеюсь удивить читателей «Кванта» тем, что Болгарская олимпиада по математике является одним из старейших в мире национальных математических соревнований «олимпиадного типа» для школьников. Правда, те немногие соревнования, которые проводились до 1949/50 учебного года — первого года болгарской олимпиады, охватывали преимущественно отдельные школы или города. Конечно, в данном случае важен не рекорд, а давняя традиция, длинный путь развития, накопление опыта. Можно отметить, например, что после первых восьми лет проведения она прервалась на два года и возродилась в 1959/60 учебном году, после Первой Международной математической олимпиады (ММО).

Принципы организации олимпиады за годы ее проведения неоднократно менялись и совершенствовались. Наверное, и сейчас, пока готовится эта заметка, что-нибудь изменится. И все-таки стоит коротко перечислить некоторые детали, чтобы создать у читателя представление о ее незатейливом, но четко работающем механизме.

Болгарская олимпиада по математике проводится в два тура для школьников с четвертого по десятый классы и в четыре тура для школьников одиннадцатого класса. Первый и второй туры можно условно назвать соответственно «школьным» и «городским»; на второй допускаются победители первого тура. В каждом туре участникам предлагается решить три задачи за 2,5 часа для младших классов и за 4 часа для старших.

На «городском» уровне олимпиада заканчивается для всех участников, кроме самых старших — школьников 11 класса. Вместе с самыми старшими в виде «общепринятого исключения» продолжают соревноваться и их более молодые соперники — лучшие математики 10, 9 и иногда даже 8 класса. Разумеется, без скидок, по задачам 11 класса.

Третий тур проводится в два дня в середине апреля в нескольких городах, по задачам, разработанным национальным жюри. Каждый день даются по три задачи. Местные жюри после проверки посылают лучшие работы центральной комиссии, где после второй проверки определяются участники последнего, четвертого тура (обычно около 100 человек).

Четвертый тур проходит в Софии в середине мая, в два дня. Каждый день даются по три задачи, которые нужно решить за 4,5 часа, и на следующий день объявляются победители. 12 лучших из них участвуют в сборах для подготовки и отбора участников команды для ММО. Им же предоставляется возможность поступить в Софийский университет на факультет математики и информатики без вступительного экзамена.

Предлагаем читателям «Кванта» одну из задач (IV тур 1988 года).

Дан треугольник ABD, C — произвольная точка луча AD, E и F — точки касания соответственно сторон DA и BD треугольника ABD с вписанной в него окружностью. Докажите, что при движении точки D по лучу AC прямая EF проходит через некоторую постоянную точку.

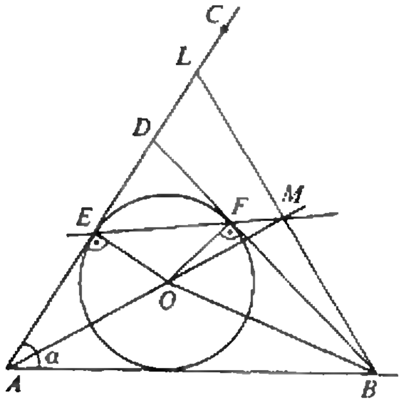
Решение. На луче AC возьмем точку L так, чтобы $AL=AB$, и обозначим через M середину отрезка BL (см. рисунок). Докажем, что для любого положения точки D на луче AC прямая EF проходит через точку M.

Обозначим $\vec{DA}=\vec{a}$, $\vec{DB}=\vec{b}$, $DA=a$, $DB=b$, $AB=AL=d$, $a+b+d=2p$.

Тогда

$$\vec{DL}=\frac{a-d}{a}\vec{a},$$

$$\vec{DF}=\frac{p-d}{b}\vec{b}.$$



$$\vec{DM}=\frac{1}{2}(\vec{DB}+\vec{DL})=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\frac{a-d}{a}\vec{a}\right).$$

Следовательно,

$$\vec{FM}=\vec{DM}-\vec{DF}=\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{a-d}{2a}\vec{a}-\frac{p-d}{b}\vec{b}=$$

$$=\frac{a-d}{2}\left(\frac{\vec{a}}{a}-\frac{\vec{b}}{b}\right).$$

Отсюда вытекает, что прямая FM перпендикулярна биссектрисе угла ADB. Так как прямая EF тоже перпендикулярна этой биссектрисе, то она проходит через точку M, что и требовалось доказать.

В заключение заметим, что за последние 10 лет команда Болгарии на Международной математической олимпиаде неизменно находится среди 5—8 лучших команд мира. Для такой небольшой по размерам страны это неплохо.

Задачи XL Болгарской национальной математической олимпиады школьников 1991 года

1. Точка M лежит на высоте CD остроугольного треугольника ABC, точки K и L — ортогональные проекции точки M на стороны AC и BC. Известно, что центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC лежат на отрезке KL.

а) Докажите, что $CD=R+r$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей;

б) найдите наименьшее значение отношения $CM:CD$.

2. Пусть n — четное натуральное число, отличное от 2, и K — куб с ребром n. Куб K разделен на n^3 единичных кубиков, ребра которых параллельны ребрам большого куба. Всякую группу из n^2 единичных кубиков, основания которых лежат на одной горизонтальной или вертикальной плоскости, назовем слоем в K. Имеется $\frac{n^3}{4}$ цвета, которыми окрашены единичные кубики так, что каждый цвет имеют ровно 4 кубика.

Докажите, что можно выбрать n единичных кубиков различных цветов, никакие два из которых не лежат в одном слое.

3. Пусть $p\geqslant5$ — простое число. Докажите, что

а) p^3 делит $C_{2p}^{p}-2$;

б) p^3 делит $C_{kp}^{p}-k$ для произвольного натурального числа k.

4. Пусть $f(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, имеющий n вещественных корней (не обязательно различных). Докажите, что для любого x выполнено неравенство

$$f(x)f''(x)\leqslant(f'(x))^2,$$

где $f'(x)$ и $f''(x)$ — первая и вторая производные этого многочлена.

5. В единичном круге с центром в точке O взят центральный угол, измеряемый дугой $AB=\alpha<90°$ (A и B — точки на окружности). Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на OB, точка T лежит на дуге AB и l — касательная к окружности в точке T. Прямая l отсекает от угла AHB прямоугольный треугольник Δ.

а) Докажите, что площадь треугольника Δ минимальна в том случае, если T — середина гипотенузы.

б) Докажите, что если S_α — минимальная площадь треугольника Δ, то функция S_α/α ограничена при $\alpha\to0$, $\alpha\neq0$, и найдите эту границу.

6. Шахматная доска размером $n\times n$ ($n\geqslant2$) заполнена белыми и черными шашками по следующему правилу. Сначала поставили черную шашку на произвольное поле. Всяким следующим ходом ставится белая шашка на свободное поле, причем если уже есть соседние с ним поля (т. е. поля, имеющие с ним общую сторону), занятые шашками, то шашки на этих полях заменяются на шашки другого цвета. Это продолжается до тех пор, пока вся доска не будет заполнена. Докажите, что по крайней мере одна шашка в конечной ситуации — черная.

И. Табов

XV Московская экономико-математическая олимпиада

Предлагаем вам задачи XV Московской экономико-математической олимпиады для школьников 9—11 классов, проведенной в марте 1992 года на экономическом факультете МГУ. Ее подготовили и провели сотрудники, аспиранты и студенты кафедры математических методов анализа экономики.

В каждом из двух туров олимпиады участникам предлагались 4—5 задач, большинство из которых требовали не только математических знаний, но и некоторого представления об экономике. При подведении итогов призами были отмечены как абсолютные лидеры, так и «лучший экономист среди математиков» и «лучший математик среди экономистов».

Если вас интересует наука на стыке экономики и математики, вы можете обратиться в вечернюю экономико-математическую школу, существующую при экономическом факультете МГУ с 1968 года.

Традиционно в третье воскресенье сентября в 10 часов в ЭМШ проходит собеседование (по адресу: Москва, Ленинские горы, ул. Лебедева, 2 учебный корпус, ЭМШ).

1. Лимония — весьма патриархальная страна. В ней каждый мужчина либо торгует лимонами, либо выращивает их. В каждой семье по четыре сына. Двое из сыновей торговца и один сын крестьянина становятся торговцами, остальные — крестьянами. В незапамятные времена, при царе Лимоне, все были крестьянами. Каков процент крестьян в современной Лимонии?

2. В продовольственный магазин зашла свинья весом 50 кг. В магазине скопился излишек колбасы, которая на 20 % состоит из свинины и на 80 % из картона, и было решено употребить его на откорм свиньи. Через некоторое время свинья весила уже 250 кг, привес составил 1 : 1. Ее отправили на мясокомбинат и пустили на колбасу, причем выход мяса составил 75 %. Если предположить, что в магазин снова зайдет свинья с тем же первоначальным весом и ее будут откармливать полученной из первой свиньи колбасой до веса 250 кг, то каков будет «коэффициент картонности» этой свиньи?

3. В стране с расстроенным денежным обращением (объем денежной массы в обороте многократно превышает необходимый, вызывая дефицит и высокую инфляцию) решили провести финансовую реформу с целью максимально сократить денежную массу. Население страны разделено на два класса — тощих и толстых, причем толстых в семь раз меньше, чем тощих, но суммы богатств в руках тех и других равны. Богатство толстых состоит на 60 % из акций и на 40 % из денежных средств, 20 % которых — наличность, а остальное — сбережения на счетах в банке. Богатство тонких: акции — 20 %, денежные средства — 80 %, из них наличные составляют 80 %, остальное — на счетах в банке. Существует угроза социалистической революции или военного переворота. Они произойдут, если

1) по итогам реформы разница между величинами среднего богатства каждого класса увеличится более чем в два раза или сократится более чем в три раза;

2) потеря богатства какого-либо класса будет больше 3/4 его первоначальной величины;

3) при проведении реформы дифференциация потерь между классами будет больше, чем в три раза;

4) реформа не произойдет.

Опишите оптимальный, на ваш взгляд, механизм проведения реформы.

4. На какую цифру оканчивается число $1992^{1993^{1994}}$?

5. В санатории каждый отдыхающий играет хотя бы в одну карточную игру: покер, бридж или преферанс. Всего же в санатории отдыхает 42 человека.

Среди тех, кто играет не более чем в две игры, на каждого играющего исключительно в преферанс приходится трое чередующих преферанс с бриджем, а на каждых пятерых игроков в бридж и преферанс приходится два игрока в покер и преферанс. Следует также учесть, что ровно в одну игру играет 12 отдыхающих, а количество людей, играющих только в преферанс, ровно вдвое меньше числа людей, не играющих в него вовсе.

Какой процент отдыхающих играет во все три игры? Если это определить невозможно, объясните, почему.

6. Дано: 101 — 102 = 1. Передвинув одну цифру (0, 1 или 2), превратите это высказывание в верное равенство.

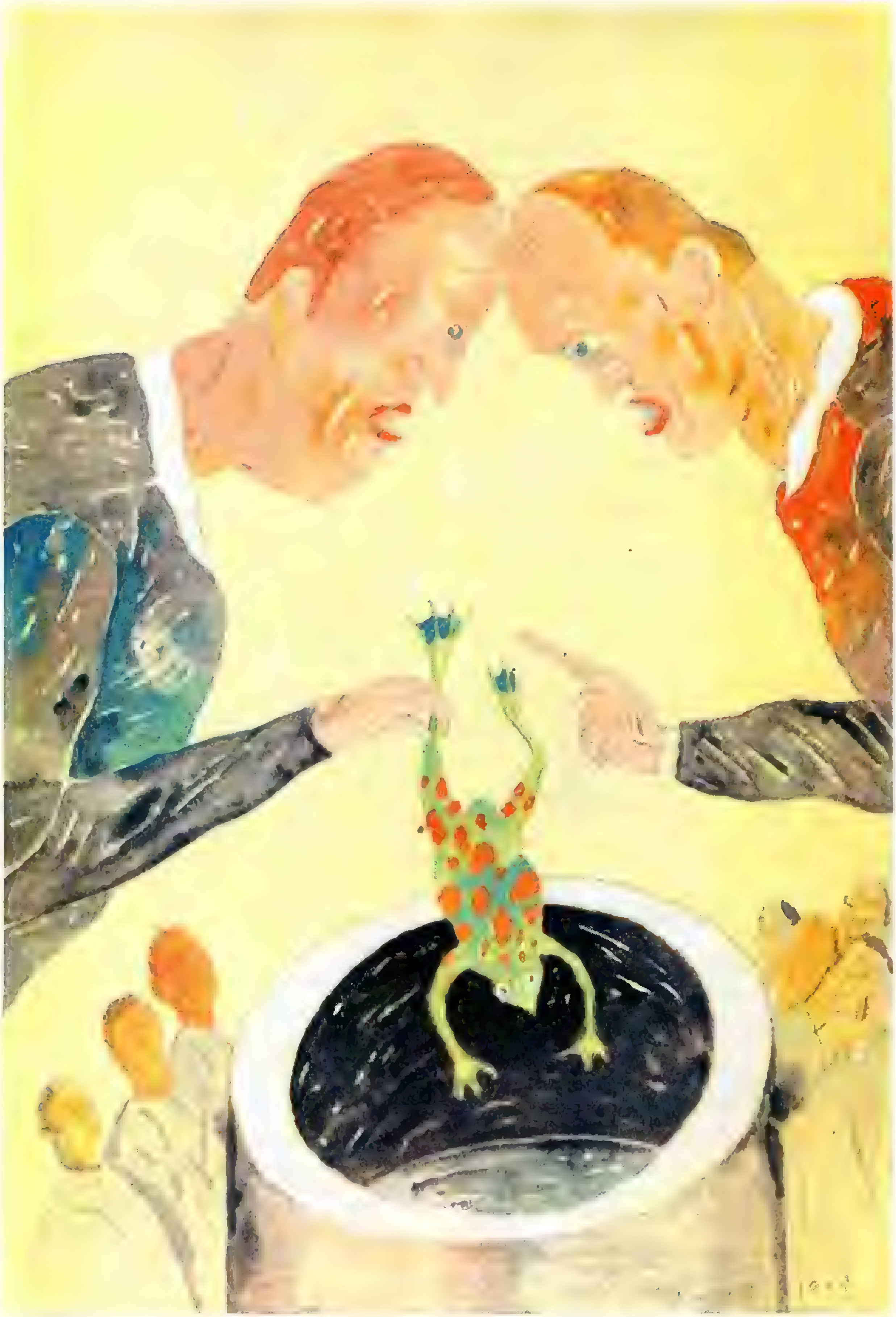
7. Беспризорник умеет из 3-х окурков делать одну папиросу. В одной из урн он отыскал 12 окурков. Сколько папирос ему удалось выкурить?

8. Саша, Петя и Миша играют в такую игру. Саша задумал два натуральных числа и сообщил Пете их произведение, а Мише сумму и спросил: «Петя, ты знаешь, какие числа я задумал?» — «Нет.» — «А ты, Миша?» — «Тоже нет». Затем Саша повторил свой вопрос, и сначала Петя, а потом и Миша отгадали эти числа. Какие числа были задуманы?

9. Король Надувании Туфтий I приказал провести перепись населения и определить, изменились ли к лучшему показатели жизни подданных Надувании за годы его правления. Сравнивая результаты проведенной переписи с результатами предыдущей, надуванское статистическое управление отметило, что в стране выросли как средняя продолжительность жизни мужчин, так и средняя продолжительность жизни женщин. В то же время группа независимых экспертов представила доклад, свидетельствующий о снижении средней продолжительности жизни в целом среди подданных короля.

Какой информации следует верить королю?

10. Колхоз «Тимуровец» выделил Академии наук квадратный участок земли, на котором надо разместить пять квадратных садовых участков равной площади для пяти академиков. Помогите управляющему делами Академии сделать это с наименьшими потерями площади.



О неутомимой лягушке

Библиотечка Фантастики «Кванта»

Ф. ДИК

— Зенон был первым великим ученым,— изрек профессор Харди, окидывая аудиторию суровым взглядом.— Возьмите, например, его парадокс с колодцем и лягушкой. Как показал Зенон, лягушка никогда не достигнет верхнего края колодца, если длина каждого ее нового прыжка составляет половину длины предыдущего: всегда будет оставаться малое, но вполне реальное расстояние до конца пути.

Пока студенты, пришедшие слушать лекцию по физике, осмысливали сказанное профессором, в аудитории царила тишина. Затем из задних рядов медленно поднялась рука, и Харди недоверчиво взглянул на ее обладателя.

— Ну?— сказал он.— Что еще, Питнер?

— На занятиях по логике нас учили, что лягушка достигнет верхнего края колодца. Профессор Гроут сказал...

— Не достигнет!

— А профессор Гроут сказал, что достигнет.

Харди сложил руки на груди.

— На моих занятиях лягушка никогда не достигнет верхнего края колодца. Я сам изучил эту проблему, и я убежден, что до края всегда будет оставаться маленький отрезок пути. Например, если она прыгнет...

Зазвенел звонок.

Студенты дружно поднялись со своих мест и направились к выходу. Так и не договорив, профессор Харди нахмурился и, недовольно потирая рукой подбородок, уставился вслед шумной орде молодых мужчин и женщин с ясными пустыми лицами. Когда последний студент покинул аудиторию, Харди достал трубку и вышел в коридор. Он взглянул сначала в одну сторону, потом в другую: ну так и есть — совсем неподалеку стоял профессор Гроут и пил воду из фонтанчика, утирая подбородок.

— Гроут,— произнес Харди.— Пойдите сюда!

Моргая, профессор Гроут оторвался от фонтанчика.

— Что случилось?

— Идите сюда,— сказал Харди и направился к нему сам.— Как вы смеете трогать Зенона? Он был ученым, и как таковой является принадлежностью моего курса обучения, а никак не вашего. Оставьте Зенона в покое!

— Зенон был философом!— Гроут возмущенно уставился на Харди.— Впрочем, я знаю, что у вас на уме. Это парадокс с лягушкой и колодцем. К вашему сведению, Харди, лягушка с легкостью выберется из колодца. Вы дезинформируете своих студентов. На моей стороне логика!

— Ха, логика!— Харди фыркнул, сверкая глазами.— Старые пыльные максимы! Совершенно очевидно, что лягушка должна остаться в колодце навсегда. Вечная пленница, которой никогда не суждено выбраться!

— Она выберется!

— Не выберется!

— Джентльмены, вы закончили? — раздался рядом спокойный голос, и они резко обернулись: позади с мягкой улыбкой на губах стоял декан факультета.— Если да, то не согласитесь ли вы заглянуть ко мне в кабинет? — Он кивнул в сторону своей двери.— Это ненадолго.

Гроут и Харди переглянулись.

— Видите, что вы наделали? — прошипел Харди, входя в кабинет декана.— Снова из-за вас неприятности.

— Из-за вас. И из-за вашей лягушки!

— Садитесь, джентльмены.— Декан указал на два стула с жесткими спинками.— Садитесь поудобнее. Мне, право, жаль беспокоить вас, когда вы так заняты, но мне

© 1955, Philip K. Dick, из сборника «A Handful of Darkness».

действительно необходимо с вами поговорить.— Некоторое время он смотрел на них задумчиво, потом спросил: — Могу я поинтересоваться, что послужило причиной вашего спора сегодня?

— Зенон,— пробормотал Гроут.

— Зенон?

— Парадокс с лягушкой и колодцем.

— Понятно,— декан кивнул.— Понятно. Лягушка и колодец. Парадокс, которому две тысячи лет. Древняя загадка. И вы, двое взрослых мужчин, стоите в коридоре и спорите, как...

— Проблема заключается в том,— сказал Харди,— что никто никогда не проводил экспериментальной проверки. Парадокс носит совершенно абстрактный характер.

— Тогда вы двое и будете первыми, кто посадит лягушку в колодец и проследит, что из этого получится на самом деле.

— Но лягушка не станет прыгать в соответствии с условиями парадокса.

— Вы должны ее заставить, вот и все. Я даю вам две недели на то, чтобы подготовить эксперимент и определить истинный ответ на эту детскую загадку. Мне надоели бесконечные споры, и я хочу, чтобы вы так или иначе покончили с этой проблемой раз и навсегда.

Харди и Гроут молчали.

— Что ж,— произнес наконец Харди,— давайте займемся делом, Гроут.

— Нам понадобится сачок,— сказал Гроут.

— Сачок и стеклянная банка,— добавил Харди, вздыхая.— И, видимо, чем скорее мы приступим, тем лучше.

Работа над проектом «Лягушачья камера», как его вскоре окрестили, началась с размахом. Университет выделил двум ученым подвальное помещение, и Гроут с Харди сразу же принялись перетаскивать туда оборудование. Очень скоро в университете не осталось никого, кто не знал бы о проекте. Большинство специалистов по точным наукам оказались на стороне Харди: они даже сформировали клуб «Провал» и всячески принижали способности лягушек. На философском и искусствоведческом факультетах кто-то в ответ попытался организовать клуб сторонников успеха, но эта деятельность так ничем и не кончилась.

Гроут и Харди продолжали лихорадочно работать над проектом. По мере того, как двухнедельный срок приближался к концу, они пропускали все больше и больше лекций. А «Камера» тем временем росла и все больше и больше становилась похожей на длинную секцию канализационной трубы, расположившейся вдоль стены подвального помещения. Один конец ее исчезал в нагромождении проводов и аппаратуры; с другого конца крепилась дверь.

Как-то утром Гроут спустился в подвал и обнаружил, что Харди уже там: он стоял, заглядывая в трубу.

— Послушайте, Харди,— сказал Гроут,— мы ведь договорились не трогать установку, если кто-то из нас отсутствует.

— Я просто посмотрел внутрь. Там темно,— Харди ухмыльнулся.— Надеюсь, лягушка сможет разглядеть дорогу.

— В конце концов двигаться там можно только в одну сторону.

— А не запустить ли нам пробную лягушку?— предложил Харди, зажигая трубку.— Страшно хочется узнать, чем все кончится.

— Слишком рано,— сказал Гроут, с беспокойством наблюдая, как Харди ищет банку с лягушкой.— Может быть, стоит немного подождать?

— Испугались правды? Лучше помогите мне найти банку.

Тут у входа в подвал что-то скрипнуло, и они оба посмотрели на дверь. На пороге стоял студент Питнер и с любопытством оглядывал «Лягушачью камеру».

— Что вам надо?— спросил Харди.— Мы очень заняты.

— Вы хотите начать опыт? — Питнер проскользнул в помещение.— А для чего все эти катушки и реле?

— Все очень просто,— ответил Гроут, просияв.— Это я сам предложил. Вот здесь...

— Давайте лучше я объясню,— перебил Гроута Харди.— Вы его только запутаете. Мы в самом деле собирались начать эксперимент с первой пробной лягушкой. Если хотите, молодой человек, можете остаться.— Он открыл банку и достал оттуда мокрую лягушку.— Как видите, у трубы есть вход и выход. Лягушку мы сажаем со стороны входа. Можете заглянуть внутрь, молодой человек.

Питнер сунул голову в трубу и увидел длинный темный тоннель.

— А что там на линии?

— Это линии для замеров. Гроут, включайте.

Аппаратура ожила и мягко загудела. Харди посадил лягушку в трубу и захлопнул дверцу.

— Это чтобы она не выбралась с этой стороны.

— А зачем вам труба такого диаметра? — спросил Питнер. — Туда вполне поместится взрослый человек.

— Смотрите, — сказал Харди, включая газовый рожок. — Этот конец нагревается, и тепло должно гнать лягушку вдоль трубы. Мы будем наблюдать за ней через окошко.

Заглянув в трубу, они увидели, что лягушка преспокойно сидит на месте, поджав лапки и глядя вперед печальными глазами.

— Прыгай, глупая, — сказал Харди и прибавил газа в горелке.

— Не так сильно! — закричал Гроут. — Маньяк. Вы что, хотите ее изжарить?

— Смотрите! — воскликнул Питнер. — Прыгает!

Лягушка действительно прыгнула.

— Благодаря теплопроводности металла дно трубы нагревается все дальше и дальше, — пояснил Харди, — и лягушке приходится прыгать, чтобы не обжечь лапы. Вот смотрите.

— Боже, профессор, — испуганно заговорил Питнер, — она уменьшилась. Лягушка стала в два раза меньше.

— Здесь-то и кроется чудо, — просиял Харди. — Дело в том, что в дальнем конце трубы располагается генератор особого силового поля, а нагрев вынуждает лягушку прыгать к генератору. Силовое поле действует на живые ткани таким образом, что по мере приближения к источнику они сокращаются в размере: чем дальше лягушка прыгает, тем меньше она становится.

— А зачем?

— Это единственный способ гарантировать, что каждый последующий прыжок лягушки будет меньше предыдущего. Прыгая, она становится меньше, и, соответственно, короче становятся ее прыжки. Мы настроили аппаратуру таким образом, чтобы степень уменьшения соответствовала требованиям парадокса Зенона.

— И чем же все кончится?

— Вот это, — сказал Харди, — мы и намерены узнать. В дальнем конце трубы стоит фотоблокировочное устройство. Если лягушка доберется туда, она пересечет луч света, падающий на фотоэлемент, и таким образом отключит силовое поле.

— Доберется, — пробормотал Гроут.

— Нет. Она будет становиться все меньше и меньше, а прыжки ее короче и короче. Для нее труба будет удлиняться до бесконечности, и она никогда не доберется до конца.

Ученые обожгли друг друга убийственными взглядами.

— Вы слишком в себе уверены, — сказал Гроут.

Они склонились над окошком в трубе. Лягушка проскакала уже довольно большое расстояние, но увидеть ее стало очень трудно: маленькое пятнышко размерами не больше мухи продолжало ползти по дну трубы, становясь все меньше и меньше. Вскоре лягушка превратилась в крохотную точку, а потом и вовсе исчезла.

— Боже, — произнес Питнер.

— Мы вас больше не задерживаем, Питнер, — сказал Харди, потирая руки. — Нам с профессором Гроутом надо кое-что обсудить.

— Итак, — сказал Гроут, когда Питнер вышел, — трубу проектировали вы. Что стало с лягушкой?

— Как что? Она все еще прыгает где-то там среди атомов.

— Я подозреваю, что вы смошенничали. Наверняка по дороге с ней что-нибудь случилось.

— Если вы так считаете, — парировал Харди, — вы можете обследовать трубу сами.

— Пожалуй, я это и сделаю. Возможно, я найду там... какую-нибудь ловушку.

— Как хотите, — сказал Харди, ухмыляясь, выключил газ и открыл металлическую дверцу.

— Дайте мне фонарь, — потребовал Гроут.

Харди вручил ему фонарь, и Гроут, кряхтя, полез в трубу.

— Только без фокусов! — донесся оттуда его голос, отдающийся гулким эхом.

Харди подождал, пока Гроут скроется в трубе, потом наклонился и заглянул внутрь. Профессор Гроут, чихая, с трудом добрался до середины трубы и остановился.

— В чем дело? — спросил Харди.

— Тут слишком тесно...

— Да? — улыбка Харди стала шире. Он вынул трубку изо рта и положил ее на стол.— Здесь я в состоянии вам помочь...

С этими словами он захлопнул дверцу, бросился к противоположному концу трубы и включил силовое поле. Загорелись лампы, защелкали переключатели.

— Ну вот, уважаемая лягушка, теперь прыгайте,— произнес Харди, сложив руки на груди.— Прыгайте, сколько захочется.

Он подошел к газовому рожку и зажег горелку.

В трубе было темно. Какое-то время Гроут лежал без движения, прислушиваясь к собственным медленно плывущим мыслям. Что случилось вдруг с Харди? Что он задумал?.. Потом Гроут все-таки поднялся на локтях и тут же ударился головой о потолок трубы. Становилось жарко.

— Харди! — громкий, панический крик загрохотал в трубе, отражаясь эхом от стен.— Откройте дверь! Что происходит?

Он попытался развернуться, чтобы пробраться к дверце, но не смог. Ничего не оставалось кроме как двигаться вперед, и Гроут пополз дальше, бормоча сквозь зубы:

— Ну вы у меня дождетесь, Харди, с вашими шуточками. Вы думаете...

Совершенно неожиданно труба подпрыгнула. Гроут упал, ударившись подбородком о металлическую поверхность, и заморгал. Труба определенно выросла, и теперь места стало более чем достаточно. А одежда!.. Брюки и рубашка болтались на нем, словно упавшая палатка.

— О, господи,— тихо проговорил он, встал на колени, развернулся с трудом и пополз обратно к двери. Толкнул ее, но дверь не поддалась.

Довольно долго он просто сидел, но, когда металлический пол под ним нагрелся, Гроут неохотно отполз вдоль по трубе в более прохладное место и, обхватив руками колени, мрачно уставился в темноту впереди.

— Что же мне делать? — спросил он сам себя вслух.

Через некоторое время к нему вернулось присутствие духа.

— Я должен рассуждать логически. Однажды я уже попал в силовое поле и стал теперь в два раза меньше. Следовательно, ростом я уже всего фута в три. Соответственно, труба стала для меня как бы вдвое длиннее.

Гроут достал из огромного теперь кармана фонарик, листок бумаги и принялся за вычисления. Фонарик, тоже ставший в два раза больше, он держал с трудом. Вскоре пол под ним снова нагрелся, и он, не задумываясь, подвинулся в сторону.

— Если я останусь здесь достаточно долго,— пробормотал он,— то я...

Труба снова подпрыгнула, отодвигаясь сразу во всех направлениях, и Гроут очутился под грудой грубой ткани. Задыхаясь, он наконец высвободился и, оглядываясь вокруг, произнес:

— Полтора фута. Что же будет дальше?

Но когда пол под ним снова стал горячим, он все-таки отполз еще.

— Три четверти фута.— На лице его выступил пот.— Всего три четверти.

Он бросил взгляд вдоль трубы. Далеко-далеко мерцал пересекающий трубу луч света фотоблокирующего устройства. Если бы добраться до него, если бы только добраться...

Поразмыслив над своими выкладками еще немного, Гроут пробормотал:

— Надеюсь, я не ошибся. Судя по вычислениям, я доберусь до светового луча примерно через девять с половиной часов, если буду двигаться без остановки.

Тяжело вздохнув, он встал, положил фонарик на плечо и добавил:

— Однако к тому времени я здорово уменьшусь.

Потом зашагал с гордо поднятой головой.

Профессор Харди повернулся к Питнеру.

— Расскажите аудитории, что вы видели сегодня утром.

Все посмотрели на Питнера, и тот нервно сглотнул.

— Э-э-э... Я заглянул в подвал, и меня пригласили осмотреть «Лягушачью камеру». Профессор Гроут пригласил. Они собирались начать эксперимент.

— Какой эксперимент?

— Эксперимент, связанный с парадоксом Зенона,— нервничая, пояснил Питнер.— С лягушкой. Ее посадили в трубу и закрыли дверцу. Затем профессор Гроут включил аппаратуру.

— И что произошло?

— Лягушка начала прыгать. И уменьшилась.

— Правильно, уменьшилась. А потом?

— Потом она исчезла.

Профессор Харди откинулся на спинку кресла.

— И лягушка не достигла противоположного конца трубы?

— Нет.

— Что и требовалось доказать.

Аудитория забормотала.

— Как видите, лягушка вопреки ожиданиям моего коллеги профессора Гроута не достигла конца трубы. И никогда не достигнет. Увы, мы больше не увидим это несчастное существо.

Аудитория заволновалась, и Харди постучал по крышке стола карандашом, потом зажег трубку и, снова откинувшись в кресле, выпустил в потолок облако дыма.

— Боюсь, этот эксперимент явился слишком тяжелым ударом для бедняги Гроута. Как вы, наверно, заметили, он не пришел после обеда на занятия. Насколько я понял, профессор Гроут решил отправиться в длительный отпуск в горы. Может быть, после того, как он немного отдохнет, придет в себя и забудет...

Гроут морщился, но продолжал идти.

— Не волноваться,— уговаривал он себя.— Главное продолжать двигаться вперед.

Труба снова подпрыгнула, и он покачнулся. Фонарик упал на пол и погас. Гроут остался в огромной темной пещере, у которой казалось, нет ни конца, ни края.

Но он продолжал идти.

Через какое-то время его одолела усталость.

— Отдых мне не повредит.— Он сел на грубый неровный пол.— Но, судя по новым вычислениям, мне потребуется около двух дней, чтобы дойти до конца трубы. Может быть, даже больше...

Гроут немного подремал, потом двинулся дальше. Внезапные увеличения трубы в размерах перестали его пугать: привык. Рано или поздно он доберется до конца и пересечет световой луч. Силовое поле выключится, и он снова обретет свои нормальные размеры... Гроут улыбнулся: то-то Харди будет удивлен.

Он ударился обо что-то большим пальцем ноги и упал. Страх охватил его, он задрожал и встал, озираясь в окружающей темноте.

В какую сторону теперь идти?

— О, господи,— пробормотал он, наклоняясь и трогая пол. Куда же ему теперь идти? Время тянулось. Он двинулся медленно сначала в одну сторону, затем в другую, не различая ничего вокруг, совсем ничего. Потом побежал, бросаясь в темноте то туда, то сюда, спотыкаясь и падая. И вдруг покачнулся — то самое знакомое ощущение. Гроут облегченно вздохнул: значит, он движется в нужном направлении! И он снова побежал, но теперь уже успокоившись и ровно, глубоко дыша открытым ртом. Затем мир снова покачнулся, когда Гроут стал еще чуть меньше, но направление оставалось верным. Он продолжал бежать.

И по мере того, как он бежал и бежал, пол становился все грубее и грубее. Вскоре пришлось перебираться через какие-то камни, и Гроут остановился. Разве трубу не полировали? Сначала шкуркой, потом...

Ну конечно же,— пробормотал он.— Даже поверхность лезвия для бритья может показаться грубой, если ты сам так мал...

Он продолжал двигаться вперед, ощупывая руками преграды. Вскоре огромные камни вокруг и даже его собственное тело начали слабо светиться. Что это?.. Гроут взглянул на свои руки: ладони поблескивали в полумраке.

— Тепловое излучение, конечно же. Спасибо, Харди.

Прыгая с камня на камень, Гроут двигался в сумеречном свете по бесконечной равнине, усеянной булыжниками и валунами, перескакивая через расселины, как горный козел. «Или как лягушка»,— подумалось ему, когда он перепрыгнул через очередную яму и остановился перевести дух. Как долго еще осталось? Он оглядел высящиеся вокруг обломки железной руды, и внезапно его снова охватил страх.

— Может быть, об этом лучше даже не думать,— сказал он, взобравшись на скалу, и прыгнул через трещину. Следующая пропасть оказалась еще шире, и он едва удерживался на краю, задыхаясь от напряжения и цепляясь руками за неровные уступы.

Он прыгал и прыгал без конца, снова и снова. Он забыл уже, сколько раз ему приходилось это делать.

Стоя на краю скалы, он решился на еще один прыжок и... Падал он долго, все глубже и глубже в пропасть, все ближе к неясному свечению. Но дна пропасти все не было и не было. Он падал и падал.

Профессор Гроут закрыл глаза, его охватил покой, усталые мышцы отдыхали.

— Все. Никаких больше прыжков,— произнес он, опускаясь все ниже и ниже.— Закон природы... Чем меньше тело в размерах, тем меньше проявляется действие силы тяжести... Не удивительно, что насекомые падают так безболезненно...

Не открывая глаз, он отдался во власть темноты.

И таким образом,— сказал профессор Харди,— мы вполне можем ожидать, что этот эксперимент войдет в историю науки как...

Он замолчал и нахмурился, потому что вся аудитория смотрела не на него, а в сторону двери. Кое-кто из студентов улыбался, потом один из них рассмеялся. Харди повернулся посмотреть, в чем дело.

— Это что еще такое?.. — вырвалось у него.

От двери прыгала по полу лягушка.

— Профессор,— возбужденно сказал Питнер, поднимаясь со своего места,— это подтверждает выработанную мной теорию. Лягушка настолько уменьшилась в размерах, что провалилась между...

— Что?— возмутился Харди.— Это другая лягушка.

— ...между атомами кристаллической решетки материала, из которого изготовлен пол «Лягушачьей камеры». Затем она мягко опустилась на пол, поскольку влияние силы тяжести сказывалось на ней гораздо меньше, и, покинув пределы силового поля, вновь обрела свои нормальные размеры.

Питнер, улыбаясь, поглядел на лягушку. Та продолжала медленно шлепать через комнату.

— То, что вы говорите...— начал профессор Харди, без сил опускаясь в кресло, но в этот момент прозвенел звонок, и студенты принялись собирать книги и тетради. Вскоре профессор Харди остался один. Он поглядел на лягушку, покачал головой и пробормотал:

— Этого не может быть. На свете полно лягушек. Это какая-то другая лягушка.

К его столу подошел студент.

— Профессор Харди...

Харди поднял голову.

— Да? Что случилось?

— Там в коридоре вас ждет какой-то человек, закутанный в одеяло. Он чем-то расстроен.

— Ладно,— сказал Харди, вздохнул и встал. У дверей он остановился, снова глубоко вздохнул, потом сжал губы и вышел в коридор.

За дверями, завернутый в красное шерстяное одеяло, его ждал Гроут. Лицо его горело от возбуждения. Харди посмотрел на него виноватым взглядом.

— Мы так и не выяснили!— закричал Гроут.

— Что?— пробормотал Харди.— Послушайте, э-э-э, Гроут...

— Мы так и не выяснили, доберется ли лягушка до конца трубы. Мы с ней провалились между атомами. Нам придется придумать какой-то другой метод проверки парадокса. «Камера» для этого не годится.

— Да, пожалуй,— произнес Харди.— Послушайте, Гроут...

— Об этом позже,— сказал Гроут.— Я найду вас сегодня вечером. А сейчас мне надо на лекцию.

И он, все еще удерживая одеяло руками, торопливо зашагал по коридору.

Перевод с английского А. Корженевского

Ответы, указания, решения

Задачи старика Хоттабыча

1. В принципе, наручные солнечные часы изготовить можно. Но чтобы верно определять по ним время, их необходимо установить строго горизонтально и сориентировать по сторонам света. Для этого в часах должен быть уровень (или отвес) и магнитный компас. Во времена султанов обходились без компаса, определяя направление «север — юг» по звездам и Солнцу. Но это требовало многодневных наблюдений, после которых часы жестко закрепляли на земле или на стене здания и больше не трогали. Когда же в Европе восемь веков назад появился магнитный компас (о котором Хоттабыч знать не мог), то стали изготавливать и небольшие походные солнечные часы. Их можно увидеть, например, в Эрмитаже. Правда, были они не наручными, а карманными, но умещались иногда в коробке не больше спичечного.

2. Волька пожелал морской бинокль вовсе не потому, что собирался стать моряком. Бинокль нужен был ему для астрономических наблюдений. Морской же бинокль отличается от всех прочих тем, что имеет наибольший диаметр объектива, что позволяет увидеть слабые звезды. К тому же морские бинокли специально сконструированы для ночных наблюдений, поскольку ночь — наиболее опасный период для кораблевождения. Высокая светосила морских биноклей, дающая возможность наблюдать слабосветящиеся туманности, делает их вожделенными для всех любителей астрономии.

3. Пусть $R_3=6371$ км — радиус Земли, h — высота полета ковра-самолета, α — угол между направлениями на горизонт с поверхности Земли и с ковра-самолета (рис. 1). Тогда в прямоугольном треугольнике с гипотенузой $c=R_3+h$ и катетом R_3 второй катет $b=\sqrt{(R_3+h)^2-R_3^2}=\sqrt{2R_3h+h^2}$. Если $h\ll R_3$, то угол α мал и, выраженный в радианах, составляет $\alpha\approx\sin\alpha=b/c\approx\sqrt{2h/R_3}$. Если теперь подставить численное значение R_3 и выразить α в градусах (1 радиан $=57{,}3°$), то получим очень простую и удобную формулу:

$$\alpha\approx1°\sqrt{h_{\text{км}}},$$

где $h_{\text{км}}$ — высота полета, выраженная в километрах. Поскольку 600—700 локтей соответствуют 300—350 м, линия горизонта для путешественников оказалась на 0,6° ниже, чем для наземного наблюдателя. А видимый диаметр Солнца составляет 0,5°. Значит, оно могло быть видимым на высоте полета ковра-самолета. Хоттабыч правильно рассчитал высоту полета.

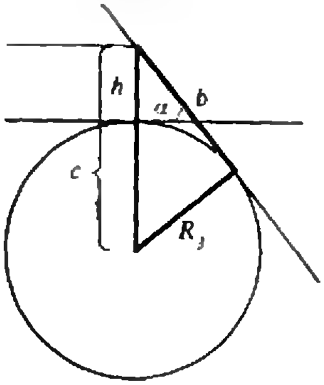


Рис. 1.

4. Воспользовавшись результатами предыдущей задачи, определим разницу в положении горизонта у наблюдателей, находящихся на высотах h_1 и h_2:

$$\alpha_1-\alpha_2=1°(\sqrt{h_{\text{км}\,1}}-\sqrt{h_{\text{км}\,2}}).$$

Если $h_2=600$—700 локтей, а $h_1=h_2+500$ локтей, то $\alpha_1-\alpha_2\approx0{,}2°$. Получается, что подъема на 500 локтей явно недостаточно, чтобы сделать видимым зашедший за горизонт солнечный диск. В действительности для этого пришлось бы подняться на 1300 локтей. Значит, Волька ошибся и не достоин звания «величайшей в мире балды».

Расстояние до горизонта — это длина катета b на рисунке 1 (см. предыдущую задачу). Для малых высот $b\approx\sqrt{2R_3h}=113\ \text{км}\sqrt{h_{\text{км}}}$. С высоты человеческого роста на ровной поверхности (степь, море) горизонт находится на расстоянии 5 км, а с высоты в 1000 локтей он удаляется до 80 км.

5. Очевидно, считая свой шаг длиннее Волькиного (хотя на самом деле они были равны), Омар Юсуф использовал пропорцию $v/11=1200/1400$ и вылетел со скоростью $v=9{,}4$ км/с.

6. Сложив по правилу параллелограмма две первые космические скорости (v_{I}), направленные под прямым углом друг к другу, получим вторую космическую скорость ($v_{\text{II}}=\sqrt{2}\,v_{\text{I}}$), направленную под углом 45° к вертикали. В результате Хоттабыч перешел на параболическую орбиту, которая, если не пересечет поверхность Земли, то уведет его от нашей планеты в космическую даль. Чтобы встреча с Землей состоялась, начальная круговая орбита должна быть достаточно низкой. Как показывают расчеты (выходящие за рамки школьной программы по физике), эта высота составляет 6571 км. Таким образом, однозначного ответа, вернется ли Хоттабыч при таком маневре на Землю, дать нельзя.

7. Все дело в том, что и звуку, и свету — как любому волновому движению — присуще явление дифракции, т. е. огибания волнами краев препятствий. Для света такие препятствия должны быть очень маленькими, поэтому в обычной жизни световые лучи отражаются по законам геометрической оптики и не «загибаются». А вот дифракция звуковых волн не дает нам возможности направить их в одну сторону. Кстати, приставленный ко рту рупор заметно уменьшает влияние дифракции. Даже Хоттабыч, несмотря на его волшебные способности, не пренебрег этим эффектом: подсказывая Вольке, он «прильнул к стенке и тру-

долюбиво забормотал, приставив ко рту ладонь трубкой», т. е. сделав из нее маленький рупор.

8. Покрытая жиром поверхность не смачивается водой, поэтому вода собирается на ней отдельными капельками, которые легко стряхнуть.

«Тепловые фантазии и прочие удовольствия»

1. В восходящих потоках теплый влажный воздух охлаждается, расширяясь по мере понижения атмосферного давления с высотой. Из-за понижения температуры водяной пар частично конденсируется, образуя облака, а воздух несколько согревается за счет скрытой теплоты испарения, высвобождаемой при конденсации. Поэтому все время происходит процесс образования новых облаков. Постарайтесь при случае понаблюдать, как возникают, изменяются и исчезают эти облака.

2. Для испарения воды требуется тепло. Чтобы молекула воды оторвалась от слоя воды, т. е. чтобы произошло испарение, молекуле необходимо сообщить энергию, которая позволила бы ей преодолеть притяжение других молекул воды. В то же время часть молекул пара будет случайным образом попадать в воду и отдавать ей избыток энергии. Если жидкость находится в равновесии со «своим» паром в закрытом сосуде, то на испарение затрачивается такое же количество энергии, какое поступает за счет конденсации. Однако при наличии ветра водяной пар непрерывно уносится, и водяной слой теряет энергию. Если такой водяной слой покрывает вашу кожу, то энергия для его испарения отбирается у вашего тела, и вы ощущаете прохладу. Метиловый спирт испаряется быстрее воды и скорее охлаждает кожу. Пористая холщовая сумка, в которой хранили воду, охлаждалась вследствие испарения воды с ее поверхности, которое особенно усиливалось, если сумку обдувал ветер.

3. Если процедура «окропления кипятком» начинается в тот момент, когда из котла только доносятся первые громкие звуки, то вода там еще не достигла температуры кипения и, хотя она очень горячая, она не опасна. Когда человек подбрасывает воду вверх, она разбивается на капли, которые успевают несколько охладиться, прежде чем попадут на кожу. Если, кроме того, участник представления потеет, что наверняка и происходит на самом деле, то пот также защищает его от горячих капель.

4. Когда капля попадает на раскаленную сковороду, ее нижняя часть мгновенно испаряется и образует паровую подушку между сковородой и оставшейся частью капли. Затем благодаря излучению тепла сквозь паровую подушку, конвекционным потокам внутри подушки и теплопроводности, капля нагревается. Однако, чтобы она нагрелась таким образом до кипения, потребуется 1—2 мин. В течение этого времени паровая подушка предохраняет каплю от испарения, и та беспрепятственно пляшет и скачет по поверхности сковороды.

5. Перегретая (температура выше температуры кипения) вода от раскаленных пород с глубины до 1000 м просачивается в полость гейзера и его главный ствол. Как только вода оказывается в полости, в ней образуются пузырьки пара, которые, увеличиваясь, поднимаются вверх. Когда через воду проходят пузырьки пара, она вскипает и часть ее под давлением образующегося пара выбрасывается вверх. Затем весь процесс повторяется, иногда, как в гейзере Верный служака, через строго определенные промежутки времени.

6. При слабом ветре или его отсутствии вы теряете тепло в основном путем теплового излучения. Любой предмет при температуре выше абсолютного нуля излучает тепло, и чем горячее предмет, тем больше тепла он излучает. Кроме того, он также поглощает тепло из окружающей среды, причем количество поглощенного тепла зависит от температуры среды. Поскольку температура вашего тела почти всегда выше температуры среды, тело в целом теряет тепло. Когда вы в холодный день находитесь на улице или стоите в комнате лицом к окну, поглощаемое вами излучение незначительно, поскольку окружающая среда излучает слабо. Поэтому потеря телом тепла увеличивается, и вам становится холодно. Астронавт, выходя в космическое пространство без скафандра, должен ощущать ужасный холод, так как космический вакуум не излучает тепла.

Люди приспосабливаются к продолжительному холоду с помощью соответствующего питания и усиления притока крови к поверхности тела. Жители Севера потребляют пищу с более высоким содержанием белков, чем большинство людей, живущих в более низких широтах. Это способствует более интенсивному обмену веществ в организме, что помогает противостоять холоду.

При охлаждении организма капилляры, по которым кровь поступает к коже, сокращаются, благодаря чему потеря тепла через кожу уменьшается. Когда температура конечностей человека становится слишком низкой, он начинает дрожать — усиление мышечной активности согревает руки и ноги.

Человек теряет тепло не только путем излучения, но и в результате теплопроводности (например, когда он стоит босиком на холодной земле), а также конвекции. Шуба согревает вас, так как заключенный между ворсинками меха воздух очень плохо проводит тепло. Чтобы свести потери тепла к минимуму, шубу — особенно в ветренный день — лучше надевать мехом внутрь, тогда ветер не будет выдувать из нее воздух, который и защитит вас от холода.

7. Ранним вечером, когда температура падает, дерево оказывается резервуаром более теплого воздуха, который в результате конвекции поднимается вверх. Насекомых привлекает тепло этого воздушного потока, а также, возможно, влага, которая образуется в нем, поскольку при подъеме воздух охлаждается и происходит конденсация пара.

8. Более высокая температура в центре города по сравнению с его окраинами и пригородами объясняется несколькими причинами: 1) в городе меньше испарение (а оно сопровождается поглощением значительного количества тепла);

2) мостовые и здания накапливают больше тепла, чем почва; 3) из-за большой высоты строений и их специфического расположения ветер в городе слабее. К менее существенным факторам следует отнести уборку снега зимой и выделение тепла различными механизмами (в том числе автомобилями).

9. Садовод расставляет дымящиеся жаровни в конце дня, когда земля уже прогрета солнцем. Создаваемый жаровнями дым поглощает излучаемое землей тепло и переизлучает его обратно на землю. Поэтому тепло сохраняется в пространстве между дымом и землей, и сад охлаждается не так сильно, как в том случае, когда излучаемое землей тепло беспрепятственно уходит в атмосферу. Подобный эффект создают и естественные облака.

10. Мыльные пузыри «наоборот», или антипузыри, как их иногда называют, исследованы очень мало. Под действием поверхностного натяжения вода внутри пузыря принимает форму шара, поверхностное натяжение также препятствует тому, чтобы вода из пузыря проходила сквозь воздушную прослойку наружу.

…оянный электрический ток

1. $\mathscr{E}_2/\mathscr{E}_1=(R_2+R_3)/R_3$.
2. $U_1=U_2=3/4\mathscr{E}$.
3. $\mathscr{E}=24$ В.
4. $k=(mn-1)/(m+n-2)$.
5. $F=\varepsilon_0\varepsilon\rho^2I^2/(2S)$.

…Московская …омико-математическая олимпиада

1. Крестьяне составляют 2/3 (около 67 %) населения Лимонии.
2. Картонность свиньи ≈74 %.
4. На 2. 6. $101-10^2=1$.
7. 6 папирос. В самом деле: беспризорник изготавливает 5 папирос, и у него остается еще 2 окурка. Он берет взаймы один окурок (у такого же бедолаги, например), делает шестую папиросу и, выкурив одну из полученных папирос, возвращает долг.
8. 1 и 4.
9. Одна информация не противоречит другой.
10. См. рис. 2.

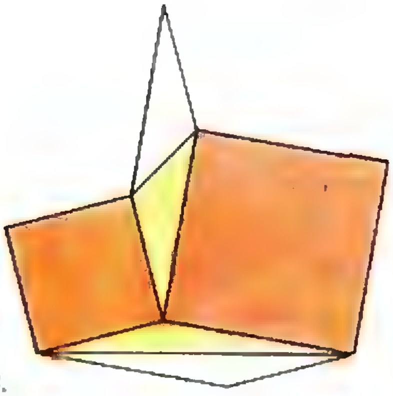


Рис. 3.

…нт» для младших школьников (*см. «Квант» № 7*)

1. Это числа 45, 495, 4545, 4995, 45495, 49545, 49995, ...
2. Из закона Архимеда следует, что давление деревянного цилиндра высотой 12 см равно давлению столба воды высотой 12—3=9 см, т. е. 9 г/см^2.
3. Рассмотрим пару соседних квадратов и дополним внешний и внутренний треугольники до параллелограммов (рис. 3). Нетрудно видеть, что полученные параллелограммы равны, а следовательно, равны и площади внутреннего и внешнего треугольника, поскольку они составляют по половине площади этих параллелограммов.
4. Сейчас туфли стоят 466 рублей 56 копеек. Полгода назад они стоили 156 рублей 25 копеек. Цена возрастает ежемесячно в 1,2 раза.
5. Если в первом кошельке лежит одна монета в 50 копеек и 48 монет по одной копейке, то эти деньги, очевидно, нельзя разделить на две равные части. Деньги из второго кошелька разделить на равные части всегда можно. Нарисуем окружность и разделим ее на 98 равных частей. Затем отметим красным цветом некоторые точки деления так, чтобы полученные отрезки соответствовали набору монет. Так как монет 50, то и точек будет поставлено 50, а 48 точек останутся черными. Нетрудно видеть, что найдутся две диаметрально противоположные красные точки. Эти точки определяют деление монет на две равные части.

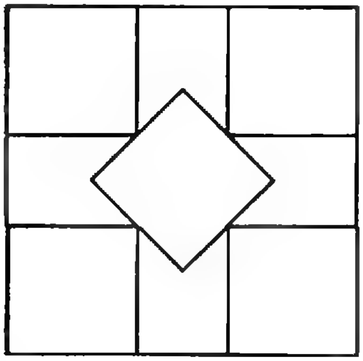


Рис. 2.

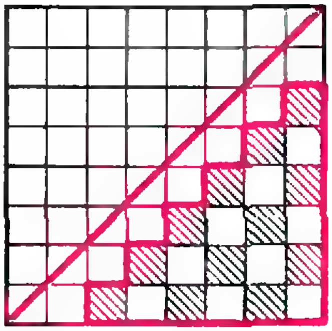


Рис. 4.

[redacted]курс «Математика 6—8»
[redacted]«Квант» № 4)

22. Ответ: 96420×87531. Максимальность этого числа следует из того, что произведение увеличивается, если сумма сомножителей увеличивается, а их разность уменьшается.

23. Количество костяшек домино, лежащих целиком ниже диагонали, равно 12, поскольку их количество равно количеству черных полей доски, отмеченных на рисунке 4.

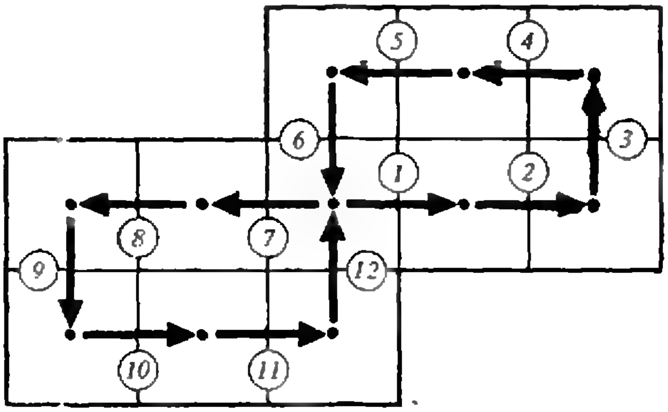


Рис. 5.

Эти костяшки покрывают 9 белых полей, лежащих внутри ступенчатой фигуры, и следовательно, 3 поля вне нее. Значит, остальные 4 белых поля между фигурой и диагональю покрываются костяшками, каждая из которых покрывает и диагональную клетку.

24. Требуемым образом перекатить кубик возможно, например, так, как изображено на рисунке 5.

Поправка

В № [illegible] за 1992 г. в условии задачи М1341 по вине типографии допущена опечатка. Числа, которые нужно сравнить, должны выглядеть так:

а) $\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{m+\ldots}}}$

и $\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{n+\ldots}}}$,

б) $\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n}}}}$

и $\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{m+\ldots+\sqrt{m}}}}$.

Срок отправки решений продлевается до 1 ноября 1992 г.
Приносим извинения нашим читателям.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко,
С. Табачников, В. Тихомирова, В. Уроев,
А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, А. Калинин,
Л. Кардасевич, С. Коновалов, А. Котова,
А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Н. Кузьмина, Т. Макарова, Э. Назаров, Л. Тишков,
А. Хоменко, П. Чернуский, О. Шмелев, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
П. Чернуский

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор В. Сорокина

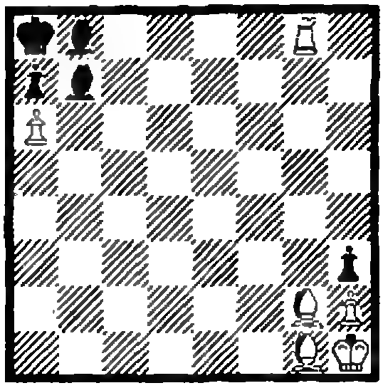
103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»,
тел. 250-33-54, факс 251-55-57

Сдано в набор 29.05.92. Подписано в печати 08.07.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,11.
Тираж 80796 экз. Заказ 674. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

АЛГОРИТМ ОБРАТНОГО МАТА

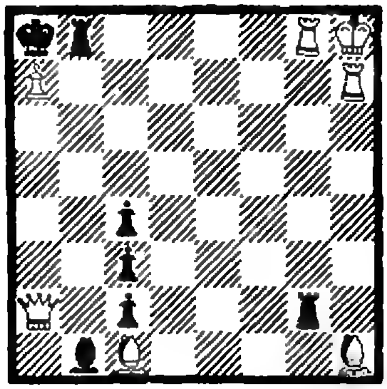
В задачах на обратный мат белые начинают и вынуждают черных поставить мат белому королю в заданное число ходов. Задания в этом жанре шахматной композиции часто больше напоминают математическую задачу или головоломку, чем реальную шахматную игру. Для решения требуется найти некий алгоритм перемещения фигур, которое подчинено определенной логике. Начнем со следующего старинного примера — знаменитой задачи-головоломки.



Г. Брейер, 1892
Обратный мат в 9 ходов

Краткое решение задачи таково: **1. Лf8! Сс6 2. Ле8! Cd5 3. Лd8! Се4 4. Лс8! Cf3 5. Лh8! Се4 6. Cf3 Cd5 7. Се4 Сс6 8. Cd5 Cb7 9. Сс6 С:с6×.**

Тонкие маневры ладей поначалу непонятны, и продемонстрировать полное решение без заминки можно, лишь зная алгоритм. Вот в чем его суть. Очевидно, в распоряжении ладьи есть только пять полей крайней горизонтали, с8—f8 и h8. При ладье на g8 и ходе черных следует С:g2+, и белым никогда не заставить черных дать мат. Но какие же именно поля этой горизонтали занимать ладье? Оказывается, все зависит от «зазора» между слонами. Если расстояние между ними четыре клетки, черные попадают в цугцванг при ладье на f8. Расстоянию в три клетки соответствует поле е8, в две клетки — d8, в одну — с8 и при соприкосновении слонов ладья должна стоять на h8. Теперь, когда алгоритм найден, решение «вычисляется» довольно легко. Если слон черных ходит иначе, то они вынуждены будут объявить мат еще быстрее. Кстати, белым легко «нарваться» на ложный след: 1. Лh8? Cf3! (зазор между слонами отсутствует) 1.Ле8? Сс6! 1. Лd8? Cd5! 1. Лс8? Се4! Задача имеет массу подражаний, в том числе и с белым ферзем против ладьи. Любопытный поворот нашел автор следующей задачи, кстати, известный математик.

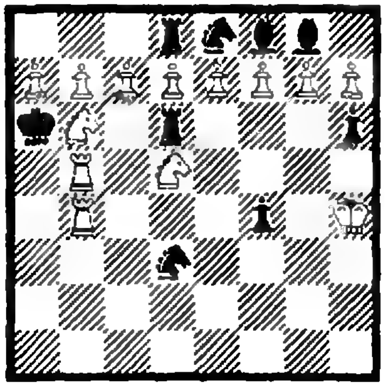


А. Хачатуров, 1985
Обратный мат в 10 ходов

Здесь друг другу противостоят ладьи, а темп белые выигрывают маневрами ферзя. **1. Фа3!! Лс8 2. Фа4! Лd8 3. Фа5! Лс8 4. Фа6 Лf8 5. Фа1! Ле8 6. Лf8 Лd8 7. Ле8 Лс8 8. Лd8 Лb8 9. Лс8 Са2 10. Ф:а2 Л:с8×.**

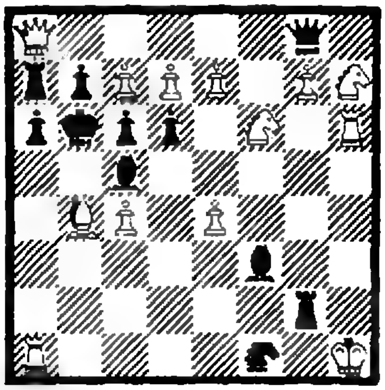
Легко убедиться, что и тут сохраняется указанный выше алгоритм. При расстоянии между ладьями в четыре клетки белый ферзь должен находиться на а3, в три клетки — на а4, в две — на а5, в одну — на а6. При соприкосновении ладей ферзь занимает поле а1. По аналогии с предыдущей задачей поле а2 контролируется черным слоном и недоступно ферзю. И в данном случае немало разветвлений, но правильный план находится по той же «формуле».

В одном из конкурсов в составлении задач на обратный мат было предложено следующее дополнительное требование: в решении белые пешки должны превратиться во все фигуры — ферзя, ладью, слона и коня (порядок значения не имеет). Вот задачи, занявшие в этом необычном конкурсе первые два места.



Т. Сабо, 1984
Обратный мат в 10 ходов

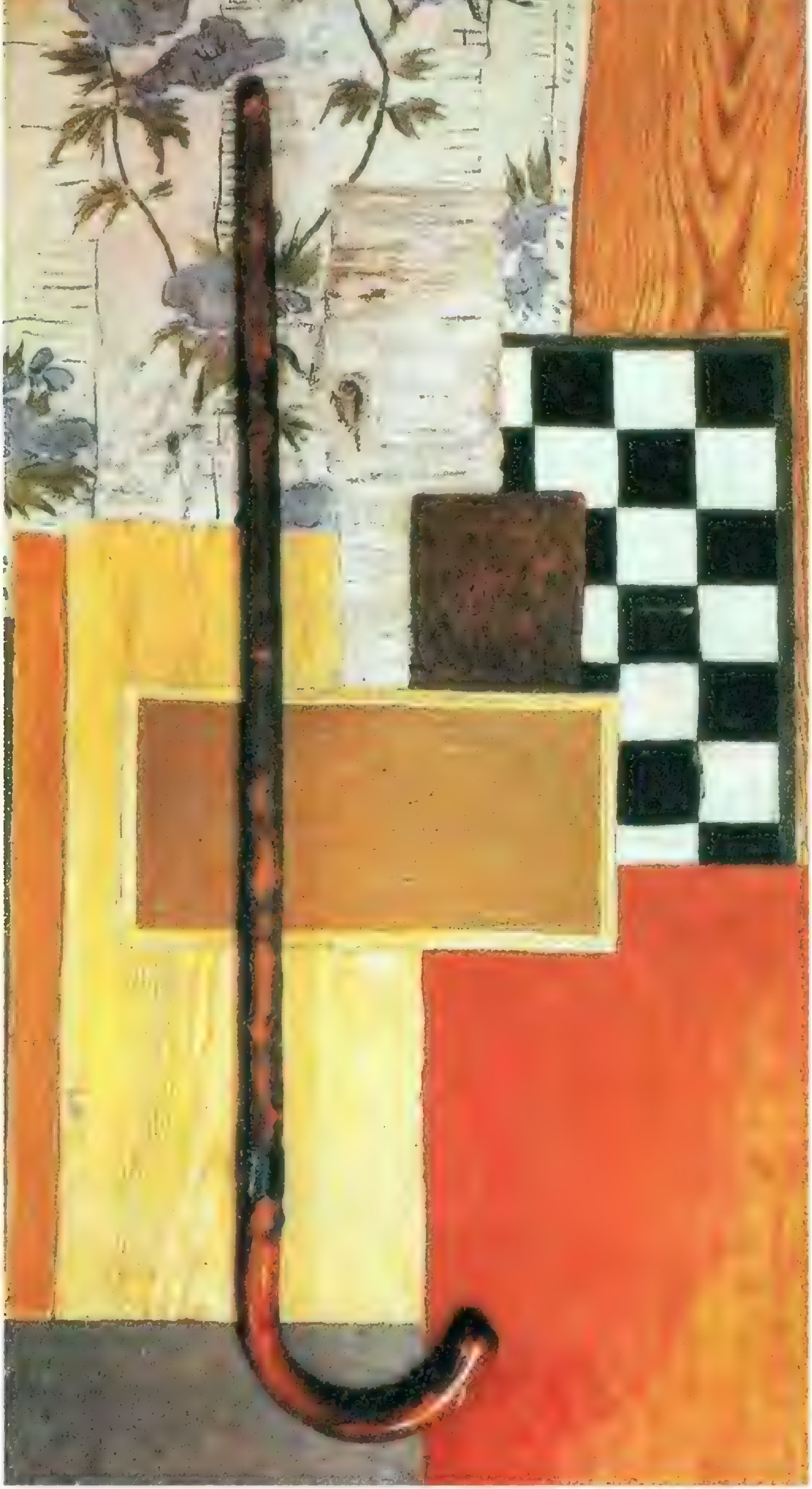
1. а8Ф+! Л:а8 2. bаЛ+! Крb7 3. с8С+! Крс6 4. d8К+! Л:d8, и теперь белые пешки превращаются в обратной последовательности: **5. еdК+! Крd6 6. gfС+! Кре5 7. fеЛ+! Се6 8. h8Ф+ Крf5 8. Ке3+ Крg6 10. Лg5+ hg×.**



Т. Сабо, 1984
Обратный мат в 6 ходов

1. Kd5+! cd 2. Са5+ Крс6 3. с8Ф+ Ф:с8 4. dcЛ+ Крd7 5. е8С+ Кре7 6. g8К+ Л:g8× — с превращением пешек последовательно в ферзя, ладью, слона и коня. Во втором варианте новые фигуры белых появляются в другом обратном порядке: **1...Ф:d5 2. с8К+ Крс7 3. d8С+ Крd7 4. Кf6+ Кре6 5. е8Л+ Крf7 6. g8Ф+ Л:g8×.**

Е. Гик

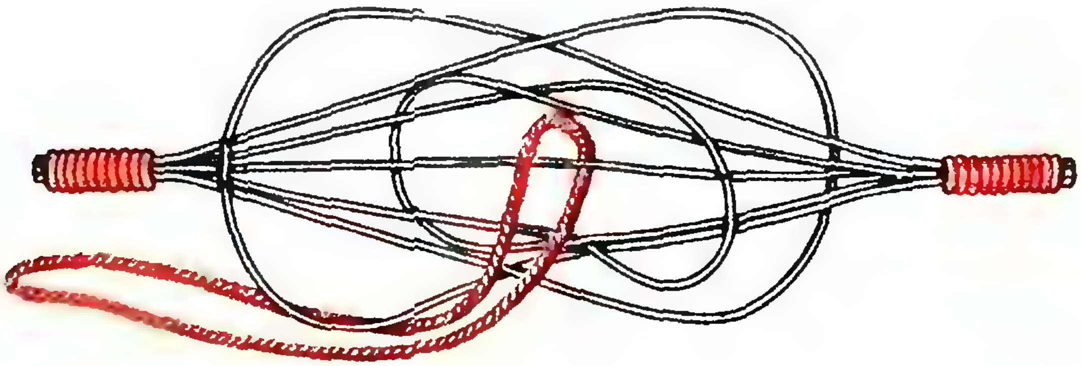


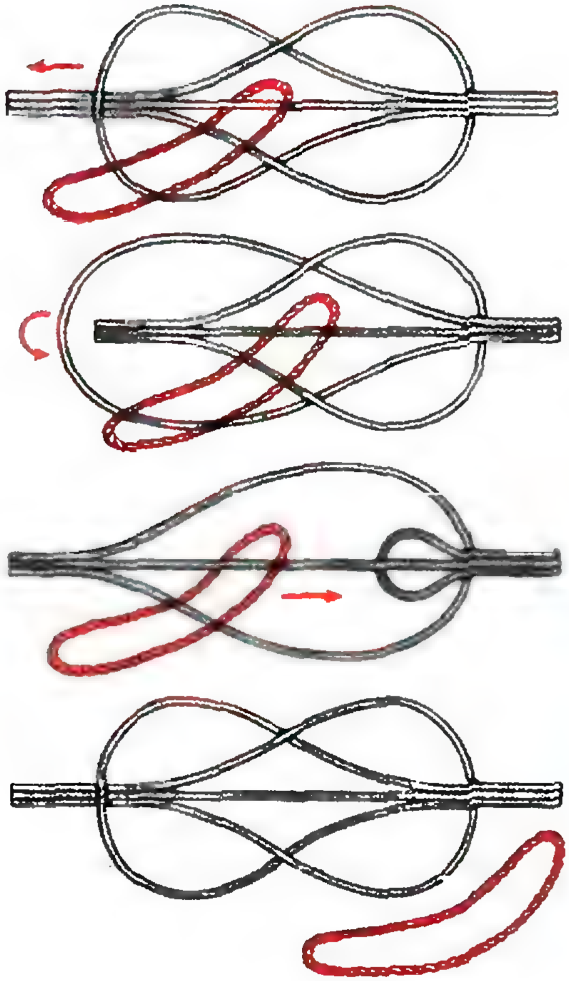
ЗАКОЛДОВАННАЯ ПЕТЛЯ

Старинную головоломку, показанную на нашем рисунке, часто можно увидеть в европейских магазинах игрушек, но ее нетрудно изготовить и самому. В головоломке требуется отцепить веревочную петлю от проволочных. На упаковке написано время, которое отведено на решение: 1 час — гениально, 5 часов — отлично, 3 дня — хорошо, 10 дней — удовлетворительно, 15 дней — отлично за упорство.

Мы надеемся, что любой, читавший в «Кванте» статьи о топологии, сможет решить головоломку менее, чем за 1 час. Топология, как известно, изучает свойства пространств, которые сохраняются при любых непрерывных преобразованиях. Применительно к данной игрушке это значит, что в процессе поиска решения ее части можно как угодно изгибать, растягивать или сжимать (разумеется, мысленно), но нельзя разрывать. Пример непрерывных преобразований показан внизу на упрощенном варианте головоломки. Он поможет вам разобраться в структуре замысловатых петель и сообразить, в какой последовательности нужно огибать проволочные петли веревочной.

1 р. 10 к.
Индекс 70465





В 1993 году «Квант» начнет публикацию серии новых головоломок. Они доступны для изготовления своими руками, но достаточно трудны в решении. Зато в конце года вы станете обладателем коллекции оригинальных игр-головоломок.

НОМЕР
9

Квант

9 1992

Выходит с января 1970 года

*Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал*

*Учредители —
Президиум
Российской академии наук,
Президиум
Российской
академии образования
и коллектив редакции
журнала «Квант»*

*Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы*

В номере:

2 *И. Яглом.* Что такое математика
9 *И. Воробьев.* Океанская зыбь
16 *В. Пахомов.* Демократия с точки зрения математики
21 *А. Митрофанов.* Грибы и рентгеновская астрономия

Задачник «Кванта»

27 Задачи М1361—М1365, Ф1368—Ф1372
28 Решения задач М1331—М1335, Ф1348—Ф1352

«Квант» для младших школьников

39 Задачи
42 *Д. Холидей.* Ошеломляющее впечатление
44 Конкурс «Математика 6—8»

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»

Физика 9—11:

45 Когда вокруг всё вертится...
47 Почему висит кольцо
50 Избранные школьные задачи по физике

Математический кружок

51 *В. Протасов.* Вокруг теоремы Фейербаха

Практикум абитуриента

59 *П. Горнштейн. В. Полонский, М. Якир.* Геометрические решения экстремальных геометрических задач
64 Алгебраические уравнения и неравенства

Р — значит ракета

65 *Д. Джоунс.* Per funicula ad astra

Игры и головоломки

68 Крискросс, пра-кроссворд и другие

Олимпиады

69 XXXIII Международная математическая олимпиада
69 Задачи LV Московской математической олимпиады
71 Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике 1992 года
73 Физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана

75 **Ответы, указания, решения**

К нашим читателям (*74*)

Наша обложка

1 *Первые 72 простых числа, бо́льшие 1 000 000 000,— за 30 секунд (см. с. 26).*
2 *С. Дали (1904—1989) «Открытие Америки Христофором Колумбом». В дни выхода журнала этому событию исполнится 500 лет. Мы желаем каждому читателю открытия своей Америки!*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка «Дугомино».*

© *«Квант», 1992*

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА

Доктор физико-математических наук
И. ЯГЛОМ

Хорошо известно, что весь массив наук делится на три большие группы: математические науки — естественные науки — гуманитарные науки, или, как говорил покойный академик Л. Д. Ландау, «сверхъестественные науки — естественные науки — неестественные науки»,— и эту нехитрую шутку выдающегося физика мы еще прокомментируем ниже.

Естественные науки — физика, химия, астрономия, биология, медицина.... — изучают окружающий нас мир; гуманитарные — история, литература, филология, юриспруденция, социология... — человеческое общество, также представляющее собой реальность, поддающуюся наблюдениям и даже эксперименту; математика же изучает самое себя. С этой, безусловно, самой основной точки зрения различие между математикой и «нематематикой» оказывается несравненно более глубоким, чем различие между естественными и гуманитарными дисциплинами. Более того, за последние десятилетия граница между естественными и «неестественными» науками постепенно стирается, так что про ту или иную область знания в настоящее время зачастую оказывается вовсе не просто сказать, относится ли она к кругу естественных или гуманитарных наук.

Что представляет собой сегодня, скажем, экономика? По происхождению и стоящим перед ней целям она, бесспорно, должна быть причислена к наукам гуманитарным; однако принятая здесь методика, да и сама постановка целого ряда «типичных вопросов» современной экономической науки таковы, что иногда представляется более естественным отнести эту науку к той же группе, что и физику и геологию. Напротив, психология ранее обычно рассматривалась как раздел медицины и, следовательно, как естественнонаучная дисциплина. Однако в наши дни, в связи с развитием ряда новых ее областей вроде массовой психологии, социальной психологии, психолингвистики (пограничной между психологией и языкознанием), она вполне может фигурировать и в списке гуманитарных наук.

«Сращивание» естественных наук с гуманитарными стимулируется математизацией последних, использованием в них дедуктивных методов и математического моделирования, применением многих разделов математики — от элементарной алгебры до топологии. В самом деле, ранее гуманитарные науки математическим аппаратом и дедуктивными рассуждениями не пользовались, что в первую очередь, и отличало их от астрономии или физики. Заметим, кстати, что разграничение математики и гуманитарных наук в предшествующую эпоху подчеркивалось еще и тем, что математика («доказательная») всегда пренебрегала индуктивными или чисто описательными рассуждениями, так что, скажем, появление известной книги Дж. Пойя «Математика и правдоподобные рассуждения» «истинные математики» вполне могли рассматривать как недопустимый акт, раскрывающий непосвященным «кухню» их работы, которая не должна быть доступна неспециалисту. (Я вспоминаю, с каким жаром покойный А. Я. Хинчин на своих университетских лекциях по математическому анализу убеждал студентов в том, что единственное требование к доказательству состоит в его формальной полноте; при этом математик имеет право начать рассуждение какой-либо абсолютно немотивированной фразой

Из книги И. Яглома «Математические структуры и математическое моделирование» (М.: Советское радио, 1980).

типа «Рассмотрим следующую функцию...» — и на вопросы о том, откуда взялась эта функция, он отвечать не обязан.)

Ныне, однако, дело обстоит уже не так: сближение математики с гуманитарными дисциплинами привело к определенной «гуманизации» математики, к проникновению в нее подходов и точек зрения, характерных для наук гуманитарного цикла. Несколько заостряя реальную ситуацию, можно даже сказать, что для наших дней типичен не только математически мыслящий гуманитарий, но и гуманитарно мыслящий математик.

Различие между гуманитарными и естественными (или тем более математическими) науками ранее заходило столь далеко, что, например, во французском или английском языке даже сам термин «наука» (science) не принято было прилагать к таким дисциплинам, как литературоведение или история. Именно этот момент — отсутствие в гуманитарных науках дедуктивных выводов, со времен Платона и Аристотеля считавшихся единственно доказательными или «научными», так же как и некоторую расплывчатость (по сравнению, скажем, с физикой или математикой) существующих здесь критериев истинности, и акцентировал Л. Д. Ландау, когда со свойственным «настоящему ученому» (англ. scientist) высокомерием характеризовал юриспруденцию или историю как «неестественные науки».

В настоящее же время ситуация здесь изменилась весьма радикально — и математическая лингвистика (и даже математическое искусствоведение или математическое литературоведение), математическая психология или математическое правоведение, а также иные «гуманитарно-математические гибриды» (не говоря уж о математической экономике!) заняли весьма большое место в научном багаже ученых-гуманитариев, в силу чего на филологических, юридических или экономических факультетах университетов зачастую читаются весьма обширные курсы математики, заметно превосходящие по объему курс «высшей математики», испокон веков читавшийся будущим инженерам. В связи с этими новыми тенденциями вполне можно рассчитывать, что в недалеком будущем французский термин science станет охватывать как математические и естественные, так и гуманитарные дисциплины. Возможно, что и Л. Д. Ландау, живи он сегодня, даже в шутку уже не стал бы называть соответствующие науки «естественными».

Естественные и гуманитарные науки изучают объективно существующую реальность — и единственным критерием истины, скажем, для физика является совпадение получаемых им результатов с наблюдаемыми, с прямым экспериментом; так, например, тот же Ландау на сделанный ему упрек в нестрогости доказательства однажды ответил так: «А Вы можете указать доказательство, которое лучше моего будет совпадать с экспериментом?» Таким образом, физическое рассуждение является правильным, если полученный с его помощью результат совпадает с реально наблюдаемыми фактами, и неправильным, если этот результат противоречит эксперименту. Напротив, математика строится чисто умозрительно; она не имеет дела ни с какой «лабораторией», кроме человеческой головы. Критерием истинности математического рассуждения является лишь его логическая безукоризненность, выполнение на всех этапах рассуждения устанавливаемых самим математиком правил вывода, относящихся к вполне определенной ветви математической науки — математической логике. При этом на сегодняшний день мы имеем уже вовсе не одинединственный набор правил вывода, а много разных a priori возможных таких наборов. И вполне может случиться, что математическое рассуждение, которое признает правильным один ученый, другой таковым считать откажется, причем эти две диаметрально противоположные позиции вовсе не будут означать, что один из упомянутых ученых прав, а второй ошибается: нет, правы они оба, только исходят они из разных «правил игры», что и приводит к двум разным «математикам».

В старых школьных учебниках геометрии бытовала фраза: «Справедливость аксиом подтверждается многовековым опытом человечества». Этот тезис является отражением точки зрения Аристотеля; однако с точки зрения «чистого» математика (если только существуют совсем уж «чистые» математики!) он не имеет никакого смысла. В самом деле, как может «многовековой опыт человечества» (или какие угодно другие аргументы) подтвердить или опровергнуть тот факт, что слон на шахматной доске ходит исключительно по диагонали,— ведь этот факт представляет собой условное соглашение, входящее в определение слона как шахматной фигуры, и никакой проверке его истинность не подлежит. Как может многовековой опыт человечества подтвердить или опровергнуть то, что для каждых двух точек A и B плоскости существует (и притом единственная) прямая этой плоскости, проходящая как через A, так и через B? Ведь с точки зрения современной математики под плоскостью понимается просто множество элементов $\{A, B, C, \ldots\}$, обозначаемых большими латинскими буквами, и множество элементов $\{i, m, n, \ldots\}$, обозначаемых малыми латинскими буквами; первые из этих элементов мы назовем «точками», а вторые — «прямыми», но свободно могли бы выбрать для них и какие угодно иные наименования*).

Далее, про вводимые таким образом (без всякого определения!) «точки» и «прямые» известно, что они связаны между собой рядом отношений, первым и главнейшим из которых является отношение принадлежности. При этом от связывающих точки и прямые плоскости отношений требуется выполнение ряда «правил» или «условий», одним из которых как раз и является только что сформулированная аксиома, и с точки зрения математики вопрос о доказательстве (или даже всего лишь о достаточно надежной мотивации) истинности этого утверждения столь же бессодержателен, как и вопрос о «доказательстве» правил движения слона на шахматной доске.

Выше мы сказали, что понятия «точки» и «прямой» плоскости вводятся без всякого определения, и даже подчеркнули эту мысль как чрезвычайно важную восклицательным знаком в конце соответствующего утверждения. Однако теперь мы, пожалуй, возьмемся оспаривать наш собственный тезис. Имеет или не имеет определения понятие «шахматный слон»? Ответ на этот вопрос, по существу, был дан выше. Разумеется, для лица, не умеющего играть в шахматы, понятие это совершенно бессмысленно — ничем не лучше, чем для нас с вами понятие «тарарабумбия», пока этот странный, явно антинаучный термин никак нами не определен. Но для шахматиста понятие «слон» совершенно ясно: под шахматным слоном он понимает фигуру, в начальной позиции занимающую на шахматной доске положения c1 и f1 («белые слоны») и c8 и f8 («черные слоны»), причем в процессе игры эти фигуры могут перемещаться, а также исчезать с доски («слон побит») или возникать на ней (пешка «прошла в слоны») в соответствии с вполне определенными правилами, полный набор которых может рассматриваться как косвенное определение соответствующего понятия. Другими словами, само по себе понятие «шахматный слон» следует считать бессодержательным, неопределенным; однако сочетание слов «игра в шахматы» имеет четко очерченный, хоть и достаточно сложный смысл,— и вот в рамках этого-то понятия находит место более частное понятие «шахматный слон».

---

*) Давид Гильберт (1862—1943) как-то заметил, что содержание евклидовой геометрии не претерпит никаких изменений, если мы заменим слова «точка», «прямая» и «плоскость», скажем, терминами «стул», «стол» и «пивная кружка» (из самой формы этого высказывания видно, что оно родилось в процессе обсуждения проблем математики за столиком геттингенской пивной). Впрочем, здесь Гильберта частично обогнал Жан Лерон Даламбер (1717—1783), указавший в своей прославленной «Энциклопедии» (в статье «Определение»): «Элементы геометрии можно сделать точными (но смешными), назвав треугольником то, что обычно называется кругом».

Но точно так же обстоит дело и с понятиями (математических) точки и прямой! Для незнакомого с математикой (а точнее — с планиметрией) лица эти понятия, разумеется, совершенно бессодержательны. Однако уже школьник знает, что планиметрия в целом может быть описана как совокупность элементов двух родов: точек *A*, *B*, *C*,... и прямых *a*, *b*, *c*,..., в объединении составляющих то, что принято именовать «плоскостью»; при этом точки и прямые подчиняются определенным правилам, в своей совокупности образующим косвенное определение как всей планиметрии, так и ее «образующих элементов», т. е. точек и прямых, а также связывающих эти элементы «основных отношений».

Таким образом, понятие (математической) точки само по себе вне рамок планиметрии никакому определению не подлежит: точка, как и пресловутый поручик Киже, «фигуры не имеет», так что не склонный задумываться над происхождением математических понятий «чистый» математик, пожалуй, сочтет, что знакомое каждому общежитейское понятие точки как мельчайшей («неделимой») области физического пространства или как следа однократного касания бумаги карандашом или иным заостренным пишущим предметом имеет к понятию математической точки не больше отношения, чем индийский или африканский слон — к шахматному. Таким образом, наблюдаемое органами чувств и регистрируемое приборами физическое пространство не связано с абстрактно-математическим пространством, формально описываемым относящимся к нему набором аксиом. Более того, эти два «пространства» относятся даже к совсем разным кругам понятий — к области математических наук и к области естественных наук, или, используя терминологию Платона,— к «миру видимому» и к «миру умопостигаемому».

Однако подобное рассуждение оставляет у нас смутное чувство неудовлетворенности, сознание, что мы говорим что-то не совсем то... Вспомним глубокие знания по геометрии древних вавилонян или египтян — знания, включающие столь содержательные факты, как теорема Пифагора или формула для объема усеченной пирамиды. Но ведь математика-то возникла гораздо позже, чем составляли свои пособия вавилонские жрецы и египетские писцы, а именно всего лишь в VI—V вв. до н. э. Как же могла геометрия, составляющая раздел математики, появиться раньше математики? Не равносильно ли подобное предположение парадоксальной мысли, скажем, о том, что судак появился на земле раньше, чем вообще возникли рыбы? Объяснить это кажущееся противоречие можно тем, что слово «геометрия», подобно, например, словам «точка» (математическая или физическая) или «слон» (шахматный), имеет два совершенно разных смысла. Но при этом, если связь между понятиями шахматного и живого слона является, так сказать, чисто лингвистической, порожденной в какой-то мере случайным использованием одного слова для описания разных понятий, то соотношение между двумя смыслами слова «точка» или двумя смыслами слова «геометрия» является уже содержательным и для нашей темы настолько важным, что на этом необходимо остановиться подробнее.

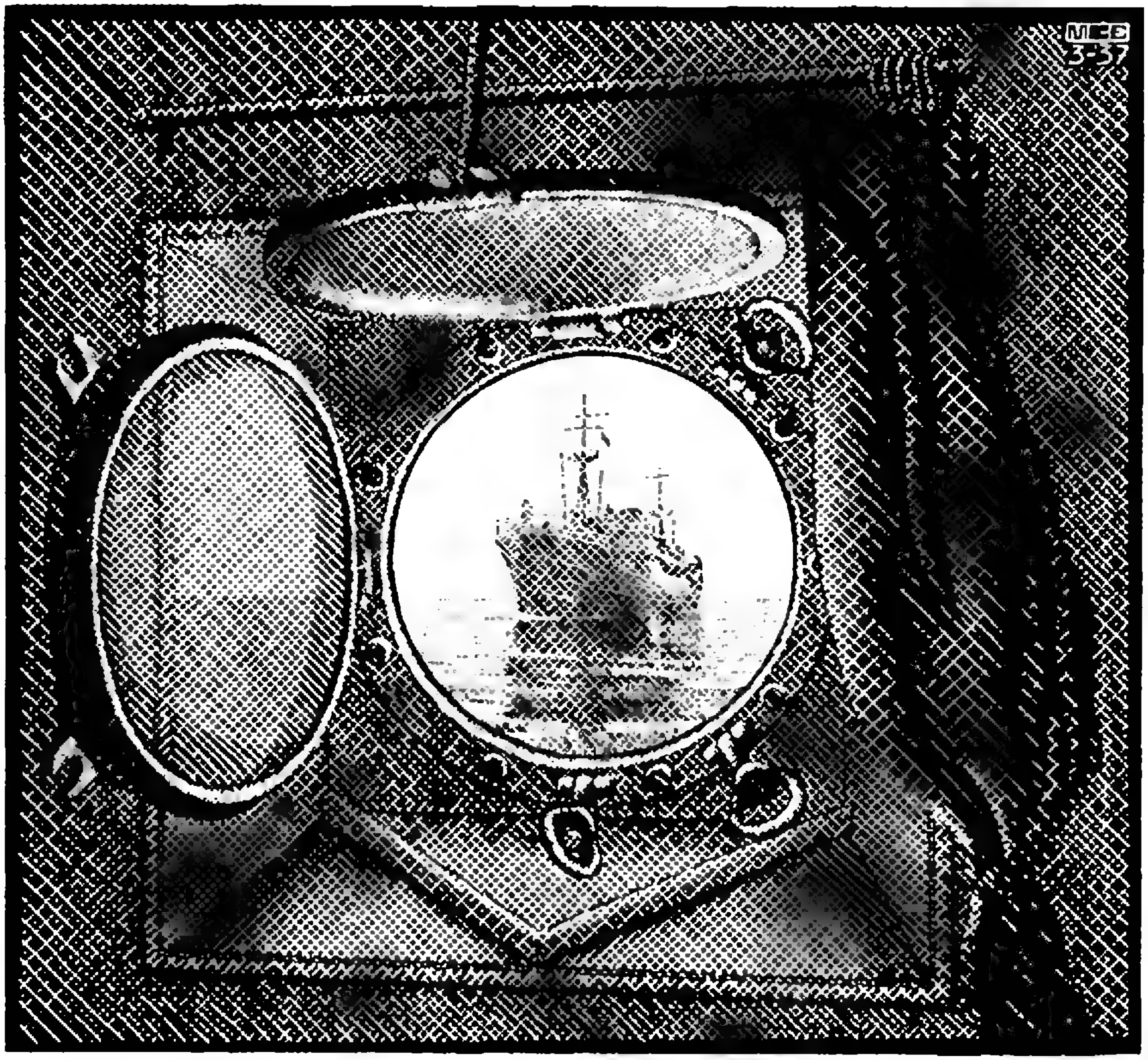
Странный мир геометрии — все в нем предельно конкретно, наглядно, осязаемо, и в то же время призрачно, бестелесно, условно. Формула для объема цилиндра точно оценивает количество воды, которое можно налить в стакан или бидон,— но ведь на самом деле слова «цилиндр», «конус», «прямая», «плоскость» обозначают некие абстракции, нигде в жизни не встречающиеся и не реализуемые. Представление о плоскости может дать, скажем, хорошо отшлифованная металлическая пластина,— но не о плоскости, конечно, а лишь о небольшом ее участке, ибо всю (безграничную!) плоскость даже и пытаться представить себе нельзя, так как попытка «далеко» продолжить в воображении видимую поверхность пластины сразу же поставит перед нами немыслимо сложные вопросы о глобальном строении вселенной. Но и маленькую часть плоскости наша пластина представляет весьма приближенно — ведь если мы захотим отшлифовать ее до «полной» гладкости, то неизбежно придем в противоречие с атомным строением вещества, и это еще до того, как перед нами встанет вопрос о природе самих образующих пластину атомов, столь далеких от привычной нам геометрии, что уж на атомном-то уровне и речи быть не может ни о какой плоскости. Грубую модель прямой линии доставляет, например, край стола, а «точное» ее представление дает луч света,— и, скажем, Лобачевский или Гаусс в своих опытах по измерению суммы углов «физического» треугольника, стремясь к максимальной строгости и полноте, принимали за стороны треугольника направления, в которых из одной вершины треугольника видна другая его вершина. Но ведь с точки зрения современной физики свет имеет сложную корпускулярно-волновую природу, причем если даже и мыслить свет «по Ньютону» как поток элементарных частиц — фотонов, то все равно вопрос о траектории фотона оказывается некорректно поставленным, т. е. попросту бессмысленным, так что о прямой здесь говорить не приходится никак. И при всем том практическая применимость геометрических формул и теорем, скажем, в деятельности конструктора оказывается столь полной, что в случае неудачи выполненной по его расчетам модели инженер усомнится в чем угодно, но только не в этих теоремах и формулах.

Таким образом, мы явно имеем две совсем разные «геометрии». «Геометрия-физика» является одной из естественнонаучных дисциплин и изучает специфические свойства реальных тел, в первую очередь, их размеры и форму, в то время как «геометрия-математика» относится к кругу математических наук и изучает определенные математические структуры, во всей («идеальной») полноте в практической жизни не реализуемые (т. е. не существующие). При этом возникла «геометрия-физика» раньше «геометрии-математики» (чем снимается всякая загадочность с факта появления геометрии до математики); однако с самого зарождения «геометрии-математики» развивались наши две геометрии в постоянной и неразрывной связи. К логической системе «геометрии-математики» ученые первоначально пришли путем идеализации свойств реальных тел, предельного упрощения наблюдаемых в окружающем мире явлений, сохранения лишь самых фундаментальных (т. е. самых простых и глубоких) из относящихся к ним фактов; эти «главные» факты компактно записывались в виде списка аксиом, возникших в результате суммирования данных многократных экспериментов, производимых над поверхностями пластин и плит (эти поверхности получили общее наименование «плоскостей»), над лучами света и краями этих плит (называемых «прямыми») и т. д. С другой стороны, делаемые уже чисто логическим путем выводы о свойствах абстрактных объектов, рассматриваемых в «геометрии-математике», немедленно (и успешно) применялись к изучению свойств материальных тел, изучением которых занималась «геометрия-физика». Иногда, правда, возникало несоответствие между математическими выводами и физическими наблюдениями, как это произошло, скажем, при анализе результатов опытов Майкельсона по измерению скорости света; но такое несоответствие лишь приводило к необходимой модификации «математического пространства», к построению новых абстрактных схем, с большей полнотой, чем прежние, охватывающих феномены действительного.

Таким образом, взаимоотношения «геометрии-физики» и «геометрии-математики» имитируют общий процесс развития точного знания, неизбежно проходящий через этапы индуктивного накопления фактов («геометрия-физика»); последующего их обобщения и построения на базе этих фактов дедуктивной теории («геометрия-математика»), из которой, в свою очередь, делаются выводы, касающиеся реальной действительности; опытной проверки полученных выводов (снова «геометрия-физика»); перестройки и модификации теории в свете вновь полученных фактов (опять «геометрия-математика»),— и так без конца. Другими словами, «геометрия-математика» возникла как математическая модель физической вселенной, причем практическая ценность этой модели первоначально связывалась исключительно лишь с возможностью делать на ее базе выводы, касающиеся реального (физического) мира. После этого и «геометрию-физику» стало возможно рассматривать как физическую модель абстрактного (математического) пространства, описываемого в соответствии с общей схемой построения «выводных наук» Аристотеля, т. е. списком основных (неопределяемых) объектов и отношений и набором аксиом, характеризующих эти объекты и отношения. Именно такой подход к геометрии обусловил единодушие, с которым творцы неевклидовой геометрии — К. Ф. Гаусс и Н. И. Лобачевский, не ведая в этот момент о близости сделанных ими открытий, бросились измерять сумму углов «физических» треугольников (вершинами которых служили три удаленные друг от друга точки земной поверхности у Гаусса и три небесных тела у Лобачевского). Разумеется, результат этих измерений не мог иметь никакого отношения к вопросу об истинности или ложности геометрии Лобачевского как математической теории, но он мог указать на наличие физической ее модели, полностью оправдывающей само существование этой теории, возможно даже делающей ее необходимой.

Двусторонняя связь наук математических (в данном случае — «геометрии-математики») с науками естественными («геометрией-физикой») указывает то место, которое занимает математика в системе наук и в жизни людей. Когда-то знаменитый Гаусс сказал: «Математика — это царица наук»; однако теперь-то мы понимаем, что она занимает в мире иное, куда более почетное положение: она является служанкой всех (и естественных, и гуманитарных) наук, помогая им, доставляя им адекватный аппарат для описания всевозможных фактов и явлений. Более того, математика — это та служанка, без которой и госпожа-то не является госпожой, без которой науку и за науку признать невозможно, ибо «уровень научности» той или иной дисциплины можно измерить объемом применяемых в ней математических рассуждений, глубиной и содержательностью характерных для этой дисциплины дедуктивных выводов (вспомните наше замечание об употреблении во французском и английском языках слова science).

Сила математики в первую очередь заключается в том, что возникшие в ее рамках числовые системы и формальные схемы доставляют нам некоторый «универсальный ключ», годный для отпирания всех на свете замков: они равно приложимы к физике и биологии, технике и социологии, астрономии и лингвистике. Математическая модель реальной ситуации — это математическая структура, объекты которой трактуются как идеализированные реальные «вещи» (или понятия), а абстрактные отношения между этими объектами — как конкретные связи между элементами действительности; такая модель позволяет составить компактную и легко обозримую сводку известных нам свойств изучаемых понятий, дающую возможность исчерпывающе их анализировать и даже предсказывать результаты будущих наблюдений, а ведь именно оправдывающиеся впоследствии предсказания составляют основной предмет гордости каждой науки, определяют ее ценность. Эта универсальность математического знания дала основание выдающемуся физику Эйгену Вигнеру с некоторым даже недоумением говорить о «непостижимой приложимости математики к естественным наукам»; ее же имел в виду и Ландау, когда он называл математические науки «сверхъестественными».



ОКЕАНСКАЯ ЗЫБЬ

И. ВОРОБЬЕВ

Ураган за сотни километров, вокруг воздух тих, но плавные валы прокатываются один за другим насколько видит глаз. Это зыбь. Череда параллельных изгибов охватывает десятки километров, и такие волны могут идти часами.

Вблизи мыса Доброй Надежды высота валов достигает порой 9—11 м при длинах волн 100—300 м. Двухкилометровая глубина океана позволяет не опасаться, что он расплещется до дна. Впечатляет и скорость этих внушительных волн; 40—70 км/ч.

Какие силы обеспечивают столь регулярное движение воды? От чего зависит скорость волн? Каков их профиль? Что происходит в толще воды? Постараемся ответить на эти вопросы. Но сначала стоит присмотреться к самой волне.

Послойное течение

С волной удобнее знакомиться, когда она стоит на месте. Представьте, что мы летим на вертолете со скоростью волны c. Относительно нас изгибы поверхности неподвижны, и вдоль их неизменного профиля стационарно течет вода. На расстоянии длины волны λ повторяются уровень и наклон поверхности и скорость V течения воды по неподвижному профилю. К поверхностному слою примыкает слой под ним, к нему — следующий... При плавном движении воды зазоров и разрывов нет, и изгибы глубинных слоев остаются неподвижными вместе с профилем поверхности, повторяясь через то же расстояние λ (рис. 1).

Итак, переход к системе отсчета остановленной волны превращает движение воды в стационарное течение по изогнутым слоям. Неподвижные границы образованы частицами воды, идущими по одной траектории. Вода не уходит из слоя, так что через любое его сечение за единицу времени проносится одна и та же масса воды.

Изгибы не совсем одинаковы, с глубиной постепенно ослабляется их размах. Это можно понять, рассмотрев течение между границами одного слоя. При постоянстве потока слой толще там, где скорость меньше, и тоньше — где она больше. Скатываясь со склона, вода разгоняется, а поднимаясь к вершине, тормозится. Поэтому расстояние между границами больше у вершин и меньше у впадин (рис. 2). Нижняя граница каждого слоя из-за этого более полога, чем верхняя. Сокращается перепад высот, меньше изменения скорости при подъеме и спуске, с ослаблением изгибов слои становятся более однородными по толщине.

В пределе приходим к горизонтальным слоям спокойной воды. Но неподвижна она относительно дна, в движущейся же системе отсчета остановленной волны у нее скорость c, направленная навстречу волне. С той же скоростью движется и дно.

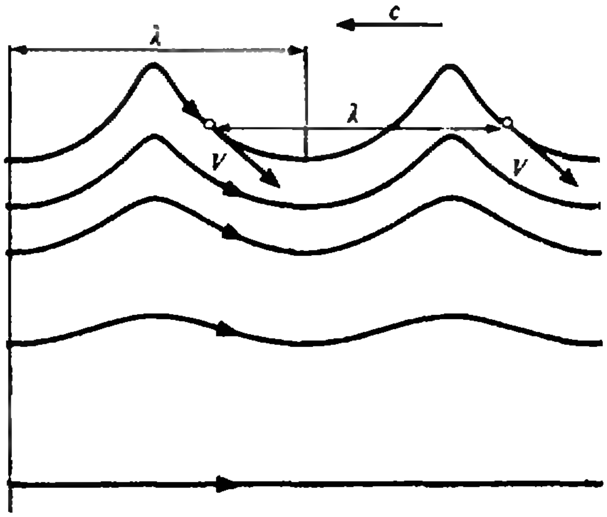


Рис. 1.

Если глубина достаточна для заметного ослабления волн, то дно оказывается в покоящейся воде и не влияет на движение в верхних слоях. Количественное условие будет найдено в конце статьи. Но уже теперь понятно, почему изрезанный рельеф дна не возмущает волны на глубокой воде.

Чтобы найти скорость движения частицы воды $\vec{v}$ в системе отсчета, в которой берега и дно неподвижны, нужно к скорости частицы по профилю $\vec{V}$ добавить скорость самого профиля $\vec{c}$ (рис. 3):

$$\vec{v}=\vec{V}+\vec{c}.$$

Это простое соотношение сыграет еще свою роль.

Тяжесть и давление

О зыби говорят при длинах волн от одного до сотен метров. Для таких крупных волн можно пренебречь поверхностным натяжением. Пробег в сотни километров без заметного ослабления свидетельствует о крайней малости трения. Зыбь, по существу, является игрой всего двух сил — тяжести и давления.

Давление вдоль поверхности везде одинаково и равно атмосферному. На большой глубине слои почти горизонтальны, и вода в них почти неподвижна. Давление на одном уровне в покоящейся воде одинаково. На глубине оно отличается от атмосферного,

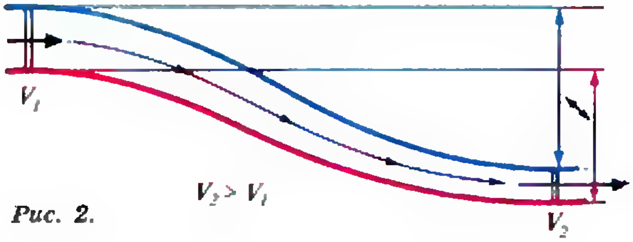


Рис. 2.

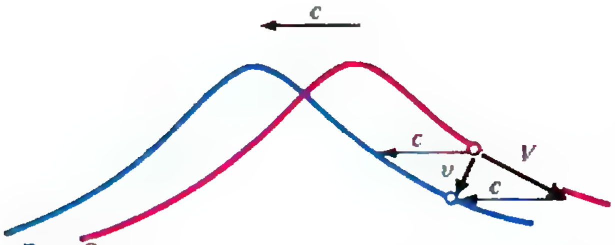


Рис. 3.

но как для поверхностной волны, так и в глубинных волнах нет перепада давления по их профилю. В промежуточных слоях неоднородность давления не может быть вызвана давлением воздуха — оно одинаково по всей поверхности. Но и снизу неоткуда взяться неоднородности. Это серьезный довод в пользу одинаковости давления на границе любого слоя.

Хотя давление одинаково во всех точках профиля, при переходе от одной границы к другой оно меняется. Такой перепад давления вместе с силой тяжести и вызывают ускорение частиц воды. Найти же этот перепад можно из следующих соображений. Слой в целом не взлетает вверх и не падает вниз. Уравновешены силы и для каждой из одинаковых ячеек слоя с продольным размером в длину волны λ (рис. 4).

Для расчета силы давления на верхнюю изогнутую границу, давление во всех точках которой p, начнем с малого наклонного участка. Сила равна давлению, умноженному на площадь участка, и направлена по перпендикуляру к нему. А вертикальная составляющая оказывается равной давлению, умноженному на площадь горизонтальной проекции этого участка (см. рис. 4). В сумме вертикальных составляющих давление выносится как общий множитель, а сумма площадей проекций дает площадь λL горизонтального сечения волновой ячейки (ширина ячейки L). Суммарная сила давления на верхнюю границу поэтому равна $p\lambda L$ и направлена вниз.

Для нижней границы с давлением $p+dp$ сила направлена вертикально вверх и равна $(p+dp)\lambda L$. Разность этих сил уравновешивает силу тяжести mg, где m — масса ячейки. Тогда

$$dp = \frac{mg}{\lambda L}.$$

Рассмотрим это выражение для приращения давления. Изгиб не меняет массы слоя и массы ячейки. Она та же, что и была между горизонтальными границами ячейки в спокойной воде. Тот же в спокойной воде тогда и перепад давления, да и само давление. (В любом случае, оно начинается на поверхности с атмосферного.) Давление на изогнутой границе равно исходному гидростатическому давлению, которое составляющие ее частицы воды испытывали в спокойной воде (рис. 5).

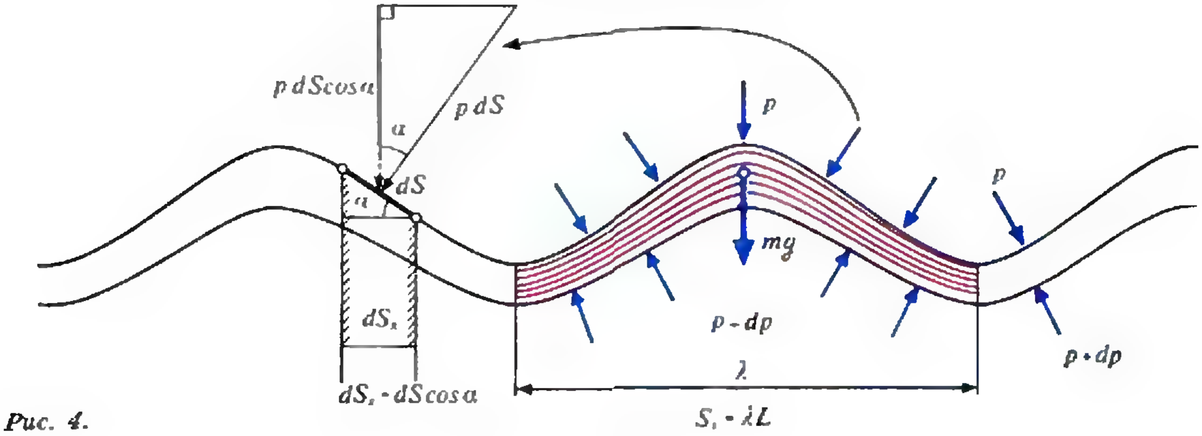


Рис. 4.

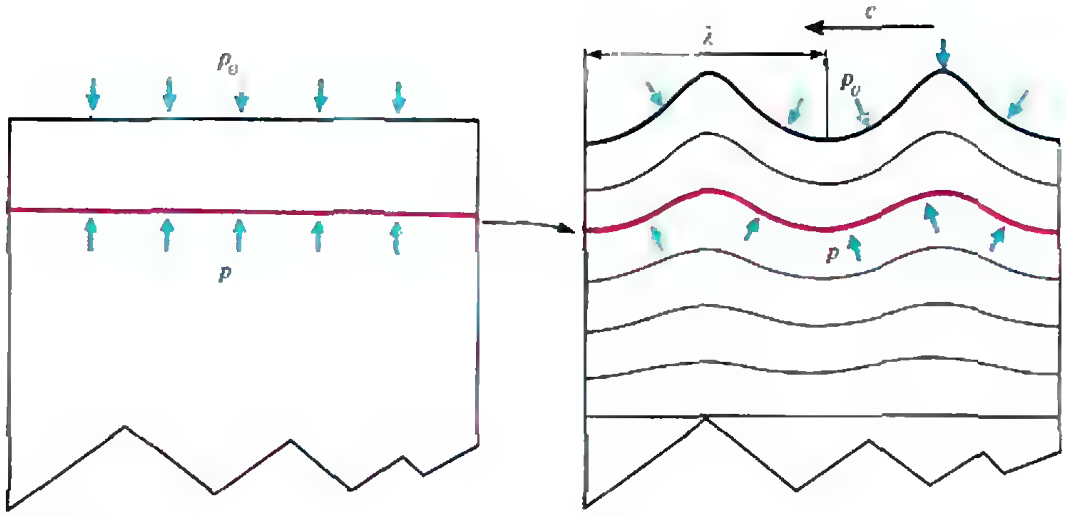


Рис. 5.

Ускорение частицы жидкости

Выделим малый участок тонкого слоя (рис. 6). Его торцы перпендикулярны скорости течения V. При времени прохождения этого участка dt длина наклонных границ равна Vdt, а их площадь — $LV\,dt$. Чтобы по второму закону Ньютона найти ускорение, нужно знать массу участка dm и сумму действующих на него сил.

За период $T=\lambda/c$ заменяется вся масса m волновой ячейки, поэтому ежесекундно по слою проходит масса $\dot{m}=m/T=(m/\lambda)c$. За время dt в наш участок входит масса

$$dm=(m/\lambda)c\,dt.$$

Отсюда сила тяжести, действующая на него, равна

$$dmg=(mg/\lambda)c\,dt.$$

Направлена она вниз под прямым углом к скорости волны c.

По течению давление не меняется, встречные силы давления на торцы в сумме дают нуль. Перепад давления dp на наклонных границах приводит к силе

$$dp\,LV\,dt=(mg/\lambda)V\,dt.$$

Эта сила перпендикулярна границе, т. е. направлена под прямым углом к скорости течения $\vec{V}$.

Обе силы получаются из векторов $\vec{V}$ и $\vec{c}$ одинаковым образом: поворотом на прямой угол и умножением на один и тот же коэффициент $(mg/\lambda)dt$. Поэтому и сумма сил получится из суммы скоростей $\vec{V}+\vec{c}$ тем же поворотом на прямой угол и умножением на тот же коэффициент (рис. 7). Поскольку $V+c=v$, суммарную силу можно выразить через скорость частицы воды относительно дна. Она перпендикулярна этой скорости и равна

$$F_{\text{сум}}=(mg/\lambda)v\,dt.$$

Разделив силу на массу dm, получим, что ускорение участка равно

$$a=\frac{g}{c}v.$$

Направлено оно под прямым углом к скорости v.

Это переломный момент. Мы разобрались, к какому ускорению приводят силы давления и тяжести, что позволит шаг за шагом раскрыть все детали.

Картина движения

Ускорение, перпендикулярное скорости, не меняет ее величину. Но тогда и само ускорение $a=(g/c)v$ неизменно по модулю. Постоянное ускорение, направленное под прямым углом к скорости, явно указывает на равномерное вращение по окружности (рис. 8). При ее радиусе r центростремительное ускорение будет $a=$

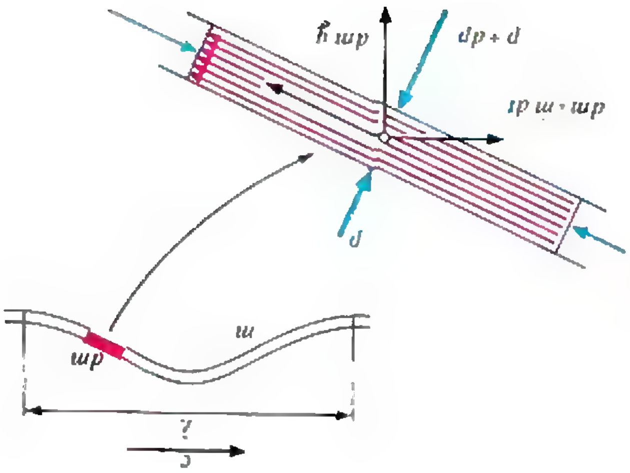


Рис. 6.

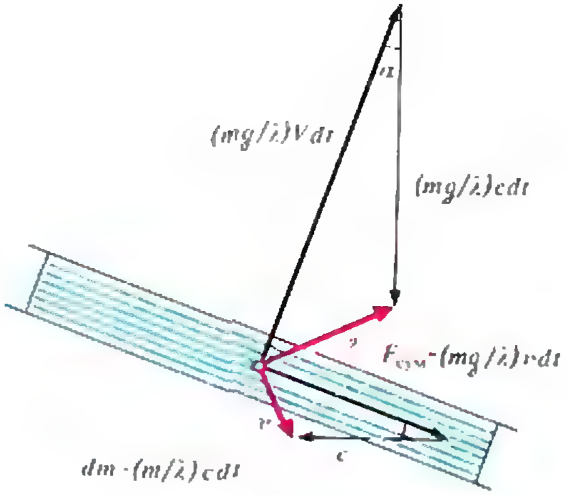


Рис. 7.

$=v^2/r$, а поскольку угловая скорость равна $\omega=v/r$, то $a=\omega v$. Сравнив последнее равенство с выражением для ускорения, найденным раньше, получим для угловой скорости:

$$\omega=\frac{g}{c}.$$

По существу, раскрылась вся картина движения: частицы воды описывают окружности постоянного радиуса с общей для всех угловой скоростью. Для частиц, образующих профиль волны, радиусы этих окружностей одинаковы, а их центры лежат на одной горизонтали. При одновременном вращении сдвиг между радиусами по углу сохраняется, а картина профиля смещается как целое со скоростью c (рис. 9). Это происходит по всей толще воды, от слоя к слою меняется только радиус окружностей.

Через период $T=2\pi/\omega$ частица вернется в исходное положение и окажется на таком же участке, но уже следующей волны (рис. 10), прошедшей за это время расстояние $\lambda=cT=2\pi c/\omega$. Поскольку $\omega=g/c$, то $\lambda=2\pi c^2/g$. Для скорости волны имеем

$$c^2=\frac{g\lambda}{2\pi}.$$

Разбираться с профилем удобней в системе отсчета остановленной волны. Он тогда прорисовывается самóй частицей, движение которой является наложением вращения и посту-

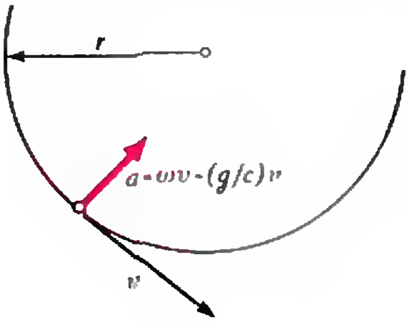


Рис. 8.

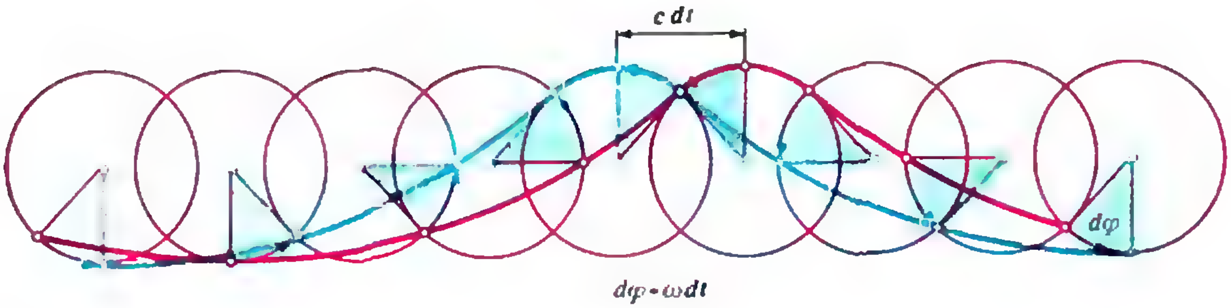


Рис. 9.

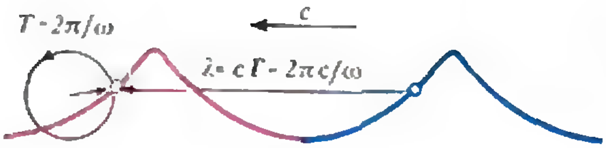


Рис. 10.

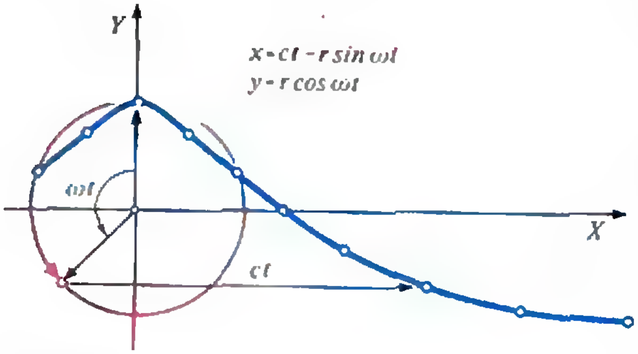


Рис. 11.

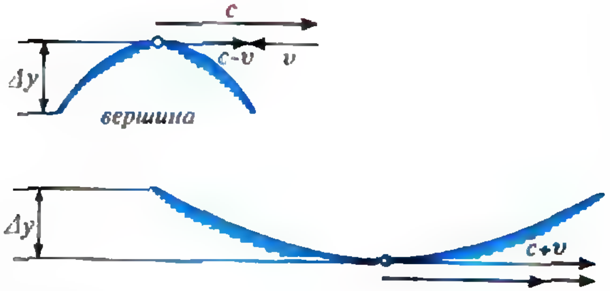


Рис. 12.

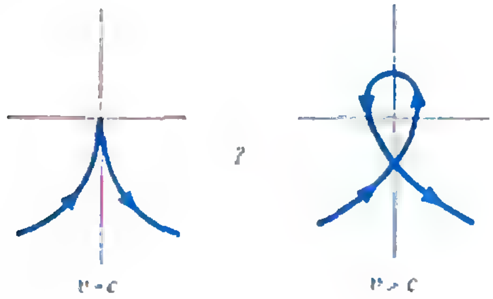


Рис. 13.

пательного движения со скоростью c. Это позволяет построить профиль и найти зависимость координат от времени:

$$x=ct-r\sin\omega t,\quad y=r\cos\omega t.$$

Начало координат (рис. 11) выбрано в центре окружности, а нулевой момент времени отвечает моменту прохождения частицей вершины.

Для слабой волны ($v=\omega r$ мало́ по сравнению с c) горизонтальную скорость $V_x=c-\omega r\cos\omega t$ можно считать постоянной и равной c. Тогда $x\approx ct$. В выражении для y заменим t на x/c и получим приближенное уравнение профиля:

$$y=r\cos(\omega x/c)=r\cos(2\pi x/\lambda).$$

Слабая волна оказывается синусоидой. Приведенное выше условие «слабости» волны эквивалентно неравенству $r\ll\lambda/2\pi$.

Для умеренных волн заметно заострение у вершин и уплощение у впадин (рис. 12). Отклонения по вертикали от вершин и от впадин за равные малые промежутки времени одинаковы, а горизонтальные смещения различаются: скорость в вершине $c-v$, а во впадине $c+v$. Чем ближе v к c, тем сильнее горизонтальное «сжатие» вершин.

Физическое чутье подсказывает, что нужно ожидать особенностей при переходе естественного рубежа скорости волны. Формально, при $v=c$ образуется бесконечно острый вертикальный клюв, а при $v>c$ — самопересечение профиля с появлением петли (рис. 13). Для волны на воде это выглядело бы дико. При v меньших c, но близких к ней, слои вблизи заостренных вершин, согласно нашей теории, круто изгибаются, и от слоя к слою довольно резко меняется скорость течения. Возникает сомнение не только в том, что такое движение воды устойчиво, но и в том, что оно достаточно близко к устойчивому. Поэтому случай сильных волн требует более сложного исследования.

Ослабление волн с глубиной

Вершины и впадины послойных волн находятся точно одна под другой. В симметричных относительно вершин точках профиля одинакова по модулю скорость течения, а вследствие постоянства потока одинакова и толщина слоя, что и исключает перекос.

Границы слоя в остановленной волне образованы траекториями частиц. Для каждой движение является наложением вращения и поступательного движения. Отличие в том, что центры окружностей находятся на

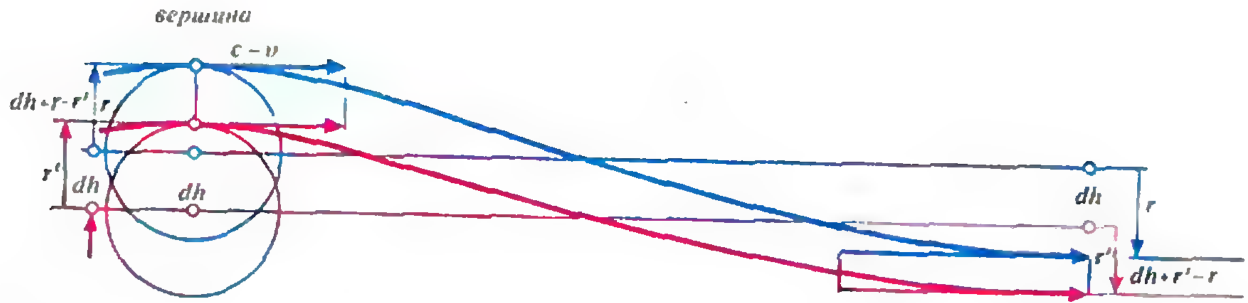


Рис. 14.

разной глубине и их радиусы не одинаковы.

Для установления зависимости радиуса от глубины обратимся к постоянству потока по слою. Выберем два сечения. Одно между вершинами, где оба радиуса «смотрят» вверх, а скорость течения равна $c-v$ и направлена горизонтально; другое между впадинами, где радиусы «смотрят» вниз, а скорость течения равна $c+v$ (рис. 14). При малом расстоянии dh между центрами радиусы r и r' верхней и нижней окружностей слегка отличаются. Толщина слоя между вершинами $dh+r-r'$, между впадинами же она $dh+r'-r$. Равенство потоков в этих сечениях означает, что

$$(dh+r-r')(c-v)=(dh+r'-r)(c+v).$$

Теперь можно найти приращение радиуса $dr=r'-r$, оно получается отрицательным:

$$dr=-\frac{v}{c}dh,$$

и это правильно, радиус с глубиной уменьшается. Поскольку $v=\omega r$, то уменьшение радиуса пропорционально самому радиусу. С опусканием центра окружности на dh любой радиус уменьшается на одну и ту же долю:

$$\frac{dr}{r}=-\frac{\omega}{c}dh.$$

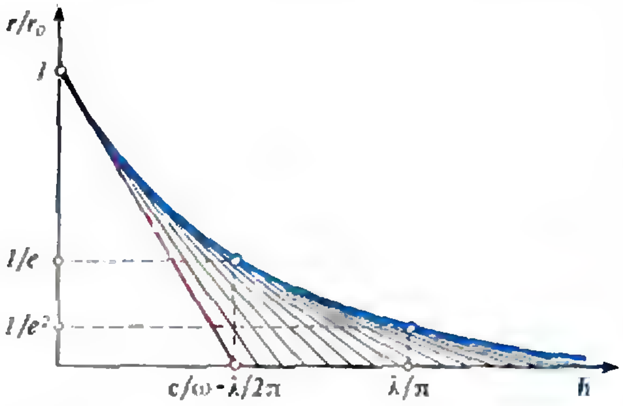


Рис. 15.

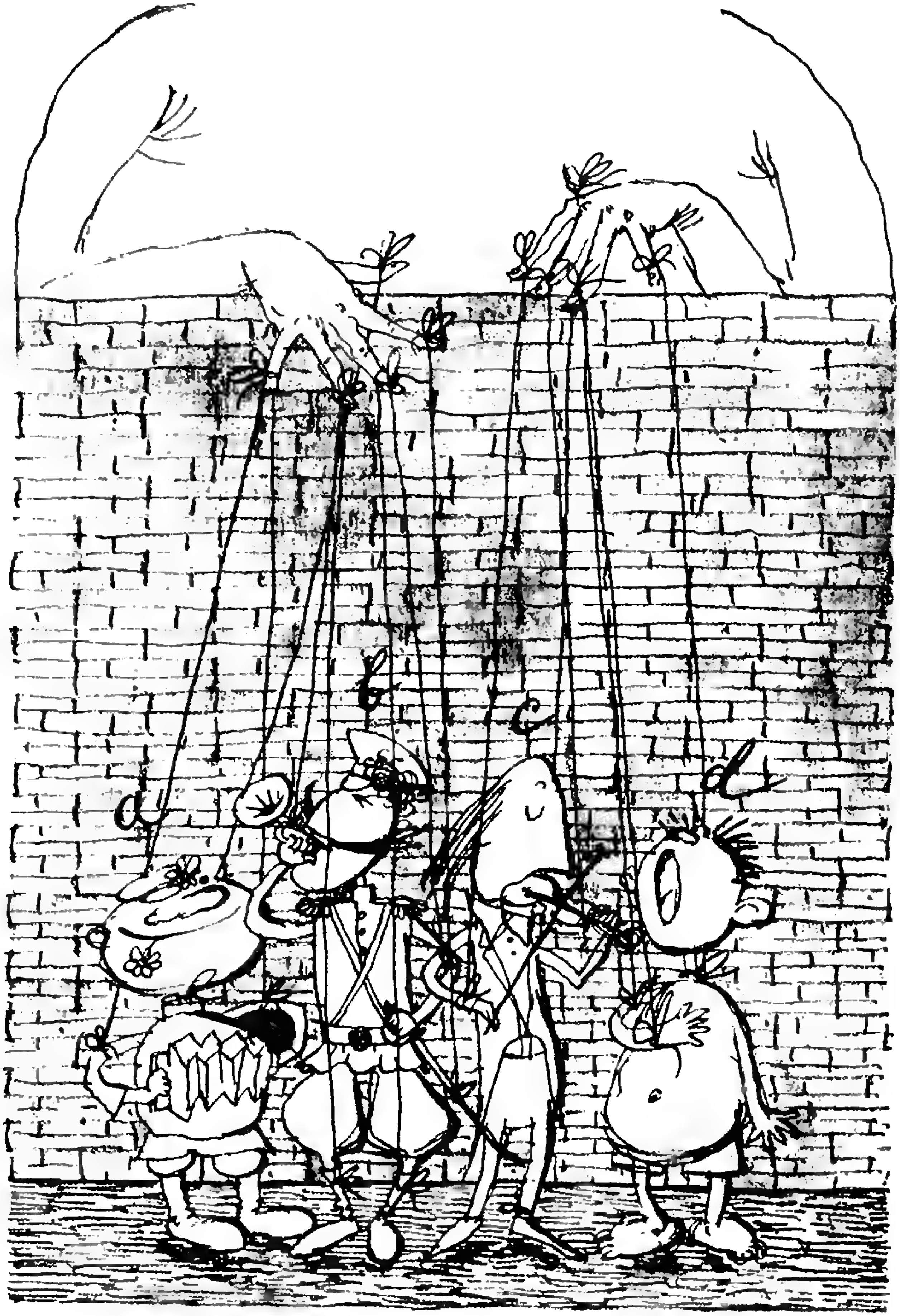
Начав с поверхностной окружности радиусом r_0 и спускаясь малыми шагами от ее центра, отсюда можно численно или графически найти радиус на любой глубине h (рис. 15). Умеющие интегрировать могут вывести аналитическое выражение:

$$r=r_0e^{-\frac{\omega h}{c}}=r_0e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}$$

(легко получить, что $\omega/c=2\pi/\lambda$).

Размах волн и скорость воды уменьшаются с глубиной в геометрической прогрессии. Число e примерно равно $2{,}72\approx10^{0{,}43}$. На глубине $\lambda/2\pi$ волна ослабляется примерно втрое. На глубине же, равной длине волны,— в $e^{2\pi}$ раз, что близко к 535. При глубине, сравнимой с длиной волны, придонное волнение много слабее поверхностного, что позволяет пренебречь влиянием дна.

Несколько слов в заключение. Основное исходное допущение — отсутствие перепадов давления вдоль изгибов. По существу, тогда глубинная волна подобна поверхностной, только с иным «атмосферным» давлением. Открытие такого рода «самоуподобления», или «автомодельности», зачастую приводило к успеху в решении сложных проблем — от динамики сред до физики элементарных частиц. В нашей задаче это позволило описать движение всей воды, применив второй закон Ньютона к единственной частице.



ДЕМОКРАТИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

В. ПАХОМОВ

Считается, что демократия — это искусство политического маневрирования. Наверное, во многом это так, но далеко не во всем. Цель этой статьи — показать, что и математика играет не последнюю роль в политике. Обсудим проблему выбора, которую мы будем понимать достаточно широко. Это может быть выбор должностного лица, лауреата какого-нибудь конкурса, выбор проекта (конституции, закона, освоения нового региона, стратегии политической или экономической деятельности и т. п.) и так далее. Главное условие — выбирается один вариант из нескольких альтернативных и обязательно путем голосования. В основе демократических принципов и лежит это правило — наиболее важные решения принимаются путем прямого голосования самых широких слоев общества. Казалось бы, при таком подходе к делу все должны быть удовлетворены, однако на практике получается, что каждый раз после очередного голосования число недовольных вполне сравнимо (если не превышает) с числом удовлетворенных его результатом. Случайно ли это? Попробуем рассмотреть этот вопрос детально.

Некоторые правила голосования

Несколько слов о терминологии. Пусть имеется n избирателей и m кандидатов, например, в депутаты, президенты, мэры и т. д. Каждый из избирателей упорядочивает кандидатуры, определяя для себя наиболее предпочтительного кандидата, затем занимающего второе, третье и т. д. места. Например, если избиратель с номером 6 считает, что наилучшим является кандидат a, затем идет b, а затем c, то мы это запишем в виде его *системы индивидуальных предпочтений* так:

$$a \overset{6}{\succ} b \overset{6}{\succ} c,$$

и будем говорить, что a лучше b, b лучше c с точки зрения 6-го избирателя. Сведя эти системы индивидуальных предпочтений в одну итоговую таблицу, мы получим *профиль голосования*. Например, пусть число избирателей $n=17$, а кандидатов четверо: a, b, c и d; и пусть пять избирателей упорядочивают кандидатов так: $a \succ d \succ c \succ b$, трое других: $a \succ d \succ b \succ c$, еще пятеро: $b \succ c \succ d \succ a$, а оставшиеся четверо так: $c \succ d \succ b \succ a$. В таком случае профиль голосования выглядит следующим образом:

Профиль A_1

Количество голосов	5	3	5	4
Кандидаты	d	d	b	c
	c	b	c	d
	b	c	d	b

Рассмотрим теперь некоторые правила голосования.

1. *Правило относительного большинства.* Каждый избиратель отдает ровно один голос за своего кандидата. Побеждает тот, кто получит наибольшее количество голосов.

Для профиля A это означает, что при голосовании a получит 8 голосов, b — 5 голосов, c — 4 голоса. Следовательно, по этому правилу побеждает a.

2. *Правило абсолютного большинства.* Каждый избиратель отдает ров

но один голос за своего кандидата. Набравший более половины голосов побеждает. Если никто не набрал более половины голосов, то проводится второй тур голосования. При этом во второй тур выходят два кандидата, набравшие наибольшее количество голосов. Во втором туре побеждает тот, кто набрал большинство голосов (а следовательно, и более половины числа отданных голосов).

Что это означает для нашего профиля *A*?

В первом туре число голосов, поданное за кандидатов, равно $n_a=8$, $n_b=5$, $n_c=4$. Следовательно, во второй тур проходят *a* и *b*. Вычеркнув из профиля *A* кандидатов *c* и *d*, не прошедших во второй тур, мы получим следующий профиль второго тура:

5	3	5	4
a	*a*	*b*	*b*
b	*b*	*a*	*a*

Это означает, что во втором туре выигрывает кандидат *b*, за которого подано 9 голосов, тогда как за *a* — лишь 8.

К сожалению, это правило не всегда определяет победителя.

3. *Правило Бордá*. Каждый избиратель дает нуль очков кандидату, находящемуся на последнем месте, одно очко — предпоследнему, два очка — находящемуся на третьем месте с конца и т. д. Побеждает кандидат, набравший наибольшую сумму очков.

(Это правило часто используется с небольшой модификацией на спортивных соревнованиях: каждый судья определяет место спортсмена, и побеждает набравший наименьшую сумму мест.)

Для профиля *A* имеем:

Число избирателей		5	3	5	4
Очки за места:	3	*a*	*a*	*b*	*c*
	2	*d*	*d*	*c*	*d*
	1	*c*	*b*	*d*	*b*
	0	*b*	*c*	*a*	*a*

Это означает, что число очков n_a, набранных кандидатом *a*, равно $n_a=8\times3+9\times0=24$, аналогично $n_b=5\times3+7\times1+5\times0=22$, $n_c=4\times3+5\times2+5\times1+3\times0=27$ и $n_d=12\times2+5\times1=29$.

Таким образом, побеждает *d*, на втором месте оказывается *c*, а победители по предыдущим правилам занимают наихудшие места!

Взглянем теперь на голосование с другой стороны. Что, например, представляет собой с точки зрения избирателей кандидат *d*? Из профиля *A* видно, что 8 избирателей считают его хуже *a*, а 9 — лучше *a*. Иначе говоря, *d* выигрывает дуэль с *a* девятью голосами против восьми, что мы запишем так: $d>a$ — 9:8.

Аналогично в сравнении с *b* имеем $d>b$ — 12:5, т. е. еще больше *d* выигрывает в сравнении с победителем голосования по правилу абсолютного большинства.

Результаты других дуэлей:

$b>a$ — 9:8; $c>a$ — 9:8;
$c>b$ — 9:8, $c>d$ — 9:8.

4. *Правило Кондорсе*. Победителем по Кондорсе называется такой кандидат *x*, который выигрывает в парных сравнениях у всех остальных кандидатов.

В профиле *A* победитель по Кондорсе — кандидат *c*. Отметим, что победителя по Кондорсе может и не оказаться.

Рассмотрим, наконец, еще одно правило, обобщающее два из уже перечисленных.

5. *Правило с подсчетом очков*. Пусть число кандидатов равно *m*. Фиксируем числа $s_1, s_2, \ldots, s_m$ такие, что $0=s_1\leqslant s_2\leqslant\ldots\leqslant s_m$, где $s_m>0$. Избиратели дают s_1 очков своим последним кандидатам, s_2 — предпоследним, s_3 — третьим с конца, ..., s_m — первым кандидатам. Побеждает кандидат, набравший максимальную сумму очков.

При $s_1=s_2=\ldots=s_{m-1}=0$ и $s_m=1$ мы получим правило относительного большинства, а при $s_1=0$, $s_2=1$, ..., $s_m=m$ — правило Борда. Таким образом, разные шкалы голосования $s_1, s_2, \dots, s_m$ могут выводить разных кандидатов в победители.

Парадоксы голосования

Первые четыре правила дают четыре различных представления о понятии «наилучшего (с точки зрения коллектива) выбора». Приводят они, как мы уже видели, к различным результатам. Причем победитель по одному из правил может оказаться наихудшим по другому. Например, для профиля A победитель по правилу относительного большинства является наихудшим по Кондорсе, а победитель по правилу абсолютного большинства — наихудшим по Борда. Поэтому при нашем профиле любой способ голосования даст результат, неудовлетворительный более чем для половины избирателей (которые, естественно, будут анализировать его с разных точек зрения). Правило 5 достаточно гибкое, и может показаться, что при надлежащем подборе шкалы оно сможет заменить любое из первых четырех. Действительно, правило относительного голосования и правило Борда следуют из него как частные случаи. Далее, пусть $s_1=0$, $s_2=4$, $s_3=9$, $s_4=16$, тогда победителем для A по этому правилу становится c — победитель по Кондорсе. Тем не менее это правило существенно отличается от правил абсолютного большинства и Кондорсе. Именно, верны следующие два утверждения:

Лемма 1°. *Существуют такие профили голосования, что победитель по правилу абсолютного большинства не может быть победителем ни при каком подсчете очков.*

Лемма 2°. *Существуют такие профили голосования, что победитель по Кондорсе не может быть победителем ни при каком подсчете очков.*

Доказательство леммы 1°. Его дает профиль A. Здесь победитель по правилу абсолютного большинства — кандидат b. Подсчитаем очки каждого кандидата для шкалы $0=s_1\leqslant s_2\leqslant s_3\leqslant s_4$, $s_4>0$:

$$n_a=8s_4,$$
$$n_b=5s_4+7s_2,$$
$$n_c=4s_4+5s_3+5s_2,$$
$$n_d=12s_3+5s_2.$$

Если b — победитель, то

$$n_b-n_a=-3s_4+7s_2>0,$$
$$n_b-n_c=s_4-5s_3+2s_2>0.$$

Из этих неравенств получаем

$$\frac{7}{3}s_2>s_4>5s_3-2s_2,$$

откуда вытекает, что

$$s_2>\frac{15}{13}s_3.$$

С другой стороны, $s_2\leqslant s_3$, так что

$$s_3\geqslant s_2>\frac{15}{13}s_3,$$

а значит,

$$\frac{2}{13}s_3<0.$$

Последнее неравенство противоречит условию $s_3\geqslant 0$. Выходит, b не может быть победителем по правилу 5.

Для доказательства леммы 2° рассмотрим такой профиль B:

Профиль B

	3	6	4	4
s_3	c	a	b	b
s_2	a	b	a	c
0	b	c	c	a

Здесь $a>b$ — 9:8 и $a>c$ — 10:7, т. е. a — победитель по Кондорсе. Подсчитаем очки каждого кандидата:

$$n_a=6s_3+7s_2,$$
$$n_b=8s_3+6s_2,$$
$$n_c=3s_3+4s_2,$$

откуда видно, что $n_b-n_a=2s_3-s_2=s_3+(s_3-s_2)>0$, так как $s_3\geqslant s_2$ и $s_3>0$. Значит, a проигрывает b по очкам при любом подборе шкалы.

Рассмотрим еще несколько парадоксов. Как мы уже знаем, при голосовании по правилу абсолютного большинства для профиля A побеждает b. Кандидат a, не имеющий шансов выиграть, может снять свою кандидатуру. В таком случае мы получим следующий профиль голосования:

Профиль C

5	3	5	4
d	d	b	c
c	b	c	d
b	c	d	b

Теперь во второй тур выходят d и b (8 и 5 голосов соответственно), и во втором туре:

12	5
d	b
b	d

побеждает d! Итак, a, отказавшись от участия в выборах, тем самым проваливает своего соперника b.

Аналогичный пример для правила Борда дает такой профиль:

Профиль D

	2	1
4	b	d
3	a	c
2	d	e
1	c	b
0	e	a

Здесь выигрывает b с 9 очками, за ним следует d с 8 очками. Пусть теперь a снимает свою кандидатуру, тогда получаем следующий профиль:

Профиль E

	2	1
3	b	d
2	d	c
1	c	e
0	e	b

где побеждает d с 7 очками (у b теперь всего 6 очков, у c — 4, у e — 1 очко).

И наконец, еще более эффектный парадокс. Рассмотрим два профиля:

Профиль F

6	5	4	2
a	c	b	b
b	a	c	a
c	b	a	c

Профиль G

6	5	4	2
a	c	b	a
b	a	c	b
c	b	a	c

У этих двух профилей три первые колонки одинаковы, а последние отличаются тем, что в профиле G положение a улучшается по сравнению с профилем F, а положение b — ухудшается. Можно себе представить, что второй профиль получился из первого после того, как два избирателя, сведенные в последнюю колонку, поменяли свое мнение в пользу a против b.

При голосовании по правилу абсолютного большинства для профиля F в первом туре побеждают a и b, а во втором — выигрывает a. Для профиля G имеем: после первого тура остаются a и c, а во втором туре выигрывает c. Таким образом, голосуя за a вместо b, упомянутые два избирателя проваливают a!

(Окончание следует)

Грибы и рентгеновская астрономия

Кандидат физико-математических наук
А. МИТРОФАНОВ

> *Две вещи поражают нас больше всего — звезды над головой и совесть внутри нас...*
>
> Древняя мудрость

Эта статья посвящена скромной, но славной дате. 30 лет назад, точнее, 18 июня 1962 года, был обнаружен первый внесолнечный источник рентгеновского излучения. Этот источник находится в созвездии Скорпиона, и по принятой в астрономии терминологии ныне он называется Скорпион X—1 (Sco X—1).

Открытие было сделано совершенно неожиданно в ракетном эксперименте американскими учеными Б. Росси и Г. Кларком из Массачусетского технологического института и Р. Джиаккони, Ф. Паолини и Г. Гурским из Американской научно-технической корпорации. Экспериментаторы планировали исследовать в рентгеновской области спектра (в полосе $2A < \lambda < 8A$) с помощью счетчиков фотонов флюоресценцию поверхности Луны, которая вызвана потоком быстрых частиц, истекающих из горячей солнечной короны,— солнечным ветром. С поверхности Земли мягкое рентгеновское излучение не регистрируется, так как оно поглощается атмосферой. Поэтому и пришлось устанавливать приборы на борту ракеты «Аэроби-150», способной поднимать научную аппаратуру на высоту более 200 км.

Тогда считалось маловероятным, что кроме Солнца и Луны на небе что-то заметно излучает в рентгеновском диапазоне. *) Действительно, до

---

*)Рентгеновское излучение Солнца было открыто в конце 40-х годов американскими учеными. В окрестности земной орбиты поток рентгеновского излучения от «спокойного» Солнца порядка 10[illegible] фотонов/ (см^2 · с). Во время солнечных вспышек рентгеновский поток возрастает во много раз.

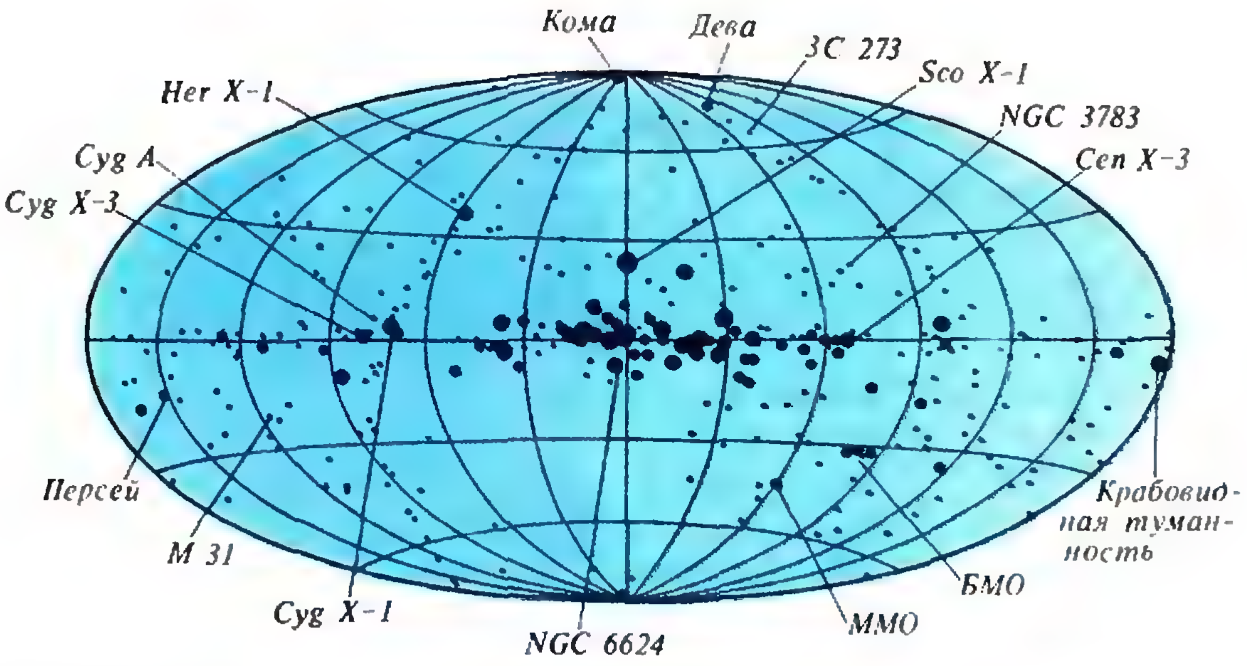


Рис. 1. Карта «рентгеновского» неба, полученная по результатам обработки информации со спутника «Ухуру», запущенного группой Р. Джаккони 12 декабря 1970 г. Величина кружка соответствует яркости источника. Источник Sco X—1, зарегистрированный в ракетном запуске 1962 г., один из самых ярких на небе. Он расположен в центральной части карты, недалеко от галактического экватора. В этом эксперименте использовались счетчики рентгеновских фотонов с пластинчатыми коллиматорами с углом зрения 5×5° и 5×0,5°.

звезд, даже до самых близких, так далеко, что множитель $1/R^2$, учитывающий ослабление потока от звезды с расстоянием R, сводил на нет все попытки зарегистрировать рентгеновское излучение от звезд типа Солнца и даже от более массивных и горячих звезд.*) Рентгеновский поток от горячих звезд по оценкам не должен был превышать величины порядка 10^{-3} фотон/(см$^2\cdot$ с), т. е. должен быть очень слабым для возможного измерения существующими тогда приборами. И тем не менее два из трех счетчиков фотонов в рентгеновском эксперименте 1962 года показали резкое увеличение скорости счета.

В полете ракета вращалась вокруг продольной оси, и показания счетчиков коррелировали с этим движением. Поэтому, хотя у счетчиков было большое поле зрения, удалось выяснить, что источником рентгеновского излучения является некоторый объект, находящийся приблизительно в направлении на центр нашей Галактики. Точное направление на источник в том эксперименте установить было невозможно, хотя было ясно, что ни Солнце, ни Луна к увеличению скорости счета рентгеновских фотонов отношения не имели. В том же эксперименте был обнаружен сравнительно яркий непрерывный рентгеновский фон неба.

Год спустя ученые повторили запуск «Аэроби» с новой аппаратурой. Поле зрения рентгеновских счетчиков было уменьшено с помощью так называемого рентгеновского коллиматора, имеющего стенки, непрозрачные для рентгеновских лучей. Источник, открытый в 1962 году, был зарегистрирован вновь! Но теперь уже удалось определить его координаты на небесной сфере. Еще один яркий рентгеновский источник был обнаружен, правда, в другой части неба, в Крабовидной туманности (Тан X—1). Сомнений не осталось: вне Солнечной системы есть необычайно яркие рентгеновские излучатели (рис. 1, 2). Это открытие перевернуло старые представления об устройстве Вселенной и стимулировало развитие совершенно новой экспериментальной науки — рентгеновской астрономии. Подробнее об этом открытии и о природе необычных рентгеновских источников во Вселенной вы сможете узнать из научно-популярной литературы. Некоторые из ссылок вы найдете в конце этой статьи.

---

*) Современная аппаратура позволяет регистрировать рентгеновское излучение звездных корон обычных звезд, например α-Центавра — звезды типа Солнца.

Ну а мы с вами на этом оставим небо и выдающееся открытие в астрофизике XX века и вернемся на Землю, к экспериментальной аппаратуре, с помощью которой и делаются открытия. Рассмотрим подробнее один из элементов рентгеновской оптики — коллиматор, входящий в состав аппаратуры современного рентгеновского или гамма-телескопа (рис. 3, 4). Устройство его простое: это система параллельных плоскостей из металла, масок, щелей или одинаковых трубочек, ограничивающих поле зрения зеркала телескопа или счетчика фотонов. Желательно, чтобы стенки коллиматора были «черными» для длин волн в рабочем диапазоне спектра. Тем самым объекты вне поля зрения прибора и посторонний непрерывный фон не будут мешать наблюдать источники по лучу зрения на малом угловом расстоянии от его оси.

Если бы вам сказали, что в лесу растет бинокль или какой-либо другой оптический прибор, вы, конечно, не поверили бы. И тем не менее, в наших лесах можно встретить нечто, очень напоминающее оптическое устройство — рентгеновский коллиматор, о котором идет разговор. Мы не шутим. Действительно, «макет» такого прибора, его «модель», почти готовая к использованию в экспериментах, растет на березах или некоторых других деревьях. Это так называемый настоящий трутовик (Fomes fomentarius) из семейства трутовиков (Polyporaceae). Трутовики встречаются на отмерших сухостойных березах или ольхе. Под березами, пораженными трутовиками, растут в положенное для них время другие грибы — опята; этот секрет знаком многим грибникам.

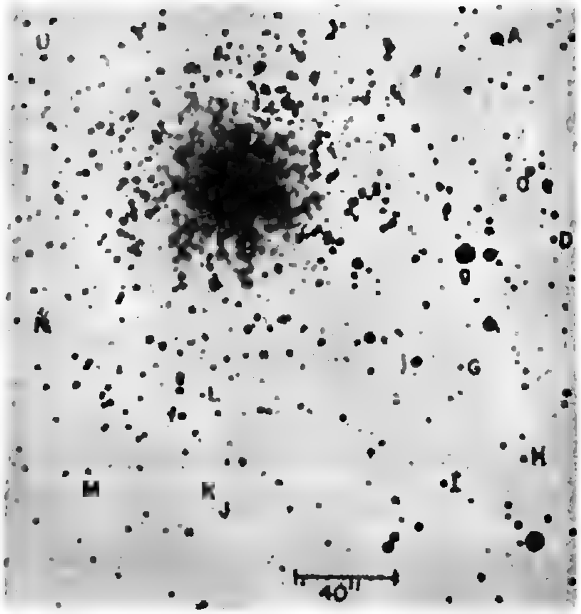


Рис. 2. Шаровое скопление NGC 6624, в котором находится сильный (интенсивный) рентгеновский источник (см. карту неба в рентгеновских лучах).

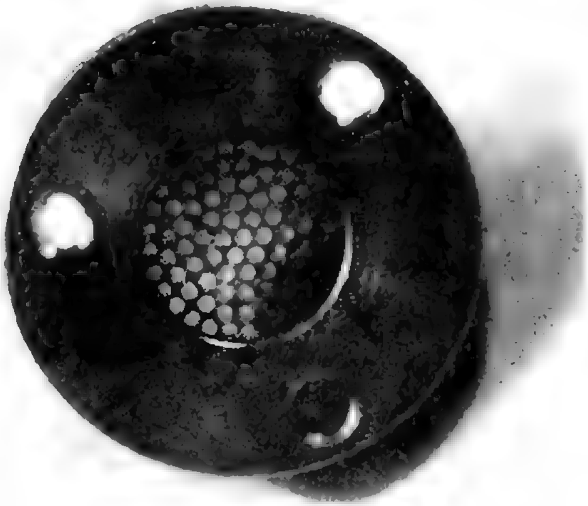


Рис. 3. Коллиматор, набранный из металлических трубочек-капилляров.

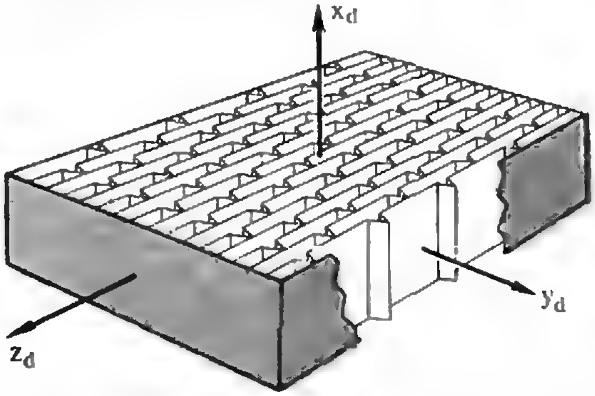


Рис. 4. Пластинчатый рентгеновский коллиматор, который использовал Росси и его коллеги.

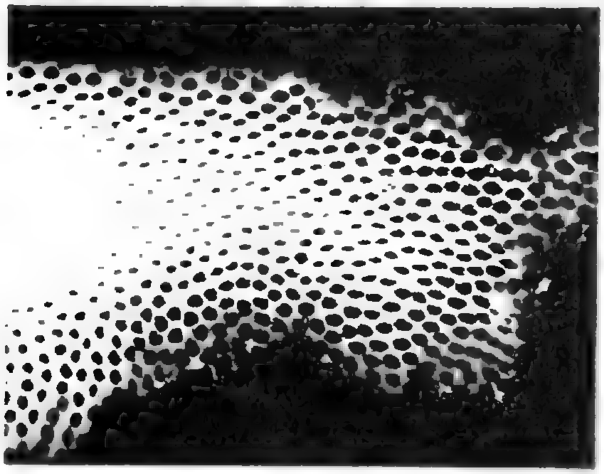


Рис. 5. Поперечный срез слоя трутовика.

Плодовое тело трутовика внешне и наощупь напоминает натуральную пробку. Но если присмотреться, то можно заметить, что эта «пробка» состоит из огромного числа пор приблизительно цилиндрической формы с осями, расположенными перпендикулярно нижней горизонтальной поверхности гриба-трутовика. В порах-трубочках находятся споры гриба. Каждый год у трутовика вырастает новый пористый слой, отчего тело гриба имеет слоистое строение. С внешней стороны гриба по уступам видно, сколько лет прожил гриб. Для наших исследований важно, что почти по всей площади гриба поры каждый сезон растут не произвольным образом, а являются продолжением прошлогодних. Поэтому, когда грибные споры высыпятся из трубочек, через толстый и плотный слой трутовика можно смотреть на просвет, ведь поры сквозные. Чем не рентгеновский коллиматор!*)

Принесем из леса крупный трутовик и вырежем из него несколько слоев различной толщины. С этими заготовками можно сделать несколько опытов. Предварительно слои трутовика желательно высушить под плоским гнетом, чтобы они не коробились со временем.

Опыт 1. Прежде всего найдем, какова плотность пор, т. е. сколько пор приходится на единицу поверхности грибного слоя, и попробуем измерить их диаметр D. С помощью микроскопа эту работу можно выполнить сравнительно легко. Но вовсе не обязательно иметь микроскоп. Воспользуемся обычным фотоувеличителем или кинопроектором. Сделаем острым ножом или бритвой тоненький срез мякоти гриба, приблизительно ориентированный в направлении, перпендикулярном каналам пор гриба, т. е. параллельном нижней поверхности гриба. Поместим срез в кассету фотоувеличителя вместо негатива, сфокусируемся и отпечатаем увеличенное позитивное изображение на фотобумаге. Впрочем, можно ограничиться обводом контуров пор на обычной бумаге. Остается только прокалибровать коэффициент увеличения фотоувеличителя, посчитать количество пор на снимке и измерить их диаметр. В качестве примера на рисунке 5 показано изображение теневой проекции поперечного среза трутовика, масштабная метка равна 2 мм. А на рисунке 6 видно изображение поверхности слоя трутовика, полученное с помощью более сложного устройства — растрового электронного микроскопа. Масштабная метка на снимке соответствует 1 мм (светлая линия). Из приведенных снимков следует, что средний диаметр пор трутовика около 1/3 мм, разброс значений D не слишком велик, хотя, строго говоря, форма пор далека от идеального цилиндра.

Подумайте, почему для измерений в этом опыте мы выбрали тонкий срез гриба, а не весь его слой, хотя он тоже пропускает свет (трубочки-поры сквозные).

Опыт 2. Интересно посмотреть на предметы через слой трутовика. Включим настольную лампу, поместим на пути лучей пористый слой гриба и будем наблюдать, как выглядит спираль лампы через сквозные поры. Для проведения этого опыта необходим неко-

---

*) Заметим, что пустотелые поры трутовика когда-то служили людям: раньше, когда не было спичек, из трутовика выделывали трут — материал, который возгорался и тлел от упавшей искры. Искру получали при ударе огнива и кремень.

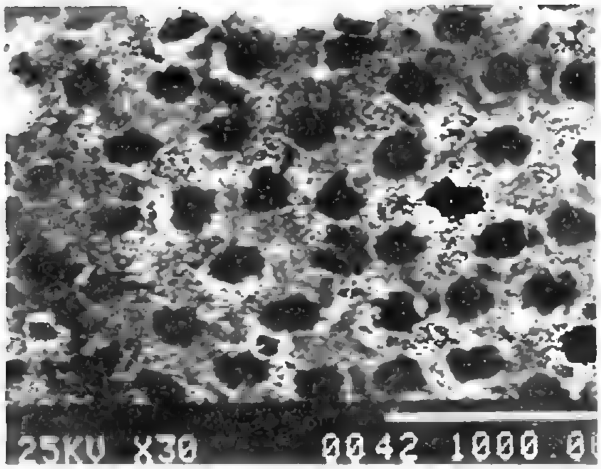


Рис. 6. Электронная микрофотография поверхности кусочка гриба-трутовика.

торый навык уметь выдерживать заданное направление и поворачивать слой на небольшой угол. Действительно трубочки-поры узкие и угол зрения коллиматора сравнительно мал: $\alpha_{\max} \sim D/L \ll 1$. Даже для тонкого слоя толщиной 3 мм он равен около 10°, а для слоя толщиной 3 см угол зрения около 1°.

Сфотографированная через пористый слой гриба-трутовика нить накала настольной лампы показана на рисунке 7.

Выполнив 2-й опыт, вы, наверное, придете к выводу, что отражение видимого света от стенок пор мало́, т. е. стенки пор как бы черные. Второе, что вы заметите, это некоторое размытие изображения нити, связанное с дифракцией света на мелких отверстиях, какими являются поры. Для рентгеновского излучения роль дифракционного размытия изображения не столь существенна при той же геометрии опыта, так как длина волны рентгеновского кванта много меньше, чем видимого.

Интересно также определить, как зависят оптические характеристики слоя трутовика от параметров трубочек-пор: их диаметра D и длины L. Оптические свойства любого коллиматора, в том числе и слоя трутовика, характеризуются прежде всего угловой зависимостью кривой пропускания коллиматора T от угла α поворота его оси относительно направления на параллельный пучок. Напрашивается идея провести опыт 3 — по измерению функции $T(\alpha)$, однако вместо этого попробуйте определить вид функции $T(\alpha)$ расчетным путем. Особенно эта задача будет интересной для любителей математики. Мы лишь приведем ответ:

$$T(\alpha) = T_0 \frac{2\cos\alpha}{\pi}\left(\arcsin\sqrt{1-\left(\frac{L}{D}\operatorname{tg}\alpha\right)^2} - \frac{L}{D}\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\left(\frac{L}{D}\operatorname{tg}\alpha\right)^2}\right),$$

где $-\operatorname{arctg}\frac{D}{L} \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{arctg}\frac{D}{L}$.

Когда угол зрения коллиматора мал, т. е. когда $\alpha \ll 1$, эту формулу можно упростить, учитывая, что при малых α $\cos\alpha \approx 1$, $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$:

$$T(\alpha) = T_0 \frac{2}{\pi}\left(\arccos\left|\frac{\alpha}{\theta}\right| - \left|\frac{\alpha}{\theta}\right|\left(1-\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},\right.$$

где $\theta = \frac{D}{L}$.

В такой форме обычно записывают уравнение $T(\alpha)$ для рентгеновского или гамма-коллиматора, набранного из одинаковых узких капилляров.

На этом в нашем рассказе можно было бы поставить точку. Но, право,

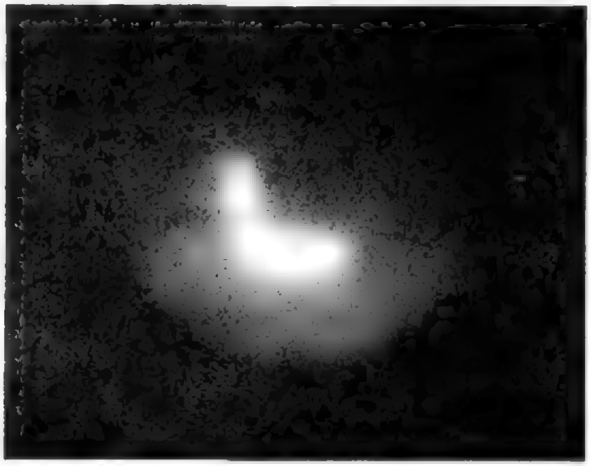


Рис. 7. Нить лампы накаливания, сфотографированная через пористый слой гриба-трутовика. Слой использовался в качестве коллиматора и устанавливался перед фотообъективом. Обратите внимание на некоторое размытие изображения, связанное с дифракцией света на отверстиях в слое.

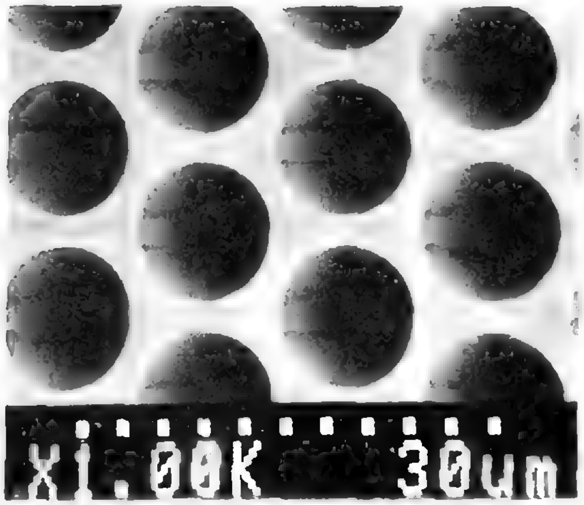


Рис. 8. Электронная микрофотография участка поверхности стеклянного микроколлиматора, изготовленного на основе так называемой микроканальной пластины. Основное применение микроканальной пластины в рентгеновской астрономии — это усиление изображения. Система полых стеклянных капилляров может применяться также для фокусировки рентгеновских лучей (линза Кумахова).

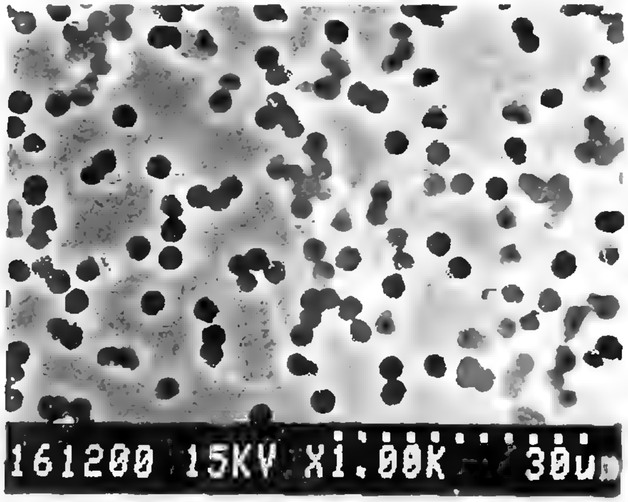


Рис. 9. Полимерный пористый коллиматор.

стоит упомянуть кратко о технических решениях задачи коллимировать рентгеновский поток, которые предложил человек, а не природа.

На рисунках 8 и 9 показаны стеклянный микроколлиматор с диаметром каналов около 10 мкм и тонкопленочный полимерный коллиматор для мягкого рентгеновского и вакуумного ультрафиолетового излучения с хаотически расположенными сквозными цилиндрическими отверстиями, диаметр которых около 2 мкм и которые могут быть сделанными еще меньше. Толщина полимерного коллиматора всего-то 10—20 мкм. Отверстия в полимерных пленках были получены при облучении материала на ускорителе тяжелых ионов и химическом травлении облученной пленки. Эти и другие искусственные пористые структуры уже давно используются в электронике и оптике, а также различных технологических задачах при фильтрации жидкостей и газов и т. д. Такие материалы по своим возможностям и техническим характеристикам кое в чем намного обогнали гриб-трутовик, о котором шла речь в нашей статье. Правда, эти стекляшки и полимерные пленки не пахнут грибами и под ними не растут опята...

Литература для дальнейшего чтения

1. Амнуэль П. Р. *Небо в рентгеновских лучах.* М.: Наука, 1984.

2. Нарликар Дж. *Неистовая Вселенная.* Пер. с англ. М.: Мир, 1985.

3. Амнуэль П. Р. *Загадки для знатоков. История открытия и исследования пульсаров.* М.: Знание, 1988.

Наша обложка

Компьютерная графика доступна не только владельцам компьютеров и графопостроителями (плоттерами), но и тем, кто имеет доступ и более простым компьютерам. Наш читатель Станислав Румянцев из п. Локотня Псковской обл. прислал нам серию «машинных картин», сфотографированных им с дисплея компьютера БК-0010. Одна из них помещена на обложке № 5 (сцепленные торы), а другая — на обложке этого номера журнала. Здесь изображены первые 72 простых числа, бо́льшие 1 000 000 000. Любопытно, что на их вычисление компьютер затратил лишь 30 секунд. (А сколько времени понадобилось бы вам?) *Обратите внимание,* что первые два из этих чисел — «близнецы», т. е. отличаются на 2. Эта картинка была затем подвергнута следующему преобразованию — ее центральную часть спроектировали на сферу, центр которой лежит в плоскости начального изображения. При этом часть информации пропала. Сможете ли вы ее восстановить?

А. П.

Задачи

М1361—М1365, Ф1368—Ф1372

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 ноября 1992 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах). На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1361» или «Ф1368». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи М1363 и М1365 предлагались на Московской математической олимпиаде, задачи Ф1368, Ф1370 и Ф1371 — на Московской физической олимпиаде 1992 года.

М1361. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника проведена высота CD и в треугольники ACD и BCD вписаны окружности с центрами P и Q. Общая внешняя касательная к этим окружностям пересекает катеты AC и BC в точках M и N, а высоту CD в точке K. Докажите, что

а) треугольники CMN и ABC подобны;

б) точки C, M, N, P и Q лежат на одной окружности с центром K, радиус которой равен радиусу вписанной окружности треугольника ABC.

Э. Готман

М1362. Докажите, что если натуральное число a взаимно просто с 10, то для любого M найдется n, для которого сумма цифр числа a^n больше M (другими словами, сумма цифр чисел a^n не ограничена).

С. Керопян

М1363. Можно ли n раз рассадить $2n+1$ человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более 1 раза, если а) $n=5$? б) $n=4$? в) n — произвольное натуральное число?

С. Токарев

М1364. Пусть $a+b+c=1$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$. Докажите неравенства:

а) $4a^3+4b^3+4c^3+15abc\geqslant 1$;

б) $a^3+b^3+c^3+abcd\geqslant \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{9}+\frac{d}{27}\right\}$

(здесь $\min\{x, y\}$ — наименьшее из чисел x, y).

В. Сендеров

М1365. Каждая грань выпуклого многогранника — многоугольник с четным числом сторон. Обязательно ли его ребра можно раскрасить в два цвета так, чтобы у любой грани было поровну ребер разных цветов?

С. Токарев

Ф1368. Велосипедное колесо радиусом $R=50$ см немного деформировали — оно осталось плоским, но превратилось в эллипс с разностью полуосей $\delta=a-b=1$ см. При какой скорости качения этого колеса по горизонтальной поверхности оно начнет подпрыгивать?

Примечание. Эллипс получается при равномерном растяжении (сжатии) окружности вдоль одной из координат. При этом уравнение окружности $\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}=1$ переходит в уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

М. Цыпин

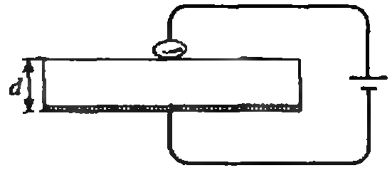
Задачник „Кванта"

Ф1369*. Тонкая гибкая веревка длиной $l=1$ м и массой $M=1$ кг подвешена концами к потолку. Расстояние между точками подвеса $d=0{,}5$ м. Найдите натяжение веревки в нижней точке и на половине высоты «провиса».

А. Зильберман

Ф1370. Кубический сосуд объемом $V=1$ л заполнен воздухом. Одна из стенок (*1*) поддерживается при температуре T_1, противоположная ей (*2*) — при температуре T_2, остальные стенки теплоизолированы. Найдите отношение средних частот соударений молекул со стенками *1* и *2*. Рассмотрите два случая: а) давление в сосуде равно атмосферному $p_0=1$ атм; б) сосуд откачан до давления $p=10^{-9}$ атм.

А. Семаков



Ф1371. На нижнюю поверхность горизонтальной диэлектрической пластины толщиной d и диэлектрической проницаемостью ε нанесено проводящее покрытие. На верхнюю поверхность помещена маленькая капля ртути, которая не смачивает пластину. Капля и проводящее покрытие образуют конденсатор (см. рисунок). При каком напряжении батареи капля начнет растекаться по поверхности пластины? Коэффициент поверхностного натяжения ртути σ.

Д. Купцов

Ф1372. К батарейке напряжением U_0 подключают последовательно соединенные конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L. В некоторый момент параллельно катушке подключают еще один конденсатор емкостью C. Каким может быть максимальный заряд этого конденсатора? Сопротивление проводов и внутреннее сопротивление батарейки считайте малыми.

А. Зильберман

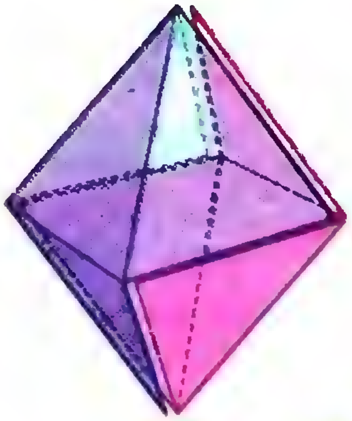
Решения задач

М1331 — М1335, Ф1348 — Ф1352

М1331. *Из бумаги склеены два одинаковых правильных тетраэдра. Какое наименьшее число ребер этих тетраэдров придется разрезать, чтобы затем склеить их по разрезанным ребрам в один правильный октаэдр?*

Ответ: 6. Легко изготовить правильный октаэдр из двух тетраэдров, у каждого из которых разрезаны три ребра, выходящих из одной вершины (основания этих тетраэдров будут служить противоположными гранями октаэдра, как показано на рисунке).

С другой стороны, меньшим числом разрезов обойтись нельзя. Ведь к каждой вершине октаэдра должно подходить не менее двух склеенных ребер: если к какой-то вершине A примыкало бы лишь одно такое ребро, то все примыкающие к A четыре треугольника должны были бы принадлежать одному тетраэдру (их углы с вершиной A вместе составляли бы в сумме $4\cdot 60^\circ=240^\circ$), а к вершине тетраэдра примыкают лишь три грани (с суммой



углов 180°). Поскольку у октаэдра шесть вершин, то концов у склеенных ребер должно быть не менее 6 · 2, а значит, этих ребер — не менее 6.

Более интересный вопрос: можно ли склеить из 5 правильных тетраэдров, разрезанных по ребрам, поверхность правильного икосаэдра — 20-гранника, в каждой вершине которого сходится по 5 треугольников, и если можно, то сколько ребер для этого нужно разрезать. Если выясните — напишите нам об этом.

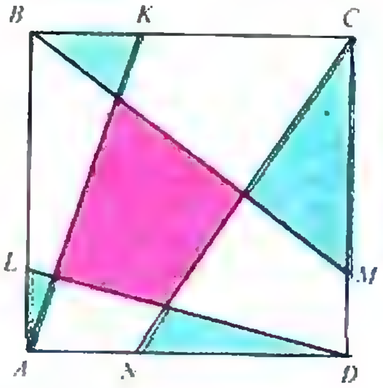
Б. Бегун

M1332. *Отрезки AK, BM, CN, DL делят квадрат ABCD со стороной 1 на четыре треугольника с площадями S_1, S_2, S_3, S_4 и пять четырехугольников; площадь центрального четырехугольника равна S_0, причем $S_0=S_1+S_2+S_3+S_4$ (см. рисунок: сумма площадей голубых треугольников равна площади розового четырехугольника). Докажите равенство*

$$AL+BK+CM+DN=2.$$

Разность между суммой площадей четырех треугольников DAL, ABK, BCM, CDN и площадью квадрата равна разности между суммой площадей голубых треугольников и розового четырехугольника, т. е. по условию она равна 0:

$$S_1+S_2+S_3+S_4-S_0=0.$$



Записывая площадь каждого из четырех треугольников DAL, ABK, BCM, CDN как половину произведения катетов (один из катетов — сторона квадрата, равная 1), получим требуемое равенство:

$$\frac{AL}{2}+\frac{BK}{2}+\frac{CM}{2}+\frac{DN}{2}=1.$$

Заметим, что аналогичное утверждение будет справедливо также, если вместо квадрата $ABCD$ рассмотреть ромб (поскольку у ромба все высоты равны).

С. Сефибеков

M1333. *Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то выполнено неравенство*

$$a^2(2b+2c-a)+b^2(2c+2a-b)+c^2(2a+2b-c)\geqslant 9abc.$$

Первое решение. Поделим левую и правую части неравенства на c^3 и введем обозначения

$$x=a/c;\quad y=b/c.$$

Тогда неравенство перепишется так:

$$f(x,y)=x^2(2+2y-x)+y^2(2+2x-y)+2x+2y-1\geqslant 9xy. \quad (*)$$

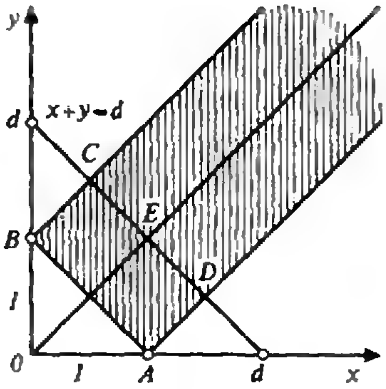


Рис. 1.

Мы должны доказать неравенство (*) при $x+y>1$, $x+1>y>x-1$, т. е. для точек (x, y), расположенных внутри полоски, заштрихованной на рисунке 1.

Заметим сначала, что $f(x, y)=f(y, x)$, так что функция f принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно прямой $y=x$.

В точках полоски, принадлежащих прямой $y=x$, функция f неотрицательна, так как

$$f(x, x)=(x-1)^2(2x-1),$$

а из неравенства $x+y>1$ при $x=y$ следует, что $x>1/2$.

Посмотрим, какие значения принимает функция $f(x, y)$ в точках прямой $x+y=d$, где $d>1$ (см. рис. 1). Эта прямая пересекает прямую $y=x$ в точке $(d/2;\ d/2)$. Выражая y через x и подставляя в (*), получим неравенство

$$g(x)=f(x, d-x)\geqslant 0.$$

Функция $g(x)$ — это квадратный трехчлен, принимающий равные значения в точках, симметричных относительно точки $x_0=d/2$, ибо

$$g(x)=f(x, d-x)=f(d-x, x)=g(d-x).$$

Это значит, что точка x_0 — абсцисса вершины параболы $y=g(x)$. В то же время при $y=x-1$, т. е. при $a=b+c$, исходное неравенство после простых преобразований приводится к очевидному неравенству $b^2+c^2\geqslant 2bc$, так что неравенство (*) справедливо при $x+y=d$, $y=x-1$, т. е.

$$g\left(\frac{d+1}{2}\right)\geqslant 0.$$

Следовательно, функция $g(x)$ неотрицательна при всех x из промежутка $\left(\frac{d-1}{2};\ \frac{d+1}{2}\right)$, т. е. неравенство (*) выполняется для всех точек отрезка CD, что и завершает доказательство. Нетрудно понять, что равенство в (*) возможно лишь при $x=y=1$, т. е. равенство в исходном неравенстве возможно только тогда, когда $a=b=c$.

Второе решение. Пусть x, y, z — отрезки, на которые вписанная в треугольник со сторонами a, b, c окружность делит стороны треугольника (рис. 2).

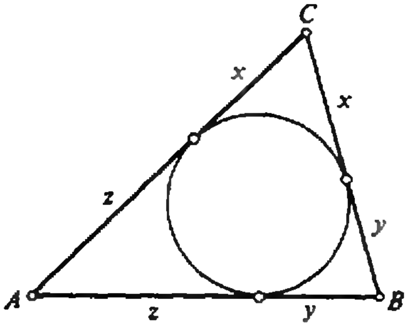


Рис. 2.

Тогда

$$a=x+y,\ b=x+z,\ c=y+z,$$

и исходное неравенство преобразуется к виду

$$(x+y)^2(4z+x+y)+(x+z)^2(4y+x+z)+\\+(y+z)^2(4x+y+z)\geqslant 9(x+y)(x+z)(y+z).$$

Вычитая из левой части неравенства его правую часть, приходим после преобразований к неравенству

$$2(x^3+y^3+z^3-x^2y-x^2z-y^2x-y^2z-z^2x-z^2y+\\+3xyz)\geqslant 0,$$

или

$$3xyz\geqslant x^2(y+z-x)+y^2(x+z-y)+z^2(x+y-z).$$

Поскольку (убедитесь в этом!)

$$x^2(y+z-x)+y^2(x+z-y)+z^2(x+y-z)-2xyz=$$
$$=(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y),$$

получаем неравенство

$$xyz\geqslant(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y), \qquad (**)$$

справедливость которого при $x>0$, $y>0$, $z>0$ мы должны доказать. Если среди сомножителей в правой части нечетное число отрицательных, то все ясно. Два сомножителя не могут быть отрицательны (это противоречило бы положительности x, y и z).

Если все три сомножителя положительны, то, перемножив три очевидных неравенства

$$x^2\geqslant x^2-(y-z)^2\geqslant 0,$$
$$y^2\geqslant y^2-(x-z)^2\geqslant 0,$$
$$z^2\geqslant z^2-(x-y)^2\geqslant 0,$$

получим неравенство, из которого (**) немедленно получается.

Л. Курляндчик, В. Сендеров

М1334. *Можно ли числа 1, 2, ..., 10 разбить на два подмножества так, чтобы разность произведений чисел этих подмножеств делилась на 11?*

Будем пользоваться тем, что остаток от деления на 11 суммы (разности, произведения) нескольких чисел равен соответственно остатку от деления на 11 суммы (разности, произведения) остатков этих чисел; тот факт, что числа a, b дают равные остатки при делении на 11, будем записывать так: $a\equiv b$. Например,

$$6\equiv-5,\quad 7\equiv-4,\quad 8\equiv-3,\quad 9\equiv-2,\quad 10\equiv-1. \quad (*)$$

Предположим, что числа 1, 2, ..., 10 удалось разбить на две группы так, что произведения a и b чисел в этих группах дают равные остатки при делении на 11.

Заметим, что $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=5!=120\equiv-1$, поэтому

$$ab=10!\equiv5!\,(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)(-4)(-5)\equiv-(5!)^2\equiv-1. \quad (**)$$

Если бы выполнялось условие $a\equiv b$, то из (**) следовало бы равенство $a^2\equiv-1$. Но ни один из квадратов не дает остатка $-1\equiv10$ при делении на 11. Достаточно проверить это для квадратов первых пяти остатков

$$1^2\equiv1,\quad 2^2\equiv4,\quad 3^2\equiv9,\quad 4^2=16\equiv5,\quad 5^2=25\equiv3,$$

для следующих чисел, как видно из (*), остатки квадратов будут теми же самыми.

Утверждение задачи будет справедливо, если 11 заменить на любое простое число p вида $4k+3$. В самом деле, во-первых, $(p-1)!\equiv-1(\mathrm{mod}\,p)$ для любого простого p (теорема Вильсона). А во-вторых, если p — простое число вида $4k+3$, то не существует x такого, что $x^2\equiv-1(\mathrm{mod}\,p)$. Ведь если такое x существует, то среди остатков чисел $1^2, 2^2, ..., (2k+1)^2$ (это — всевозможные различные остатки квадратов по модулю p) должна наблюдаться симметрия: вместе с каждым остатком $a^2 = r$ должен был бы встречаться и остаток $(xa)^2 \equiv \equiv -a^2 \equiv -r \equiv p-r$. Но из такой симметрии следовало бы, что этих остатков — четное количество. (Здесь использован тот факт, что $x^2 \equiv y^2$ только в том случае, если $x \equiv y$ или $x \equiv -y$.)

И. Вайнштейн, Н. Васильев

М1335. *n школьников хотят разделить поровну m одинаковых шоколадок, при этом каждую шоколадку можно разламывать не более одного раза.*

а) При каких n это возможно, если $m=9$?

б) При каких n и m это возможно?

Ответ: а) при $n=1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18;

б) при $n \leqslant m$ или $\frac{m}{n} = \frac{k-1}{k}$ для некоторого k.

Рассмотрим сразу пункт б) задачи, универсальный способ раздела шоколадок, годящийся для всех случаев, когда такой раздел возможен, таков: расположим шоколадки одну за другой в одну линию, и разрежем получившуюся шоколадную полоску равномерно на n частей (на рисунке 1 показан такой раздел для $m=9$, $n=7$). Выясним, в каких случаях при таком способе раздела по каждой шоколадке пройдет не более одного разреза.

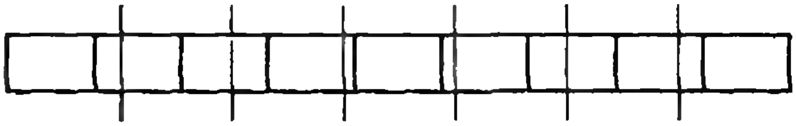


Рис. 1.

Назовем количество шоколада, которое должен получить каждый школьник (равное $\frac{m}{n}$ от целой шоколадки) *порцией*. Ясно, что если $n \leqslant m$, то порция будет больше одной шоколадки, поэтому расстояние между разрезами будет больше длины шоколадки. Следовательно, в этом случае по каждой шоколадке пройдет не более одного разреза.

Пусть теперь $n=m+1$. В этом случае порция равна $\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ от целой шоколадки. Заметим, что при описанном способе раздела каждая шоколадка делится на части, кратные $\frac{1}{n}$ от целой шоколадки, значит, расстояние от линии разреза до края шоколадки должно быть не менее $\frac{1}{n}$. Поэтому два разреза, проходящие по одной шоколадке, вырезали бы из нее часть, не большую $1 - \frac{2}{n}$, что составляет меньше порции (рис. 2). Значит, и в этом случае каждая шоколадка окажется разрезанной не более одного раза.

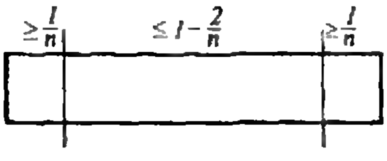


Рис. 2.

Наконец, если $\frac{m}{n} = \frac{k-1}{k}$ для некоторого k, то все шоколадки разбиваются на $\frac{m}{k-1}$ групп по $k-1$ шоколадке в каждой. Каждая из этих групп шоколадок делится между k школьниками, при этом выполнение условия задачи следует из разобранного выше случая.

Теперь докажем, что раздел шоколадок, удовлетворяющий условию, возможен, только если $n \leqslant m$ или $\frac{m}{n} = \frac{k-1}{k}$ для некоторого k. Для этого предположим, что мы осуществили такой раздел, и $n > m$. Поскольку порция в этом случае меньше целой шоколадки, то каждая шоколадка должна быть разломана. Таким образом, мы имеем $2m$ кусков — частей шоколадок. Расположим эти куски в порядке возрастания размера и обозначим их подряд: $a_1, a_2, \ldots, a_{2m}$. Очевидно, что каждая из пар a_1 и a_{2m}, a_2 и a_{2m-1} и т. д. составляют вместе по целой шоколадке. Кроме того, a_{2m} в точности равна порции. Действительно, если бы школьник, получивший часть a_{2m}, получил бы еще какой-то кусочек, то, поскольку этот кусочек не может быть меньше, чем a_1, всего ему досталось бы не меньше, чем целая шоколадка, что больше порции.

Докажем по индукции, что каждый кусок a_l кратен a_1. База индукции очевидна — a_1 кратен самому себе. Предположим, что все куски a_i при $i < l$ кратны a_1. Рассмотрим a_{2m+1-l} — дополнение a_l до целой шоколадки. Этот кусок может быть дополнен до порции кусочками, меньшими a_l, которые все кратны a_1 по предположению индукции. Порция, в свою очередь, дополняется до целой шоколадки кусочком a_1. Поэтому дополнение рассматриваемого куска до целой шоколадки кратно a_1. Это дополнение и есть a_l. Утверждение доказано.

Поскольку кусок a_{2m} кратен a_1 и дополняется им до целой шоколадки, то и целая шоколадка кратна a_1. Значит, a_1 составляет $\frac{1}{k}$ часть целой шоколадки для некоторого k. Отсюда следует, что a_{2m} составляет $\frac{k-1}{k}$ от целой шоколадки. С другой стороны, a_{2m} составляет порцию. Поэтому $\frac{m}{n} = \frac{k-1}{k}$.

Д. Бугаенко, Н. Константинов

Ф1348*. *Однородный резиновый шнур длиной L прикреплен одним концом к стене. Другой его конец в некоторый момент времени начинают двигать вдоль шнура со скоростью v, равномерно растягивая его при этом. В тот же момент от закрепленного конца вдоль шнура начинает двигаться жук, скорость которого относительно опоры (шнура) постоянна и рав-*

Эту задачу предложили в начале 1992 года на сборах по подготовке к Международной физической олимпиаде.*) Несколько ребят решили ее самыми разными способами, а одно из решений оказалось очень изящным и простым — его придумал Дима Арбатский из Санкт-Петербурга. Он рассуждал так.

Длина шнура увеличивается со временем по закону $l = L + vt$. Это значит, что все отрезки со временем удлиняются таким же образом. Будем считать, что длина шнура остается равной L, а ноги жука укорачиваются

---

*) Похожая задача приведена в книге М. Гарднера «Путешествие во времени» (М.: Мир, 1990, с. 132) и в восьмом номере журнала «Природа» за 1990 год (специальный выпуск, посвященный А. Д. Сахарову).

на u.)* *При каких условиях жук сможет добраться до конца шнура? За какое время он это сделает? На каком максимальном расстоянии от подвижного конца шнура он окажется во время движения? Считайте, что шнур деформируется без разрыва.*

так, что его скорость равна $u^* = \frac{uL}{L+vt}$. *Теперь запишем очевидное равенство*

$$\int_0^T u^* dt = L,$$

откуда для времени T получим

$$T = \frac{L}{v}\left(e^{v/u} - 1\right).$$

Для того чтобы найти максимальное расстояние, которое отделяет жука от подвижного конца шнура, нужно заняться арифметикой. Через время t на «сжатом» шнуре жуку остается пробежать

$$x^*(t) = L - L\,\frac{u}{v}\ln\left(1 + \frac{vt}{L}\right).$$

На растянутом шнуре это расстояние превращается в

$$x(t) = (L + vt)\,\frac{x^*(t)}{L} = L\left(1 + \frac{vt}{L}\right)\left(1 - \frac{u}{v}\ln\left(1 + \frac{vt}{L}\right)\right).$$

Приравняем производную по времени нулю и найдем момент t_1, в который расстояние $x(t_1)$ максимально:

$$\ln\left(1 + \frac{vt_1}{L}\right) = \frac{v}{u} - 1,$$

$$t_1 = \frac{L}{v}\left(e^{\frac{v}{u} - 1} - 1\right),$$

т. е. при $v \gg u$ время t_1 примерно в e раз меньше всего времени путешествия. Окончательно

$$x_{\max} = L\,\frac{v}{u}\,e^{\frac{v}{u} - 1}.$$

Это расстояние может оказаться в невообразимое число раз больше, чем L (в наиболее интересном случае — когда $v \gg u$).

А. Зильберман

Ф1349. *На гладкий вертикальный стержень насажены тяжелая шайба массой M и легкая шайба массой m = M/1000. Легкой шайбе сообщают скорость, равную v и направленную так, как показано на рисунке. На какой высоте над подставкой может нахо-*

Понятно, что тяжелая шайба (тело) удерживается на некоторой высоте H благодаря тому, что между ней и горизонтальной плоскостью «прыгает» легкая шайба (частица). В равновесном состоянии должно выполняться условие

$$Mg = 2mv\nu \approx 2mv\,\frac{v}{2H} = \frac{mv^2}{H},$$

где $\nu = v/(2H)$ — число ударов в секунду шайб друг о друга. Отсюда получаем

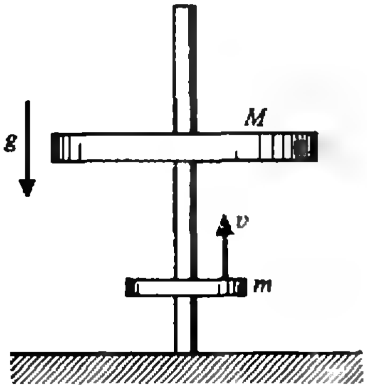
$$H = \frac{mv^2}{Mg}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда наш «поршень» смещен из равновесного положения. Пусть в некоторый

---

*) К сожалению, в опубликованном ранее условии задачи в этом месте допущена опечатка. Редакция приносит свои извинения читателям.

диться тяжелая шайба, не смещаясь заметно вверх или вниз? Каким будет период малых колебаний такого «поршня», если его сместить из этого равновесного положения? Все удары считать абсолютно упругими.



момент тело движется вниз со скоростью $V \ll v$. Тогда после каждого удара частица увеличивает свою скорость на $2V$. Таким образом, за время t тело, пройдя путь Vt, совершает работу

$$A = \frac{1}{2} m (v + 2\nu Vt)^2 - \frac{1}{2} mv^2 \approx 2mv\nu Vt,$$

приводящую к тому, что скорость частицы теперь равна $v + 2\nu Vt$, а действующая на «поршень» сила —

$$F = \frac{m}{H} (v + 2\nu Vt)^2 \approx Mg\left(1 + \frac{2Vt}{H}\right).$$

Для малых колебаний справедливо равенство

$$F = -kx.$$

В нашем случае

$$x = Vt \text{ и } k = 2Mg/H,$$

откуда для периода колебаний получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{H}{2g}} = 2\pi \frac{v}{g}\sqrt{\frac{m}{2M}}.$$

А. Андрианов, М. Цыпин

Ф1350. *На бирже «АНФИСА» 1917 брокерских и 1992 хакерских места. Между каждой парой БМ включен резистор сопротивлением 1 кОм, между каждой парой ХМ — резистор сопротивлением 2 кОм, между каждым БМ и ХМ — 4 кОм. Чему равно сопротивление, измеренное между двумя БМ? Между двумя ХМ? Между БМ и ХМ?*

Вначале найдем сопротивление $Z_{ББ}$ между парой брокерских мест. Подключим источник к каким-либо двум точкам $БМ_1$ и $БМ_2$ (ясно, что все равно к каким именно) и упростим схему (рис. 1). Все оставшиеся 1915 *БМ* и 1992 *ХМ* имеют одинаковые потенциалы, и всё, что их между собой соединяет, можно спокойно выбросить (для расчета схемы, разумеется!). Тогда получится схема, изображенная на рисунке 2. Сопротивление теперь (после замены $R_{ББ}$ на два параллельно соединенных резистора сопротивлением $2R_{ББ}$ каждый) легко подсчитать:

$$\frac{1}{Z_{ББ}} = \frac{1}{2R_{ББ}/1917} + \frac{1}{2R_{БХ}/1992},$$

откуда

$$Z_{ББ} \approx 0{,}83 \text{ Ом}.$$

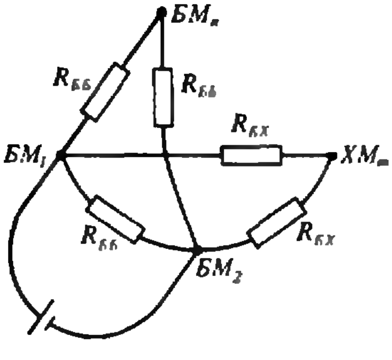


Рис. 1.

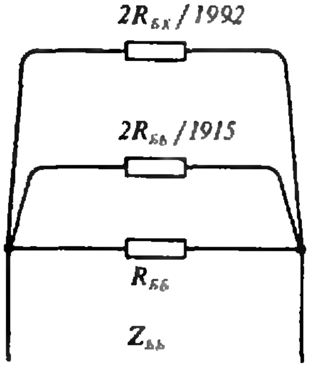


Рис. 2.

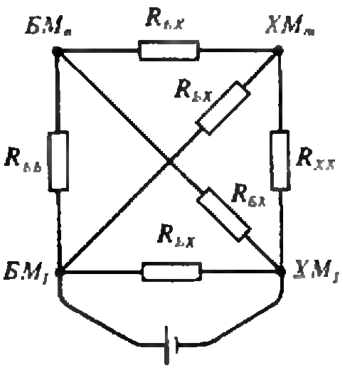


Рис. 3.

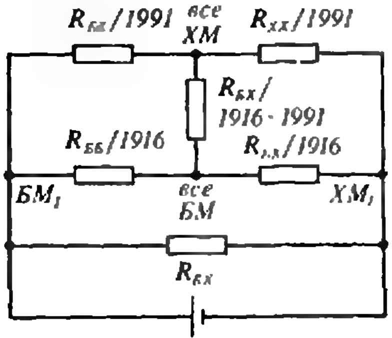


Рис. 4.

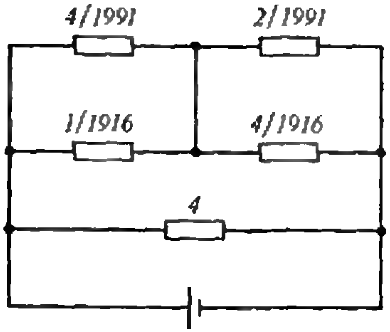


Рис. 5.

Совершенно аналогично можно подсчитать Z_{XX}:

$$Z_{XX}=Z_{ББ}\approx 0{,}83\ \text{Ом}.$$

Расчет $Z_{БX}$ несколько сложнее (рис. 3) — не все резисторы теперь можно выбросить: у всех оставшихся *БМ* потенциалы одинаковы, у всех *ХМ* тоже, но потенциалы получившихся двух групп неодинаковы. Так что схема хотя и упрощается, но все же не до самого конца (рис. 4). Можно, конечно, и получившийся «мостик» рассчитать, но заметим, что в его диагональ включен резистор совсем уж малого сопротивления $R_{БX}/(1916\cdot 1991)$, который можно заменить кусочком провода (рис. 5). Тогда

$$Z_{БX}\approx 1{,}1\ \text{Ом}.$$

И. Потеряйко

P. S. Зачем было соединять — непонятно. Сложное это дело, биржа!

Ф1351. *Медный диск массой m и диаметром D может свободно вращаться вокруг закрепленной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости диска. Центр и край диска соединены резистором сопротивлением R при помощи скользящих контактов. Вся система помещена в однородное магнитное поле $\vec{B}$, параллельное оси диска. Диск раскручивают до угловой скорости ω_0 и отпускают. Сколько оборотов сделает диск до полной остановки? Теперь последовательно с резистором включим батарею напряжением U_0. За какое время диск раскрутится из состояния покоя до угловой скорости ω_0?*

Докажем, что для любого (вообще говоря, достаточно сложного) распределения по диску токов, текущих к центру от скользящего контакта на периферии, момент сил, действующий на диск, будет таким же, как если бы ток тек по радиусу, идущему к контакту. Рассмотрим кольцо с радиусами r и $r+\Delta r$ и посмотрим, какой момент сил оно создает; важно, что вклад в момент дает только радиальная компонента скорости носителей зарядов:

$$\Delta M=\sum \Delta F r=\sum q v_{\text{рад}} B r=iBr\Delta r,$$

где i — полный ток. Тогда полный момент сил равен

$$M=\sum \Delta M=\sum iBr\Delta r=\frac{1}{8}\,iBD^2.$$

Учитывая, что момент инерции диска $I=1/2m\,(D/2)^2$, получаем уравнение движения диска

$$I\omega'=M,\ \text{или}\ \frac{1}{8}\,mD^2\omega'=\frac{1}{8}\,iBD^2,$$

откуда

$$\omega'=\frac{iB}{m}.$$

Теперь осталось найти ток. В диске возникает ЭДС индукции

$$\mathscr{E}=\sum \omega rB\Delta r=\frac{1}{8}\,\omega BD^2.$$

Для первого случая, согласно закону Ома,

$$i=\frac{\mathscr{E}}{R}=\frac{\omega BD^2}{8R}.$$

Таким образом,

$$\omega' = -\frac{B^2D^2}{8mR}\omega \text{ (диск тормозится!)},$$

или

$$\Delta\omega = -\frac{B^2D^2}{8mR}\omega\Delta t = -\frac{B^2D^2}{8mR}\Delta\varphi.$$

Суммируя, получим

$$-\omega_0 = -\frac{B^2D^2}{8mR}\varphi_{\text{полн}},$$

откуда найдем полный угол поворота диска до остановки —

$$\varphi_{\text{полн}} = \frac{8mR\omega_0}{B^2D^2}$$

и число оборотов до остановки —

$$N = \frac{\varphi_{\text{полн}}}{2\pi} = \frac{4mR\omega_0}{\pi B^2D^2}.$$

Если последовательно с резистором включена батарея, то закон Ома принимает вид

$$i = \frac{U_0 - \mathscr{E}}{R} = \frac{U_0 - \omega BD^2/8}{R}.$$

Тогда

$$\omega' = \frac{U_0B}{mR} - \frac{B^2D^2}{8mR}\omega,$$

$$\omega(t) = \frac{8U_0}{BD^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2D^2}{8mR}t}\right).$$

В некоторый момент t_x

$$\omega(t_x) = \omega_0,$$

откуда

$$t_x = \frac{8mR}{B^2D^2}\ln\left(1 - \frac{\omega_0BD^2}{8U_0}\right).$$

М. Цыпин

Ф1352. *Катушка индуктивностью $L = 1$ Гн намотана на тороидальный сердечник с большой магнитной проницаемостью. Катушку подключают к выводу генератора звуковой частоты последовательно с амперметром переменного тока (рис. 1). Конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ подключен к отводу от сере-*

В катушке с ферромагнитным кольцевым сердечником линии магнитной индукции практически не «уходят» из сердечника, и магнитный поток через каждый из витков один и тот же. Из этого сразу следует, что напряжения на половинах катушки совершенно одинаковы — они ведь определяются магнитными потоками этих половин. Следовательно, напряжение на конденсаторе равно половине напряжения генератора:

$$U_C = \frac{1}{2}U_0\cos\omega t,$$

а ток через конденсатор равен (рис. 2)

дины катушки. Найдите амплитуду тока через амперметр в зависимости от частоты ω генератора и сдвиг фаз между этим током и напряжением генератора. То же — для тока, потребляемого схемой от генератора. Амплитуда напряжения генератора $U_0 = 1$ В. Сопротивления амперметра и источника считать малыми.

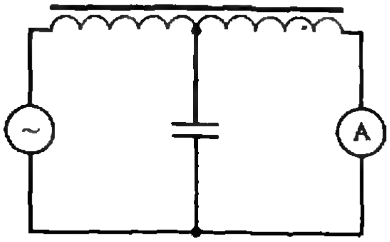


Рис. 1.

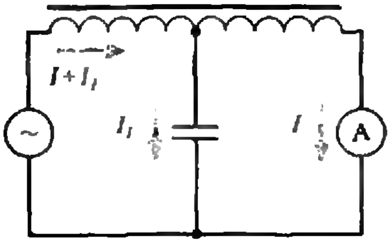


Рис. 2.

$$I_1 = \frac{1}{2} U_0 \omega C \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2} \omega C U_0 \sin \omega t.$$

Сразу найдем и его производную — дальше пригодится:

$$I_1' = -\frac{1}{2} \omega^2 C U_0 \cos \omega t.$$

Магнитное поле B в сердечнике складывается из полей всех витков, поле каждого витка пропорционально его току:

$$B = \frac{n}{2} A (I + I_1) + \frac{n}{2} AI,$$

где n — число витков в катушке, A — коэффициент пропорциональности. Магнитный поток через всю катушку равен

$$\Phi = BSn = An^2 S\left(I + \frac{1}{2} I_1\right),$$

где S — площадь сечения катушки. Если бы конденсатора не было, т. е. катушка была бы подключена «без всяких фокусов», то выполнялось бы условие

$$\Phi^* = An^2 SI^* = LI^*,$$

откуда

$$An^2 S = L.$$

И наконец, запишем уравнение для напряжения на катушке в нашей цепи:

$$U = \Phi' = An^2 S\left(I' + \frac{1}{2} I_1'\right) = LI' + \frac{1}{2} LI_1' = U_0 \cos \omega t,$$

или

$$LI' = U_0 \cos \omega t - \frac{1}{2} LI_1' = U_0\left(1 + \frac{1}{4}\omega^2 LC\right) \cos \omega t.$$

Отсюда сразу найдем ток через амперметр —

$$I = \frac{U_0}{\omega L}\left(1 + \frac{1}{4} \omega^2 LC\right) \sin \omega t,$$

его амплитуду в зависимости от частоты генератора —

$$I_0 = \frac{U_0}{\omega L}\left(1 + \frac{1}{4} \omega^2 LC\right)$$

и сдвиг фаз между этим током и напряжением конденсатора —

$$\varphi = -\pi/2.$$

Ток, потребляемый схемой от генератора, равен

$$I_г = I + I_1 = \frac{U_0}{\omega L}\left(1 - \frac{1}{4} \omega^2 LC\right) \sin \omega t.$$

Следовательно, его амплитуда равна

$$I_{г0} = \frac{U_0}{\omega L}\left(1 - \frac{1}{4} \omega^2 LC\right),$$

а сдвиг фаз между ним и напряжением генератора —

$\varphi_г = -\pi/2$ при $\omega < \frac{2}{\sqrt{LC}}$ и $\varphi_г = \pi/2$ при $\omega > \frac{2}{\sqrt{LC}}$.

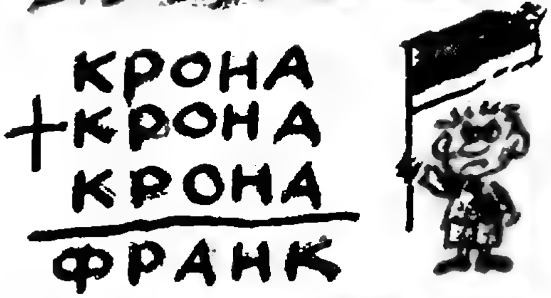
А. Зильберман

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. На свой день рождения фрекен Бок испекла огромный торт. Известно, что Малыш и торт весили столько же, сколько Карлсон и фрекен Бок. После того, как торт съели, Карлсон весил столько же, сколько фрекен Бок и Малыш. Докажите, что кусок торта, который съел Карлсон, весит столько же, сколько весила фрекен Бок до своего дня рождения.

2. Расшифруйте арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.



3. Алеша и Витя начали коллекционировать значки. Хотя у Вити количество значков меньше утроенного числа значков Алеши, но даже в том случае, если Витя отдаст четыре значка Алеше, у него останется больше значков, чем станет у Алеши. По скольку значков у каждого из ребят, если всего у них меньше двадцати значков?

4. В середине учебного года в классе Степы Мошкина сменился милиционер, который вел занятия по правилам дорожного движения. Дотошный Степа выяснил, что год рождения первого милиционера равен сумме номеров страниц «Правил дорожного движения», которые он изучил под его руководством, а год рождения второго милиционера равняется сумме номеров оставшихся страниц. На сколько лет один преподаватель старше другого?

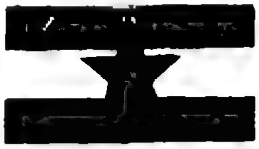
5. Лист фанеры размером 10×10 дм распилили на 20 прямоугольников, стороны которых составляют целое число дециметров. Оказалось, что общая длина пропилов равна 100 дм. Докажите, что у каждого из этих прямоугольников найдется сторона длиной в 1 дм.

Эти задачи нам предложили А. Кохась, А. Ларионов, Н. Антонович, И. Акулич и В. Произволов.

Факториал

В 30-х годах во многих квартирах на видном месте стояли шеренги из семи слоников. Считалось, что они приносят счастье, как и подкова, прибитая над дверью. Слоников выстраивали по росту. А сколько еще существует способов расставить их на полке? Семь? Шестьдесят? Пятьсот? Оказывается, что больше пяти тысяч! Давайте поймем, откуда берется такое большое число. Один предмет и устанавливается единственным образом. Два — уже двумя способами. Если вы с приятелем входите в комнату, то либо сначала входит он, а потом вы, либо, наоборот, сначала вы, а потом он. Три предмета можно расставить уже шестью различными способами. Действительно, первое место может занимать любой из них (3 варианта), после этого второе место может занять любой из оставшихся двух, т. е. каждый из первоначальных вариантов удваивается. Оставшийся предмет занимает последнее место, не увеличивая количества вариантов, число которых равно $3\cdot 2\cdot 1=6$.

В то недавнее время, когда Югославия была Федерацией шести республик, на ее флаге, состоявшем из трех горизонтальных полос красного, белого и синего цвета, красовалась и большая пятиконечная звезда. Точно такие же флаги были и у всех республик, различие состояло лишь в порядке чередования цветов. А, как мы знаем, различных вариантов такого чередования также ровно шесть, при этом флаг одной из республик (Сербии) совпадал с государственным флагом всей страны.



Если мы зададимся вопросом о числе перестановок четырех предметов, то получим, что на первое место можно поставить любой из них, последующие три места оставшиеся три предмета могут занимать $3\cdot 2\cdot 1=6$ способами. Таким образом, общее число способов равно $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$. Теперь вы сами легко покажете, что количество способов расставить n предметов равно $n(n-1)\dots 2\cdot 1$. Это выражение довольно громоздко, но встречается во многих задачах, поэтому для него придумали специальное обозначение $n!$, которое называют *эн факториал* от английского слова *factor* — сомножитель.

Вернемся к нашим слоникам. Их семь, поэтому число их перестановок равно $7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\times 2\cdot 1=5040$. А сколькими способами можно сложить колоду из 36 карт? Разумеется, $36!$ способами, что приблизительно равно $37\cdot 10^{40}$, поистине огромное число!

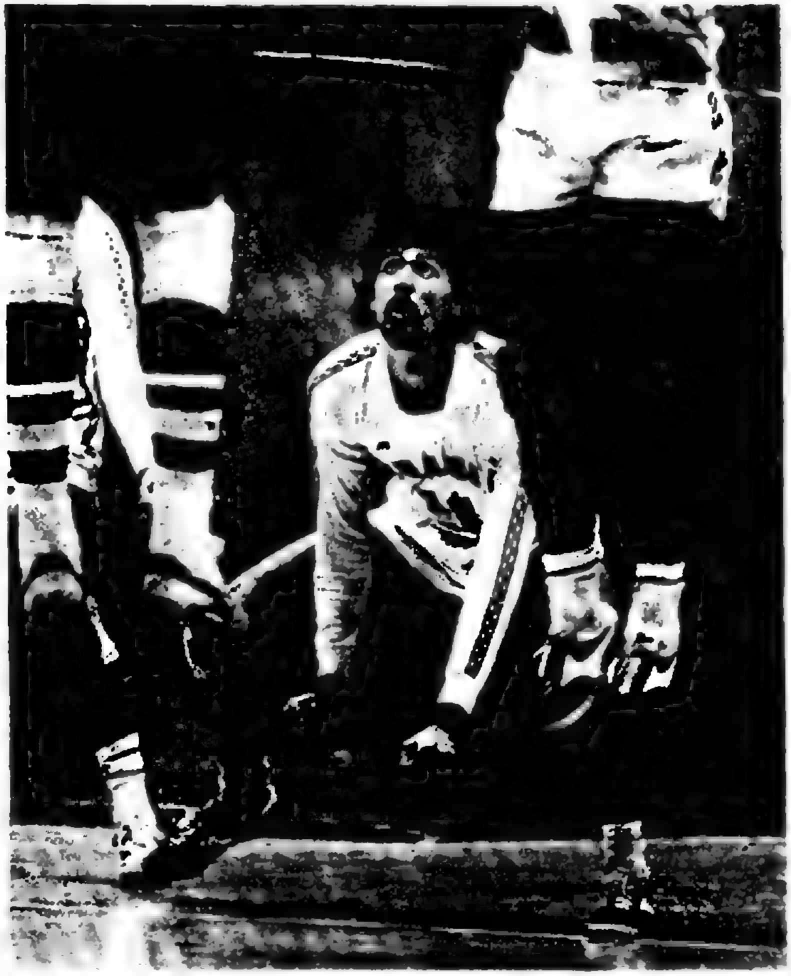
Факториал появляется не только в ситуации, связанной с перестановками элементов. Нетрудно показать, что n-я производная от функции x^n равна $n!$. Факториал можно рассматривать как функцию, определенную для натуральных значений переменной, но работать с ней трудно — ее нельзя продифференцировать или проинтегрировать. Поэтому важно уметь ее оценивать более простыми функциями, например, имеют место следующие неравенства:

$$n^n > n! > n^{n/2}.$$

Первое из них следует из того, что в произведении $n!$ каждый сомножитель не больше n, а второе — из того, что произведение множителей, равноотстоящих один от одного конца, а другой — от другого, не меньше n.

Удалось найти и непрерывную функцию, принимающую значение $n!$ при значении аргумента, равного n. Такую функцию предложил Леонард Эйлер, назвав ее *гамма-функцией:*

ЛЕОНАРДУ ЭЙЛЕРУ АКАДЕМИЯ НАУК СССР 1957
1707
1783
250



$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Для этой функции справедливо равенство $\Gamma(n+1)=n!$. Нетрудно вычислить, что $\Gamma(1)=1$, поэтому (и не только поэтому) принято считать, что $0!=1$. Еще одна функция, введенная Л. Эйлером, также напрямую связана с факториалом — *бета-функция:*

$$B(x;y)=$$

$$=\int_0^1(1-t)^{x-1}t^{y-1}\,dt=$$

$$=\frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}.$$

Рассмотрим еще одну задачу. В волейбольной команде 10 игроков. На площадку выходят шестеро, и четверо в это время находится «в запасе». Сколькими способами можно выбрать игровую шестерку? Начнем рассуждать так же, как и раньше: первого игрока можно выбрать десятью способами, второго — девятью, ..., шестого — пятью. Итого $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$ способов. Но при этом одну и ту же шестерку игроков мы будем выбирать многократно, поскольку они могут входить в шестерку в разном порядке, а это можно сделать $6!$ способами. Значит, количество способов равно $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\times\times 6\cdot 5/6!=210$. Если это выражение умножить и разделить на $4!$, то мы получим $10!/(6!\,4!)$; вообще, количество способов выбрать k элементов из n равно

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Это выражение также имеет специальное обозначение, даже два: C_n^k и $\binom{n}{k}$.

Уже упоминалось, что пользование функцией $n!$ очень затруднительно, поэтому для нее используют приближенные формулы, например формулу, предложенную в 1730 году английским математиком Дж. Стирлингом:

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n}.$$

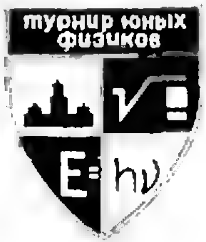
Обозначение $n!$ оказалось очень удобным и было расширено на другие произведения. Так произведение $2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n$ стали обозначать через $(2n)!!$, а $1\cdot 3\times\times\ldots\cdot(2n+1)$ — через $(2n+1)!!$. Конечно же, $(2n)!!$ не то же самое, что $((2n)!)!$ — второе число много больше первого. Бытует и более общее обозначение

$$(kn+p)!!=$$

$$=p(k+p)(2k+p)\ldots$$

$$\ldots(nk+p).$$

А студенты физфака МГУ на эмблеме своего факультета поместили факториал под знак радикала.



Материал подготовил А. Савин

ОШЕЛОМЛЯЮЩЕЕ ВПЕЧАТЛЕНИЕ

Д. ХОЛИДЕЙ

Для решения некоторых физических задач требуются вычисления высочайшей точности. Однако решение многих других задач может быть и приближенным. Физики гордятся тем, что могут быстро отвечать на вопросы, требующие ответа «с точностью до порядка», делая приближенные оценки, основанные на здравом смысле. Вот типичный пример:

Сколько атомов резины стирается с шины автомобильного колеса при каждом его обороте?

Задачи такого рода обычно называют задачами Ферми — по имени великого физика Энрико Ферми, который обладал величайшим искусством не только ставить подобные задачи, но и быстро и изящно решать их.

Без сомнения, у вас уже возникло несколько вопросов.

Да, конечно. Прежде всего — имеет ли данная задача какое-либо практическое значение?

Возможно, и не имеет, однако в постановке задачи просматривается любопытная связь между миром бесконечно малых (атомов) и макромиром (автомобилем). А фактически цель этой задачи — помочь вам понять, как следует делать оценки.

В формулировке этой задачи нет цифровых данных. С чего же начать?

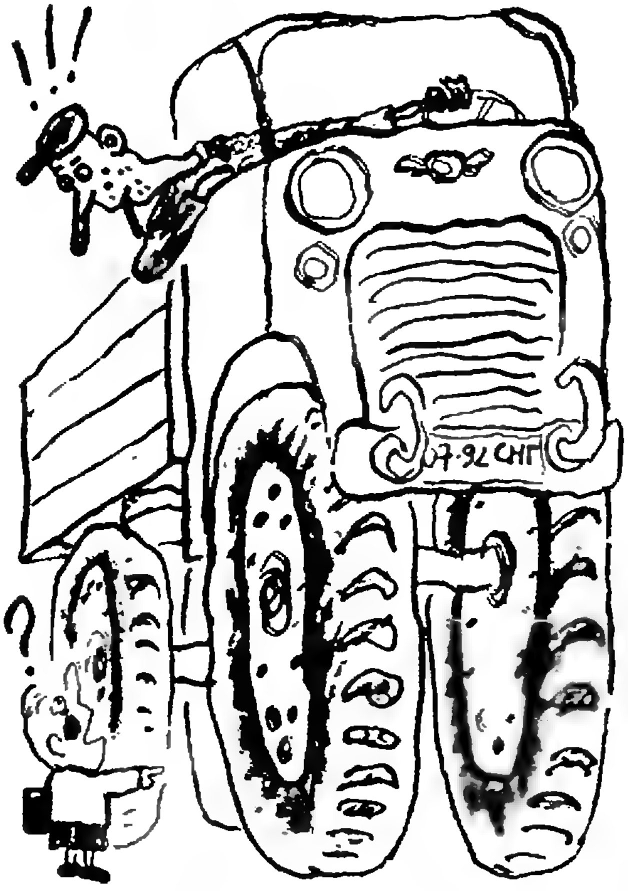
Мы должны сами задать исходные данные — радиус покрышки, суммарную массу резины и т. д.

Но это вымышленные данные. Как же при этом мы сможем получить точный ответ?

Если под словом «точный» понимать ответ, получивший положительную оценку при обычной экспертизе, то вы правы. Но в задачах такого рода под «точностью» понимают «точность до какого-то порядка», и, задавая исходные данные для подобных задач, сильно ошибиться достаточно трудно.

Понятно. С чего же мы начнем?

С составления плана решения задачи — мы определим объем резины, которая стирается с шины, а затем разделим его на объем атома. Это и будет искомый результат. Сначала займемся резиной.



Статья заимствована из русско-американского журнала «Quantum». Автор статьи, написанной в форме диалога с читателем,— заслуженный профессор физики в отставке Питсбургского университета. Перевела с английского И. Вахурина.

Согласен. И все же я не представляю, как определить объем резины, которая стирается с шины при каждом обороте колеса.

Его можно узнать, определив объем резины, которая была стерта с шины за все время ее эксплуатации, и число оборотов колеса за это время. Разделив одно на другое, мы найдем объем резины, стираемой за один оборот колеса.

Пусть R — внешний радиус шины, d — ее ширина, h — глубина стирания резины и L — расстояние, которое прошло колесо за все время его эксплуатации. Число оборотов колеса N равно расстоянию, которое прошло колесо, деленному на длину окружности обода шины:

$$N=\frac{L}{2\pi R}.$$

Объем всей резины V есть объем цилиндра толщиной h:

$$V=2\pi Rdh.$$

Тогда объем резины, стираемой с шины при одном обороте колеса, равен

$$V_0=\frac{V}{N}=\frac{2\pi Rdh}{L/(2\pi R)}=\frac{40R^2dh}{L}.$$

Отметим, что мы заменили π^2 на 10, что вполне допустимо, если учесть цели, которые мы преследуем.

Но ведь нет никакой необходимости заменять π^2 на 10. Мой калькулятор показывает 9.87.

Вам кажется, что если вы не сделаете такой замены, ответ будет более точным? Наверное. Однако наши последующие вычисления будут настолько приблизительными, что такой потерей точности можно свободно пренебречь. Кроме того, с числом 10 гораздо приятнее иметь дело.

Хорошо, допустим. Что дальше?

Мы уже достигли большого прогресса, сведя решение задачи к оперированию с величинами, которые можем определить. Скоро мы это сделаем. А пока давайте немного поразмышляем об атомах.

Мне все время не давал покоя вопрос, что такое «атом резины»? Я думаю, мы не найдем такого элемента в периодической таблице.

Вы, конечно, правы. Резина состоит из молекул, которые представляют собой длинные цепочки атомов водорода, углерода и кислорода. Однако в данной задаче нас интересуют некие абстрактные атомы, радиус которых мы обозначим r.

Понятно. Значит, объем $V_а$ такого абстрактного атома есть объем сферы радиусом r, т. е. $V_а=(4\pi/3)r^3$. Правильно?

Можно сказать и так. Однако лучше (и проще) положить $V_а=(2r)^3$. Такое допущение означает, что мы считаем атомы крохотными кубиками, а это дает возможность учесть и межатомные расстояния.

Итак, чтобы получить ответ, нам осталось разделить одну уже известную величину на другую. Правильно?

Правильно. Количество атомов резины, которые стираются с шины за один оборот колеса, равно

$$n=\frac{V_0}{V_а}=\frac{40R^2dh}{L(2r)^3}=\frac{5R^2dh}{Lr^3}.$$

Теперь мы готовы к вычислениям.

Пусть $R=1$ фут≈30 см$=3/10$ м, $d=4$ дюйма≈10 см$=1/10$ м, $h=1/6$ дюйма≈4 мм$=4/1000$ м, $L=50000$ миль$=8\cdot10^7$ м, $r=10^{-10}$м*). Подставляя эти значения в полученное выражение для n, мы должны помнить, что все члены нужно выразить в одних и тех же единицах, например в метрах. Тогда мы получим

$$n=\frac{5\cdot3\cdot3\cdot4}{10\cdot10\cdot10\cdot1000\cdot8\cdot10^7\cdot10^{-30}}.$$

Хотите, я посчитаю это выражение на моем калькуляторе?

Нет. Обойтись без калькулятора при решении задачи Ферми — это дело чести. Давайте перепишем полученное выражение, собрав вместе все целые числа и все степени 10:

$$n=\left(\frac{5\cdot3\cdot3\cdot4}{8}\right)10^{17}.$$

---

*) Физики обычно считают радиус атома равным именно 10^{-10} м. Полезно запомнить это число. (Между прочим, радиус ядра атома обычно полагают равным 10^{-15} м.) (*Прим. ред.*)

Легко заметить, что выражение в скобках примерно равно 20. Таким образом, количество атомов резины, стираемых с шины за один оборот колеса, равно $n=2\cdot10^{18}$.

Не следует ли отбросить двойку и округлить это число до 10^{18}?

Да, конечно. Отсутствие двойки не повлияет на точность нашей оценки.

Итак, если кто-то на вечеринке задаст вам «вопрос о колесе» (а поверьте мне, кто-нибудь да сделает это!), вы можете глубокомысленно посмотреть в потолок и через пару минут произнести: «Примерно... 10^{18} атомов за один оборот». Именно так отвечал на подобные вопросы сам Ферми.

Предлагаю вам поупражняться и решить еще две задачи Ферми:

1. В 1980 году население города Бостона составляло 560 000 человек. Сколько школьных учителей было в городе в том году?

2. Сколько галлонов бензина ежегодно сжигают все частные автомашины в США?

Большой или маленький?

Как вы считаете, 10^{18} атомов, стирающихся с шины при каждом обороте колеса, это много или мало? Ответить на этот вопрос не удастся до тех пор, пока вы не ответите на другой вопрос: «Много или мало по отношению к чему?» Если рассматривать 10^{18} просто как число — это, конечно, много. Например, оно в 10 000 000 раз больше, чем число звезд в Млечном Пути.

Однако у нас речь идет не просто о числе 10^{18}, а о числе атомов. А это примерно в 10 000 000 раз меньше, чем количество атомов в стакане воды.

Конкурс «Математика 6—8»

Мы начинаем третий конкурс по решению задач «Математика 6—8». Результаты предыдущего конкурса будут опубликованы в следующем номере журнала.

Условия конкурса: в нем могут участвовать учащиеся 6—8 классов, которым будут предложены 24 задачи, по 3 в каждом номере журнала. Победители будут награждены призами и дипломами.

Решения задач этого номера высылайте до 1 декабря 1992 года по адресу: 103006, Москва, К-6, 1-я Тверская-Ямская ул., 2/1, «Квант», с пометкой: «Конкурс «Математика 6—8». Не забудьте указать фамилию, имя, школу, класс и домашний адрес.

Задачи

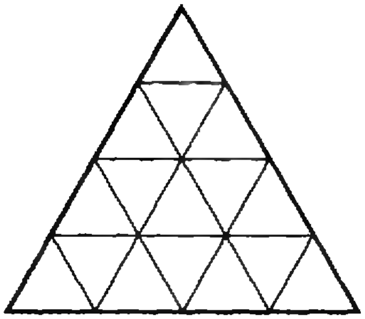
1. Если вечером на Поле Чудес закопать золотые монеты, то к утру на их месте вырастут одинаковые деревья с золотыми монетами на ветвях. Буратино пришел на Поле Чудес в понедельник, имея 5 золотых монет. Он хочет получить не меньше 1992 монет. Вырастив первые деревья, он понял, что сможет добиться своего не раньше среды, но не позже пятницы. Сумеет ли он оказаться владельцем ровно 1992 монет?

И. Акулич

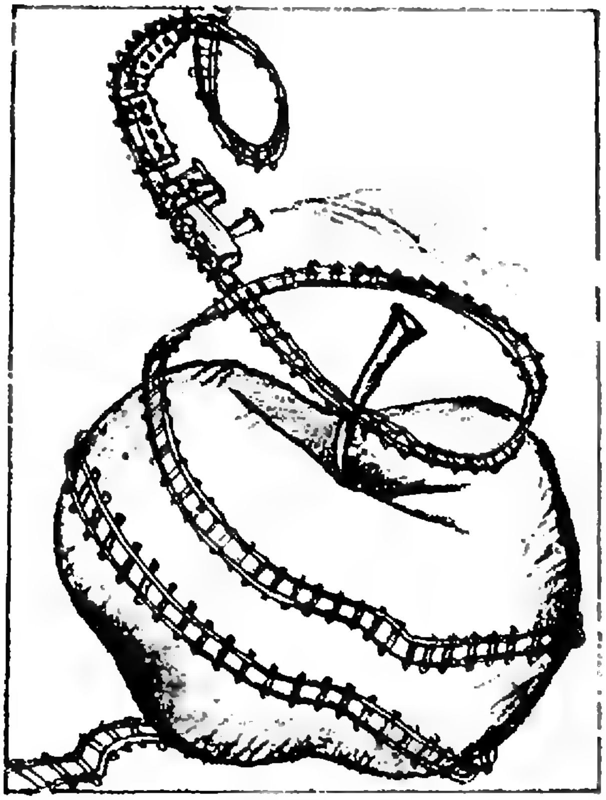
2. Целые числа a, b и c таковы, что $ab+bc+ca=0$. Докажите, что число abc может быть представлено в виде произведения квадрата целого числа на куб целого числа.

В. Произволов

3. Правильный треугольник со стороной длины n разбит на единичные правильные треугольники (см. рисунок). Сколько существует различных равносторонних треугольников, вершины которых являются вершинами этих единичных треугольников? (Заметим, что при $n=1$ это число равно 1, при $n=2$ оно равно 5, а при $n=3$ равно 15.)



Н. Авилов



Школа в „Кванте"

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Когда вокруг всё вертится...» предназначена девятиклассникам, заметка «Почему висит кольцо» — одиннадцатиклассникам.
Мы публикуем также «Избранные школьные задачи по физике».

Когда вокруг всё вертится...

Начав изучать кинематику, вы наверное заметили, какое большое внимание уделяется понятию «система отсчета» (СО). Действительно, бессмысленно говорить о движении тела или точки, если не указывать, относительно какого другого тела (тела отсчета) производятся измерения координат, скорости и ускорения. Самая привычная СО — земля, однако иногда бывает удобно перейти в СО, связанную с движущимся воздухом (ветром), водой в реке и т. д. Кроме того, изучая движение самой Земли по орбите или вокруг собственной оси, переходят в СО, связанную с Солнцем и звездами.

Переходя из одной СО в другую, не надо, конечно, пересаживаться из одного движущегося «экипажа» в другой. Зачастую это было бы просто невозможно. «Переход» производят мысленно, вычисляя, какие результаты получил бы движущийся наблюдатель при измерении координат, скорости и ускорения. Например, закон сложения скоростей позволяет связать между собой скорость тела C относительно неподвижной системы отсчета A ($\vec{v}_C$), его скорость относительно движущейся системы B (так называемая относительная скорость $\vec{v}_{CB}$ и скорость движущейся СО относительно неподвижной ($\vec{v}_B$):

$$\vec{v}_C=\vec{v}_{CB}+\vec{v}_B, \text{ или } \vec{v}_{CB}=\vec{v}_C-\vec{v}_B. \quad (1)$$

Однако простое и однозначное применение закона сложения скоростей возможно только тогда, когда одна СО движется относительно другой поступательно. Именно в этом случае все точки СО B имеют относительно A одинаковую скорость $\vec{v}_B$ и можно просто говорить о скорости одной СО относительно другой. А как быть, если одна СО совершает относительно другой не поступательное, а вращательное движение?

Рассмотрим пример. Предположим, что космический корабль C приближается к быстро вращающейся с угловой скоростью ω планете B со скоростью $\vec{v}_C$, находясь в ее экваториальной плоскости (рис. 1). Командир корабля дает распоряжение двум стаже-

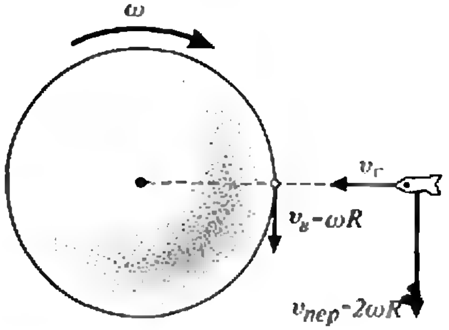


Рис. 1.

рам: найдите скорость $\vec v_{CB}$ нашего корабля с точки зрения наблюдателей на планете в тот момент, когда расстояние до поверхности планеты будет равно ее радиусу R.

Первый стажер знал кинематику весьма поверхностно. Он решил применить закон сложения скоростей. Для этого он сначала вычислил скорость наблюдателя на поверхности планеты: $v_B=\omega R$. Потом, считая, что наблюдатель находится в момент наблюдения точно под кораблем, нашел направление и модуль вектора $\vec v_{CB}$:

$$\vec v_{CB}=\vec v_C-\vec v_B;\quad v_{CB}=\sqrt{v_C^2+(\omega R)^2}\,.$$

Второй стажер знал кинематику гораздо лучше (наверное, он выписывал журнал «Квант»). Он рассуждал следующим образом. Посмотрим, какую скорость нужно иметь на высоте R (на расстоянии $2R$ от центра планеты), чтобы казаться неподвижным наблюдателю на планете. Для этого представим, что планета заполняет все пространство. Тогда в данном месте воображаемые точки планеты имеют скорость $v_{\text{пер}}=\omega\cdot 2R$ — ее называют переносной скоростью,— а скорость корабля относительно вращающейся СО равна

$$\vec v_{\text{отн}}=\vec v_C-\vec v_{\text{пер}};\quad v_{\text{отн}}=\sqrt{v_C^2+(2\omega R)^2}\,.$$

Именно этот стажер стал вскоре постоянным членом экипажа.

(Хотя этот пример немного шуточный, аналогичные проблемы действительно возникают при наблюдении за удаленными спутниками и ракетами с вращающейся Земли.)

Итак, общее правило состоит в том, что закон сложения скоростей можно применять и в случае вращающихся СО, но нужно брать скорость не самой СО (это понятие не имеет смысла — разные точки СО движутся по-разному), а переносную скорость — скорость той точки вращающейся СО, где в данный момент находится тело:

$$\vec v_C=\vec v_{\text{отн}}+\vec v_{\text{пер}},\ \text{или}\ \vec v_{\text{отн}}=\vec v_C-\vec v_{\text{пер}}. \qquad (2)$$

Это правило выглядит вполне очевидным, если вы находитесь непосредственно на вращающемся теле. Тогда переносная скорость — это скорость тела у вас под ногами (если вы остановитесь, вращающееся тело будет «переносить» вас в пространстве именно с этой скоростью). Например, если вы идете по вращающейся с угловой скоростью ω платформе вдоль ее радиуса (рис. 2) со скоростью $\vec v_{\text{отн}}$, а платформа у вас под ногами имеет скорость $v_{\text{пер}}=\omega R$, где R — изменяющееся расстояние от центра платформы, то ваша полная скорость относительно земли будет равна

$$v=\sqrt{v_{\text{отн}}^2+(\omega R)^2}.$$

Психологическая трудность, с которой столкнулся незадачливый стажер, состояла в том, что корабль находился вне вращающегося тела (планеты) и у него не хватило воображения мысленно распространить планету на окружающее пространство и правильно вычислить переносную скорость.

Чтобы проверить, все ли вы поняли, решите такую задачу.

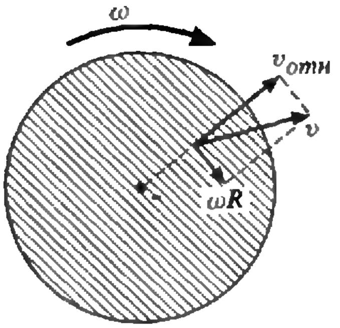


Рис. 2.

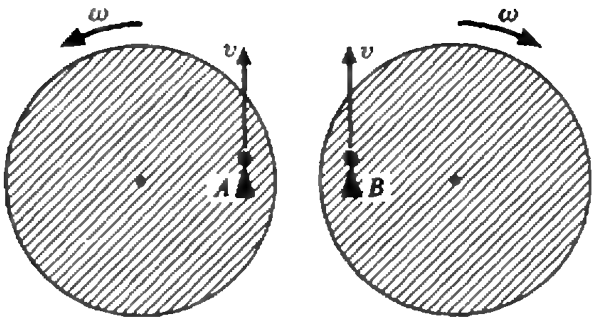


Рис. 3.

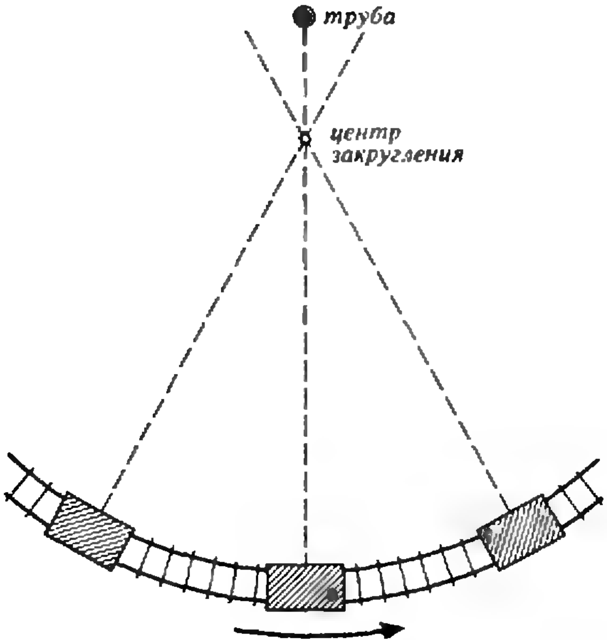


Рис. 4.

Две одинаковые круглые платформы, на которых сидят наблюдатели A и B, вращаются навстречу друг другу с одной и той же угловой скоростью 1 рад/с (рис. 3). Радиусы платформ 2 м, расстояние между их центрами 5 м. Чему равна скорость человека A относительно наблюдателя B в момент, указанный на рисунке 3?

Не торопитесь. Ответ — в конце статьи.

Теперь еще один (менее глобальный) пример, в котором незнание того, что выбранная СО поворачивается, может привести к неожиданному эффекту. Предположим, что,сидя у окна в купе скорого поезда, вы рассеянно любуетесь пейзажем. Бегут назад деревья, дома... И вдруг вы замечаете, что расположенная вдалеке фабричная труба движется не назад, а вперед, обгоняя поезд! В чем тут дело? Объяснение очень простое — вы не заметили, что поезд начал поворачивать по дуге большого радиуса, и теперь вы находитесь во вращающейся СО, хотя сами об этом не знаете. Посмотрите на рисунок 4. Если бы труба находилась в центре закругления, она казалась бы вам неподвижной, потому что переносная скорость в этой точке равна нулю и скорость трубы относительно земли тоже равна нулю. А если труба окажется дальше, чем центр окружности, то переносная скорость в этом месте будет направлена назад, а относительная — вперед, и будет казаться, что труба обгоняет поезд.

Возможно, у вас возник вопрос — а имеем ли мы право переходить во вращающиеся СО? Может быть, это незаконно, и мы можем пользоваться только такими СО, которые движутся равномерно и поступательно? Ведь нелепо утверждать, что между ними нет разницы. Попробуй усидеть на быстро вращающейся карусели — тебя так и норовит выкинуть наружу. А вот в быстро летящем самолете чувствуешь себя вполне комфортно (кроме взлета и посадки).

В некотором смысле вы правы. С точки зрения динамики, есть выделенные СО — так называемые инерциальные, в которых действуют законы Ньютона, а все СО, движущиеся относительно них с ускорением (в том числе и вращающиеся), являются неинерциальными. Например, СО, связанную с Солнцем и звездами, можно считать инерциальной, а СО, связанную с Землей или с ускоряющейся ракетой,— нет. Однако эта разница важна только с точки зрения динамики. В рамках кинематики, если не думать о том, почему тела так движутся, а заниматься только описанием их движения, все СО являются законными и равноправными.

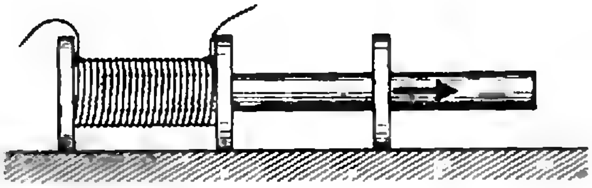
А теперь — обещанный ответ к задаче: относительная скорость равна 1 м/с.

А. Черноуцан

Почему висит кольцо

Поговорим о двух опытах, которые вы можете провести в школьном физическом кабинете.

Первый опыт. Возьмите длинный железный стержень круглого сечения и вставьте его одним концом в катушку, длина которой в несколько раз меньше длины стержня. Расположите сердечник с катушкой горизонтально



(см. рисунок). На выступающий конец сердечника наденьте легкое алюминиевое кольцо, диаметр которого чуть больше диаметра сердечника. К катушке через ключ подсоедините источник постоянного тока, напряжение на выходе которого можно при желании изменять.

Придвиньте алюминиевое кольцо вплотную к катушке и замкните ключ — кольцо оттолкнется от катушки. Величину постоянного тока можно подобрать так, чтобы кольцо удалилось почти на всю длину сердечника. Теперь разомкните цепь — кольцо возвратится почти в исходное положение.

Объяснение этого опыта кажется не очень сложным. Приведем его. Площадь, ограниченную алюминиевым кольцом, пронизывает магнитный поток, создаваемый током в катушке. При замыкании ключа этот магнитный поток растет, и по правилу Ленца в кольце возникает индукционный ток, направленный противоположно току в катушке. Антипараллельные токи отталкиваются, следовательно, кольцо действительно должно отталкиваться от катушки. При размыкании цепи магнитный поток уменьшается, и в кольце возникает ток, сонаправленный току в катушке. Такие токи притягиваются друг к другу, вот почему кольцо приближается к катушке.

Второй опыт. Расположите сердечник вертикально так, чтобы катушка находилась в нижней его части, и наденьте на него алюминиевое кольцо. Подключите к катушке источник переменного синусоидального тока (можно просто включить катушку в сеть, а для регулирования величины напряжения последовательно катушке подсоединить реостат) и замкните цепь. Кольцо, лежащее на катушке, приподнимается и висит в воздухе все время, пока по катушке идет ток. Если амплитуда тока достаточно большая, то в момент включения кольцо может даже слететь с сердечника.

Как же можно объяснить этот опыт? Попробуем сначала провести такие же рассуждения, как и в первом случае.

В течение той четверти периода, когда величина тока в катушке растет, в кольце возникает индукционный ток, направленный противоположно току в катушке, и между кольцом и катушкой возникают силы отталкивания. В течение следующей четверти периода, когда величина тока в катушке уменьшается, между кольцом и катушкой действуют силы притяжения. Таким образом, на кольцо должна действовать быстро меняющаяся по направлению сила. Среднее значение этой силы равно нулю, поэтому кольцо, казалось бы, не должно приподниматься и тем более висеть в воздухе.

В чем же дело? Причина возникшего противоречия между приведенным объяснением и реальным поведением кольца заключена в следующем. Магнитный поток, пронизывающий площадку, ограниченную кольцом, создается не только током, идущим по катушке, но и индукционным током, возникающим в самом кольце (явление самоиндукции). И если при объяснении первого опыта пренебрежение этим фактором не привело к ошибочным выводам, то во втором случае мы пришли к противоречию. Попробуем разобраться, но прежде сформулируем три утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1) Магнитный поток, пронизывающий площадку, ограниченную кольцом, можно представить как сумму двух потоков:

$$\Phi=\Phi_1+\Phi_2,$$

где Φ_1 — магнитный поток, создаваемый током I_1, текущим по катушке, а Φ_2 — поток, создаваемый индукционным током I_2, возникающим в кольце.

2) Если Φ_1 и Φ_2 имеют одинаковые знаки, то это означает, что соответст-

вующие им магнитные поля, а значит, и создающие эти поля токи должны быть параллельными. Совершенно аналогично, если Φ_1 и Φ_2 имеют противоположные знаки, то это означает, что токи антипараллельны.

3) Наблюдаемые в обоих опытах эффекты имеют место только в том случае, если сопротивление алюминиевого кольца достаточно мало́ (по этой причине не следует изготовлять кольцо из тонкой проволоки). И вот почему. Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции, возникающая в кольце, определяется скоростью изменения магнитного потока со временем: $\mathscr{E}_и = -\Phi'$. С другой стороны, в соответствии с законом Ома, $\mathscr{E}_и = I_2 R$, где R — сопротивление кольца. Если R достаточно мало́*), то $\mathscr{E}_и \approx \approx 0$, *и следовательно,* $\Phi \approx const$, *т. е.* при быстрых изменениях тока в катушке магнитный поток остается практически постоянным.

Теперь мы можем дать объяснение второму опыту. Перед включением переменного тока магнитный поток Φ был равен нулю. Согласно третьему утверждению, он будет равен нулю и после включения тока. Отсюда следует, что все время, пока по катушке идет переменный ток, Φ_1 и Φ_2 равны по величине, но противоположны по знаку. Тогда из второго утверждения получаем, что токи в этом случае антипараллельны, а значит, на кольцо в течение всего опыта действует сила отталкивания. Если амплитуда тока достаточно велика, возникающая сила отталкивания будет больше силы тяжести кольца. Однако при удалении от катушки сила отталкивания становится меньше, и на некоторой высоте она оказывается равной силе тяжести — это и есть положение равновесия кольца. Если кольцо успело развить достаточно большую скорость, оно может проскочить положение равновесия и слететь с сердечника.

Вернемся к первому опыту и объясним его с тех же позиций, что и второй. Поведение кольца при включении постоянного тока ничем не отличается от его поведения при протекании переменного тока. Поэтому рассмотрим подробно только процесс выключения тока. За время между включением тока и его выключением индукционный ток, текущий в кольце, успевает обратиться в нуль (за счет джоулевых потерь). Поэтому перед выключением тока $\Phi = \Phi_1$. При выключении тока в катушке вместе с током I_1 начинает быстро уменьшаться и поток Φ_1. Одновременно в кольце возникает индукционный ток I_2, а с ним и магнитный поток Φ_2. Так как суммарный поток остается постоянным, знаки у Φ_1 и Φ_2 одинаковы. Это *значит, что токи I_1 и I_2 — параллельны,* следовательно, кольцо притягивается к катушке.

В заключение обсудим, что изменилось бы, если бы мы заменили алюминиевое кольцо на кольцо из сверхпроводника, сопротивление которого, как известно, не просто мало, а равно нулю. При включении тока это кольцо будет отталкиваться так же, как и алюминиевое. Однако теперь все время между включением тока и его выключением индукционный ток в кольце остается постоянным ($R = 0$, и джоулевы потери отсутствуют). Т. е. все время, пока по катушке идет ток, между катушкой и кольцом действуют силы отталкивания. Суммарный магнитный поток при этом остается равным нулю. При отключении источника тока I_1 и I_2 начинают убывать, оставаясь антипараллельными. Поэтому между кольцом и катушкой продолжают действовать силы отталкивания, правда, убывающие со временем.

Б. Рыбин

---

*) Время затухания тока в кольце $\tau \sim L/R$ (L — индуктивность кольца) должно быть гораздо больше периода изменения внешнего магнитного поля T. Поскольку $T = 2\pi/\omega$, условие малости R принимает вид $R < \omega L$.

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Два катера встретились у моста и разошлись. Повернув через $\tau=0{,}5$ ч в обратную сторону, они вновь встретились на расстоянии $l=2$ км от моста. Определите скорость течения реки, если известно, что после поворота скорости катеров относительно воды не изменялись.

2. График зависимости ускорения движения тела от времени приведен на рисунке 1. Начертите графики зависимости скорости, перемещения и пройденного пути от времени. Начальная скорость тела равна нулю.

3. За последнюю секунду свободного падения тело пролетело 3/4 всего пути. Сколько времени оно падало?

4. Два шарика брошены вертикально вверх из одной точки один вслед за другим через интервал времени τ с одинаковыми начальными скоростями v_0. Найдите модуль и направление скорости второго шарика относительно первого. Через какое время шарики встретятся?

5. Лифт движется с ускорением a. Пассажир, находящийся в лифте, роняет книгу. Чему равно ускорение книги относительно пола лифта, если лифт движется вверх? вниз?

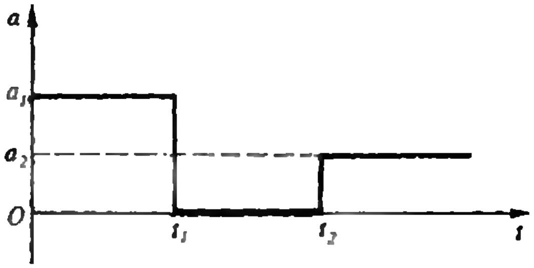


Рис. 1

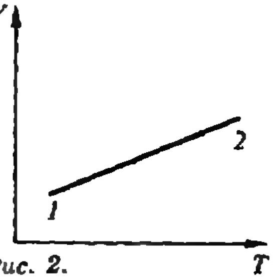


Рис. 2.

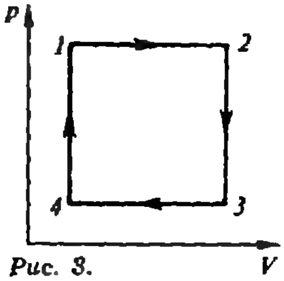


Рис. 3.

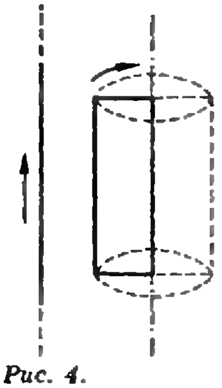


Рис. 4.

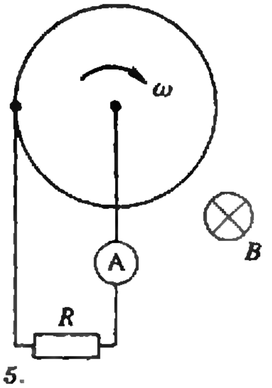


Рис. 5.

10 класс

6. На пути молекулярного пучка находится «зеркальная» стенка. Найдите давление, испытываемое этой стенкой, если скорость молекул в пучке $v=10^3$ м/с, концентрация $n=5\times10^{17}$ м$^{-3}$, масса $m=3{,}8\cdot10^{-27}$ кг, а стенка движется навстречу пучку со скоростью $u=50$ м/с.

7. В баллоне находилось $m=0{,}3$ кг гелия. Через некоторое время в результате утечки гелия и уменьшения абсолютной температуры на 10 % давление в баллоне уменьшилось на 20 %. Сколько молекул гелия просочилось из баллона?

8. Некоторое количество водорода находилось в закрытом сосуде при температуре $T_1=200$ К и давлении $p_1=400$ Па. Газ нагрели до температуры T_2, при которой молекулы водорода практически полностью распались на атомы, а давление газа стало $p_2=40$ кПа. Во сколько раз при этом возросла средняя квадратичная скорость частиц газа?

9. Поршень в цилиндре с воздухом прилегает к стенкам цилиндра неплотно и поэтому медленно пропускает воздух. Снятая во время нагревания при постоянном давлении зависимость объема от температуры изображена на рисунке 2. Увеличивалась или уменьшалась масса воздуха в цилиндре?

10. На рисунке 3 показан циклический процесс, проведенный над некоторой массой газа. Изобразите этот процесс в координатах p, T и V, T.

11 класс

11. Два параллельных прямолинейных проводника, по одному из которых течет ток I_1, сближают. Определите направление индукционного тока I_2, возникающего в другом проводнике. Каково будет направление индукционного тока при удалении проводников друг от друга?

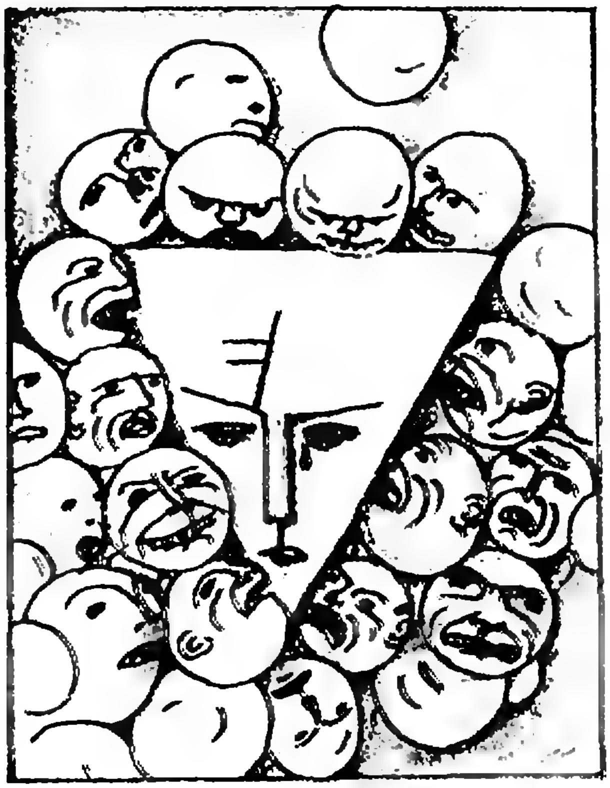
12. Проволочный виток площадью S и сопротивлением R находится во внешнем однородном магнитном поле. Индукция поля изменяется по закону $B=B_0\sin\omega t$ (B_0 и ω — известны). Определите максимальное значение тока и тепловую мощность, выделяемую в витке. Линии индукции поля перпендикулярны плоскости витка.

13. Проводник длиной $l=1$ м движется со скоростью $v=5$ м/с перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Определите величину магнитной индукции, если на концах проводника возникает разность потенциалов $U=0{,}02$ В.

14. Проволочная прямоугольная рамка вращается с постоянной скоростью вокруг одной из своих сторон, параллельных прямолинейному проводу с током (рис. 4). При каких положениях рамки в ней возникает наибольшая и наименьшая ЭДС индукции?

15. Проводящий диск вращается с постоянной угловой скоростью ω в однородном магнитном поле, индукция которого $\vec{B}$ перпендикулярна плоскости диска (рис. 5). Что показывает амперметр, включенный через резистор сопротивлением R? Радиус диска $r=0{,}5$ м, $R=1$ Ом, $\omega=2\pi\cdot50$ с$^{-1}$, $B=1$ Тл.

Публикацию подготовила В. Тихомирова



Математический кружок

Вокруг теоремы Фейербаха

В. ПРОТАСОВ

В первой половине прошлого века немецкий математик К. Фейербах доказал одну из самых красивых теорем планиметрии. Об этой теореме и других связанных с ней вещах и пойдет речь в этой статье.

Окружность девяти точек

Пусть дан треугольник ABC, A', B', C' — середины его сторон. Треугольник $A'B'C'$ мы будем называть *срединным треугольником* треугольника ABC. Опишем около треугольника $A'B'C'$ окружность γ — *окружность Эйлера* треугольника ABC. (Дальше мы будем говорить «окружность XYZ», имея в виду окружность, проходящую через три данные точки X, Y, Z.) Начнем с совсем простых утверждений (необходимые обозначения см. на рис. 1).

Упражнение 1. Докажите, что

а) Центр описанной около треугольника окружности совпадает с точкой пересечения высот его срединного треугольника.

б) Радиус окружности γ равен половине радиуса окружности ABC.

в) Центроиды (точки пересечения медиан) треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают, а треугольники ABC и $A'B'C'$ гомотетичны с коэффициентом -2 относительно их общего центроида M.

г)* (теорема Эйлера) Для всякого треугольника ABC его ортоцентр H, центр O окружности ABC и центроид M лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*), причем $2OM = MH$.

д) Центр окружности Эйлера треугольника ABC совпадает с серединой отрезка OH.

Указание. Перпендикуляр к отрезку $A'C'$ в точке B'' пересекает прямую OH в точке O', для которой $OM/MO' = B'M/MB'' = 2/1$ $(B''M = {}^1/_2\, B'M)$.

Аналогично, и остальные срединные перпендикуляры треугольника $A'B'C'$ также проходят через точку O'.

Почему же окружность Эйлера называется еще и окружностью девяти точек? Объяснение дает следующая теорема, известная еще Эйлеру.

Теорема 1. *Пусть γ — окружность Эйлера треугольника ABC. Тогда кроме середин сторон ей принадлежат следующие 6 точек: основания высот этого треугольника и середины отрезков, соединяющих его вершины с ортоцентром.*

Вы получите доказательство этой теоремы, решив следующее упражнение.

Упражнение 2. Докажите, что (рис. 2) если $\tilde{B}$ — основание высоты, опущенной из вершины B, а прямая $B'O'$ пересекает $B\tilde{B}$ в точке K, то $BK = KH = B'O$, $B'O' = O'K$ (воспользуйтесь упражнениями 1, в), г)).

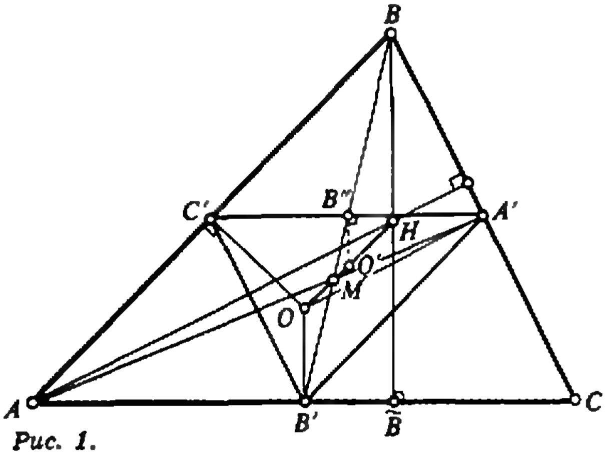


Рис. 1.

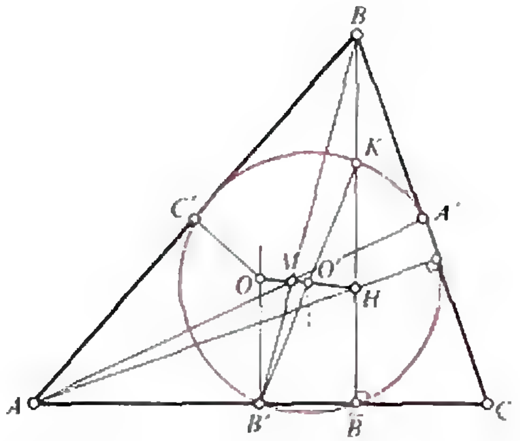


Рис. 2.

Из результата упражнения 2 следует, что $B'K$ — диаметр окружности Эйлера, т. е. что точки $\tilde{B}$ и K ей принадлежат, а это и доказывает теорему.

Свойства окружности девяти точек, составляющие содержание упражнений 1 и 2, нам в дальнейшем не понадобятся. Но мы все-таки советуем вам решить эти упражнения, чтобы поближе познакомиться с объектом, более глубокие свойства которого нам предстоит обнаружить.

Формулировка теоремы Фейербаха

Напомним, что вневписанной окружностью треугольника ABC, соответствующей стороне AB (или — вершине C), называется окружность, касающаяся стороны AB и продолжений сторон AC и BC. Легко видеть, что у любого треугольника существует ровно три вневписанных окружности. При этом центр вневписанной окружности треугольника ABC, соответствующей вершине C,— это точка пересечения биссектрисы угла C и внешних углов A и B треугольника ABC (докажите это самостоятельно).

Таким образом, если три прямые образуют треугольник, то существуют ровно четыре окружности, каждая из которых касается всех трех прямых (рис. 3).

Теперь мы можем сформулировать теорему, составляющую основное содержание этой статьи.

Теорема Фейербаха. *Окружность девяти точек касается вписанной и всех вневписанных окружностей данного треугольника.*

Дальше мы увидим, что на самом деле окружность Эйлера касается не только вписанной и вневписанных окружностей, а еще целых 60-ти (!) окружностей, связанных с данным треугольником. Но для этого нам предстоит провести некую предварительную подготовку.

Ориентированные углы и теорема о сегменте

Для облегчения в дальнейшем формулировок договоримся о некоторых терминах.

Определение 1. *Углом между пересекающимися в точке O различными прямыми a и b мы будем называть угол, на который необходимо повернуть прямую a вокруг точки O против часовой стрелки до совпадения с прямой b* (в литературе подобному определению часто соответствует термин «ориентированный угол»).

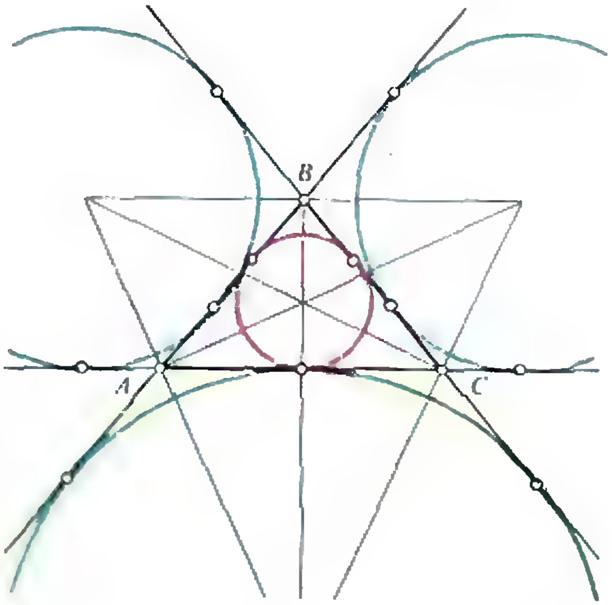
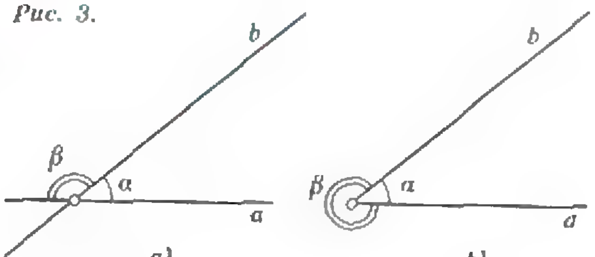


Рис. 3.



а) б)

Рис. 4.

На рисунке 4, *а* α — угол между a и b, β — угол между b и a (очевидно, $\alpha+\beta=\pi$). Такое понимание угла позволит нам понимать без специальных оговорок, какой из двух смежных углов рассматривается в каждом конкретном случае. Аналогично определяется угол между лучами a и b, выходящими из одной точки. На рисунке 4, *б* α — угол между лучами a и b, β — между b и a (здесь $\alpha+\beta=2\pi$).

Определение 2. *Дугой $\overset{\smile}{AB}$ данной окружности мы будем называть дугу, пробегаемую точкой при движении по этой окружности против часовой стрелки от A к B.* При таком определении ясно, какую из двух дуг, на которые точки A и B разбивают окружность, надо считать дугой $\overset{\smile}{AB}$. Ясно, что дуги $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{BA}$ составляют всю окружность.

Наконец, напомним, что *угловой мерой дуги $\overset{\smile}{BA}$ данной окружности называется угол между лучами OA и OB, где O — центр окружности, а угловой мерой дуги $\overset{\smile}{BA}$ — угол между лучами OB и OA.* Таким образом, $\overset{\smile}{AB}+\overset{\smile}{BA}=2\pi$.

Сформулируем теперь очень важное для дальнейшего и интересное само по себе утверждение.

Теорема 2 (*теорема о сегменте*). *В угол, образованный прямыми a и b (см. рис. 5—8) вписана окружность γ с центром I. На прямых a и b выбираются произвольные точки A и B так, что (см. рис. 5—7) прямая AB касается окружности γ, а через точки A и B проводится окружность ω, для которой $\overset{\smile}{AB}=\varphi$, где $0<\varphi<2\pi$ — данное фиксированное число. Тогда существуют две постоянные окружности, касающиеся прямых AO и OB и окружности ω.*

Одна из этих окружностей касается этих прямых в точках N_a и N_b, вторая — в точках M_a и M_b таких, что $\angle AN_aI=\varphi/4$, а $\angle IM_aO=(2\pi-\varphi)/4$ (таким образом, треугольник N_aIM_a — прямоугольный).

Конечно, сразу разобраться в столь

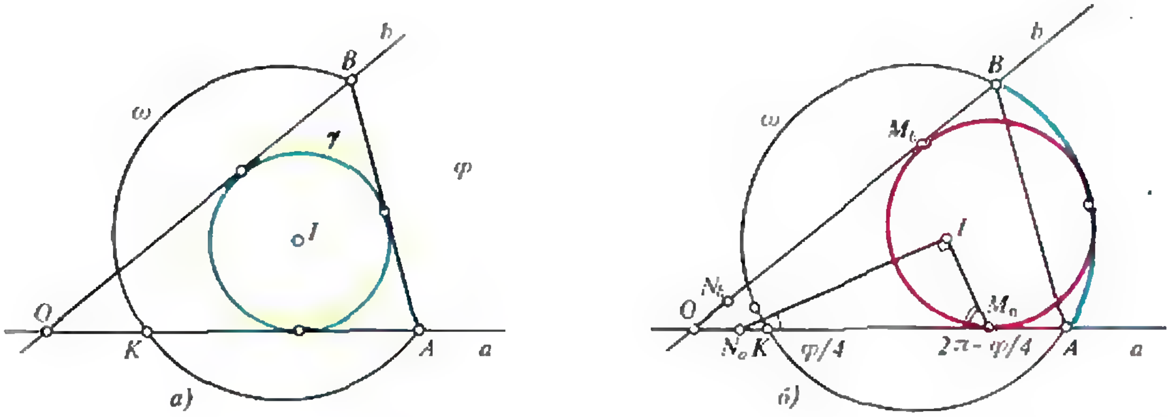


Рис. 5.

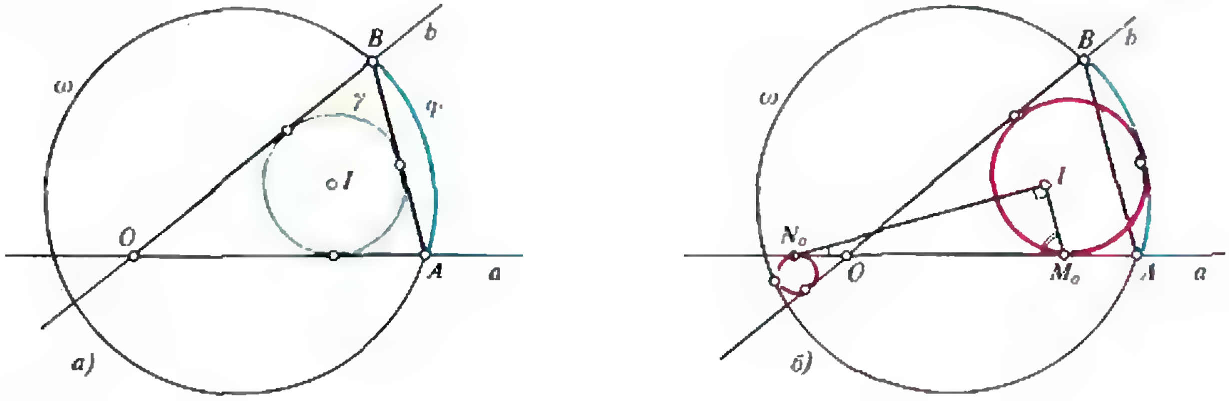


Рис. 6.

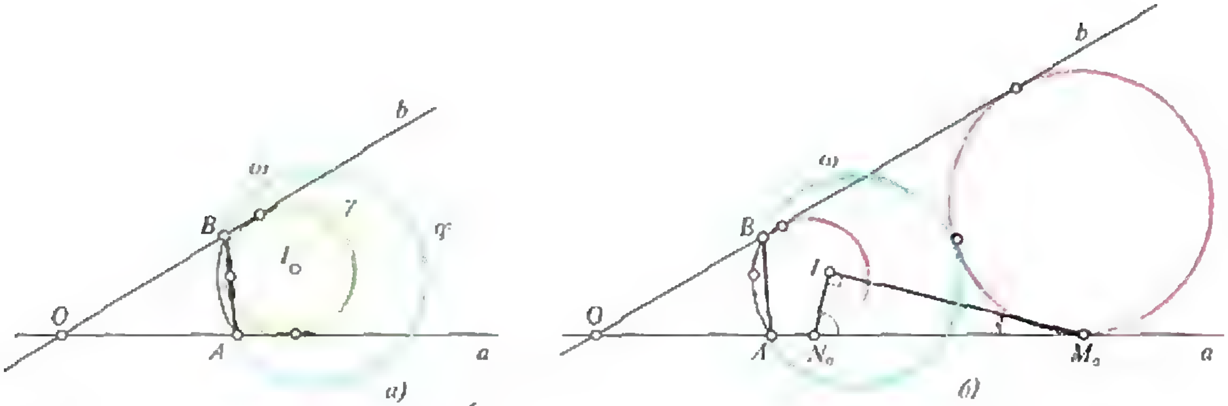


Рис. 7.

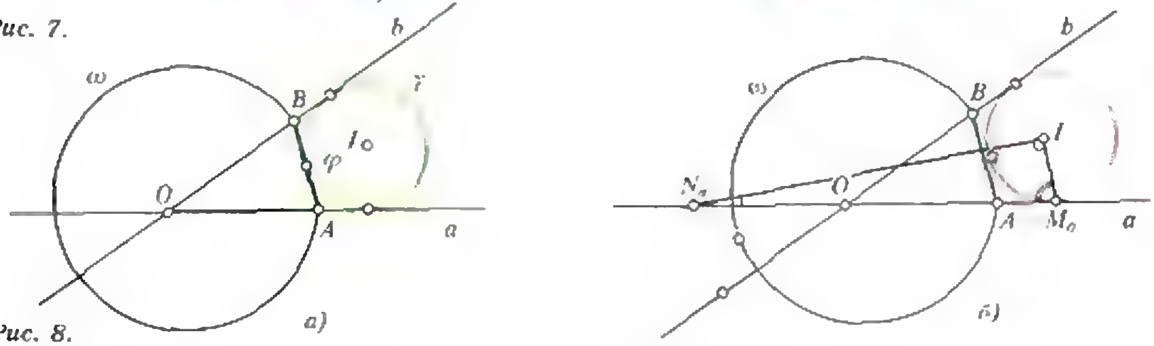


Рис. 8.

длинной формулировке не просто. Для наглядности представим себе, что точки A и B движутся по лучам OA и OB так, что окружность γ все время остается вписанной в треугольник AOB (см. рис. 5, *а*)). На стороне AB во внешнюю сторону треугольника AOB строится дуга окружности, равная φ (эта дуга вместе с отрезком AB ограничивает синий сегмент (см. рис. 9). Тогда переменная окружность ω, содержащая дугу φ, будет касаться двух фиксированных окружностей, показанных на рисунках 5—9 красным цветом.

Рисунок 9 — это один из случаев реализации теоремы о сегменте. Другая возможность представлена на рисунках 6, *а*), *б*). Здесь угол φ мал (точнее $\frac{\varphi}{2}<\angle AOB$), и точка N_a «ушла» на продолжение луча AO за точку O (почему?), так что красная окружность, касающаяся прямой a в точке N_a, вписана уже не в угол AOB, а в вертикальный с ним.

Наконец, окружность γ может быть не только вписанной, но и вневписанной для треугольника AOB. Эта ситуация порождает еще два случая (рис. 7 и 8).

Определения угла и дуги, данные выше, позволили свести все случаи в единую формулировку теоремы о сегменте. Приняв пока теорему о сегменте как факт, без доказательства, получим некоторые ее следствия.

Упражнения.

3. Докажите, что прямая BK параллельна касательной к окружности γ, проведенной из точки N_a (рис. 5, *б*).

4. а) По сторонам угла O движутся точки A и B, так что треугольник AOB имеет постоянную вписанную окружность γ. Докажите, что его описанная окружность все время касается фиксированной окружности, вписанной в угол AOB, причем точки касания последней со сторонами угла и центр окружности γ лежат на одной прямой.

б) Докажите утверждение а), если γ — постоянная вневписанная окружность треугольника AOB, соответствующая вершине O.

5. а) Докажите, что окружность, вписанная в прямой угол C треугольника ABC и касающаяся изнутри его описанной окружности, гомотетична вписанной окружности треугольника ABC относительно точки C с коэффициентом 2:1.

б) Докажите, что окружность, вписанная в прямой угол C треугольника ABC и касающаяся внешним образом его описанной окружности, гомотетична относительно точки C с коэффициентом 2:1 его вневписанной окружности.

в) Докажите теорему Фейербаха для прямоугольного треугольника.

6. Даны непересекающиеся окружности γ_1 и γ_2. Произвольная окружность касается γ_1 и γ_2 внутренним образом и пересекает их общие внутренние касательные в точках A, B, C, D (рис. 10). Докажите, что

а) Угловые меры дуг $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{CD}$ постоянны и равны удвоенным углам, образованным прямыми AC и BD с общей внешней касательной к γ_1 и γ_2.

б) *У треугольников AOB и COD постоянные вписанные окружности.*

7. Предыдущее упражнение есть не что иное, как утверждение, обратное случаю теоремы о сегменте, показанному на рисунке 6. Сформулируйте и докажите аналогичные утверждения, соответствующие случаям, показанным на рисунках 7 и 8.

8. Даны окружности γ_1 и γ_2, касающиеся внешним образом в точке O. Окружность ω касается их одинаковым образом (внутренним или внешним). Докажите, что общая касательная к γ_1 и γ_2, проведенная в точке O, делит окружность ω на две дуги, равные удвоенным углам между этой касательной и другой общей касательной к γ_1 и γ_2.

9 (*задача о луночке*). Дан угол с вершиной в точке O и два числа φ_1 и φ_2 такие, что $0<\varphi_1<2\pi$, $0<\varphi_2<2\pi$. Точки A и B движутся по сторонам угла, и на стороне AB во внешнюю сторону треугольника AOB строятся две дуги, равные φ_1 и φ_2 («луночка»). Докажите, что если окружность, содержащая первую дугу, касается фиксированной окружности, вписанной в угол O, то и окружность, содержащая вторую дугу, касается фиксированной окружности, вписанной в этот угол.

Утверждение это можно усилить: окружность, содержащая дугу φ_2, касается двух окружностей, правда, вторая может быть вписана уже не в данный угол, а в вертикальный с ним.

Упражнение 9 — в некотором смысле, сильное обобщение теоремы о сегменте. Последняя является частным (вернее, предельным) случаем, когда $\varphi_1=0$, и, следовательно, одна из дуг луночки вырождается в прямую, а луночка — в сегмент. Тем не менее, решение задачи о луночке следует из этого своего частного случая.

Доказательство теоремы о сегменте

Докажем, что (в обозначениях рисунка 5,*б*) окружность, касающаяся прямых a и b в точках N_a и N_b соответственно, касается окружности ω. Доказательство для второй окружности, а также для остальных случаев теоремы совершенно аналогичны. Следующее утверждение является небольшим усилением известной теоремы *об угле между касательной и хордой.*

Лемма 1. *На окружности даны точки A и B. Прямая a касается этой окружности в точке A. Тогда угол между прямыми a и AB равен половине дуги $\overset{\smile}{AB}$. Обратно: если угол между прямыми a и AB равен $\overset{\smile}{AB}/2$, то прямая a касается этой окружности в точке A.*

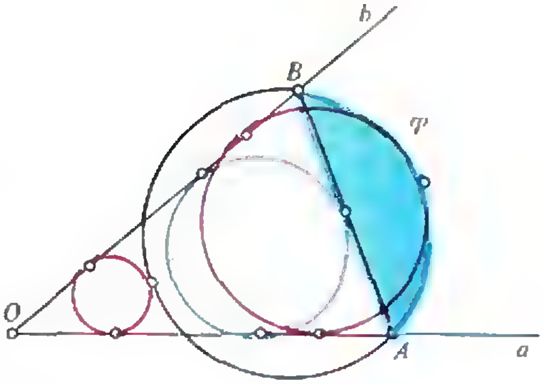


Рис. 9.

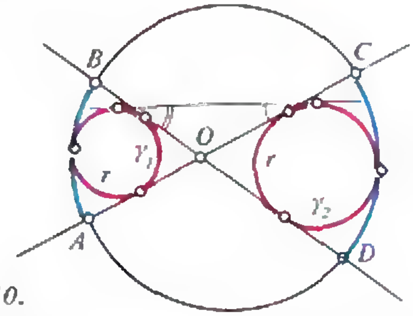


Рис. 10.

Упражнение 10. Докажите лемму 1.

Лемма 2. *Если M — точка внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ такая, что $\angle CMB=\angle MAB+\angle MDC$ (рис. 11), то окружности AMB и CMD касаются в точке M.*

Доказательство. Возьмем внутри угла CMB точку K такую, что $\angle KMB=\angle MAB$ и $\angle KMC=\angle MDC$ (по условию леммы, это можно сделать). Так как $\angle KMC=\angle MDC=\overset{\smile}{CM}/2$, то по лемме 1, окружность CMD касается прямой MK в точке M. Точно так же $\angle KMB=\angle MAB=\overset{\smile}{BM}/2$, и окружность MAB касается прямой MK в точке M.

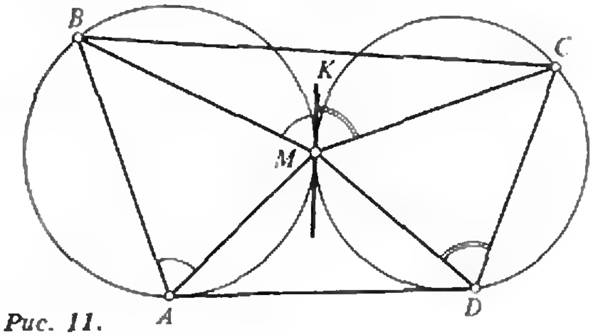


Рис. 11.

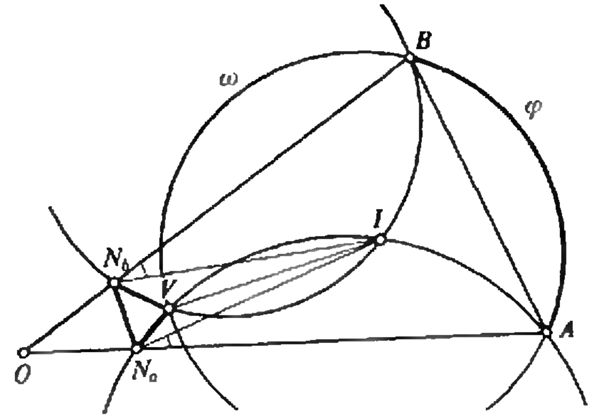


Рис. 12.

Таким образом, окружности CMD и BMA касаются, так как KM — их общая касательная в точке M.

Доказательству теоремы о сегменте предпошлем некоторые наблюдения. Отложим на сторонах треугольника AOB точки N_a и N_b такие, что $ON_a=ON_b$. Пусть I — центр окружности γ, причем $\angle AN_aI=\angle IN_bB=\alpha<\pi/2$. Пусть V — вторая точка пересечения окружностей AIN_a и BN_bI (рис. 12). Поскольку $\angle IN_bB=\angle IVB$ (как углы, вписанные в окружность BN_bI) и, аналогично, $\angle AN_aI=\angle AVI$, получаем, что $\angle AVB=2\alpha$. Если теперь провести окружность ABV, окажется, что $\overset{\frown}{AB}=4\alpha$, т. е. величина дуги AB не зависит от выбора точек A и B.

Нам осталось положить $\varphi=4\alpha$ и доказать такое утверждение: *если $\angle AN_aI=\angle IN_bB=\varphi/4$, то окружность, касающаяся AO и OB в точках N_a и N_b, касается окружности ω в точке V.*

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 2. Из ранее сказанного следует, что точка V лежит на окружности ω. Осталось доказать, что окружность N_aVN_b касается прямых a и b и окружности ω.

Все дальнейшее основано на подсчете углов, чем мы сейчас и займемся.

Прежде всего, $\angle ON_bN_a=\angle ON_aN_b=(\pi-\angle AOB)/2$. С другой стороны, $\angle N_bVN_a=2\pi-\angle IVN_b-\angle IVN_a=\angle IAN_a+\angle N_bBI=(\angle OBA+\angle OAB)/2=(\pi-\angle AOB)/2$.
Итак, $\angle ON_bN_a=\angle N_bVN_a=\angle N_bN_aO$, и, по лемме 1, окружность N_aVN_b касается прямых OA и OB в точках N_a и N_b соответственно.

Для доказательства касания окружностей N_aVN_b и ω достаточно убедиться в том (лемма 2), что

$$\angle VN_aN_b+\angle BAV=\angle BVN_b. \qquad (1)$$

Прежде всего заметим, что

$$\angle NAV=\angle BAI+\angle IAV,$$

но

$$\angle IAV=\angle IN_aV=\angle AN_aV-\angle AN_aI=\angle AN_aV-\varphi/4.$$

Поэтому

$$\angle BAV=\angle AN_aV-\varphi/4+\angle BAO/2. \qquad (2)$$

По лемме 1,

$$\angle VN_aN_b=\angle VN_aB. \qquad (3)$$

Поэтому левая часть равенства (1) с учетом (2) и (3) оказывается равной

$$\angle VN_bB+\angle AN_aV-\varphi/4+\angle BAO/2. \qquad (4)$$

Наконец,

$$\angle BVN_b=\angle BIN_b=\pi-\angle IN_bB-\angle N_bBI=\pi-\varphi/4-\angle OBA/2. \qquad (5)$$

Четырехугольники N_aVIA и N_bVIB — вписанные (каждый — в свою окружность), следовательно,

$$\angle AN_aV=\pi-\angle VIA,$$
$$\angle VN_bB=\pi-\angle BIV,$$

но тогда

$$\angle AN_aV+\angle VN_bB=2\pi-\angle VIA-\angle BIV=\angle AIB,$$

откуда следует, что выражение (4) равно $\angle AIB-\varphi/4+\angle BAO/2=\pi-\varphi/4-\angle OBA/2$, т. е. совпадает с правой частью равенства (5), что и требовалось.

Теорема о сегменте доказана.

Упражнение 11. Проведите самостоятельно все рассуждения для остальных случаев.

В следующих упражнениях речь идет о произвольном криволинейном треугольнике ABC, состоящем из отрезков CA и CB и дуги AB некоторой окружности.

Упражнения

12. Впишите с помощью циркуля и линейки окружность в данный криволинейный

треугольник ABC. Всегда ли это возможно?

13. Вписанная окружность криволинейного треугольника ABC касается его дуги $\overset{\smile}{AB}$ в точке V. Докажите, что биссектриса угла AVB проходит через центр окружности, вписанной в (обычный) треугольник ABC.

14. Вписанная в криволинейный треугольник ABC окружность касается стороны AC в точке M и дуги AB в точке V. Докажите, что окружность MVA проходит через центр вписанной окружности (обычного) треугольника ABC.

15. Дан треугольник ABC (обычный). Окружность, вписанная в угол C, касается изнутри окружности ABC в точке M, T — середина дуги AB, содержащей точку C, I — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что точки I, T, M лежат на одной прямой.

Доказательство теоремы Фейербаха

Мы увидим, что теорема Фейербаха является частным случаем доказанной нами теоремы, точнее — тем ее случаем, когда (см. формулировку теоремы о сегменте) угол между прямыми a и b равен $(2\pi-\varphi)/2$.

Пусть $A'B'C'$ — срединный треугольник данного треугольника ABC (рис. 13), N и N' — точки касания прямой BC со вписанными окружностями треугольников ABC и $A'B'C$, соответственно, I' — центр вписанной в треугольник $A'B'C$ окружности.

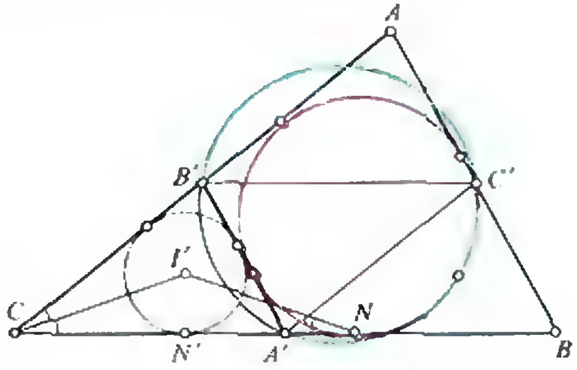


Рис. 13.

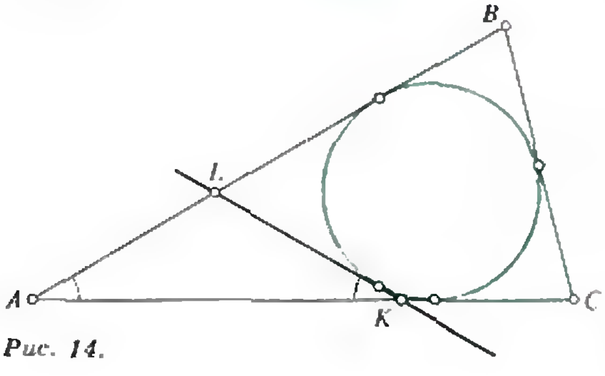


Рис. 14.

Докажем, что вписанная окружность треугольника ABC касается окружности $A'B'C'$ (т. е. окружности девяти точек).

Треугольники CAB и $CA'B'$, а значит, и вписанные в них круги, гомотетичны относительно точки C с коэффициентом 2:1. Следовательно, $CN=2CN'$, а значит, $CN'=N'N$, и треугольник $CI'N$ *равнобедренный.*

Применим теорему о сегменте, положив $\varphi=2(\pi-\angle ACB)$.

Имеем $\overset{\smile}{A'B'}=2\pi-\overset{\smile}{B'A'}=2\pi-2\angle A'C'B'=2\pi-2\angle ACB$($\angle A'C'B'=\angle ACB$, так как $CB'C'A'$ — параллелограмм). Итак, $\overset{\smile}{A'B'}=\varphi$. Кроме того, $\angle I'NC=(2\pi-\varphi)/4$ (так как треугольник $I'CN$ — равнобедренный, то $\angle I'NC=\angle ICN=\angle ABC/2=(2\pi-\varphi)/4$, в силу выбора числа φ).

По теореме о сегменте, окружность ω, проходящая через A' и B', для которой $\overset{\smile}{A'B'}=\varphi$ (а это — окружность девяти точек), должна касаться окружности, вписанной в угол *ACB и касающейся прямой CB* в точке N (ибо для точки N верно равенство $\angle I'NC=(2\pi-\varphi)/4$, т. е. вписанной окружности треугольника ABC.

Заменив теперь в предыдущих рассуждениях слово «вписанная» *на* «вневписанная», получим то, что надо (имеются в виду вневписанные окружности треугольников ACB и $A'C'B'$, соответствующие вершине C). Тем самым теорема Фейербаха доказана.

Заметим, что в первой части доказательства мы воспользовались не всей теоремой о сегменте, а, так сказать, только ее половиной, ибо теорема говорит о двух фиксированных окружностях, *касающихся* окружности ω. Одна из них в данном случае — это вписанная в треугольник ABC окружность. А где вторая? Ответ на этот вопрос дает следующее упражнение.

Упражнение 16. От остроугольного треугольника ABC прямой, касающейся его вписанной окружности, отрезали равнобедренный треугольник AKL с основанием AK (рис. 14). Докажите, что вписанная в треугольник AKL окружность касается окружности девяти точек треугольника ABC.

Так как такой «треугольничек» можно отрезать от каждого из трех углов треугольника ABC, то получаем уже не одну, а три окружности, касающиеся окружности девяти точек (почему, кстати, три, а не шесть?).

А если похожую процедуру проделать с вневписанной окружностью?

Упражнение 17. На продолжениях сторон BA и CA остроугольного треугольника ABC за точку A взяли точки M и N соответственно, так, что прямая MN касается вневписанной окружности треугольника ABC, соответствующей вершине C, а треугольник AMN — равнобедренный с основанием AM. Докажите, что вневписанная окружность треугольника AMN, соответствующая вершине N, касается окружности девяти точек треугольника ABC.

Точки M и N можно было бы взять и на продолжениях сторон AB и CB за точку B, и мы получили бы еще одну окружность, касающуюся окружности девяти точек.

Упражнение 18. Пусть вневписанная окружность треугольника ABC касается продолжений сторон CA и CB в точках K и L соответственно. На отрезке CK взята точка M, а на отрезке CL — точка N так, что прямая MN касается этой вневписанной окружности, и треугольник CMN — равнобедренный с основанием CM. Докажите, что вписанная в треугольник CMN окружность касается окружности девяти точек треугольника ABC.

Упражнения 17—18 каждой вневписанной окружности ставит в соответствие 3 окружности, касающиеся окружности девяти точек. Так как вневписанных окружностей у треугольника три, то получаем всего 9 окружностей.

Пора считать. Сколько мы уже знаем окружностей, касающихся окружности девяти точек?

Вписанная окружность, да 3 вневписанных, да 3 окружности из упражнения 16, да 9 окружностей из упражнений 17, 18 — всего 16 окружностей.

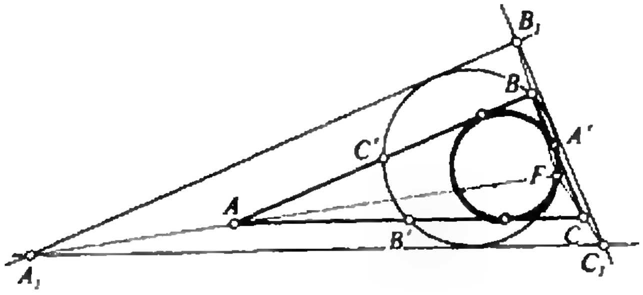


Рис. 15.

Но и это еще не все!

Упражнение 19. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что треугольники ABC, AHC, AHB и BHC имеют общую окружность девяти точек.

Но каждый из перечисленных в упражнении 19 треугольников имеет свое множество из шестнадцати окружностей, касающихся окружности девяти точек, так что наша цифра учетверяется: получаются 64 окружности, касающиеся окружности девяти точек треугольника ABC. Результат, достойный книги Гиннеса!

В заключение поговорим о точках касания. В упражнениях 20—22 F — точка касания окружности девяти точек треугольника ABC и его вписанной окружности.

Упражнения

20. Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ параллельны сторонам треугольника ABC и касаются окружности девяти точек последнего (рис. 15). Докажите, что прямые A_1A, B_1B, C_1C пересекаются в точке F.

21. Докажите, что окружности девяти точек треугольников AIB, BIC, CIA пересекаются в точке F, где I — центр вписанного круга треугольника ABC.

22. Пусть A', B', C' — соответственно середины сторон BC, AC, AB треугольника ABC (вершины перечислены против часовой стрелки). Докажите, что три прямые, соединяющие центры вписанных окружностей треугольников $AC'B'$, $B'A'C$, $C'BA'$ соответственно с серединами дуг $B'C'$, $A'B'$, $C'A'$ окружности девяти точек треугольника ABC, пересекаются в точке F.

В заключение отметим, что теорема о сегменте имеет, по-видимому, еще множество интересных следствий. В формулировке теоремы есть два свободных параметра — угол O между прямыми a и b и угол φ. Мы рассмотрели лишь два частных случая: $\angle AOB=\varphi/2$ (упражнения 4 и 5) и $\angle AOB=(2\pi-\varphi)/2$ (теорема Фейербаха).

Возможно, при других соотношениях между $\angle AOB$ и φ тоже получатся интересные результаты.

Если читателю удастся найти новые следствия теоремы о сегменте или пополнить список окружностей, касающихся окружности девяти точек, просьба посылать их автору статьи в редакцию журнала «Квант».

Практикум абитуриента

Геометрические решения экстремальных геометрических задач

П. ГОРНШТЕЙН, В. ПОЛОНСКИЙ, М. ЯКИР

Задачи, связанные с нахождением наибольших и наименьших значений геометрических величин, неспроста пользуются большой популярностью у составителей экзаменационных заданий: ведь чтобы решить подобную задачу, абитуриенту приходится комбинировать приемы и методы из весьма различных разделов школьного курса математики.

Первое, что приходит в голову,— составить с помощью заданных параметров функцию и исследовать ее на максимум и минимум. У такого подхода тем не менее есть недостаток: во многих геометрических задачах этот привычный путь решения сопряжен со значительными техническими трудностями. В условиях экзамена, где так важно не ошибиться, этот недостаток особенно ощутим.

Часто, однако, удается избавиться от громоздких выкладок, обойдясь чисто геометрическими рассуждениями.

Вот примеры.

Задача 1 (МЭСИ). *На отрезках AB и AC как на диаметрах построены полуокружности. В общую часть двух образовавшихся полукругов вписана окружность максимального радиуса. Найдите радиус этой окружности, если $AB=4$, $AC=2$, $\angle BAC=120°$.*

Решение. Пусть O_1 и O_2 — середины соответственно отрезков AB и AC (рис. 1). Тогда

$$O_1O_2=\sqrt{AO_1^2+AO_2^2-2AO_1AO_2\cos 120°}=\sqrt{7}.$$

Пусть r — радиус окружности, о которой говорится в условии задачи, O — ее центр.

Для точек O_1, O_2, O имеем $O_1O+OO_2\geqslant O_1O_2$, или $1-r+2-r\geqslant\sqrt{\ }$. Отсюда $r\leqslant(3-\sqrt{7})/2$. Очевидно, знак равенства достигается лишь в том случае, когда точка O принадлежит отрезку O_1O_2.

Ответ: $(3-\sqrt{7})/2$.

Задача 2 (МАИ). *Найдите периметр треугольника наибольшей площади, образованного бо́льшим основанием и продолжением боковых сторон трапеции, если известно, что длина верхнего основания трапеции в два ра-*

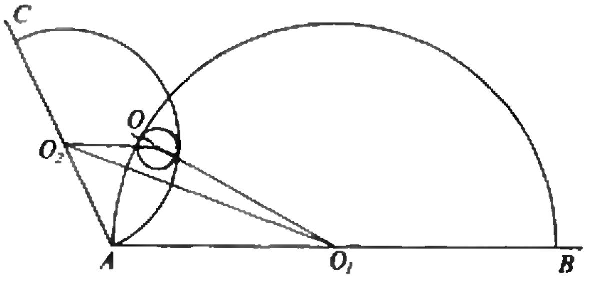


Рис. 1.

за меньше длины ее нижнего основания, а диагонали равны 5 и 6.

Решение. Пусть BC и AD — основания трапеции (рис. 2), $BC=\frac{1}{2}AD$. Выходит, что BC — средняя линия треугольника AED. Тогда

$$S_{BEC}=\frac{1}{4}S_{AED},$$

$$S_{ABCD}=\frac{3}{4}S_{AED},$$

$$\frac{4}{3}S_{ABCD}=S_{AED}.$$

Следовательно, площадь треугольника AED достигает максимального значения при максимальной площади трапеции $ABCD$. Очевидно, $S_{ABCD}\leqslant\frac{1}{2}AC\cdot BD$, т. е. площадь данной трапеции максимальна, если ее диагонали перпендикулярны.

Итак, искомый периметр — это периметр треугольника с перпендикулярными медианами:

$$P_{AED}=AE+ED+AD=2AB+2CD+AD=2\sqrt{\frac{4}{9}AC^2+\frac{1}{9}BD^2}+2\sqrt{\frac{4}{9}BD^2+\frac{1}{9}AC^2}+\sqrt{\frac{4}{9}AC^2+\frac{4}{9}BD^2}.$$

Ответ: $\frac{26+4\sqrt{34}+2\sqrt{61}}{3}$.

Задачи 3 (МАИ). *В треугольнике ABC биссектриса, проведенная из вершины A, имеет длину 2, и $AB=2AC$. На стороне AB взята точка M, а на стороне AC — точка N так, что $BM=AN$. Найдите наименьшее возможное расстояние от середины отрезка MN до вершины A.*

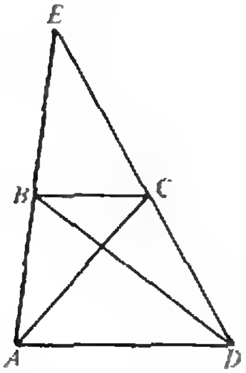


Рис. 2.

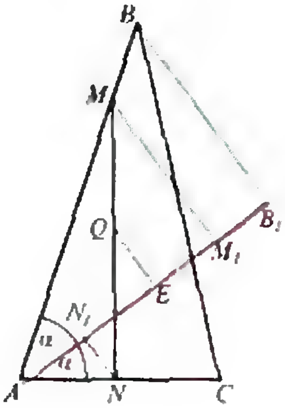


Рис. 3.

Решение. Пусть Q — середина отрезка MN, K — точка пересечения биссектрисы угла BAC и BC. Спроектируем точки M, N, Q и B на биссектрису угла BAC (рис. 3). Тогда

$$AN_1=M_1B_1,\ N_1E=M_1E$$

(докажите!). Пусть $AC=m$, $AB=2m$, $\angle BAE=\angle EAC=\alpha$. Тогда

$$AE=AN_1+N_1E=\frac{1}{2}AB_1=m\cos\alpha.$$

Отсюда

$$AQ\geqslant AE=m\cos\alpha.$$

Следовательно, искомое расстояние принимает наименьшее значение, когда середина Q отрезка MN лежит на биссектрисе. (Покажите, что положение точек M и N, при котором указанный случай реализуется, действительно существует.)

Для площади треугольника ABC имеем

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 2\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}AB\cdot AK\sin\alpha+\frac{1}{2}AK\cdot AC\sin\alpha,$$

или

$$m^2\sin 2\alpha=m\sin\alpha+2m\sin\alpha.$$

Отсюда $m\cos\alpha=1{,}5$.

Ответ: 1,5.

Задача 4 (МИСиС). *В параболу $y=ax^2+bx+c$ вписан четырехугольник $ABCD$ наибольшей площади с диагоналями AC и BD. Найдите координаты вершины C, если $A(-3;\ -4)$, $B(-2;\ -1)$, $D(1;\ -4)$.*

Решение. Так как точки A, B, D лежат на параболе, то их координаты удовлетворяют ее уравнению:

$$\begin{cases}-4=9a-3b+c,\\ -1=4a-2b+c,\\ -4=a+b+c,\end{cases}$$

откуда

$$a=-1,\ b=-2,\ c=-1.$$

Итак, уравнение заданной параболы найдено: $y=-(x+1)^2$. В условии указано, что AC — диагональ четырехугольника $ABCD$, значит, точка C лежит на дуге BD параболы (рис. 4). Для решения задачи достаточно найти координаты точки C, при которых площадь треугольника DBC максимальна, что, в свою очередь, равносильно поиску на дуге BD точки, максимально удаленной от прямой BD. Пусть l — касательная к параболе, параллельная BD. В силу характера выпуклости квадратичной функции все точки параболы лежат в одной полуплоскости относительно прямой l. Следовательно, точкой, максимально удаленной от прямой BD, будет точка касания.

Так как прямая BD невертикальная, то ее уравнение имеет вид $y=kx+d$. Зная координаты точек B и D, легко установить, что $k=-1$. Значит, угловой коэффициент касательной l равен -1, т. е. производная квадратичной функции, задающей параболу, в точке касания равна -1. Имеем $-2(x_0+1)=-1$, где x_0 — абсцисса точки касания; отсюда $x_0=-\frac{1}{2}$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right)$.

Задача 5 (УрГУ). *К кривой* $y=x^2+bx+2$ *в точках с абсциссами* $x_1=-1$ *и* $x_2=-3$ *проведены касательные. При каком значении* b *периметр треугольника, образованного проведенными касательными и осью* Oy, *будет наименьшим?*

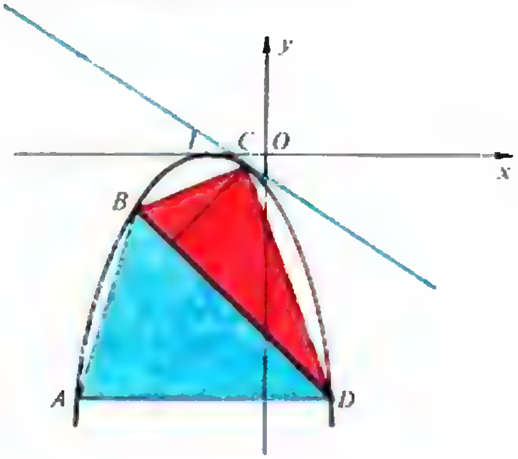


Рис. 4.

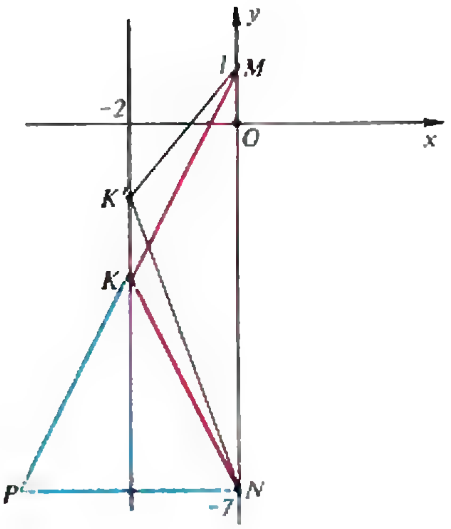


Рис. 5.

Решение. Уравнения касательных к заданной параболе в точках с абсциссами $x_1=-1$ и $x_2=-3$ соответственно имеют вид $y=(b-2)x+1$, $y=(b-6)x-7$ (покажите это!). Отсюда две вершины треугольника, о котором говорится в условии, имеют координаты $M(0;\ 1)$ и $N(0;\ -7)$, а третья — $K(-2;\ 5-2b)$ (рис. 5). Следовательно, нужно найти такое положение точки K на прямой $x=-2$, при котором сумма $MK+KN$ была бы наименьшей.*)

Покажем, что искомая точка — это точка пересечения прямых $x=-2$ и PM, где точка P симметрична точке N относительно прямой $x=-2$. Пусть K' — произвольная точка прямой $x=-2$, отличная от K. Имеем $MK'+K'N=MK'+PK'>MP=PK+KM=KN+KM$. Поскольку средняя линия треугольника PMN лежит на прямой $x=-2$, треугольник MKN равнобедренный; тогда ордината точки K равна -3. Отсюда $5-2b=-3$, $b=4$.

Ответ: $b=4$.

Задача 6 (МФТИ). *В основании прямой призмы* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *лежит*

---

*) Осталось решить «задачу о людоеде». Людоед живет в пещере M, обедает в деревне N и после плотной трапезы заходит по дороге домой напиться к ручью $x=-2$. Какой дорогой он должен идти, чтобы побыстрее добраться до пещеры? В менее кровожадной формулировке эта задача была упомянута, например, в «Калейдоскопе «Кванта» в третьем номере за этот год. (*Прим. ред.*)

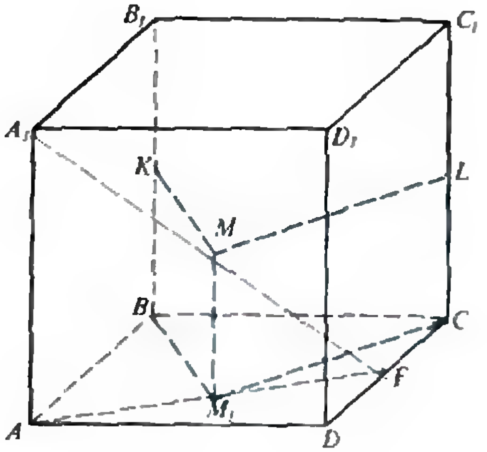


Рис. 6.

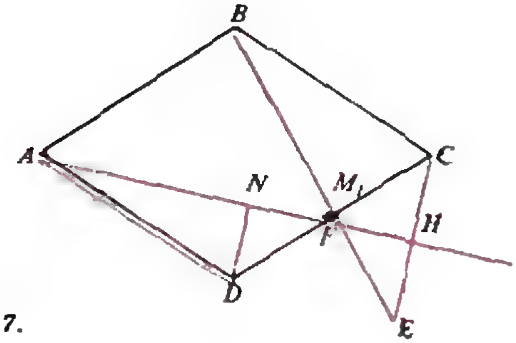


Рис. 7.

ромб $ABCD$ с углом $\angle A=60^\circ$. Длины всех ребер призмы равны 1. Точка F — середина ребра DC, а точка M лежит на прямой A_1F. Определите наименьшее значение суммы площадей треугольников MBB_1 и MCC_1.

Решение. Пусть MK и ML — высоты соответственно треугольников MBB_1 и MCC_1 (рис. 6), M_1 — проекция точки M на плоскость ABC. Тогда $M_1B=MK$, $M_1C=ML$ (докажите!) и

$$S_{MBB_1}+S_{MCC_1}=\frac{1}{2}BB_1\cdot M_1B+\frac{1}{2}CC_1\times$$

$$\times M_1C=\frac{1}{2}(M_1B+M_1C).$$

Как и в предыдущей задаче, сумма M_1B+M_1C принимает наименьшее значение, если M_1 — точка пересечения прямых AF и BE, где E — точка, симметричная точке C относительно прямой AF (рис. 7).*)

Осталось найти длину отрезка BE. По теореме косинусов

$$BE^2=BC^2+CE^2-2BC\cdot CE\cos\angle BCE=$$

$$=1+CE^2-2CE\cos(60^\circ+\varphi),$$

где $\varphi=\angle FCE$. Проведем в треугольнике ADF высоту DN. Видно, что $CE=2DN$ и $\angle FCE=\angle NDF$. Но

$$DN=\frac{2S_{ADF}}{AF}=\frac{AD\cdot DF\cdot\sin 120^\circ}{\sqrt{AD^2+DF^2-2AD\cdot DF\cos 120^\circ}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

$$\cos\angle NDF=\frac{ND}{DF}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

После несложных вычислений получаем $BE=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{7}}$.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{7}}$.

Задача 7 (МАИ). *В треугольной пирамиде $SABC$ все ребра имеют одинаковую длину, равную l. На ребре SA взята точка M так, что $SM=\frac{1}{4}l$, на ребре SB взята точка N, а на плоскости ABC взята точка P. Найдите наименьшую величину суммы длин отрезков MN и NP.*

Решение. Длина отрезка NP минимальна, если P — проекция точки N на плоскость ABC. Очевидно, что P принадлежит медиане BE правильного треугольника ABC (рис. 8).

Теперь нужно найти кратчайшее расстояние от данной точки M до прямой BE по поверхности двугранного угла, образованного плоскостями ABS и BSE. Это все равно, что найти расстояние от точки до прямой на *плоской развертке* этого двугранного угла.

Рассмотрим такую развертку. Для этого в плоскости SBE построим треугольник SA_1B, равный треугольнику ASB (рис. 9). На стороне SA_1 отметим точку M_1, в которую при разворачивании двугранного угла переходит точка M, так что $SM_1=\frac{1}{4}l$. Как известно, кратчайшее расстояние от точки до прямой есть пер-

---

*) Снова задача о людоеде! (*Прим. ред.*)

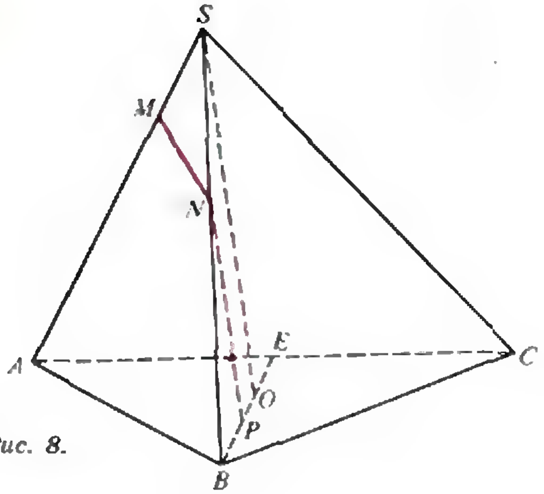


Рис. 8.

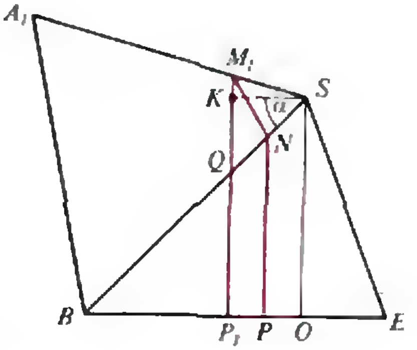


Рис. 9.

пендикуляр, опущенный из данной точки на данную прямую. Поэтому проведем $M_1P_1 \perp BE$. Очевидно, что сумма $MN+NP=M_1N+NP$ минимальна тогда и только тогда, когда $P=P_1$ и $N=Q$. Осталось выяснить, чему равна длина отрезка M_1P_1.

Проведем $SK \perp M_1P_1$. Пусть $\angle KSB = \angle SBE = \alpha$. Высота SO пирамиды равна $l\sqrt{\frac{2}{3}}$ (покажите!). Тогда

$$M_1P_1 = M_1K + SO = \frac{l}{4}\sin(60^\circ - \alpha) + l\sqrt{\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{l}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) + l\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Выразив $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ из треугольников SBE и SBO, получим ответ:

Ответ: $\frac{l}{8}\left(1 + 7\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Конечно, все эти задачи можно решать путем составления функции и исследования ее на экстремум. Но решение будет куда более громоздким.

Задачи для самостоятельного решения

1 (МАИ). Найдите длины сторон параллелограмма $ABCD$ наибольшей площади, если известно, что его вершина A удалена от середины сторон BC и CD на 6 и 8 единиц соответственно.

2. Две дуги окружностей радиусами R с центрами в точках A и B таких, что $AB=R$, пересекаются в точке C. Впишите в криволинейный треугольник ABC равнобедренную трапецию наибольшей площади.

3 (ЛГУ). Даны точки $A(0;\ 3)$, $B(4;\ 5)$. На оси Ox найдите такую точку C, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.

4 (ЛГУ). Боковые стороны трапеции перпендикулярны. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника, образованного диагоналями и средней линией трапеции, если известно, что длины оснований трапеций равны a и b?

5. На координатной плоскости рассматриваются правильные треугольники, у которых две вершины лежат на прямой $y=x+2$, а координаты третьей вершины удовлетворяют неравенству $x^2 \leqslant y \leqslant x+2$. Найдите наибольшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников.

6 (УГУ). К кривой $y=-x^3+bx$ в точках с абсциссами $x_1=0$ и $x_2=-\frac{3}{2}$ проведены касательные. При каком значении b периметр треугольника, образованного проведенными касательными и осью Oy, будет наименьшим?

7 (МФТИ). Точка D является серединой ребра BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. На боковой грани AA_1C_1C взята точка E, на основании ABC — точка F так, что прямые EB_1 и FD параллельны. Какой наибольший объем может иметь призма $ABCA_1B_1C_1$, если $EB_1=1$, $FD=\frac{3}{4}$, $EF=\frac{1}{2\sqrt{3}}$?

8 (МАИ). В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. *Известно, что расстояния от точек A, B, C, S* до середины ребра BC равны 4. При какой величине угла, образованного *плоскостями* ACS и SCD, объем пирамиды будет наибольшим?

Алгебраические уравнения и неравенства

Начиная с этого номера, мы в течение всего учебного года будем публиковать тематические подборки задач по основным разделам школьного курса математики. Решение предлагаемых задач поможет вам лучше усвоить школьный курс, а также подготовиться к вступительным экзаменам в вузы. Публикуя их, мы надеемся хотя бы частично скомпенсировать острейший дефицит литературы, дополняющей школьные учебники.

Первая наша подборка содержит алгебраические уравнения и неравенства. Задачи эти взяты из вариантов вступительных экзаменов в различные вузы, пособий для поступающих, а также составлены автором подборки.

1. Решите уравнения «с модулем»:

а) $2|x+1|-|x|=1$;

б) $|x|-2|x+1|+3|x+2|=4$;

в) $x^2-\left|x-\frac{1}{4}\right|=0$;

г) $|x^2-2|x||=3x^2-x$;

д) $|x-|x-|x-1|||=1/2$;

е) $||-x-4|+x+2|=x+7$;

ж) $||x^4-3x^2-1|-4|=x^4+3x^2+3$;

2. Решите рациональные уравнения:

а) $x^2+1993x+1992=0$;

б) $1992x^2-1993x+1=0$;

в) $(x^2-2x)^2=3(x-1)^2-13$;

г) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{5}{4}$;

д) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2=\frac{40}{9}$;

е) $x(x-1)(x+3)(x-4)+36=0$;

ж) $(x^2-3x+1)^2+3(x-1)(x^2-3x+1)=$ $=4(x-1)^2$;

з)* $(x^2-5x+1)(x^2-4)=6(x-1)^2$;

и) $3\frac{x^2+3x+1}{x^2-x+1}=\frac{2x^2-x+2}{x^2+x+1}$;

к)* $x^2+4x-1=0$.

3. Решите иррациональные уравнения:

а) $x=1+\sqrt{7-x}$;

б) $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$;

в) $\sqrt{8x+1}-\sqrt{x-2}=4$;

г) $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{5x+4}$;

д) $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$;

е) $\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{2x-5}=\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x-2}$;

ж) $\sqrt{x-3}+4=\sqrt[4]{x-3}$;

з) $8\sqrt{12+16x-16x^2}+4x-4x^2=33$;

и) $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt[3]{x-\text{[illegible]}}=4$;

к) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x+1}=\sqrt[3]{3x+2}$;

л) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+4}=4x+3$;

м) $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+x+5}=\sqrt{2x^2+2x+17}$;

н) $\sqrt{(x+4)(2x+3)}-3\sqrt{x+8}=$ $=4-\sqrt{(x+8)(2x+3)}+3\sqrt{x+4}$;

о) $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2+2}=\sqrt{3x^2+2x-3}+$ $+\sqrt{x^2+3x-1}$;

п) $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}$;

р) $\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}=1-2x^2$;

с) $\sqrt{x+1-\sqrt{2x+1}}+\sqrt{x+5-3\sqrt{2x+1}}=$ $=2\sqrt{2}$;

т) $\sqrt{5x^2+6x+1}-\sqrt{6x^2+4x-2}=$ $=\sqrt{x^2+7x+6}+\sqrt{2x^2+5x+3}$.

4. Решите неравенства «с модулем»:

а) $|x-1|<2$;

б) $|2x+1|<\frac{x+2}{2}$;

в) $|x+1|-|x-1|\geqslant 1$;

г) $||2x+1|-|x-1||\leqslant x+2$;

д) $|x^2-4|x|+3|<1$;

е) $|x^2-5x|\leqslant x+3$;

ж) $|x^2-3x|\geqslant x+2$;

з) $|2x^2-x-1|\geqslant|x^2-3x-1|$;

и) $\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1}\leqslant 2$;

к)* $|x^3-3x+1|\leqslant|x^3+x^2-1|$;

л) $|x^3-3x+1|\leqslant x^3+x^2-1$;

м) $|x^3-3x+2|\geqslant x^3+x^2-2$;

н) во всех уравнениях пункта 1 замените знак «=» на «>» и решите полученные неравенства.

5. Решите рациональные неравенства:

а) $x^3-36x\leqslant 0$;

б) $(x^2-2x-1)(x^2-2x-3)\leqslant 4$;

в) $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{3x+1}>0$;

г) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x}>0$;

д) $\frac{2x^2-3x-1}{x^2+x-1}\geqslant x+1$;

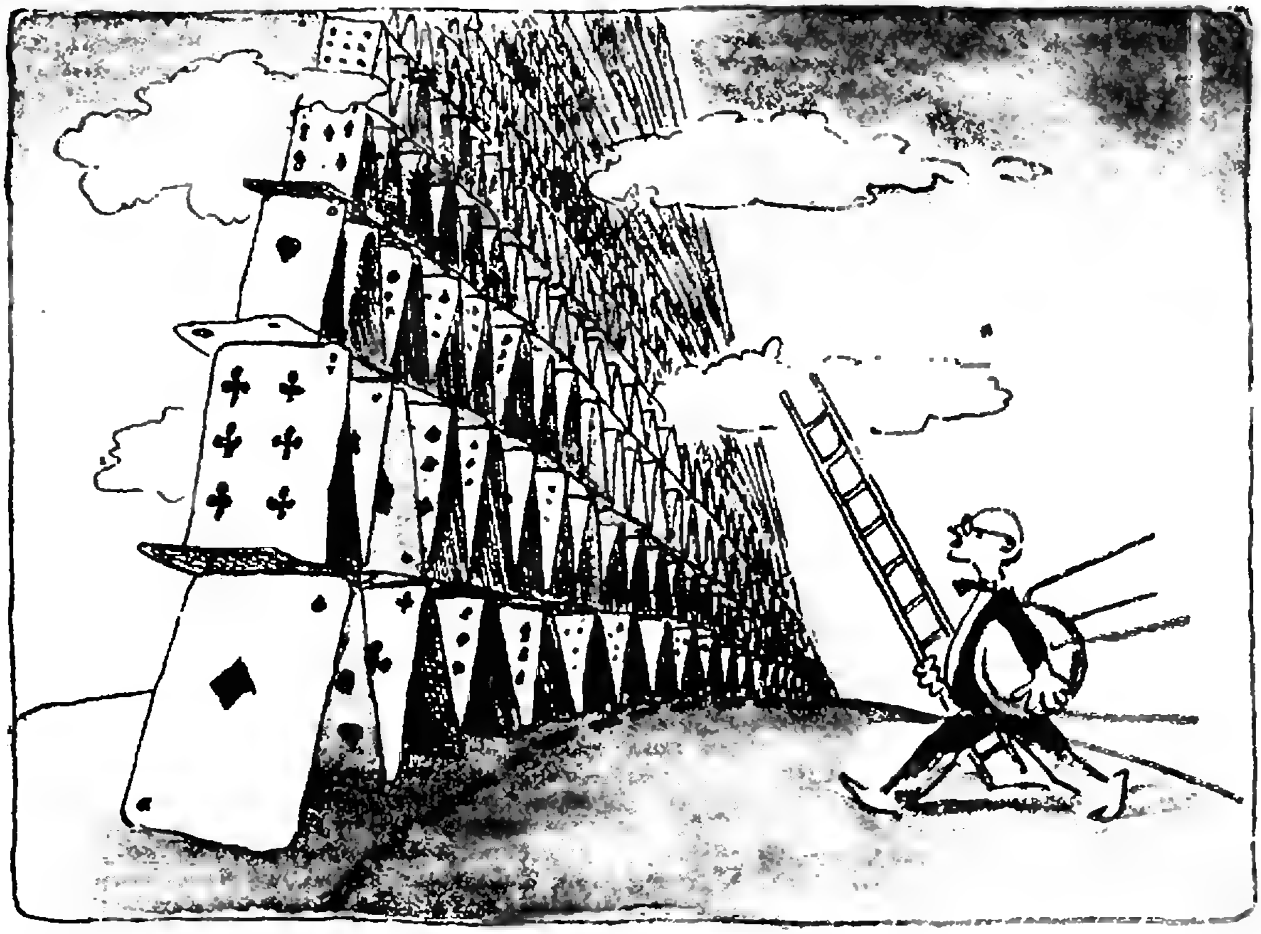
е) $\frac{x^2-x-1}{2x^2+x-2}\geqslant\frac{x}{3x^2-x-3}$;

ж) $(x^2+3x)(2x+3)-16\frac{2x+3}{x^2+3x}\geqslant 0$;

з)* $\frac{x+6}{x-6}\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2+\frac{x-6}{x+6}\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2>$ $>2\frac{x^2+36}{x^2-36}$;

и) во всех уравнениях пункта 2 замените знак «=» на «$\geqslant$» и решите полученные неравенства.

(Окончание см. на с. 67)



Р-значит ракета

Per funicula ad astra[*]

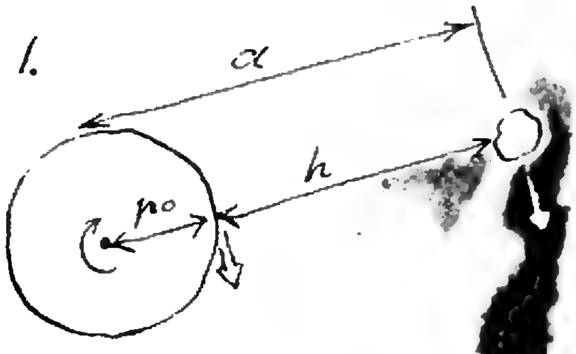
Д. ДЖОУНС

Являясь пионером освоения воздушного пространства, Дедал до сих пор не потерял интереса к проблемам аэронавтики и космонавтики. В настоящее время он размышляет над проблемами запуска искусственных спутников без использования ракет, которые, на его взгляд, несовершенны и неэкономичны. Дедал предлагает возвести на экваторе башню высотой 35 700 км. Вершина такой башни, вращающейся вместе с Землей, движется с космической скоростью; достаточно поэтому поднять спутник наверх и оттолкнуть его. Если этот проект не будет принят, Дедал предлагает взамен более дешевый вариант: запустить на геостационарную орбиту высотой 40 000 км спутник, к которому привязан трос. Другой конец троса закрепляется на экваторе, и спутник удерживает трос в натянутом состоянии. В дальнейшем по этому тросу можно было бы запускать небольшие спутники. К сожалению, из-за действия на запускаемый спутник кориолисовой силы трос будет отклоняться в сторону, противоположную направлению вращения Земли. Но Дедал надеется, что вскоре трос снова натянется и вернется в рабочее положение.

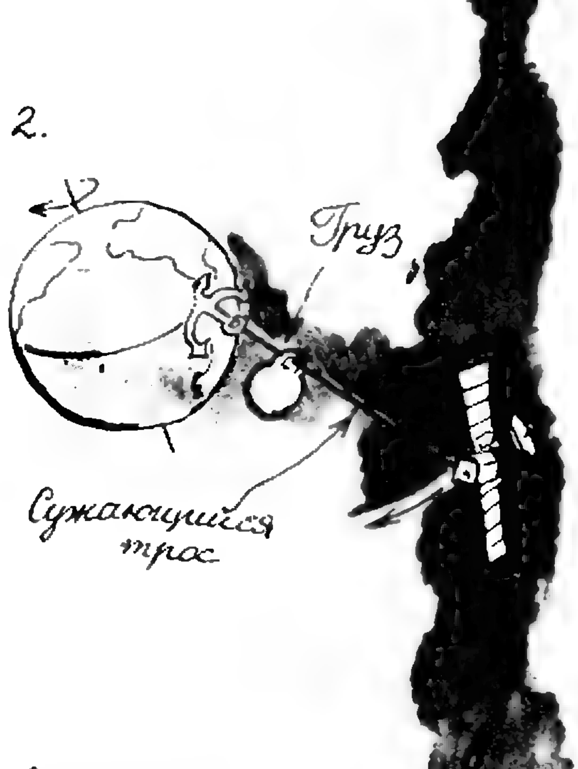
New Scientist, December 24, 1964

---

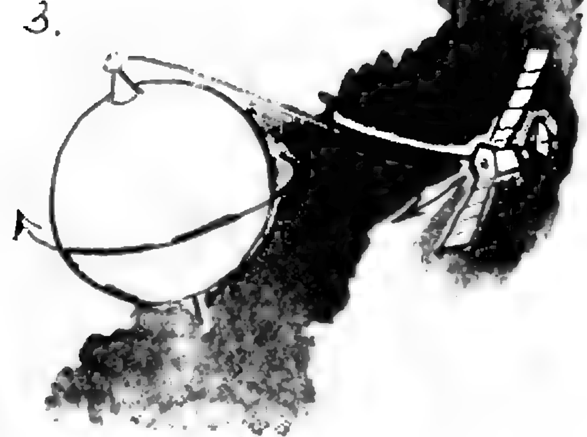
[*] По канату — к звездам (лат.).



1. Параметры геостационарного спутника. Период обращения спутника определяется уравнением $T^2=4\pi^2a^3/(GM)$, где T — период обращения, G — универсальная гравитационная постоянная, равная $6{,}67\cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²), a — радиус орбиты, M — масса центрального тела (для Земли $M=5{,}97\cdot 10^{24}$ кг). Поскольку Земля совершает один оборот за 24 ч ($T=86\,400$ с), в соответствии с этим уравнением получаем $a=42\,230$ км. Спутник, находящийся на этом расстоянии от центра Земли, т. е. на высоте $h=a-r_0=42\,230-6370=35\,860$ км над поверхностью Земли, будет «висеть» над одной и той же точкой экватора.



2. Привязной геостационарный спутник. Каждый участок троса должен выдерживать вес остальной части троса, расположенной ниже. Для этого трос должен утолщаться кверху приблизительно по экспоненциальному закону. Площадь сечения троса S_a вблизи спутника, находящегося на геостационарной орбите, связана с площадью сечения троса S_0 у поверхности Земли соотношением $S_a\approx S_0\exp(\varrho r_0 g/E)$, где ϱ — плотность материала троса, g — ускорение силы тяжести у поверхности Земли, E — модуль упругости материала троса, r_0 — радиус Земли.



3. Привязной спутник на шарнире. Такой спутник может иметь любой период обращения (например, можно протянуть трос к Луне). Однако силы, действующие на ось, могут оказаться очень большими.

Вдохновленный отсутствием возражений по поводу его проекта «заякорить» на тросе геостационарный спутник, Дедал выдвигает еще более смелый проект. Он предлагает построить лифт на Луну. Для этого потребуется только достаточно мощная ракета, несущая трос в десять раз длиннее и с гарпуном на конце. При падении ракеты на Луну гарпун намертво закрепится в лунном грунте. Поскольку Луна всегда обращена к Земле одной стороной, на лунном конце троса никаких проблем не будет. Проблемы, как всегда, возникнут на Земле — из-за ее суточного вращения. Впрочем, трос можно закрепить на шарнире у Южного полюса. Если трос закрепить на экваторе, то он намотается на Землю и притянет Луну. Дедал, однако, опасается, что этот проект, несмотря на всю его привлекательность с точки зрения геофизиков и селенологов, вызовет возражения со стороны представителей Высокой Науки. Если проект будет принят, то Дедал предлагает опустить Луну в Тихий океан, чтобы заодно проверить гипотезу, согласно которой этот океан образовался, когда Луна откололась от Земли.

New Scientist, October 16, 1965

Комментарий Дедала

Эти две мои идейки появились на страницах журнала одними из первых. Они высказывались весьма неуверенно, ибо в ту пору редакция еще сомневалась, можно ли публиковать на страницах солидного журнала столь смелые предложения. Поэтому я был очень рад, когда основные положения обоих проектов были позднее повторены Дж. Д. Айзексом, А. Вайном, Г. Браднером и Дж. Баккусом в журнале Science (151, Febr. 11, 1966, p. 682). Цитирую:

Помимо способности удерживаться в натянутом состоянии трос, закрепленный на экваторе вращающейся планеты или на естественном спутнике планеты (возможно, и на полюсе быстро вращающегося тела) и выходящий достаточно далеко за пределы орбиты стационарного спутника, будет обладать и другими интересными и полезными свойствами.

Массы, перемещаемые вдоль троса от поверхности центрального тела, будут запускаться в космическое пространство частично за счет энергии, отбираемой у вращающегося центрального тела.

Далее авторы рассчитывают прочность и сечение троса, указывают подходящие материалы для его изготовления и анализируют, на каких планетах и спутниках Солнечной системы этот проект легче всего реализовать.

Переписка с Артуром Кларком, в романе которого «Фонтаны рая» упоминается орбитальная башня высотой 35 700 км, открыла мне, что эти мысли не так уж новы. Проект орбитальной башни впервые был предложен К. Э. Циолковским еще в 1895 г. Орбитальный трос был описан ленинградским инженером Ю. Арцутановым в «Комсомольской правде» от 31 июля 1960 г. Трос до Луны, по-видимому, придуман С. Голомбом в 1962 г. (Astronautica, 7—8, 1962, p. 26).

Артур Кларк сообщил мне: «...основная работа в этой области проводится Джеромом Пирсоном на базе ВВС США Райт-Паттерсон в штате Огайо. Его первая статья озаглавлена «Орбитальная башня»: установка для запуска космических аппаратов, использующая энергию вращения Земли» (Acta Astronautica, 2, 1975, p. 785). Пирсон думал, что эта идея целиком принадлежит ему, ибо библиографический поиск с помощью ЭВМ не выявил даже статью Айзекса!»

Наверное, следовало бы еще раз внимательно просмотреть и альбомы Леонардо да Винчи. Я утешаюсь тем, что фирма КОШМАР по крайней мере была одним из независимых авторов этих впечатляющих проектов.

Из книги Д. Джоунса «Изобретения Дедала» (М.: Мир, 1985).

Алгебраические уравнения и неравенства

(Начало см. на с. 64)

6. Решите иррациональные неравенства:

а) $\sqrt{2+x} > x$;

б) $\sqrt{4x+5} > x$;

в) $\sqrt{2x^2+x} > 1+2x$;

г) $\sqrt{x-6\sqrt{x+3}} < x-2$;

д) $\sqrt{x^2-3x-18} < x-2$;

е) $\sqrt{2x^2-3x-5} < x+\sqrt{5}$;

ж) $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+1} < 1$;

з) $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{x+5} \leqslant 1$;

и) $\sqrt{x+4} > \sqrt{2-\sqrt{3+x}}$;

к) $\dfrac{3(4x^2-9)}{\sqrt{3x^2-3}} \leqslant 2x+3$;

л) $\dfrac{\sqrt{x^2-3x-4}-3x+16}{6-x} > 1$;

м) $\sqrt{x+6} > \sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$;

н) $\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x} > 1$;

о) $\sqrt{9-\dfrac{9}{x}} < x-\sqrt{x-\dfrac{9}{x}}$;

п) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x}} > \dfrac{2}{x}$;

р) замените в уравнениях пункта 3 знак «=» на знак «>» и решите полученные неравенства. Какие дополнительные трудности по сравнению с решениями уравнений у вас возникли и как вы их преодолели?

Ответы, краткие решения и указания будут опубликованы в следующем номере.

Материалы подготовил А. Егоров

Крискросс, пра-кроссворд и другие

Мы сообщали, что летом 1992 года в Нью-Йорке состоялся 1-й Чемпионат мира по решению головоломок. Его участники решали логические, цифровые, буквенные и другие задачи. Большинство типов головоломок чемпионата хорошо известны и одинаково популярны у нас и за океаном, но есть исключения.

Э	Д	Д	И	К	А
А	Д	Ж	Е	Й	Н
Н	О	У	О	Ж	Д
А	Л	Л	А	Н	И
И	Л	И	Н	Д	А
Д	И	А	Р	А	С

Рис. 1.

Например, в нашей стране практически не знают головоломку «крискросс». Крискросс выглядит как коврик произвольной конфигурации, сплошь покрытый буквами (рис. 1). На коврике нужно найти определенные слова, например мужские и женские имена. Слова разрешается читать по горизонтали, вертикали или диагонали в любом направлении, в том числе, справа налево и снизу вверх. Привлекательность крискросса в том, что его легко придумать самому и самому оценить его качество: в коврике должно быть как можно меньше неиспользуемых клеточек, заполненных произвольными буквами.

Самая популярная словесная головоломка в мире — это кроссворд. Мы привыкли к одному типу кроссвордов, а их существует множество. Посмотрите на рисунок 2. На нем показаны кроссворды, имеющие квадратные и крестообразные поля, составленные из клеточек без номеров. Нет номеров — нет и перечня точных заданий на слова, которые требуется вписывать. Но не думайте, что от этого задача становится легкой. Клеточки нужно заполнить так, чтобы в каждой строке и каждом столбце помещалось целое слово (существительное единственного числа) и не осталось пустых клеток. Поскольку эти кроссворды более древние, чем обычные, давайте назовем их «пра-кроссворды».

Как вы понимаете, чем больше поле пра-кроссворда, тем труднее решить задачу. Но до каких размеров можно увеличивать поле? Ясно, что для каждого языка мира ответ будет своим. Для русского языка максимальные размеры поля пока неизвестны. Поэтому мы предлагаем читателям следующую задачу: найдите квадратный пра-кроссворд максимального размера.

Решение, претендующее на рекорд, должно удовлетворять одному из двух условий:

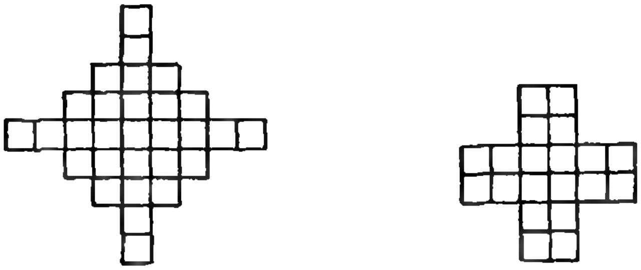
1. Поле не должно содержать одинаковых слов (пра-кроссворд 1-го рода).

2. Каждое слово должно использоваться дважды: один раз по горизонтали, другой раз по вертикали. Слова должны идти в одинаковом порядке слева направо и сверху вниз (пра-кроссворд 2-го рода).

Примеры обоих пра-кроссвордов показаны на рисунке 2. Будем считать их размеры стартовыми; посмотрим, на что способны читатели «Кванта».

Предлагаем вам также придумать максимальные пра-кроссворды на крестообразных полях различной формы. Поле может быть любой конфигурации, но обязательно симметричное. Следует стремиться не только к максимальной длине слов, но и к большему числу строк и столбцов на поле. Внутри креста не должно быть пустых клеток. Для построения пра-кроссвордов разрешается использовать компьютер.

А. Калинин



Л	О	Б
Е	Д	А
В	А	Р

О	С	О	Т
С	У	М	А
О	М	А	Р
Т	А	Р	А

Рис. 2.

Олимпиады

XXXIII Международная математическая олимпиада

С 10 по 21 июля в Москве проходила Международная математическая олимпиада. В ней участвовало 350 школьников из 65 стран. В командном зачете первое место завоевала команда Китая (240 очков, 6 золотых медалей), второе — команда США (181 очко, 3 золотых, 3 серебряных медали), третье — команда Румынии (177 очков, 2 золотых, 2 серебряных, 2 бронзовых медали), четвертое — команда СНГ (176 очков, 2 золотых, 3 серебряных медали), пятое — команда Великобритании (168 очков, 2 золотых, 2 серебряных, 2 бронзовых медали). Команда России заняла шестое место (158 очков, 2 золотых, 2 серебряных, 2 бронзовых медали).

Журнал «Квант» наградил своими призами школьника из Таиланда Пиная Линвонга за наиболее изящное решение задачи № 1, Энтони Гардинера, профессора Бирмингемского университета (Великобритания), за самую интересную задачу олимпиады (задача № 6) и Лизу МакШайн, руководителя команды Республики Тринидад и Тобаго, за лучшую проверку и представление решений задач своих школьников.

Подробный отчет о проведении XXXIII Международной математической олимпиады мы опубликуем в № 12 нашего журнала.

Задачи LV Московской математической олимпиады (1992 г.)

8 класс

8.1. Докажите, что если $a+b+c+d>0$, $a>c$, $b>d$, то $|a+b|>|c+d|$.

И. Сергеев

8.2. Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечетное число фигур?

С. Токарев

8.3. Каждый участник двухдневной олимпиады в первый день решил столько же задач, сколько все остальные в сумме — во второй день. Докажите, что все участники решили поровну задач.

С. Токарев

8.4. Каково наименьшее число гирь в наборе, который можно разложить и на 3, и на 4, и на 5 кучек равной массы?

С. Токарев

8.5. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла не превосходит по длине половины проекции гипотенузы на прямую, перпендикулярную биссектрисе.

С. Гашков

8.6. Можно ли 4 раза рассадить 9 человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более 1 раза?

С. Токарев

9 класс

9.1. Каждый участник шахматных соревнований выиграл белыми столько же партий, сколько все остальные вместе взятые — черными. Докажите, что все участники выиграли поровну партий.

С. Токарев

9.2. Каких нечетных натуральных чисел $n<10\,000$ больше: тех, для которых число, образованное четырьмя последними цифрами числа n^9, больше n, или тех, для которых оно меньше n?

А. Галочкин

9.3. В центре квадратного пирога находится изюминка. От пирога можно отрезать треугольный кусок по линии, пересекающей в точках, отличных от вершин, две соседние стороны; от оставшейся части пирога — следующий кусок (таким же образом) и т. д. Можно ли отрезать изюминку?

С. Токарев

9.4. В квадратной таблице из 9×9 клеток отмечены 9 клеток, лежащие на пересечении второй, пятой и восьмой строк со вторым, пятым и восьмым столбцами. Сколькими путями можно из левой нижней клетки попасть в правую верхнюю, двигаясь только по неотмеченным клеткам вверх или вправо?

А. Спивак

9.5. Диагональ AC трапеции $ABCD$ равна боковой стороне CD. Прямая, симметричная BD относительно AD, пересекает прямую AC в точке E. Докажите, что прямая AB делит отрезок DE пополам.

И. Шарыгин

9.6. Можно ли n раз рассадить $2n+1$ человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более 1 раза, если а) $n=5$? б) $n=10$?

С. Токарев

Замечание. Эта задача легко решается и для произвольного натурального n.

10 класс

10.1. Докажите, что если сумма косинусов углов четырехугольника равна нулю, то он — параллелограмм, трапеция или вписанный четырехугольник.

А. Галочкин

10.2. От пирога, имеющего форму выпуклого пятиугольника, можно отрезать треугольный кусок по линии, пересекающей в точках, отличных от вершин, две соседние стороны; от оставшейся части пирога — следующий кусок (таким же образом) и т. д. В какие точки пирога можно воткнуть свечку, чтобы ее нельзя было отрезать?

С. Токарев

10.3. В левом нижнем углу прямоугольной доски из $m\times n$ клеток стоит белая фишка, а в правом верхнем — черная. Двое по очереди двигают фишки (каждый свою) по горизонтали или по вертикали на 1 клетку, причем белая может двигаться только вправо или вверх. Выигрывает тот, кто ставит фишку на клетку, занятую фишкой противника. Начинают белые. Кто может обеспечить себе выигрыш?

А. Галочкин

10.4. Каково наименьшее число гирь в наборе, который можно разложить и на 4, и на 5, и на 6 кучек равной массы?

С. Токарев

10.5. Докажите, что в выпуклый центрально-симметричный многоугольник можно поместить ромб вдвое меньшей площади.

С. Гашков

10.6. Каждая грань выпуклого многогранника — многоугольник с четным числом сторон. Обязательно ли его ребра можно раскрасить в два цвета так, чтобы у любой грани было поровну ребер разных цветов?

С. Токарев

11 класс

11.1. Требуется заполнить числами квадратную таблицу из $n\times n$ клеток так, чтобы сумма чисел на любой из $4n-2$ диагоналей равнялась 1. Можно ли это сделать при а) $n=55$? б) $n=1992$?

С. Токарев

11.2. Найдите углы выпуклого четырехугольника $ABCD$, в котором $\angle BAC=30^\circ$, $\angle ACD=40^\circ$, $\angle ADB=50^\circ$, $\angle CBD=60^\circ$ и $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$.

В. Кукушкин

11.3. Аладдин побывал во всех точках экватора, двигаясь то на восток, то на запад, а иногда мгновенно перемещаясь в диаметрально противоположную точку Земли. Докажите, что был отрезок времени, за которое разность расстояний, пройденных Аладдином на восток и на запад, не меньше половины длины экватора.

А. Скопенков

11.4. Внутри тетраэдра расположен треугольник, проекции которого на 4 грани тетраэдра имеют площади P_1, P_2, P_3, P_4. Докажите, что а) в правильном тетраэдре $P_1\leqslant P_2+P_3+P_4$; б) если S_1, S_2, S_3, S_4 — площади соответствующих граней тетраэдра, то $P_1S_1\leqslant P_2S_2+P_3S_3+P_3S_4$.

А. Спивак

11.5. Всегда ли ребра выпуклого многогранника можно раскрасить в два цвета так, чтобы у каждой грани количества ребер разных цветов отличались не более чем на 1?

С. Токарев

11.6. Прибор для сравнения чисел $\log_a b$ и $\log_c d$ (a, b, c, $d>1$) работает по правилам:

если $b>a$ и $d>c$, то он переходит к сравнению чисел $\log_a \frac{b}{a}$ и $\log_c \frac{d}{c}$;

если $b<a$ и $d<c$, то он переходит к сравнению чисел $\log_d c$ и $\log_b a$;

если $(b-a)(d-c)\leqslant 0$, то он выдает ответ.

а) Покажите, как прибор сравнит числа $\log_{25} 75$ и $\log_{65} 260$.

б) Докажите, что любые два неравных логарифма он сравнит за конечное число шагов.

И. Сергеев

Публикацию подготовил С. Токарев

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике 1992 года

9 класс

1. Паровоз серии ФД («Феликс Дзержинский») развивал максимальную тяговую мощность $P=1000$ кВт, причем на полезную работу шло лишь 10 % энергии пара. Оцените массу воды в котле такого паровоза, если на его растопку из холодного состояния требовалось $\tau=15$ мин. Удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг · К).

2. Некто повесил на гвоздь картину, прикрепив веревку ниже центра тяжести на d (рис. 1). Длина веревки a, высота картины $2l$. Под каким углом α к стене она будет висеть? При каком соотношении между d, a и l картина не перевернется? Трение о стену отсутствует.

3. Из одной точки горизонтально в противоположных направлениях одновременно вылетают две частицы с начальными скоростями v_1 и v_2. Через какое время угол между скоростями частиц станет равным 90°? Ускорение свободного падения g.

4. Внутри полого горизонтального цилиндра прыгает шарик, упруго отражаясь от его стенок. Ускорение силы тяжести g. Известно, что шарик движется по замкнутой траектории, отскакивая от стенок в двух точках, находящихся на одной высоте. Найдите все возможные траектории. Каким будет ответ в том случае, если шарик подпрыгивает выше осевой линии?

5. Отверстие в дне горизонтального сосуда закрыто легким полусферическим колпачком радиусом R (рис. 2). Сосуд наполнен жидкостью плотностью ρ. Дно находится на глубине H. Найдите силу, с которой колпачок давит на дно сосуда. Ускорение силы тяжести g. Объем шара радиусом R равен $4\pi R^3/3$.

6. На горизонтальном шероховатом столе лежат длинная линейка AB и ластик C (рис. 3). Линейку двигают равномерно и поступательно в направлении, показанном стрелкой, и перемещают на расстояние H. Угол между линейкой и направлением ее перемещения α. Найдите величину и направление перемещения ластика относительно стола. Коэффициент трения ластика о линейку μ.

10 класс

7. На невесомый жесткий стержень, шарнирно закрепленный одним концом, надели массивную бусинку, которая может скользить по нему без трения. Вначале стержень покоился в горизонтальном положении, а бусинка находилась на расстоянии l от закрепленного конца. Затем стержень отпустили. Найдите зависимость угла, который составляет стержень с горизонталью, от времени.

8. Тонкое жесткое диэлектрическое кольцо массой M и радиусом R может свободно вращаться вокруг фиксированной вертикальной оси O (рис. 4). Кольцо

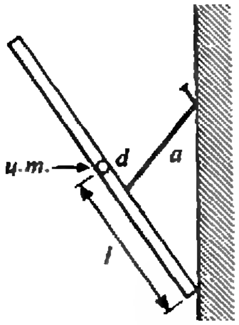


Рис. 1.

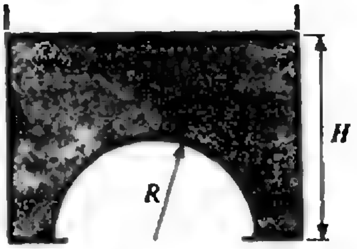


Рис. 2.

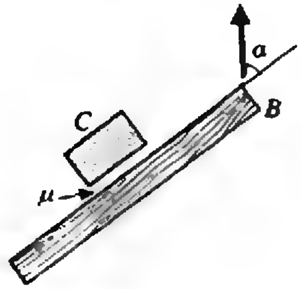


Рис. 3.

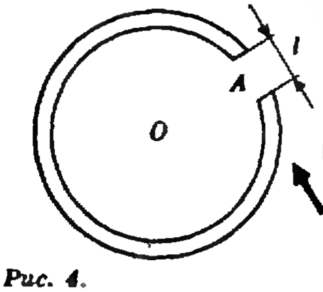


Рис. 4.

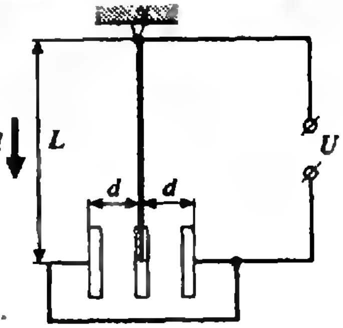


Рис. 5.

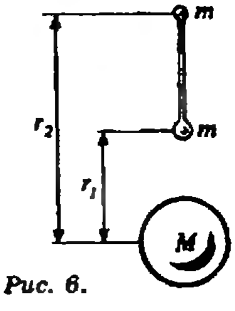


Рис. 6.

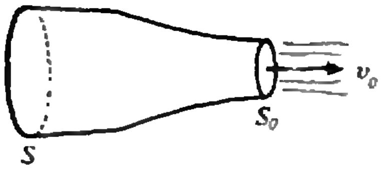


Рис. 7.

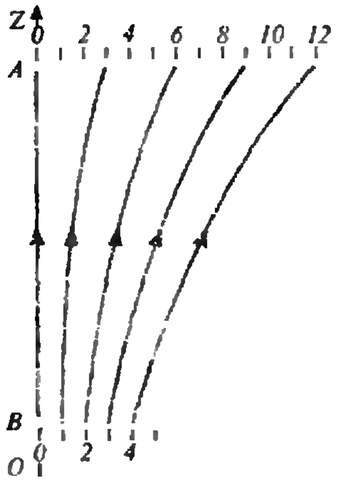


Рис. 8.

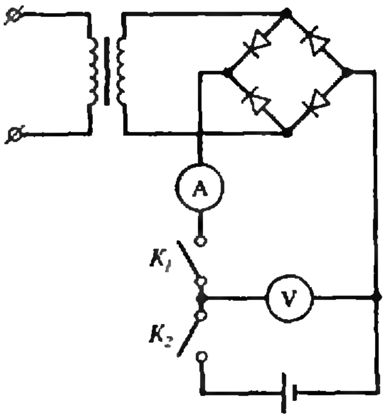


Рис. 9.

равномерно заряжено по длине, его заряд равен Q. Небольшой кусок кольца в области точки A вырезан так, что получился зазор длиной $l \ll R$. В начальный момент кольцо покоилось, после чего было включено однородное электрическое поле $\vec{E}$, перпендикулярное оси кольца и прямой OA. Найдите максимальную угловую скорость кольца.

9. Оцените максимальную массу капли воды, которая может «висеть» на вертикальном стекле, не сползая вниз. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 7 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

10. Плоский конденсатор состоит из трех одинаковых пластин площадью S каждая (рис. 5, вид сбоку). Крайние пластины неподвижны и соединены друг с другом. Средняя пластина, масса которой m, прикреплена к легкому стержню длиной L. Верхний конец стержня закреплен шарнирно. Расстояние между крайними пластинами $2d$ (d много меньше размеров пластины, L — много больше). При каком напряжении U произойдет пробой такого конденсатора? Воздух считайте идеальным изолятором.

11 класс

11. «Гантель», состоящая из двух одинаковых тел массой m, соединенных жестким невесомым стержнем, вращается вокруг небесного тела массой M (рис. 6). При этом каждая из масс m движется по круговой орбите радиусом r_1 или r_2, а прямая, проходящая через стержень, все время проходит через центр небесного тела. Найдите период обращения такого «спутника».

12. Из горизонтальной трубы со скоростью v_0 вытекает вода, содержащая пузырьки воздуха (рис. 7). Площадь поперечного сечения трубы S, а выходного отверстия $S_0 < S$. Найдите отношение радиусов пузырьков воздуха у выходного отверстия и внутри трубы. Плотность воды ρ, температура ее постоянна, атмосферное давление p_0. Вязкостью воды можно пренебречь, поверхностное натяжение не учитывайте.

13. Шарик зарядом $+q$ и массой m находится в однородном гравитационном поле ($\vec{g}$ направлено вниз) и неоднородном электростатическом поле, симметричном относительно поворота вокруг оси OZ. Силовые линии поля в одной из плоскостей показаны на рисунке 8. В начальный момент шарик покоился в точке A. Когда заряд шарика изменился, он опустился в точку B. Используя рисунок, оцените, во сколько раз изменился заряд шарика.

14. Плавающая на поверхности пруда прямоугольная льдина, продольные размеры которой много больше ее толщины, выдерживает груз массой M, помещенный в центр льдины. Какой груз можно разместить на краю льдины (в середине ее ребра), чтобы он не коснулся воды? Плотность льда считайте равной 0,9 г/см^3.

15. Аккумулятор заряжают от двухполупериодного выпрямителя (питаемого синусоидальным напряжением), как показано на рисунке 9. Диоды идеальные, амперметр и вольтметр тоже идеальные и показывают средние по времени значения. В режиме холостого хода при замкнутом ключе K_1 вольтметр показывает $U_1 = 12$ В, а ток при этом отсутствует, т. е. $I_1 = 0$. Если замкнут только ключ K_2, вольтметр показывает напряжение на аккумуляторе $U_0 = 12,3$ В. Во время зарядки, при замкнутых K_1 и K_2, вольтметр показывает $U_2 = 12,8$ В, а амперметр $I_2 = 5$ А. Найдите внутреннее сопротивление аккумулятора.

Публикацию подготовил Д. Купцов

Физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана проводит традиционную физико - математическую олимпиаду для учащихся средних школ, ПТУ, техникумов, а также для всех тех, кто хочет проверить свои знания по математике и физике и, возможно, поступить к нам учиться.

Олимпиада проводится в два тура: I тур — осенний, II тур — весенний. Задание I тура — по пять задач по математике и физике — публикуются ниже. Правильное решение каждой задачи оценивается в 5 баллов, за оригинальность решения добавляется еще 3 балла. Приглашение для участия во II туре рассылается участникам первого тура, набравшим наибольшее количество баллов по отдельным предметам.

Решения задач I тура необходимо выслать до 15 января 1993 года. Все решения оформите в одной школьной тетради. На листе (две страницы) должно быть решение только одной задачи. Для пояснения хода решения задач допускаются графические построения.

На внешнюю сторону обложки тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу (см. анкету слева).

На внутреннюю сторону обложки наклейте справку с места учебы с указанием класса (курса).

Тетрадь с решениями вышлите простой бандеролью. В пакет не забудьте вложить конверт с написанным на нем вашим адресом — для получения приглашения участвовать во II туре.

Наш адрес: 107005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МГТУ им. Н. Э. Баумана, Олимпиада — МГТУ — 92.

Анкета участника I тура Олимпиады — МГТУ — 92
Фамилия
Имя
Отчество
Школа **Класс**
Почтовый адрес

Оценки решений задач:

математика	м — 1	м — 2	м — 3	м — 4	м — 5
оценка					
общая оценка					
физика	ф — 1	ф — 2	ф — 3	ф — 4	ф — 5
оценка					
общая оценка					

Задачи первого тура

Физика

1. На краю прямоугольного обрыва высотой h лежит однородный шар радиусом R так, что центр шара находится прямо над краем обрыва. Определите место падения шара на землю, если его вывести из состояния неустойчивого равновесия. Считайте, что трения и сопротивления воздуха нет.

2. Электрическая цепь, изображенная на рисунке 1, состоит из 1991 источника тока с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r каждый и 1991 резистора сопротивлением R. Чему равно напряжение на источниках?

3. С гладкой незакрепленной усеченной на высоте $H/2$ горки массой M скатывается без начальной скорости тело массой m. Высота горки H, угол наклона к горизонту α. На каком расстоянии от точки отрыва тело упадет на горизонтальную плоскость, на которой стоит горка? Трения между горкой и плоскостью нет.

4. На непроводящем тонком кольце массой m равномерно распределен неболь-

шой заряд q. Кольцо находится на гладкой горизонтальной поверхности и вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси. В некоторый момент времени включается магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца, так, что оно начинает тормозить вращение кольца. Индукция магнитного поля нарастает равномерно. При каком значении индукции кольцо остановится?

5. В схеме, представленной на рисунке 2, ключ замыкают поочередно с каждым из контактов *1* и *2* на очень малые одинаковые промежутки времени. Принимая, что изменение заряда конденсатора за время каждого включения очень малó, определите, какой максимальный заряд окажется на конденсаторе.

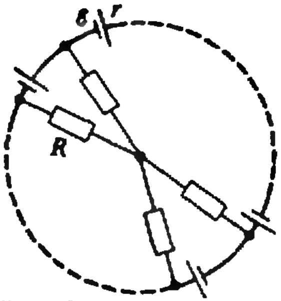


Рис. 1.

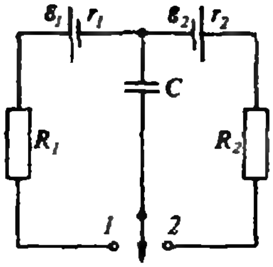


Рис. 2.

Математика

1. Центр окружности, проходящей через середины сторон неравнобедренного треугольника ABC, лежит на биссектрисе угла A. Найдите угол A.

2. Найдите сумму цифр всех целых чисел от 0 до 1 000 000, кратных 3.

3. Докажите неравенство

$$\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin^4\alpha}+\frac{1}{\cos^4\alpha}\right)\ldots\left(\frac{1}{\sin^{2n}\alpha}+\frac{1}{\cos^{2n}\alpha}\right)\geqslant 2^{\frac{n(n+3)}{2}}.$$

4. Решите уравнение

$$(x-1)^4=(1+9x^2)(1+(x^2+x+1)^2).$$

5. В зависимости от значений параметра a укажите число действительных корней уравнения

$$(ax+2)^4+a^4(x+2)^4=2^5.$$

Дорогие читатели!

Никогда еще, назначая вам встречу в следующем году,
мы не знали так мало о том, при каких условиях она состоится.
Жизнь заставила нас поднять цену журнала до 7 р. 70 к. за номер.
Но уже в августе стало ясно, что практически всю эту сумму
нам придется отдать подписному агентству.
Мало того, примерно во столько же
обойдутся нам бумага, типография и другие услуги.
Таким образом, издание журнала становится не просто убыточным,
а прямо-таки разорительным делом. И если государство
не поможет, мы не уверены, что нам не придется
в будущем повысить цену.
Но цена, указанная в каталоге, для вас не окончательная:
какую-то сумму с вас возьмет почта за доставку.
И тем не менее, давайте не думать о деньгах.
Ведь знания — бесценны!
Мы надеемся, что и в будущем году общие интересы
и потребность в познании мира сведут нас вместе.
Но не забывайте — наш журнал
распространяется только по подписке.

Редакция

Ответы, указания, решения

ранные школьные задачи по физике

1. В системе отсчета, связанной со скоростью течения реки v, встреча и расставание катеров происходят в одной и той же точке, а мост, двигаясь со скоростью v в противоположную сторону, за время 2τ смещается на расстояние l. Таким образом,

$$v=l/(2\tau)=2\ \text{км/ч}.$$

2. См. рис. 1.

3. Запишем уравнения для перемещения тела за все время t и за время $t-\tau$, где $\tau=1$ с:

$$gt^2/2=h,\ g(t-\tau)^2/2=h/4.$$

Отсюда

$$t=2\tau=2\ \text{с}.$$

4. Скорости первого и второго шариков в любой момент времени относительно земли равны

$$v_1=v_0-gt \text{ и } v_2=v_0-g(t-\tau).$$

Искомая скорость второго шарика относительно первого равна

$$v_{\text{отн}}=v_2-v_1=g\tau$$

и направлена вверх. В момент встречи скорости одинаковы по модулю и противоположны по направлению:

$$v_2=-v_1, \text{ или } v_0-g(t_{\text{в}}-\tau)=-(v_0-gt_{\text{в}}),$$

откуда

$$t_{\text{в}}=v_0/g+\tau/2.$$

5. Ускорение книги относительно пола лифта зависит не от направления движения лифта (направления скорости), а от направления его ускорения. Если лифт поднимается с ускорением или опускается с замедлением, то ускорение книги будет равно $g+a$. Если же лифт поднимается с замедлением или опускается с ускорением, то ускорение книги будет $g-a$.

6. В системе отсчета, связанной со стенкой, молекулы подлетают к стенке со скоростью $v+u$ и с такой же скоростью отражаются от нее. При ударе каждая молекула передает стенке импульс $2m(v+u)$. За единицу времени на единицу площади поверхности стенки попадает $n(v+u)$ молекул. Поэтому давление на стенку равно

$$p=2m(v+u)^2\approx 10^5\ \text{Па}.$$

7. Запишем уравнение состояния идеального газа для двух случаев:

$$pV=(m/M)RT,$$

$$0{,}8pV=((m-\Delta m)/M)R\cdot 0{,}9T.$$

Свяжем массу газа с его молярной массой, числом молекул и постоянной Авогадро:

$$m/M=N/N_A,\ \Delta m/M=\Delta N/N_A.$$

Теперь найдем число молекул газа, просочившегося из баллона:

$$\Delta N=N_A m/(9M)=5\cdot 10^{24}.$$

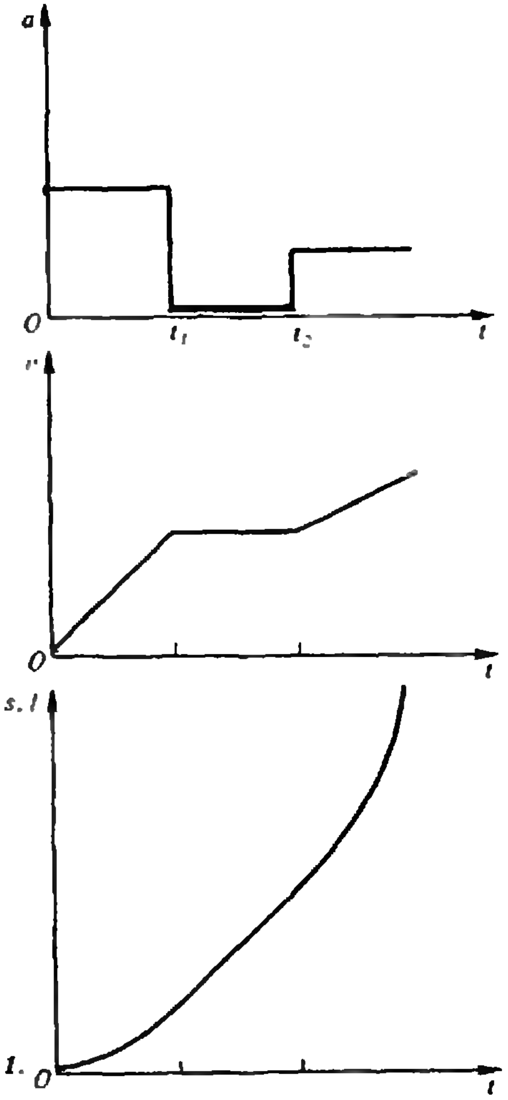


Рис. 1.

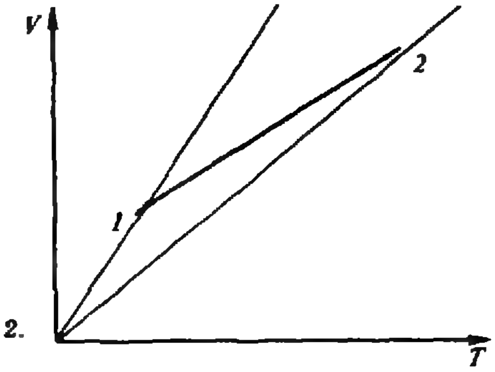


Рис. 2.

8. Из соотношений

$$m\overline{v^2}/2=kT \text{ и } pV=\nu RT,$$

записанных для двух различных состояний водорода, учитывая, что $V_2=2V_1$ и $m_2=m_1/2$, получаем

$$\overline{v_2}/\overline{v_1}=\sqrt{p_2/p_1}=10.$$

9. Если провести через точки *1* и *2* изобары, соответствующие постоянным массам, то увидим, что первая изобара идет круче второй.

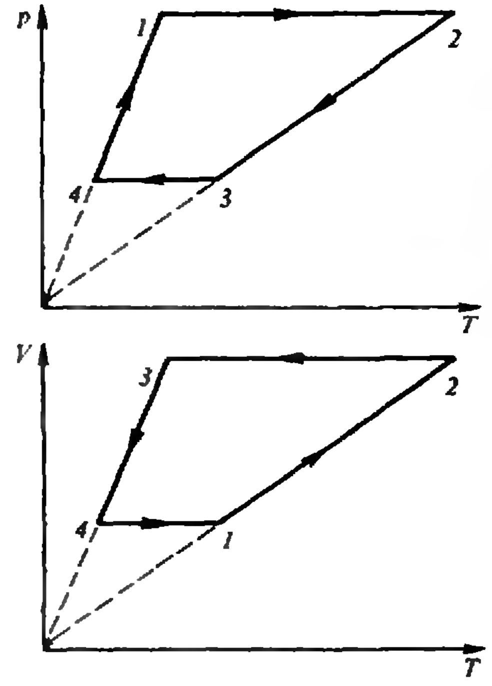


Рис. 3.

Следовательно, масса газа в состоянии *1* больше, чем в состоянии 2 (рис. 2).

10. См. рис. 3.

11. Согласно правилу Ленца, при сближении проводников направление тока I_2 противоположно направлению тока I_1, а при удалении проводников направления токов совпадают.

12. Максимальное значение тока в витке получается из закона Ома $I=\mathscr{E}/R$ и закона электромагнитной индукции $\mathscr{E}=-\Phi'$:

$$I_m=\mathscr{E}_m/R=\Phi_m\omega/R=B_0S\omega/R.$$

Тепловая мощность P связана с I_m соотношением

$$P=I_m^2R/2,$$

поэтому в нашем случае

$$P=(B_0S\omega)^2/(2R).$$

13. На концах проводника, движущегося в магнитном поле, возникает разность потенциалов

$$U=Blv,$$

откуда получаем искомую величину индукции магнитного поля:

$$B=U/(lv)=4\cdot10^{-3}\ \text{Тл}.$$

14. Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции максимальна, когда магнитный поток минимален, и минимальна, когда поток максимален. Следовательно, когда рамка находится в плоскости, проходящей через провод с током, ЭДС индукции будет наименьшей, а когда рамка перпендикулярна этой плоскости,— наибольшей.

15. При вращении диска между его центром и периферийной точкой (где подключены подводящие провода) возникает разность потенциалов

$$U=Br(\omega r/2)=B\omega r^2/2.$$

В соответствии с законом Ома, амперметр покажет ток

$$I=U/R=B\omega r^2/(2R)=0{,}4\ \text{А}.$$

[illegible]етрические решения [illegible]ремальных геометрических задач

1. Ответ: $8\sqrt{13}/3$, $4\sqrt{73}/3$. Решение. Пусть $S_{ABCD}=S$. Так как основания и высоты треугольников ABM и ACM равны (рис. 4), то $S_{ABM}=S_{ABC}/2=S/4$, аналогично, $S_{ADM}=S_{ADC}/2=S/4$; кроме того, $S_{MCN}=S_{BCD}/4=S/8$. Отсюда $S_{MAN}=S-(S/4+S/4+S/8)=3S/8$ и

$$S=8S_{MAN}/3.$$

Ясно, что площадь параллелограмма будет наибольшей при наибольшем значении площади треугольника MAN. Но

$$S_{MAN}=\frac{1}{2}NA\cdot MA\sin\angle NAM$$

максимальна при $\angle MAN=90°$; тогда

$$S=\frac{8}{3}\cdot24=64.$$

Если F — середина AD, то MQ — средняя линия трапеции $BCNA$. Имеем $FQ=DN/2=DC/4$, $QM=(NC+AB)/2=(NC+DC)/2=3DC/4$, $DC=4QM/3$. Аналогично, $CB=4NP/3$. Получаем $DC=4\sqrt{6^2+4^2}/3=8\sqrt{13}/3$, $CB=4\sqrt{8^2+3^2}/3=4\sqrt{73}/3$.

2. По условию, $AN=BM=R$. Для площади трапеции $AMNB$ (рис. 5) имеем $S=(R^2\sin\angle AFB)/2$; таким образом, S принимает наибольшее значение при $\angle AFB=90°$. Отсюда $\angle NAB=45°$.

3. Это простой вариант «задачи о людоеде» (рис. 6). Ответ: $(3/2;\ 0)$.

4. Ответ: $(a-b)^3/(16(a+b))$. Решение. Пусть $OF=x$ — высота $\triangle POQ$, $OG=h_1$ — высота

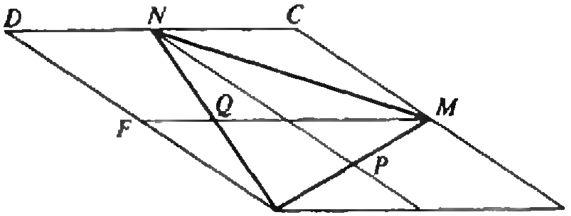


Рис. 4.

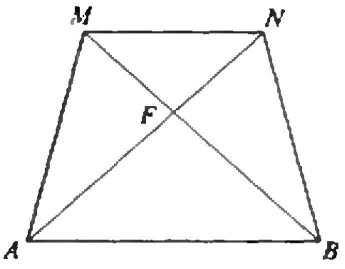


Рис. 5.

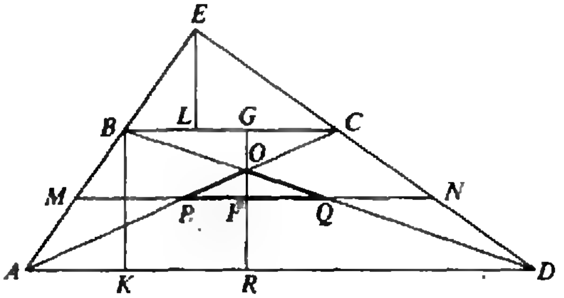


Рис. 7.

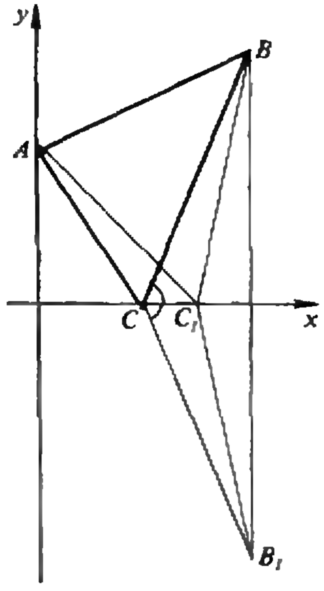


Рис. 6.

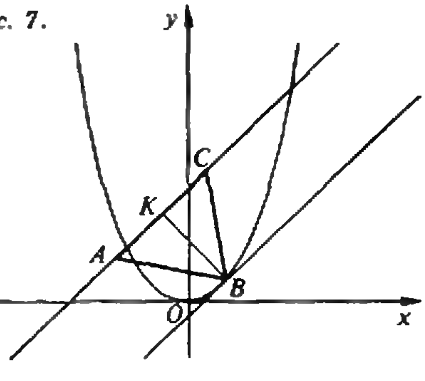


Рис. 8.

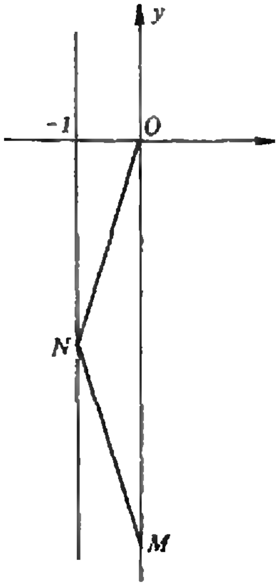


Рис. 9.

$\triangle BOC$, $BK=H$ — высота трапеции $ABCD$ и $EL=h_2$ — высота $\triangle BEC$ (см. рис. 7). Тогда $PQ=MN-(MP+QN)=(a-b)/2$. Из соображений подобия $OF:OG=PQ:BC$, $OR:OG=AD:BC$. Имеем:

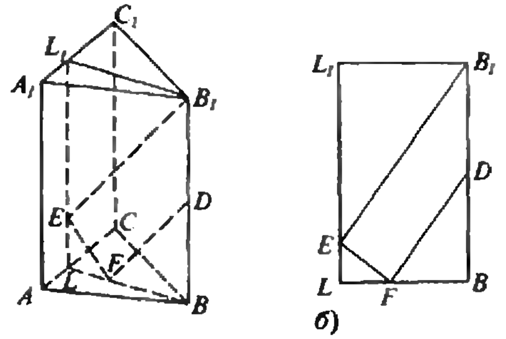
$$\begin{cases} x/h_1=(a-b)/(2b), \\ (H-h_1)/h_1=a/b, \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} x/h_1=(a-b)/(2b), \\ H/h_1=(a+b)/b. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим после преобразований $x=H(a-b)/(2(a-b))$. Тогда $S_{PQO}=PQ/OF=(a-b)^2H/(8(a+b))$. Таким образом, S_{PQO} максимальна при максимальном значении высоты трапеции, которая в свою очередь максимальна при максимальном значении высоты треугольника BEC, поскольку $(H+h_2)/h_2=a/b$, $H=h_2(a-b)/b$. Но из всех треугольников с заданным основанием и углом при вершине наибольшую высоту имеет равнобедренный. Поэтому $\angle BAD=\angle CDA=45°$, $H=(a-b)/2$ и $S_{PQO}=(a-b)^3/(16(a+b))$.

5. Ответ: $27\sqrt{3}/32$. Решение. Очевидно, что третья вершина искомого треугольника лежит на дуге параболы (рис. 8). Ясно также, что эта точка лежит на касательной, параллельной прямой $y=x+2$ (см. решение задачи 4 в статье). Уравнение касательной $y=x-1/4$, точка касания $B(1/2;\ 1/4)$, высота искомого треугольника $BK=9\sqrt{2}/8$. Отсюда $S_{ABC}=BK^2\operatorname{tg}30°=27\sqrt{3}/32$.

6. Ответ: 27/8. Решение. Касательные к данной кривой в точках $x=0$ и $x=-3/2$ задаются соответственно уравнениями $y=bx$ и $y=(b-27/4)x-27/4$. Первая из них пересекает ось ординат в точке $O(0;\ 0)$, вторая — в точке $M\ (0;\ -27/4)$. Точка пересечения касательных имеет координаты $(-1;\ -b)$. Итак, у искомого треугольника две вершины находятся в точках O и M, а третья — лежит на прямой $x=-1$ (рис. 9). Вспомнив о людоеде, получим, что наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник такого вида. Поэтому точка N имеет координаты $(-1;\ -27/8)$. Отсюда $b=27/8$.

7. Ответ: $4\sqrt{3}/27$. Решение. Пусть $BB_1=LL_1=h$, $LB=L_1B_1=l$ (рис. 10). Треугольники FDB и L_1EB_1 подобны с коэффициентом $k=3/4$ (рис. 10, *б*). Имеем $L_1E=4DB/3=2h/3$, $EL=h-2h/3=h/3$; $FB=3L_1B_1/4=3l/4$, $LF=l-3l/4=l/4$.



а)

б)

Рис. 10.

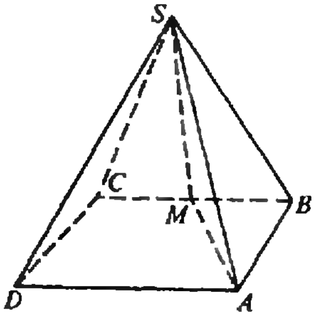


Рис. 11.

Из системы уравнений $EF^2=EL^2+LF^2$, $FD^2=DB^2+FB^2$ находим значения величин h и l: $h=1/2$, $l=2\sqrt{2/3}$.

Пусть $AC=a$. Ясно, что l не короче высоты основания призмы: $l\geqslant a\sqrt{3}/2$; отсюда $a\leqslant 2l/\sqrt{3}$. Выразим теперь через a объем призмы: $V=a^2h\sqrt{3}/4=a^2\sqrt{3}/8$.

Ясно, что он максимален при максимальном значении a, т. е. при $a=2l/\sqrt{3}$. Поэтому $V_{\max}=4\sqrt{3}/27$.

8. **Ответ**: arccos 1/3. **Решение**. Так как $CM=MB=MD=MA$, треугольники CSB и CAB — прямоугольные (рис. 11). Очевидно, что высота пирамиды не больше SM, а высота параллелограмма не больше AM. Значит, объем пирамиды будет наибольшим, если треугольники CSB и CAB — равнобедренные прямоугольные. Поэтому угол между плоскостями SBC и ABC равен 90°.

Найдем теперь угол между плоскостями ACS и SCD. Воспользуемся теоремой косинусов для трехгранного угла. Пусть искомый угол равен x, $\angle SCD=\gamma$. Найдем γ:

$$DS=\sqrt{SM^2+DA^2+AM^2}=4\sqrt{6},$$

$$\sin\gamma/2=DS/(2DC)=\sqrt{3}/2,$$

отсюда $\gamma=120°$. Тогда

$$\cos x=\frac{\cos\angle DCA-\cos\angle SCD\cdot\cos\angle SCA}{\sin\angle SCD\sin\angle SCA}=1/3.$$

анные задачи
овской городской олимпиады
по физике 1992 года

1. Считая, что вода в котле нагревается примерно на 80 градусов, получаем $m\approx2{,}5$ т.

2. $\sin^2\alpha=\dfrac{(a/(l-d))^2-((l-d)/d)^2}{1-((l-d)/d)^2}$;

$(l-d)^2/d\leq a<(l-d)$.

3. $t=\sqrt{v_1v_2}/g$.

4. Ясно, что точки отражения лежат ниже *осевой линии цилиндра. Возможны два случая* (рис. 12): а) траектории *1—2* и *2—1* совпадают и б) они различны. В случае а) положение точек отражения может быть любым — надо направить скорость по нормали в точке *1* и подобрать ее такой, чтобы шарик попадал в точку *2*. Очевидно также, что при этом шарик не поднимается выше осевой (парабола выпукла вверх). В случае б) углы падения и отражения должны быть симметричны относительно 45° к вертикали (так называемые навесная и настильная траектории). Это означает, что нормали в точках *1* и *2* также должны быть направлены под углом 45°. Решение единственно.

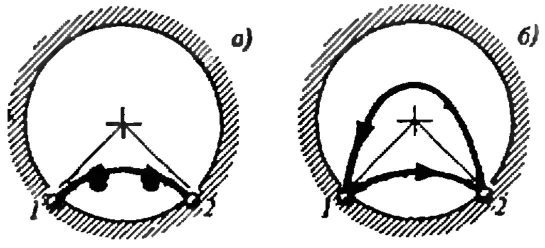


Рис. 12.

5. $F=\rho gH\pi R^2-2/3\rho g\pi R^3=\rho g\pi R^2(H-2/3R)$.

6. Если $\mu<\operatorname{ctg}\alpha$, ластик перемещается под углом $\beta=\operatorname{arctg}(1/\mu)$ к линейке на расстояние $l=H\sqrt{1+\mu^2}\sin\alpha$. Если же $\mu>\operatorname{ctg}\alpha$, ластик «прилипает» к линейке и перемещается вместе с ней.

7. $\alpha(t)=\operatorname{arctg}(gt^2/(2l))$.

8. $\omega_{\max}=(QEl/(\pi mR^2))^{1/2}$. **Указание**. Кольцо с вырезом можно заменить целым кольцом, равномерно заряженным с плотностью $Q/(2\pi R)$, и точечным зарядом $-Ql/(2\pi R)$, находящимся в месте разреза.

9. Считая каплю полушаром, получим $m\sim2\sqrt{\sigma^3/(\rho g^3)}\sim0{,}04$ г.

10. $U=(mgd^3/(2\varepsilon_0 LS))^{1/2}$. **Указание**. Необходимо исследовать устойчивость средней пластины относительно небольших отклонений ее от положения равновесия. Когда напряжение на конденсаторе достигнет искомой величины, средняя пластина ударится об одну из боковых пластин и произойдет пробой конденсатора.

11. $T=2\pi/\omega$, где
$\omega^2=GM(1/r_1^2+1/r_2^2)/(r_1+r_2)$.

12. $\dfrac{r_0}{r}=\left(1-\dfrac{\rho v_0^2(1-(S_0/S)^2)}{2p_0}\right)^{1/3}$.

13. $q_1/q=1/9$. **Указание**. Из рисунка к условию задачи видно, что поле в точке A в 9 раз меньше поля в точке B.

14. $M_1=M/4$.

15. $r=(U_2-U_0)/I_2=0{,}1$ Ом.

йдоскоп «Кванта»
«Квант» № 8)

Вопросы и задачи

1. См. рис. 13. Здесь $t_1=3$ с, $t_2=4{,}5$ с, $l=1$ км, $v=330$ м/с (скорость звука).

2. Обычно *скорость ветра на высоте больше*, чем у земли, поэтому волновые поверхности становятся несимметричными (рис. 14) и в направлении ветра скорость волн оказывается больше, чем против ветра. В результате звук, распространяющийся против ветра, отклоняется вверх (кривая AB на рисунке 14), а распространяющийся по ветру — вниз (кривая AC).

3. При обтекании ветром проводов или ветвей деревьев воздушный поток становится неустойчивым и с препятствий могут срываться вихри. Они и создают колебания давления воздуха, которые мы воспринимаем как звуки.

4. В струне — поперечными, в воздухе — продольными.

5. Чем больше давление воздуха в баллоне, тем выше тон издаваемого звука.

6. Когда струну дергают ногтем или медиатором, в ней возбуждается больше высших гармоник, чем когда ее трогают пальцами. Высшие гармоники и придают звукам банджо звенящую окраску.

7. Из-за многократных отражений замкнутое

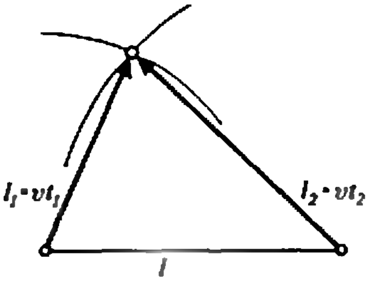


Рис. 13.

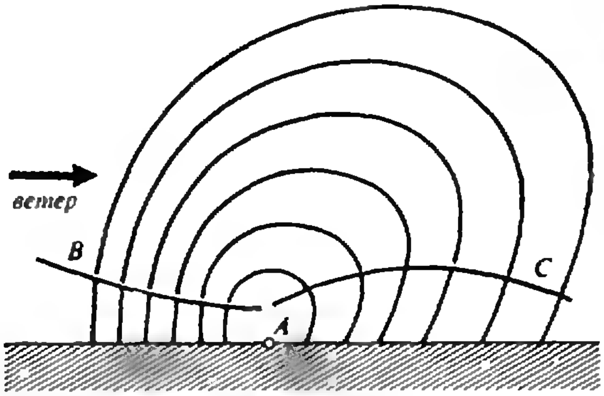


Рис. 14.

помещение более или менее равномерно заполняется энергией звуковых колебаний.

8. Дольше звучит камертон, закрепленный в тисках, потому что у него меньше интенсивность излучения энергии звуковых волн.

9. При переходах звуковой волны из воздуха в стекло и из стекла в воздух происходит ее отражение, вследствие чего доля энергии, попадающей в комнату, уменьшается.

10. Между пушинками свежевыпавшего снега существуют маленькие полости, которые поглощают звук так же, как современные звукопоглощающие покрытия.

11. Воздушная полость в чайнике служит резонатором для звуков.

12. Пластилин увеличивает массу стекла, что приводит к уменьшению собственной частоты колебаний стекла и расстраивает резонанс между ним и звуковыми волнами от автомашин.

13. Бокал имеет определенные резонансные частоты, и если одна из них совпадает с частотой звуковых колебаний, стекло может треснуть.

14. Либо кончик бича, изгибаясь, бьет сам по себе, издавая при этом звук, либо, двигаясь быстрее звука, он создает ударную звуковую волну.

15. Пуля, пущенная из ружья, движется со скоростью, превышающей скорость звука в воздухе, вследствие чего образуется ударная волна.

16. Коническую поверхность, движущуюся со скоростью самолета.

17. Звуковая волна испытывает дифракцию на щели, и звук, проникая через щель, распространяется по всей комнате.

Микроопыт

Частоту можно определить по длине волны, а она приблизительно равна учетверенной длине воздушного столбика внутри ключа.

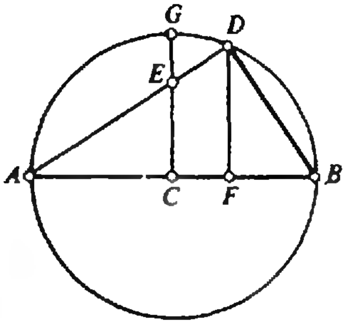


Рис. 15.

[illegible]ант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1. Если в середину двузначного числа $10a+b$ вставить ноль, то получится число $100a+b$. Если при этом число увеличивается в 6 раз, то получаем уравнение $100a+b=6(10a+b)$, откуда $b=8a$, следовательно, исходное число равно 18. Если при указанной операции число увеличилось в 7 раз, то из уравнения $100a+b=7(10a+b)$ получаем, что $b=5a$, значит, исходное число равно 15. При увеличении в 9 раз, из уравнения $100a+b=9(10a+b)$ имеем $4b=5a$, и искомое число равно 45.

2. Если числа a и b имеют общий множитель, то его имеет и их сумма, а сумма чисел на каждом столбе равна простому числу 1993, следовательно, эти числа взаимно просты.

3. Прямоугольные треугольники ACE, AFD и ADB подобны, поскольку угол A у них общий (рис. 15). Поэтому $AD:AB=AC:AE=AF:AD$, а так как $AE=AF$, $AC=a$, $AD=b$, $AB=1$, то $b=a/AE=AE=b$, отсюда получаем, что $AE=b^2$ и $AE=a/b$, значит, $b^2=a/b$, т. е. $a=b^3$.

4. Подсчитаем сумму цифр у всех чисел первой сотни (от 1 до 99). Заметим, что каждая цифра, кроме нуля, появляется по 10 раз как на месте десятков, так и на месте единиц, т. е. 20 раз. А так как сумма $1+2+\ldots+9=45$, то искомая сумма равна 900. Сумма цифр 100 чисел от 100 до 199 будет больше полученного числа на 100, поскольку сто раз добавляется единица на месте сотен. Поэтому сумма цифр всех чисел от 1 до 199 равна 1900. Осталось заметить, что страниц в книге всегда четное число, и сделать небольшой перебор случаев.

Число страниц	Сумма цифр
200	$1900+2=1902$
202	$1902+3+4=1909$
204	$1909+5+6=1920$
206	$1920+7+8=1935$
208	$1935+9+10=1954$
210	$1954+11+3=1968$
212	$1968+4+5=1977$
214	$1977+6+7=1990$
216	$1990+8+9=2007$

Очевидно, что в школу с математическим уклоном может ходить лишь пятнадцатилетний брат, родившийся в 1977 году. Если он — старший, то его младшему брату полтора года и он не может сам купить себе книгу и, тем более, посчитать в ней сумму цифр. Значит, это — младший из братьев и его зовут Митя.

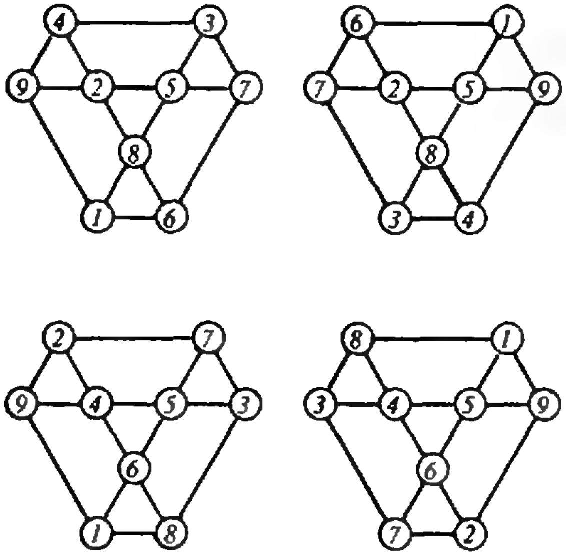


Рис. 16.

5. Вначале заметим, что каждое из чисел, входящих в средний треугольник, входит еще в два треугольника (а всего в три), а каждое из остальных чисел входит в два треугольника. Обозначим сумму чисел в вершинах треугольника через A. Тогда сумма указанных трех чисел равна A, а сумма остальных чисел равна $45-A$. Поскольку треугольников семь, то сумма чисел в их вершинах равна $7A$. В эту сумму отмеченная тройка чисел входит три раза, а остальные числа по два раза. Значит, $7A=3A+2(45-A)$, откуда $A=15$. Число 15 в виде суммы различных натуральных чисел, не превосходящих девяти, представляется следующими восемью способами: $1+5+9=1+6+8=2+4+9=2+5+8=2+6+7=3+4+8=3+5+7=4+5+6$. В центральную тройку могут входить лишь те числа, которые встречаются не менее чем в трех разложениях. Это числа 2, 4, 5, 6 и 8. Из них состоят лишь две тройки чисел: $2+5+8$ и $4+5+6$. Для каждой из них существует два различных варианта расстановки остальных цифр, показанные на рисунке 16. Итак, найдено 4 варианта расстановки, остальные получаются из них поворотами и симметриями.

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко,
С. Табачников, В. Тихомирова, В. Уроев,
А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс, И. Шарыгин,
Г. Яковлев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, А. Калинин, Л. Кардасевич,
С. Коновалов, А. Котова, А. Савин, В. Тихомирова,
А. Черноуцан

Номер оформили:
А. Астрин, Н. Кузьмина, Т. Макарова, Э. Назаров,
П. Переверзенцев, А. Хоменко, П. Чернуский

В номере использованы фотографии
А. Митрофанова, Т. Громовой

Редактор отдела художественного оформления
П. Чернуский

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Т. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»,
тел. 250-33-54, факс 251-55-57

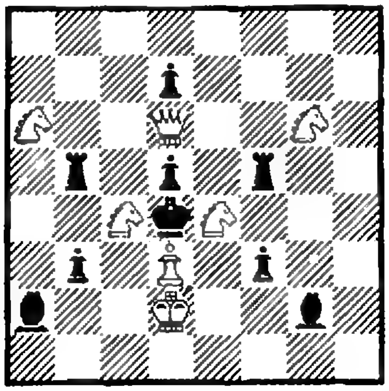
Сдано в набор 30.06.92. Подписано к печати 14.08.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,64.
Тираж 80747 экз. Заказ 782. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

В ОБЕЗЬЯНЬЕМ ПИТОМНИКЕ

Как вы помните, 1992 год — это год обезьяны, и мы просто обязаны одну из «шахматных страничек» посвятить «обезьяньей теме», кстати довольно популярной и шахматной композиции. Речь идет о различных видах симметрии, копировании игры соперника, что несомненно представляет интерес для читателей «Кванта» (см. также № 12—86 и № 2—89). Начнем со следующего замечательного примера.



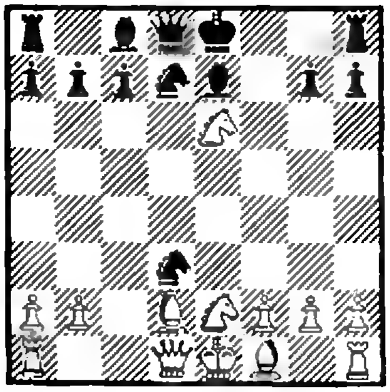
Л. Линдгрен, 1981
Мат в 2 хода

Если не считать наличия крайней вертикали «h», то позиция абсолютно симметрична (осевая симметрия). Стало быть, если решение есть, то в силу симметрии должно быть и второе. И кто бы мог подумать, что эта вертикаль имеет существенное значение!

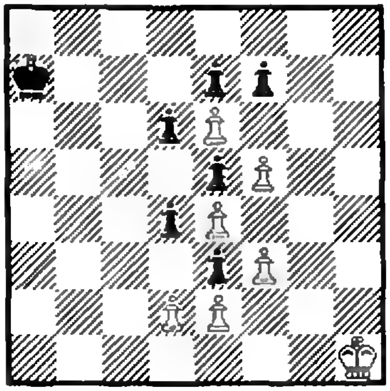
1. Кa3! Грозит 2. К:b5×, и куда бы ни ушла ладья, черным не спастись: последует 2. Фc5× или 2. Фb4×. Не проходит 1. Кc7? (1. Кc3?) из-за ответа 1... Лa5! и собственные кони мешают белым объявить мат. Но почему невозможно 1. Кg3 и симметричной угрозой 2. К:f5×? Оказывается, черных спасает 1... Сh3! — вот линия «h» пригодилась: ладья защищена и мата нет.

Мы не раз рассказывали об обезьяньих партиях, в которых дублирование ходов приводит к быстрому мату черному королю. Вот знаменитые короткометражки С. Лойда: **1. c4 c5 2. Фa4 Фa5 3. Фc6 Фc3 4. Ф: c8×** или **1. d4 d5 2. Фd3 Фd6 3. Фh3 Фh6 4. Ф: c8×**. Забавны и симметричные партии, в которых дело кончается матом белому королю:
1. e4 e5 2. Крe2 Крe7 3. Крe3 Крe6 4. Фf3 Фf6 5. Кe2 Кe7 6. b3 b6 7. Сa3 Сa6 8. Кd4+, и черные неожиданно вынуждены объявить мат: **8...ed×**.

Менее известны партии, в которых черные повторяют действия противника на другом фланге (симметрия относительно центра доски):
1. e4 d5 2. e5 d4 3. c3 f6 4. ef dc 5. fe cd+ 6. С:d2 С:e7 7. Кf3 Кc6 8. Кc3 Кf6 9. Кe2 Кd7 10. Кfd4 Кce5 11. Кe6 Кd3×!



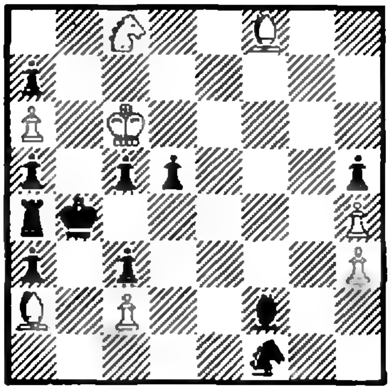
Любители шахматного паноптикума могут потренироваться в составлении партий с матами другими фигурами. А вот этюд на ту же тему.



Я. Рик, 1969
Выигрыш

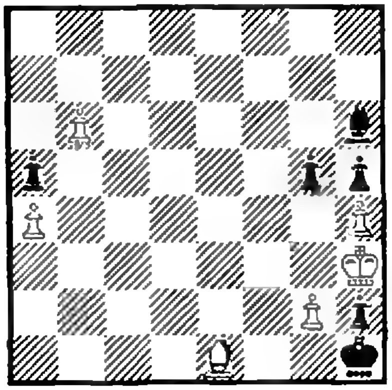
1. de fe 2. ed ef 3. de fe 4. ed ef 5. de fe 6. e8Ф, реваншируясь за предыдущий конфуз.

Рассмотрим еще несколько забавных примеров вынужденного повторения ходов.



Г. Рэм, 1989
Мат в 6 ходов

Ошибочно **1. Кe7? Кe3! 2. Сh6** С:h4 3. С:e3 С:e7 или 1. Сd6? Сd4! 2. **Кe7 Кe3** 3. Сf4 Сf6 4. С:e3 С:e7. К цели ведет **1. Сh6!** (с угрозой 2. **Кe7 Кe3** 3. С:e3) **1...Сh4! 2. Сf8 Сf2 3. Сd6! Сd4 4. Кe7 Кe3 5. h4!** Вот в чем смысл проигрыша пешки «h» — черные в цугцванге и следующим ходом получают мат.

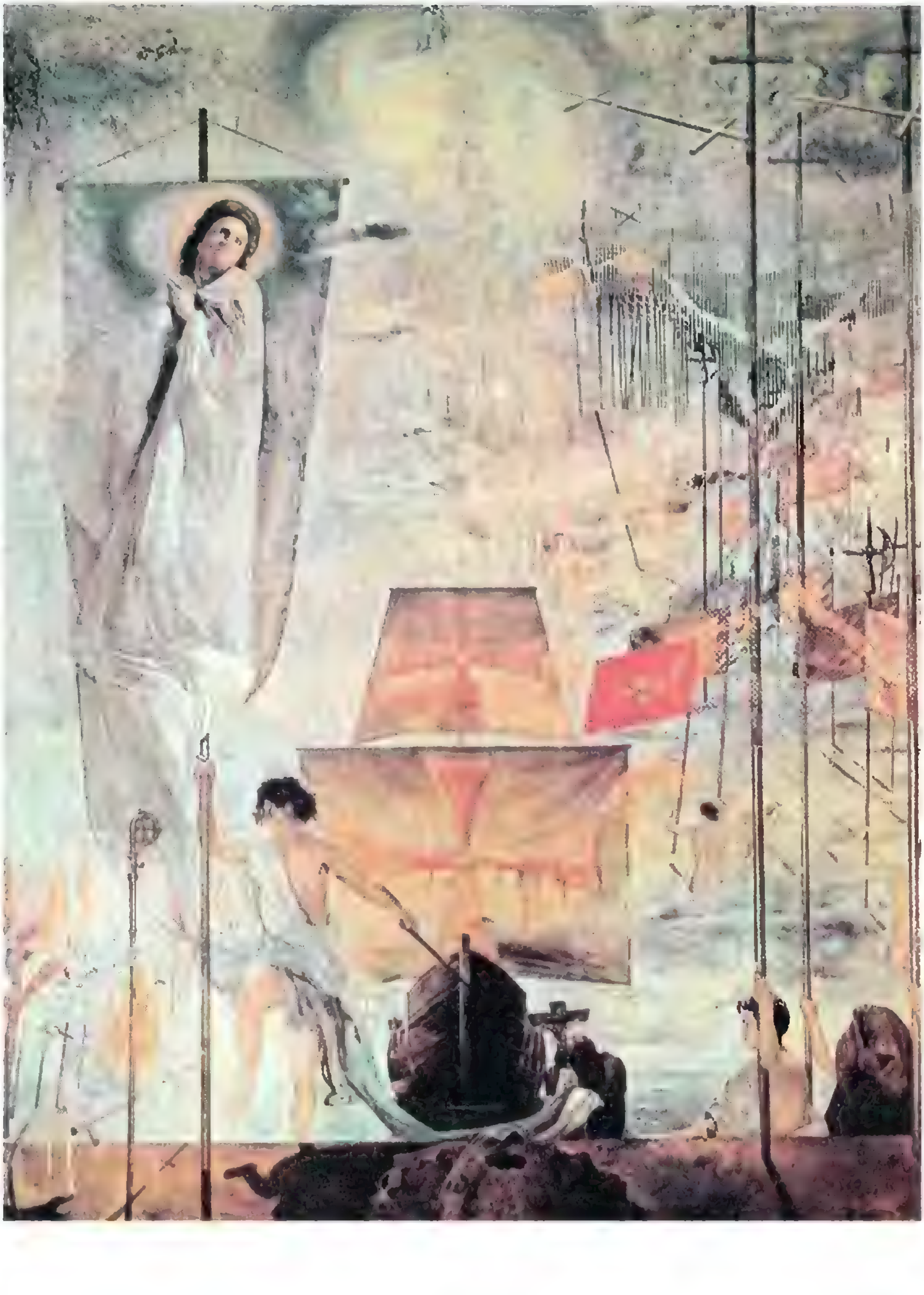


И. Бирбрагер, 1955
Выигрыш

Пробираясь сквозь болотную трясину, путники часто идут след в след, помня о том, что малейшее отступление в сторону чревато гибелью... **1. b7 g4+ 2. Крg3 Сe3!** Готовя на 3. b8Ф? неожиданное 3... Крg1 и 4... h1К× **3. Сf2! Сd4 4. Сe3! Сc5 5. Сd4! Сb6 6. Сc5! Сa7 7. Сb6! Сb8+ 8. Крf2** Сg3+ 9. **Крf1**. Ходы-следы выделены в решении.

В следующий раз мы снова побываем в обезьяньем питомнике.

Е. Гик

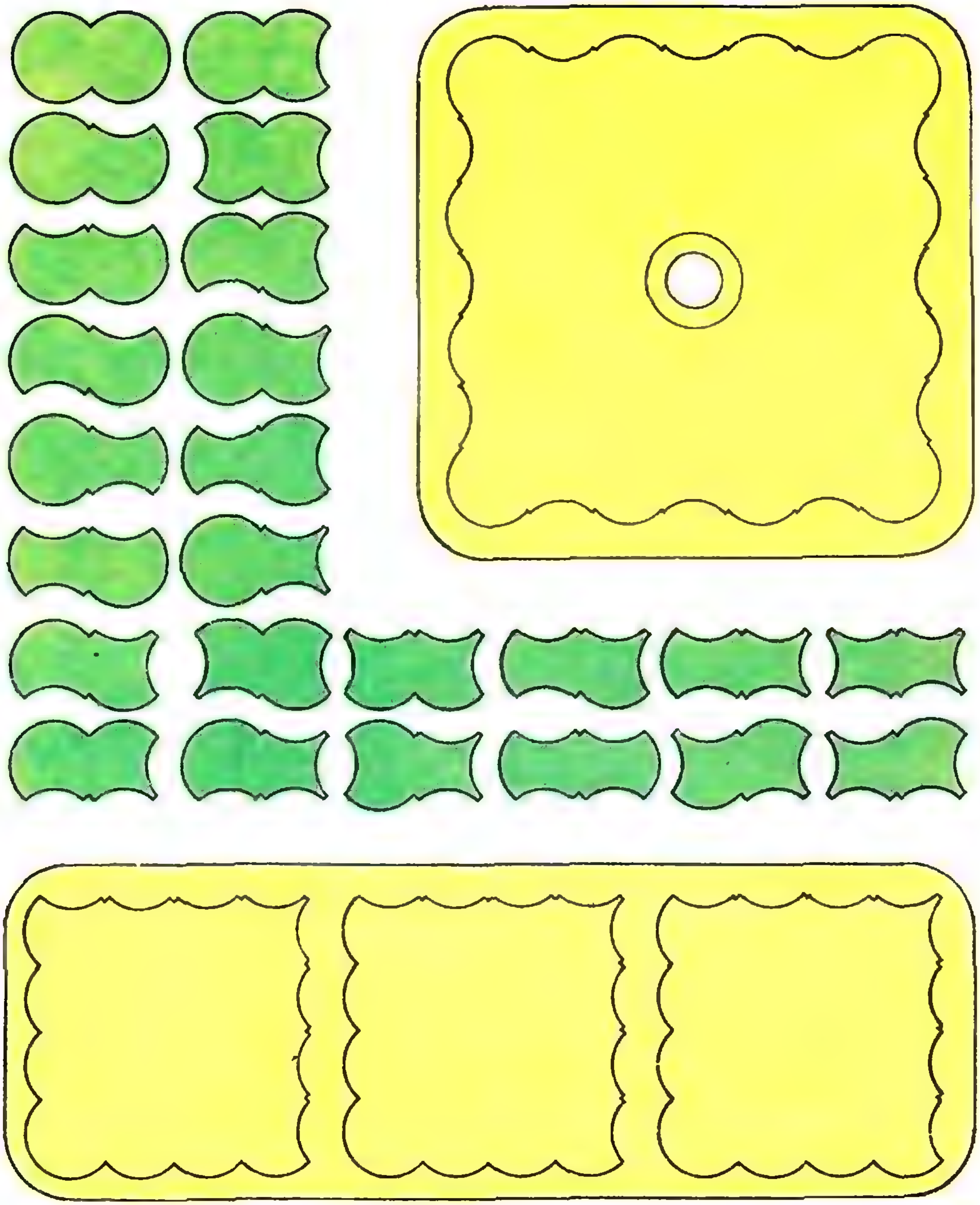


ДУГОМИНО

Дугомино — новая головоломка из плоских игровых элементов. Исходный элемент головоломки имеет вид восьмерки, составленной из двух одинаковых кругов, частично перекрывающих друг друга. Все элементы головоломки образованы из исходной «восьмерки» отсечением по ее периметру от одного до шести чечевицеобразных кусочков (равных общей части кругов «восьмерки») во всех возможных сочетаниях. Всего, включая исходный элемент — «восьмерку», имеется 24 игровых элемента.

Из предлагаемого набора элементов дугомино можно составлять различные простые и замысловатые плоские фигуры. Попробуйте, например, сложить из всех 24 игровых элементов головоломки сначала квадрат с отверстием в центре, а затем — три одинаковых квадрата.

С. Грабарчук



НОМЕР
10

КВАНТ

10 1992

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный
научно-популярный
физико-математический
журнал

Учредители —
Президиум
Российской Академии наук,
Президиум
Российской
Академии образования
и коллектив редакции
журнала «Квант»

Москва, «Наука»,
Главная редакция
физико-математической
литературы

В номере:

2 *В. Пахомов.* Демократия с точки зрения математики
8 *М. Каганов.* Апология физики
14 *А. Стасенко.* Сверхзадача космического полета
20 *П. Спрент.* Зачем нужна статистика?

Задачник «Кванта»

27 Задачи М1366—М1370, Ф1373—Ф1377
29 Решения задач М1336—М1340, Ф1353—Ф1357

«Квант» *для младших школьников*

36 Задачи
37 *А. Савин, Е. Семенов.* Сеанс парапсихологии
39 Конкурс «Математика 6—8»
42 Победители конкурса «Математика 6—8»

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»
Математика 9—11:

43 *Ю. Соловьев.* Предел последовательности

Лаборатория «Кванта»

50 *В. Козловский.* Электрическое действие пламени

Практикум абитуриента

53 *А. Коржуев.* Законы сохранения в релятивистской динамике
56 Вычисления в тригонометрии

Игры и головоломки

57 Аномальные флексагоны

Олимпиады

60 XVIII Всероссийская олимпиада по математике и физике
66 IV Всероссийская олимпиада по информатике
68 XXXII Всеукраинская математическая олимпиада

71 **Ответы, указания, решения**

«Квант» улыбается *(70)*
Смесь *(13, 19)*

Наша обложка

1, 2 *Как странно — Луна на картине А. Матисса (1869—1954) «Голубое небо» напоминает синтезированное изображение Земли, полученное в 80-е годы с помощью аппаратуры, установленной на ИСЗ.*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка «Тетраэдр из кубиков».*

© *«Квант»* 1992

ДЕМОКРАТИЯ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

В. ПАХОМОВ

Можно было бы привести еще массу правил голосования и парадоксов, чтобы убедиться в отсутствии абсолютно хорошей демократической системы. Все это наводит на печальную для многих мысль, что демократии как волеизъявления большинства не существует, ибо не существует, как мы видели, самого понятия «мнение большинства»...

Функция коллективного предпочтения

Поставим несколько более общую задачу. Пусть n членов парламента определяют систему приоритетов государственного финансирования m различных программ. Скажем, в первую очередь средства выделяются на здравоохранение, из оставшейся части бюджета — на программу образования, затем из остатка — на программу строительства жилья и т. д. У каждого члена парламента есть свое мнение по поводу упорядочения этих статей расхода. Необходимо построить их упорядочение, отражающее мнение парламента в целом.

Поскольку между упорядочением государственных программ и упорядочением кандидатов нет никакой разницы с математической точки зрения, мы по-прежнему будем говорить для удобства об избирателях и кандидатах вместо парламентариев и программ. Итак, имеется n избирателей и m кандидатов. Требуется

Окончание. Начало см. в «Кванте» № 9.

построить функцию, определяющую коллективный порядок на множестве кандидатов, т. е. правило, которое для любых заданных порядков $\overset{1}{\succ}$, $\overset{2}{\succ}$, ..., $\overset{n}{\succ}$ определяет коллективный порядок $\overset{*}{\succ}$:

$$\overset{*}{\succcurlyeq} = f(\overset{1}{\succ}, \overset{2}{\succ}, \dots, \overset{n}{\succ}).$$

Здесь мы предполагаем три возможности при парных сравнениях кандидатов, скажем, a и b:

$a \overset{*}{\succ} b$ (a лучше b),

$a \overset{*}{=} b$ (a и b одинаковы),

$a \overset{*}{\prec} b$ (a хуже b),

и их комбинации типа

$a \overset{*}{\succcurlyeq} b$ (a не хуже b).

Таких функций может существовать много. Например, f может объявлять всех кандидатов равными. Поэтому необходимо наложить на f какие-то ограничения. Прежде всего она должна быть определена для любого (конечного) числа кандидатов. Например, для двух кандидатов все перечисленные правила голосования совпадают, поэтому функция f в этом случае строится легко: либо кто-то из двух кандидатов выигрывает и, значит, занимает первое место (а противник — второе), либо выясняется, что они равны. Например, для профиля

Избиратель	1	2	3	4	5	6
Кандидаты	a b	a b	b a	a b	b a	a b

эквивалентного профилю

Группа избирателей	{1, 2, 4, 6}	{3, 5}
Кандидаты	a b	b a

имеем $a \overset{*}{\succ} b$ по любому из правил голосований. Для профиля

Группа избирателей	{1, 2, 5}	{3, 4, 6}
Кандидаты	a b	b a

ни одно из наших правил не дает победителей, поэтому следует считать $a \overset{*}{=} b$.

Однако эти правила следует еще доопределять для случаев, когда число кандидатов более двух. Простейший способ заключается в следующем.

Пусть M — множество кандидатов, а p — правило выборов. Обозначим победителей (их может быть несколько) символом $p(M)$. Они займут первое место. Затем исключим из M этих победителей, в результате получим новое множество $M_1 = M \backslash p(M)$. Применяя к нему правило p, получим множество $p(M_1)$ победителей из M_1, они займут второе место. Исключая из M_1 этих победителей, получим множество $M_2 = M_1 \backslash p(M_1)$ и т. д. В результате получаем функцию f.

Разберем несколько примеров.

Пусть p — правило относительного большинства. Рассмотрим профиль H ($n = 3$, $M = \{a, b, c, d\}$):

Профиль H

Избиратель	1	2	3
Кандидаты	a b c d	d a b c	b c d a

Правило относительного большинства дает по одному голосу для a, d, b, следовательно $p(M) = \{a, b, d\}$. Они занимают первое место, а оставшийся кандидат c займет второе. Значит, f сопоставляет профилю H порядок

$$a \overset{*}{=} b \overset{*}{=} d \overset{*}{\succ} c.$$

Рассмотрим эту же функцию на профиле A. Имеем $p(A) = \{a\}$, $A_1 = \{b, c, d\}$, а соответствующий профиль A_1 даст $p(A_1)=\{d\}$ и $A_2=\{b, c\}$:

Профиль A_1

Количество голосов	5	3	5	4
Кандидаты	d	d	b	c
	c	b	c	d
	b	c	d	b

Профиль A_2

Количество голосов	5	3	5	4
Кандидаты	c	b	b	c
	b	c	c	b

Наконец, из профиля A_2 видно, что $p(A_2)=\{c\}$, т. е. f задает порядок

$$a \overset{s}{\succ} d \overset{s}{\succ} c \overset{s}{\succ} b.$$

Правило абсолютного большинства порождает свою функцию f, которая, правда, не является определенной для всех профилей (например, для профиля H), а для профиля A дает (проверьте!) порядок $b \overset{s}{\succ} c \overset{s}{\succ} d \overset{s}{\succ} a$, в точности противоположный порядку по правилу относительного большинства.

Правило Кондорсе также определено не для всех профилей, но для профиля A дает (проверьте!) порядок $c \overset{s}{\succ} d \overset{s}{\succ} b \overset{s}{\succ} a$.

Наконец, правило Борда при нашем способе определяет функцию f, которая профилю A сопоставляет порядок $d \overset{s}{\succ} c \overset{s}{\succ} b \overset{s}{\succ} a$.

Заметим, что правило Борда может и непосредственно определять функцию f: достаточно расставить кандидатов в порядке убывания их очков. Это дает для профиля A порядок $d \overset{s}{\succ} c \overset{s}{\succ} a \overset{s}{\succ} b$. Как видите, при таком определении порядка худшим оказался b.

Итак, все правила достаточно разумны, *но* приводят к совершенно различным результатам, вплоть до противоположных. Чтобы добиться однозначного результата, попробуем предъявить некоторые требования к функции коллективного предпочтения, которые сформулируем в виде аксиом. Обозначим для удобства множество избирателей через S.

Аксиома 1 (полнота). *Для любых кандидатов a и b коллективный порядок устанавливает, что либо $a \overset{s}{\succ} b$, либо $a=b$, либо $a \overset{s}{\prec} b$.*

Аксиома 2 (транзитивность). *Если $a \succ b$ и $b \succ c$, то $a \succ c$.*

Первая из аксиом говорит о том, что мы можем сравнить любых двух кандидатов, а вторая естественна для любого порядка, без нее может возникнуть ситуация, в которой a лучше b, b лучше c и c лучше a.

Аксиома 3 (единогласие). *Если все избиратели считают, что a лучше b, то и в коллективном предпочтении a лучше b.*

Эта аксиома не вызывает сомнения и не позволяет строить такое правило, при котором «все равны».

Аксиома 4 (независимость). *Положение любых двух кандидатов a и b зависит только от их взаимного расположения в индивидуальных предпочтениях избирателей и не зависит от расположения других кандидатов.*

Например, профили

Избиратели	1	2	3	4
Кандидаты	a	c	b	a
	b	a	c	b
	c	b	a	c

Избиратели	1	2	3	4
Кандидаты	a	a	b	c
	c	c	a	a
	b	b	c	b

вообще говоря, различны, но относительное положение a и b у всех избирателей одинаково: избиратели 1, 2 и 4 *считают a лучше b*, и только третий избиратель считает b лучше a. В этом случае функция коллективного предпочтения должна и для одного и для другого профиля расположить a и b одинаково. Это могут быть, скажем, порядки $a > b > c$ и $a > c > b$ соответственно (они даются здесь правилом Борда). Отказ от аксиомы независимости приводит к возможности манипуляций: как мы уже видели, снятием (а значит, и введением) кандидатуры можно изменить взаимное расположение остальных кандидатов для правила Борда (сравните профили D и E).

Приведем один пример функции коллективного предпочтения, удовлетворяющей всем этим аксиомам:

$$f(\overset{1}{\succcurlyeq}, \overset{2}{\succcurlyeq}, \ldots, \overset{n}{\succcurlyeq}) = \overset{1}{\succcurlyeq}.$$

Эта функция задает *правило диктатора:* независимо от предпочтения других избирателей она устанавливает тот порядок, который определяется первым избирателем. Разумеется, вместо первого можно было бы взять второго, третьего, n-го избирателя — суть дела не меняется. Меняется лишь диктатор.

Теорема Эрроу

Неожиданный для многих результат Эрроу заключается в том, что при всей разумности наших аксиом *единственное правило, которое им удовлетворяет, и есть правило диктатора.*

Для доказательства этой теоремы введем несколько важных понятий. Подмножество A множества избирателей S назовем *коалицией.* Будем называть коалицию *f-решающей для кандидата a против кандидата b* тогда и только тогда, когда из того, что все члены коалиции ставят a выше b, а все, не входящие в нее, ставят b выше a, следует $a \overset{S}{\succcurlyeq} b$. Другими словами, для профилей вида

Группа избирателей	Кандидаты
A	$\ldots a \ldots b \ldots$
$S \setminus A$	$\ldots b \ldots a \ldots$

где точки означают произвольное расположение других кандидатов, функция f определяет порядок типа

$$\ldots \overset{S}{\succcurlyeq} a \overset{S}{\succcurlyeq} \ldots \overset{S}{\succcurlyeq} b \overset{S}{\succcurlyeq} \ldots$$

Этот факт будем кратко записывать так: $A = f(a, b)$. Отметим, что A зависит от *конкретных кандидатов a* и b и не обязана быть f-решающей для c против d. Наконец, *если для любых двух кандидатов x и y коалиция A является f-решающей для x против y,* будем называть ее *f-решающей.*

Для f-решающей коалиции теперь не важны имена кандидатов: если члены коалиции ставят кого-либо выше другого, а все остальные избиратели располагают этих кандидатов в точности наоборот (а не как-нибудь!), то в групповом предпочтении выше стоит тот, кого выше поставила коалиция.

Отметим, что все множество избирателей S является «предельным» случаем f-решающей коалиции, ибо для него это определение, безусловно, верно в силу аксиомы единогласия.

По этой же причине пустое множество не может быть f-решающим для a против b ни при каких a и b: если никто не ставит a выше b, т. е. все ставят b выше a, то в силу аксиомы единогласия $a \overset{S}{\prec} b$, и, значит, не может быть $a \overset{S}{\succcurlyeq} b$.

Лемма 1. *Существует пара (a, b), для которой найдется коалиция D, состоящая из одного избирателя $\{d\}$, такая, что d является f-решающей для a против b.*

Доказательство. Обозначим через F множество таких коалиций A, для каждой из которых существует такая пара (a, b), что $A = f(a, b)$ (для каждой коалиции из F — своя).

Множество F не пусто, так как включает множество всех избирателей S. Возьмем коалицию D из множества F, содержащую наименьшее число избирателей. Так как F не пусто, то D содержит не менее одного избирателя. Требуется доказать, что он там и будет ровно один.

Таким образом, если предположение о том, что их там не менее двух, приведет к противоречию, то лемма будет доказана.

Итак, предположим, что D можно разбить на два непересекающихся непустых подмножества: одно $\{d\}$, состоящее из одного элемента, а другое E — из всех остальных.

Рассмотрим теперь профиль

Группа избирателей	$\{d\}$	E	$S \setminus D$
Кандидаты	a	c	b
	b	a	c
	c	b	a

Так как коалиция D — f-решающая для a, b, то $a \overset{f}{\succ} b$. Если $c \overset{f}{\succ} b$, то это означает, что коалиция E является f-решающей для c против b. Но в E меньше избирателей, чем в D, которая по определению минимальна. Полученное противоречие показывает, что c не может быть не хуже b. Значит, в силу аксиомы полноты, b лучше c.

Теперь имеем $a \overset{f}{\succ} b$, $b \overset{f}{\succ} c$, откуда, в силу аксиомы транзитивности, получаем $a \overset{f}{\succ} c$. Но это значит, что $\{d\}$ является f-решающей для a против c, что также противоречит минимальности D.

Таким образом, мы пришли к противоречию; и лемма доказана.

Лемма 2. *Коалиция $D = \{d\}$, существование которой доказано в предыдущей лемме, является f-решающей.*

Доказательство. Пусть c — произвольный кандидат. Рассмотрим профиль

Группа избирателей	Кандидаты
$\{d\}$	...a...b...c...
$S \setminus \{d\}$ (S без d)	...b...c...a...

(d ставит a выше b, а b — выше c, все остальные ставят b выше c, а c выше a). Так как $\{d\} = f(a, b)$, то $a \overset{f}{\succ} b$; в силу аксиомы единогласия имеем $b \overset{f}{\succ} c$, а значит, по аксиома транзитивности, $a \overset{f}{\succ} c$. В соответствии с аксиомой независимости наш результат не зависит от b, т. е. для всякого профиля вида

Группа избирателей	Кандидаты
$\{d\}$	...a...c...
$S \setminus \{d\}$	...c...a...

имеем $a \overset{f}{\succ} c$, значит, $\{d\} = f(a, c)$, где кандидат c уже произволен.

Аналогично для произвольного кандидата e, взяв профиль вида

Группа избирателей	Кандидаты
$\{d\}$	...e...a...c...
$S \setminus \{d\}$ (S без d)	...c...e...a...

и повторив все рассуждения, получим, что $e \overset{f}{\succ} c$. В конечном счете, $\{d\} = f(c, e)$ для произвольных e и c, т. е. является f-решающей.

Лемма 3. *Описанный выше избиратель d — диктатор.*

К этому моменту мы получили, что d может навязывать свое мнение по поводу любых двух кандидатов a и b при условии, что мнение остальных избирателей противоположно. В этом пока проявляется зависимость и от мнения других. Мы должны доказать, что, *как бы ни голосовали остальные избиратели,* коллективное мнение совпадает с мнением d.

Доказательство леммы 3. Рассмотрим такие профили голосования, в которых у избирателя d порядок вида $\ldots \overset{d}{\succ} a \overset{d}{\succ} \ldots \overset{d}{\succ} c \overset{d}{\succ} \ldots \overset{d}{\succ} b \overset{d}{\succ} \ldots$, все остальные кандидаты ставят c выше a и b, а в остальном расположение их кандидатов произвольно.

Так как коалиция $\{d\}$ — f-решающая, то $a \overset{*}{\succ} c$; в силу аксиомы единогласия, $c \overset{*}{\succ} b$, значит, по аксиоме транзитивности, $a \overset{*}{\succ} b$. Исключая из соотношений c (в силу аксиомы независимости), получаем, что если d предпочитает кандидату b кандидата a, то ему и будет оказано коллективное предпочтение:

$$a \overset{d}{\succ} b \Rightarrow a \overset{*}{\succ} b$$

(независимо от расположения a и b у других избирателей!).

Меняя ролями a и b, получаем

$$a \overset{d}{\prec} b \Rightarrow a \overset{*}{\prec} b.$$

Итак, порядки $\overset{d}{\succ}$ и $\overset{*}{\succeq}$ совпадают:

$$a \overset{d}{\succ} b \Leftrightarrow a \overset{*}{\succ} b.$$

Тем самым теорема Эрроу полностью доказана.

Некоторые житейские выводы из теоремы Эрроу

Что же мы получили в итоге? Выходит, введя четкие и разумные правила, обеспечивающие, на первый взгляд, выбор действительно того кандидата, которого предпочитает большинство, мы получили ...диктатуру. Четкая аксиоматика погубила демократию.

Итак, диктатура — понятие достаточно ясное, удовлетворяющее простым принципам, понятие же демократии невозможно сформулировать иначе, как «альтернатива диктатуре». Несмотря на это, демократия привлекает людей, являясь естественной политической средой для развития общества. Только в ней может происходить естественный отбор «сильнейших» и «мудрейших», ибо победа в выборах или в проведении своего решения зачастую требует, кроме умения убеждать, умения рассчитывать. Но в этом и ее бич. С помощью расчета слишком часто можно манипулировать результатами. Непротиворечивая же самодостаточная система диктатуры — мертва: ей развиваться некуда.

И еще один житейский вывод. Вы не задумывались, почему настолько популярна во многих демократических государствах именно двухпартийная система? Одну из причин этому мы упоминали: для двух кандидатур различные правила голосования дают один и тот же результат, и большинство противоречий тем самым снимается.

И наконец, комментарий...

В этой статье упоминаются три человека, о которых мы хотим сказать несколько слов.

Сведения о Жане Шарле Борда, которыми мы располагаем, таковы. Родился в 1733, умер в 1799 году. Следовательно, пережил Французскую революцию и видел восхождение Бонапарта. Был физиком и геодезистом, членом французской Академии. Участвовал в разработке метрической системы мер. В 1792 г. определил длину секундного маятника в Париже и нашел способ точного определения периода колебаний маятника. Занимался также гидравликой; доказал теорему, носящую теперь его имя, об ударе струн жидкости или газа. Оставил математические работы по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению. Политикой занимался во время революции; именно тогда возникла настоятельная необходимость разработать демократические процедуры, и Борда предложил свою систему голосования.

Гораздо более известен Жан Антуан Никола де Кондорсе (1745—1794), маркиз, энциклопедист, философ, математик, социолог, политик. Друг Даламбера и Вольтера. Разумеется, член французской Академии. В 1776 году был избран членом Петербургской академии наук, но в 1792 году исключен повелением Екатерины II, не одобрявшей (мягко говоря) его политических взглядов. Погиб Кондорсе трагически. Его миновала гильотина, скосившая столько его политических единомышленников-жирондистов, но, вынужденный скрываться от нее, Кондорсе не в добрый час встретился в лесу с волками.

Еще одно имя, встретившееся вам,— Кеннет Эрроу. Он — наш современник, известный американский экономист, нобелевский лауреат 1972 года по экономике. Работает в области эконометрии, теории общего экономического равновесия, экономической теории благосостояния, теории управления.

АПОЛОГИЯ ФИЗИКИ

Доктор физико-математических наук
М. КАГАНОВ

Нужно ли физику защищать? От кого? Эти вопросы, наверное, сразу возникают при взгляде на название статьи. Стала общим местом защита физиков от обвинения в открытии способа массового уничтожения. Не об этом пойдет здесь речь. Физика, будучи источником идей и технологий, используемых в инженерной практике, воспринимается многими как приземленная наука, техническая дисциплина, якобы бездуховная по самой своей сути. Вот от этой точки зрения хочет защитить физику автор.

Трудно дать всех устраивающее определение духовности. Но мне кажется несомненным, что в него входит интерес человека к окружающему его миру не только как к удобной или неудобной среде обитания. Трудно назвать духовным человека, не замечающего красоты пейзажа, безразличного к восходам и закатам, не интересующегося миром животных и растений, не испытывающего почтительного удивления перед фантастическим «устройством» любого уголка живой природы. Удивление, испытываемое человеком при взгляде на окружающую природу, естественно превращается в любопытство, а развитое обучением и чтением — в любознательность. Конечно, у разных людей любознательность останавливается на разном уровне познания. Выясняется: для того чтобы ответить на «детские» вопросы «почему?» и «как?», необходимо создать глубокие теории, провести огромное число тонких экспериментов. Постепенно, переходя от простого наблюдения к фиксации строгих результатов экспериментов, а в дальнейшем все глубже проникая в суть вещей, человек постигает структуру Мира, начинает понимать движущие силы природных явлений.

В углублении процесса познания таится опасность. Любование солнечным закатом, его воспроизведение на холсте воспринимается как духовная деятельность*), а выяснение спектрального состава солнечного света, исследование механизмов излучения световых квантов многим кажется скучным, узко профессиональным занятием, требующим знания конкретных методов — правил работы с формулами или с приборами. Конечно, к исследованию явлений окружающего нас Мира необходимо подходить профессионально — знать правила работы с формулами и приборами. Дилетанство и верхоглядство особенно нетерпимы в тех науках, которые имеют сложный аппарат и инструментарий. Есть, однако, своеобразное диалектическое противоречие между простотой наиболее глубоких вопросов, которые ставит перед нами Природа, и способов ответа на них. Иногда человек, занятый (профессионально!) исследованием определенного круга явлений, не видит связи этих явлений с устройством Мира, не ощущает, что его работа вносит дополнительный мазок в Картину мира. Даже в этом (по сути огорчительном) случае я бы не обвинил этого человека в бездуховности. Вполне могу себе представить, что он (этот гипотетический «приземленный» исследователь) бездну эмоций — а не мыслей — потратил на разработку методов вычисления или измерения.

На памяти моего поколения физиков катастрофа, происшедшая с

---

*) Конечно, только в том случае, если в пейзаж привнесено человеческое отношение к тому, что видит художник.

Л. Д. Ландау*). После автомобильной аварии спасенный врачами и физиками Лев Давидович не вернулся к научной деятельности. Прожил Л. Д. после катастрофы шесть лет, разговаривавшие с ним многократно убеждались, что у него сохранилась память, что он способен на тонкие оценки чужой деятельности, но работать как физик-теоретик он не мог. Врачи утверждали, что это — последствие травматического отключения той области мозга, которая ответственна за эмоциональную сферу...

Еще один пример, на первый взгляд далекий от предыдущего. Однажды на Ученом совете Института физических проблем (теперь институт носит имя Петра Леонидовича Капицы; тогда П. Л. был жив и вел Совет, о котором идет речь) выступил Яков Борисович Зельдович**) и высказал (не помню, по какому поводу) общие мысли о природе творчества. Основная мысль сводилась к тому, что любознательность — одна из потребностей человека. Наука — способ удовлетворения этой потребности. И ее необходимо удовлетворять как потребность в пище, одежде и т. п. Речь, кажется, шла о финансировании фундаментальной науки. Поэтому Я. Б. подчеркивал не практическую ценность результатов научной деятельности, а именно удовлетворение потребности человека (человечества) в знании. Мне выступление очень понравилось (поэтому и запомнил). Как всякое интересное выступление, его активно обсуждали не только на Совете, но и после. Сильное впечатление на меня произвели слова молодого талантливого физика-теоретика. Он не то что не соглашался с Я. Б. Но признавался: когда он занят вычислениями, то любознательность, желание получить ответ на вопрос, который привел к постановке задачи, не играет большой роли, волнует (хочется сказать, вдохновляет — так я его понял) сам процесс вычисления, радость от удивительной гармонии, которая ощущается в процессе использования строгих математических правил. И, может быть, лишь подсознательное ощущение того, что вычисление имеет отношение к реалиям природы. Должен признаться, что слова этого молодого физика соответствуют и моему отношению к рутинному (казалось бы) процессу получения ответа...

Хочется, чтобы читатель-неспециалист имел в виду эту сторону работы физика и, думаю, любого научного работника. Есть затасканное, но точно отражающее суть дела, слово — творчество. Научная работа — творчество. Творчество в любом виде человеческой деятельности вызывает вдохновение. И это превращает деятельность научных работников в духовную...

И все же. Есть процесс — творчество и есть результат. Тут, казалось бы, духовность не при чем. Получив результат (измерив или вычислив что-то), мы узнали то, что объективно существует. И, как уверено большинство научных работников, существует вне и независимо от нашего сознания. Имеет ли сам результат научной деятельности какое-либо отношение к духовности? Я уверен, что да. И попробую обосновать свою уверенность. Для этого нужно постараться понять процесс постижения устройства Мира. Далеким от физики людям может показаться, что он напоминает разгадывание головоломки. Знаете, есть такие головоломки: дается шарик или кубик, состоящие из отдельных неправильной формы кусочков. Надо уметь шарик (или кубик) разобрать и собрать из этих кусочков. При попытках разгадки головоломки очень важно то, что знаешь — решение есть. Еще: разобрав головоломку на части, уверен, что части неделимы. И наконец, всегда известны правила сборки. Они как законы природы, если сравнить разгадывание головоломок с процессом познания. Так вот о правилах сборки: априори известно, что они есть, общие для всех головоломок: нельзя гнуть, прилагать силу и т. п. И вполне конкретные — для каждой головоломки свои: порядок разборки и сборки.

---

*) Я думаю, нет необходимости представлять читателям академика, лауреата Нобелевской и Ленинской премий Л. Д. Ландау (1908—1968). Л. Д.— один из крупнейших физиков-теоретиков XX века, снискавший себе славу не только своими результатами, но и замечательной многотомной монографией «Курс теоретической физики», по которой учились и учатся многие поколения физиков-теоретиков, а также созданием одной из наиболее знаменитых и активных школ физиков-теоретиков.

**) Я. Б. Зельдович (1914—1987) — талантливый и необычайно продуктивный физик-теоретик. Ему принадлежат выдающиеся достижения в физике горения, в физике элементарных частиц, астрофизике и космологии. Вместе с А. Д. Сахаровым и Ю. Б. Харитоном принимал участие в создании советского атомного оружия. Академик. Трижды Герой Социалистического Труда.

А теперь вернемся к Миру. Пожалуй, давно физики убедились, что все из чего-то состоит. Но из чего? Существует ли предел разложимости? Когда я учился в университете, все были уверены (и нас этому учили), что все построено из электронов, протонов и нейтронов, а для этих «кирпичей» мироздания создали специальный термин — элементарные частицы. Потом «элементарные» частицы посыпались, как из рога изобилия. Что ни год, то новая частица. Их классифицировали, распределяли по семействам, устанавливали разнообразные соотношения и... поняли, что все «элементарные» частицы недостаточно элементарны. «Появились» — теперь уже только в работах физиков-теоретиков — новые претенденты на роль «кирпичей» мироздания — кварки, удивительное создание человеческого ума, частицы с зарядом $^{1}/_{3}$ и $^{2}/_{3}$ от электронного заряда, частицы, которых никто не видел вне бывших элементарных частиц, но в реальности существования которых, пожалуй, никто не сомневается...

В контексте того, о чем я пишу, для меня важно следующее: кварки — порождение человеческого ума, необходимые для построения стройной, непротиворечивой и красивой картины Мира*).

Остановимся на пути углубления внутрь мельчайших частиц вещества и задумаемся над тем, как из них строится весь окружающий нас Мир и мы сами, конечно.

Одно небезынтересное наблюдение. Углубление в структуру «элементарных» частиц не заставило нас пересмотреть свои взгляды на строение кристаллов, не изменило наших представлений о природе магнетизма или сверхпроводимости. В физике существует своеобразная иерархичность. Пытаясь понять свойства макроскопических объектов, нет необходимости добираться «до самой сути». Следует вовремя остановиться. Например, выясняя природу электропроводности и теплопроводности металлов, не следует задумываться о строении ядер тех атомов, из которых металл построен. Иерархичность, конечно, очень помогает и, в частности, обеспечивает консервативность (сохранность) добытых наукой результатов. Действительно, если бы не иерархичность, то любое продвижение вперед требовало бы коренной перестройки всего здания физики. По сути это означало бы невозможность движения вперед в познании свойств Природы**).

Итак, вернемся к построению Мира (тел нашего Мира) из мельчайших частиц вещества. Ну, это уж точно конструктор! Огромный, сложный, но все же конструктор.— Такое мнение часто приходится слышать. К сожалению, не только от людей, далеких от физики, но и от физиков. Особенно часто, если эти физики занимаются физикой элементарных частиц. И все же с этим суждением я в корне не согласен.

---

*) Боюсь, в этих заметках не удастся сколько-нибудь подробно обсудить важную для нашего рассказа тему: «Эстетика и наука». Хочется только отметить два обстоятельства. Первое. В оценках научной красоты ученые более едины, чем в оценке бытовой красоты. И второе. По какой-то таинственной причине красивый результат редко бывает неправильным. Если бы я был верующим, то подумал бы, что эстетические критерии у Господа Бога и у ученых совпадают. Или даже так: Господь снабдил ученых эстетическими критериями, чтобы им легче было ориентироваться среди научных результатов. Наверное, чтобы последнюю фразу произнести искренне, надо быть глубоко верующим человеком.

**) Не стоит ли об этом задуматься творцам перестройки нашего общества? Как было бы хорошо, если бы в результате перестройки возникло общество, жизнедеятельность структур которого не зависит или хотя бы мало зависит от новаций, происходящих в политических, идеологических и других сферах. Даже помечтать об этом и то приятно!

Не согласен потому, что для достижения понимания строения и устройства Мира вещей и тел нельзя сформулировать правила, пригодные для всех случаев жизни. Процесс построения, конечно, творческий процесс. Мы уже говорили об этом. Но дело не только в том, что приходится, преодолевая трудности, использовать все свои интеллектуальные способности. Главным образом дело в том, что приходится создавать, творить те сущности, из которых, собственно говоря, и строится Мир со всем богатством его свойств... Боюсь, читатель подумает, что ему морочат голову. «Ведь речь идет о строении Мира из электронов, протонов и нейтронов?» — спросит он. Зачем же создавать еще какие-то «сущности»? Затем, что иначе ничего нельзя понять. Самый простой пример. Исследуя свойства твердых тел, мы обнаруживаем, что твердые тела очень похожи на... газы. «Ерунда какая-то»,— скажет даже несколько обиженно читатель. «Ведь газ — совокупность почти невзаимодействующих частиц, а твердое тело состоит из сильно взаимодействующих частиц. Чтобы разделить твердое тело на части, надо потратить немало энергии... А вы говорите твердое тело похоже на газ *частиц*»... «Но я и не говорил на газ частиц»,— возразит автор. И действительно, твердое тело ведет себя как газ не частиц, а *квазичастиц*[*]) — фононов, специально введенных сущностей, позволяющих понять свойства макроскопических тел. Конечно, можно долго спорить, *есть* ли фононы или они *введены*. Конечно, они *есть*, но не как структурные единицы вещества. Не из них *состоит* твердое тело, а из атомов или молекул, а бывает, из ионов разного знака. Но чтобы понять, как движутся атомные частицы, пришлось *ввести фононы*, т. е. выяснить (увидеть, почувствовать, угадать), что движутся атомные частицы так, будто тело состоит не из атомов (молекул, ионов), а — повторим — из квазичастиц — фононов. А введя фононы, получить бесконечное число следствий, подтверждающих факт существования фононов. Твердое тело проводит тепло так, как проводит тепло газ фононов. И поглощает звук так, как поглощает газ фононов. И так далее и тому подобное...

Здесь не место перечислениям и подробным описаниям. Хочется подчеркнуть: фононы — творение ума, они «созданы» для понимания, они — результат духовной деятельности человека, его творчества. Конечно, можно сказать и иначе: физики увидели и расшифровали, как движутся атомные частицы в твердом теле. Но что уж заведомо духовная деятельность, это создание новых слов, а значит, и новых понятий.

Для описания движения атомных частиц пришлось придумать новые слова: квазичастицы, фононы, магноны...— слова, которых не было в доквантовой физике твердого тела.

Объективность существования материи часто «доказывают» фактом существования Природы — в ее очень похожей на сегодняшнюю форме — до появления на Земле человека. Мне, должен признаться, подобное утверждение кажется убедительным. Или, точнее, не столько логически убедительным, сколько соответствующим моему восприятию Природы эволюционирующей и в результате эволюции сотворившей думающее существо — человека, способного постичь (постигать) устройство Природы.

Процесс постижения оказался необычайно трудным, необычайно продуктивным и (это — главное, что я хочу сказать) необычайно тесно связанным с самим процессом мысли. В Природе, в свойствах материи человек открывает то, что (казалось бы!) есть только продукт, результат деятельности человеческого мозга, прежде всего, логику. Математика есть материализованная логика. Почему Природа подчиняется математическим законам? Почему она описывается доступными человеческому уму законами?.. Опять хочется (в поисках уютного ответа) обратиться к религиозному мировоззрению и, как бы обратив всю постановку вопроса, сказать: «Природа создана такой, чтобы быть постижимой человеческим умом...»

---

[*]) Квази... (от лат. quasi — как будто, якобы) — приставка, соответствующая по значению словам «мнимый», «не настоящий», напр.: квазинаучный, квазиученый. (Словарь иностранных слов. М.: Русский язык, 1980.) В физике слово «квазичастица» не несет на себе уничижительного смысла.

Я не знаю ответов на эти вопросы. И, наверное, не умею слишком строго их формулировать. Я не философ. В разное время, в разные периоды жизни к этим вопросам у меня есть и было разное отношение. Не всегда они меня волновали. Занятый решением конкретных задач, я просто не замечал, что подобные вопросы существуют. Встретившись с ними в статьях классиков (Эйнштейна, Бора, Шредингера, позднее Гейзенберга), я относился к ним с почтением, не допускающим «вмешательства». Но постепенно, не переставая заниматься вполне конкретной, вычислительной деятельностью физика-теоретика, обнаружил, что меня волнуют общие проблемы, что интересны не только вполне определенные результаты теории или эксперимента, но и то, какое место занимают эти результаты в том, что принято называть научной картиной Мира. И, более того, возникла потребность обдумать, в каком соотношении с Миром находится научная картина Мира. Не пытаясь переквалифицироваться в профессионального философа, я написал несколько статей и одну небольшую брошюру. Но ни разу я не высказался столь определенно, как здесь; не высказал своей уверенности, что Наука — одна из сторон духовной жизни человечества. Что невозможно ее свести к полезной для развития производительных сил деятельности человека. И даже к удовлетворению любознательности как жизненно важной потребности людей. Что нет ни одного сколько-нибудь важного научного результата, в который не была бы вложена частица души человеческой. И хочу повторить еще раз. Частица души вложена не только в процесс добывания истины, но и в саму истину. Наука есть в каком-то смысле результат очеловечения Природы. Слова, понятия, соотношения — это то, чем наделил Природу человек. Если художник показал людям внешнюю красоту Мира, то ученый вскрыл существование внутренней интеллектуальной красоты, прежде всего проявляющейся в познаваемости законов Природы, в удивительном многообразии проявлений сравнительно просто формулируемых основных законов, управляющих движением материи.

Захотелось мне поделиться этими мыслями с молодыми людьми, так как заметил утрату романтического отношения к Науке и, особенно, к физике.

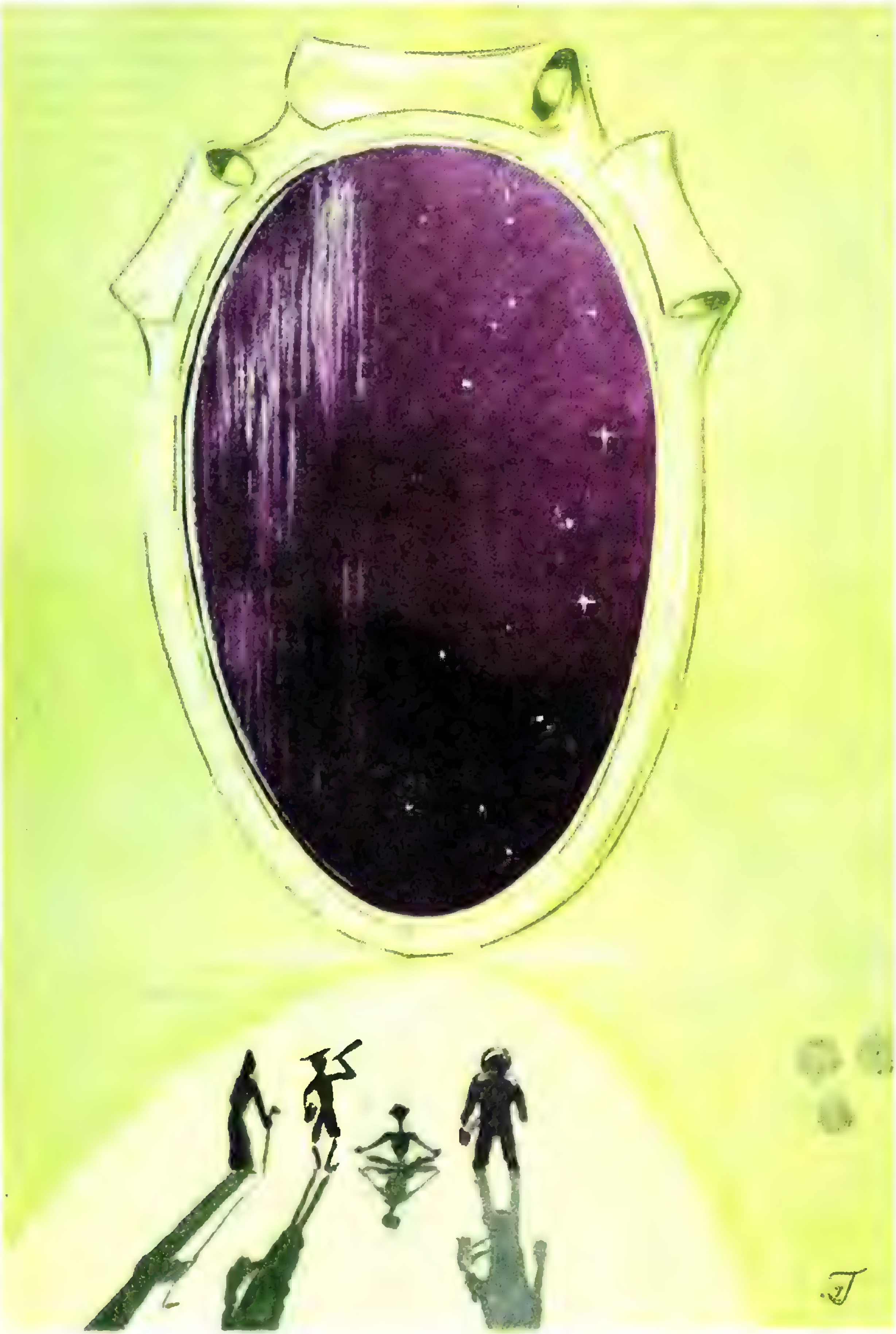
Вниманию наших читателей!

В последнее время книжные прилавки заполонили многочисленные учебные пособия, сборники вступительных задач, шпаргалки, подготовленные «на скорую руку», часто некачественно, небрежно, но при этом очень дорогие.

На этом фоне резко выделяется — как по содержанию, так и по оформлению — *«КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК ПО ФИЗИКЕ»*, выпущенный объединением «Перспектива». Авторы справочника *А. К. Цатурян* и *А. И. Черноуцан* — популяризаторы и педагоги, имеющие большой опыт работы со школьниками и абитуриентами.

Книга издана карманным форматом (10×13 см), в твердой обложке, с иллюстрациями. При небольшом объеме она охватывает практически весь курс элементарной физики. Справочник адресован широкому кругу читателей — как школьникам старших классов, так и учителям физики, как абитуриентам, так и репетиторам. Он особенно удобен для быстрого повторения основ физики перед школьными или вступительными экзаменами. Думается, он может пригодиться и студенту-первокурснику.

Эта книга — первая из серии «Краткие справочники» (редактор серии А. Д. Полянин). На очереди — справочник по математике.


T

СВЕРХЗАДАЧА КОСМИЧЕСКОГО ПОЛЕТА

Доктор технических наук
А. СТАСЕНКО

> *Люди, которые... вышли из бесконечной вселенной и появились в данное время и в данном месте в качестве членов нашего общества,— все братья и сестры, имеющие одно и то же начало — Бесконечность и одних и тех же родителей — Природу. С этими братьями и сестрами мы разделим и нашу будущую судьбу, поскольку все мы вернемся к Природе и бесконечной вселенной — нашим родителям и нашему началу.*
>
> Микио Куши. Макробиотика

> *...небесные миры — это будущие обители отцов, ибо небесные пространства могут быть доступны только для воскрешенных и воскрешающих; исследование небесных пространств есть приготовление этих обителей.*
>
> Н. Ф. Федоров. Философия общего дела

Итак, еще и сверхзадача? Мало задач, придуманных для беззащитных школьников? Например, вот таких...

Представим себе, что в безграничных просторах Вселенной космонавт-строитель проглотил гайку и его нужно как можно быстрее доставить с космического корабля на космическую базу, летящую параллельно с той же скоростью на расстоянии 100 км. А максимальная перегрузка, которую может такой космонавт выдержать, равна четырем ускорениям земного тяготения. У завхоза этого корабля возникает естественный для него вопрос: каким минимальным количеством топлива нужно заправить ракету, чтобы пострадавший поскорее оказался в руках врачей? Скорость истечения газов из сопла двигателя ракеты постоянна и равна 2 км/с.

И тут в голове завхоза пронеслись привычные мысли. Пусть в некоторый момент времени ракета имеет скорость v и массу m. Разобьем ракету условно на две части (рис. 1): ту, которая через малый промежуток времени Δt «собирается» отлететь назад (отработанное топливо),— обозначим ее массу через ΔM — и тот «остаток» массы $m-\Delta M$, который вместе с космонавтом полетит дальше, но уже с другой скоростью, равной $v+\Delta v$. Скорость отлетевшей части относительно остатка обозначим через u_0, тогда ее скорость относительно места старта будет равна $(v+\Delta v)-u_0$. Так как разделение этих двух частей произошло под действием внутренних сил, суммарный импульс ракеты (в системе координат, жестко связанной с кораблем и базой, по-прежнему летящими параллельно с постоянной скоростью) не изменился:

$$(m-\Delta M)(v+\Delta v)+\Delta M(v+\Delta v-u_0)=mv.$$

После алгебраических преобразований (завхоз научился их делать в уме еще на Земле) этот закон сохранения импульса примет вид

$$m\Delta v=u_0\Delta M. \qquad (1)$$

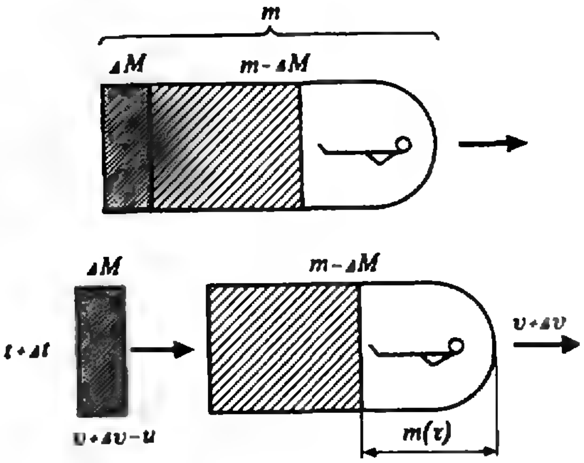


Рис. 1 (здесь $u\equiv u_0$).

Учитывая, что отброшенная масса ΔM в точности равна убыли массы ракеты $\Delta M = -\Delta m$, уравнение (1) можно представить в виде

$$\frac{\Delta v}{u_0} = -\frac{\Delta m}{m}. \qquad (2)$$

Позвольте,— скажет читатель, — что же, этот мыслящий завхоз плохо учился в школе? Ведь из (2) после элементарного интегрирования следует известная формула Циолковского

$$\frac{v}{u_0} = \ln\frac{m_0}{m} \qquad (3)$$

(в которой учтено, что в начальный момент времени $t=0$ масса ракеты равна m_0).

Несомненно, формулу (3) он знает — иначе не сдал бы экзамен на космического завхоза. Но ведь ему ясно сказано: доставить как можно быстрее, но так, чтобы ускорение не превысило $4g$; значит, надо все время выдерживать ускорение постоянным, $a = a_{\max} = 4g$. Подставив в уравнение (3) закон изменения скорости $v = 4gt$, завхоз получил закон изменения со временем массы корабля:

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{4g}{u_0}t}. \qquad (4)$$

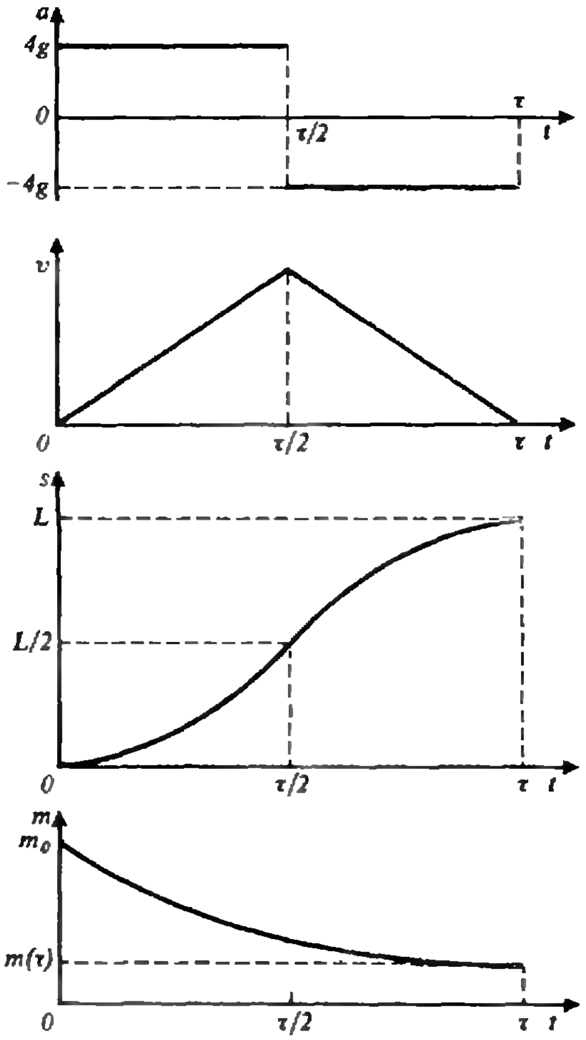


Рис. 2.

Напомним, что традиционно рассматривается условие постоянного секундного расхода массы $\mu = \text{const}$ (кг/с), так что $m(t) = m_0 - \mu t$. Но это приводит к непрерывно растущему ускорению, что может нарушить требование нашей задачи. В данном случае расход массы должен убывать по закону

$$\mu = -m'(t) = \frac{4gm_0}{u_0} e^{-\frac{4g}{u_0}t},$$

который надо задать бортовому компьютеру ракеты. Так что не зря все эти мысли пронеслись в голове космического завхоза. Теперь осталось додумать совсем немного. Ведь причалить к базе ракета должна тоже с нулевой скоростью — иначе любая малая, но конечная, скорость при ударе даст бесконечно большое ускорение, что запрещено. А движение происходит с постоянным по модулю ускорением, т. е. равнопеременно. Значит, можно представить расписание движения ракеты в виде графиков зависимости от времени (рис. 2). Там показано, что в середине пути, в момент времени $t = \tau/2$ (τ — полное время полета), нужно изменить знак силы тяги ракеты (реверс тяги). Осталось рассчитать. Из хорошо известных законов равноускоренного движения получим

$$\frac{L}{2} = \frac{1}{2}a\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 = \frac{g\tau^2}{2},$$

откуда

$$\tau = \sqrt{\frac{L}{g}},$$

и конечная масса ракеты —

$$\frac{m(\tau)}{m_0}=e^{-\frac{4g}{u_0}\sqrt{\frac{L}{g}}}=e^{-\frac{4\cdot 10}{2\cdot 10^3}\sqrt{\frac{10^5}{10}}}=e^{-2}.$$

Таким образом, начальная доля топлива, которым нужно заправить ракету, равна $\frac{m_0-m(\tau)}{m_0}=\frac{e^2-1}{e^2}$ (предполагается, что в момент причаливания к базе все топливо израсходовано до последнего грамма).

А вот другая задача: космонавт от неожиданности проглотил вовсе не гайку, а бутерброд (что невредно), с удивлением обнаружив нежеланный корабль, приближающийся с постоянной скоростью $v_0=2$ км/с. При каком расстоянии между ними он должен запустить ракету, чтобы «пробойная сила» была максимальна (будем понимать под этим набором слов максимальную кинетическую энергию). Известно еще, что приборы самонаведения ракеты выдерживают ускорение не более $100\,g$, а скорость истечения газов та же, что и в предыдущей задаче: $u_0=2$ км/с.

Тут уж точно ясно, что ракете нужно лететь с максимально возможным ускорением $a=a_{\max}=100\,g$, причем незачем переключать силу тяги на противоположную, так что относительная скорость ракеты и цели изменяется со временем по закону $v=v_0+at$, а расстояние — $s=s_0-v_0t-\frac{at^2}{2}$ (рис. 3, на котором изображены «мировые линии» $s(t)$ нежеланного корабля и нашей ракеты).

Кинетическая энергия при этом изменяется согласно выражению (здесь использована формула (4))

$$K=\frac{mv^2}{2}=\frac{m_0}{2}e^{-\frac{at}{u_0}}(v_0+at)^2.$$

Видно, что это произведение падающей экспоненты на растущую параболу может обладать максимумом. Этот максимум можно найти, нарисовав зависимость кинетической энергии от времени (рис. 3), а можно взять производную (кто умеет, да сделает) и приравнять ее нулю: $dK/dt=0$, откуда

$$-\frac{(v_0+at)^2}{u_0}+2(v_0+at)=0.$$

Тут два корня. Один получается при $v_0+at=0$, $t_1=-\frac{v_0}{a}<0$ (т. к. корабли сближаются и $v_0>0$, что учтено выше) и, относясь к прошлому времени, не представляет интереса. Второй корень равен $t_2=\tau=\frac{2u_0-v_0}{a}$ и при условиях нашей задачи дает $\tau=\frac{2\cdot 2-2}{10^3}10^3=2$ с (а мог бы быть и отрицательным, если $v_0>2u_0$, т. е. если корабли сближаются так быстро, что ракета просто не успеет развить скорость, достаточную для достижения максимального значения кинетической энергии $K_{\max}=2m_0u_0^2e^{v_0/u_0}/e^2$). Наконец, получим искомое расстояние s_0, подставив τ в выражение для $s(t)$:

$$s(\tau)=0\Rightarrow s_0=\frac{4u_0^2-v_0^2}{2a}=6\text{ км}.$$

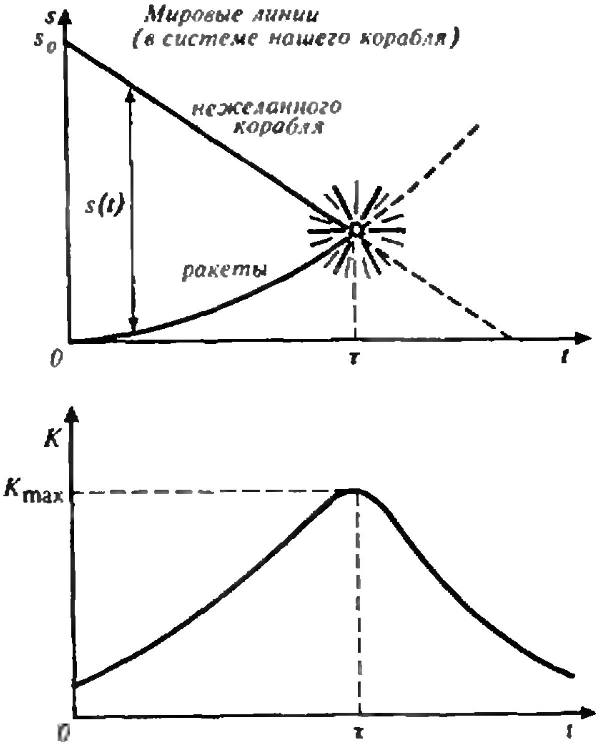


Рис. 3.

Итак, мы придумали и решили еще две задачи — и обе вокруг формулы (3), но сколь различны они по целевой установке: в одной нужно помочь, в другой — навредить, и все побыстрее! Себе — помочь, другому — навредить. Этакое всевременнóе и всемирно-историческое топтание Человечества вокруг научных достижений ради тривиальной цели. «Приверженные к старым навыкам, мы по-прежнему видим в науке лишь новый способ более легко получать те же самые старые вещи — землю и хлеб. Мы запрягаем Пегаса в плуг.» (Тейяр де Шарден. Феномен человека. М.: Наука, 1987, с. 219). Тут, конечно, Пегас — поэзия, плуг — проза.

Но чтó же думал сам первооткрыватель знаменитой формулы (3)? Действительно, зачем провинциальный школьный учитель так рвался и звал в космос от зеленых лесов и лужаек, пренебрегая бытом и тратя бóльшую часть заработка на эксперименты, на частные издания своих трудов, почти всеми тогда отвергаемых? Тут нельзя все списать на маниакальное стремление к славе земной — у него все слишком верно, результативно, плодотворно, следовательно, на психическое расстройство не похоже. Тут что-то более глубокое.

В своих дневниках он сетовал, что во мнении людей выглядит «каким-то однобоким техником, а не мыслителем»... «Ракета для меня — только способ, только метод проникновения в космос.» Зачем же?

И постепенно возникает подозрение, что любой великий мыслитель, может быть, ставит перед собою некоторую Сверхзадачу, далеко превосходящую обыденные понятия, и обнаружение таковой — важнейший элемент в истории науки и полезнейший — в педагогике.

В истории русской космонавтики выстраивается определенная цепочка ярких личностей и событий (может быть, только часть, только обрывок цепочки, но звенья этого кусочка логично сцеплены). Начнем с Н. Ф. Федорова (1828—1903), внебрачного сына князя Гагарина, библиотекаря Румянцевского музея, скромного, незаметного философа в «старом, потертом, но опрятном платье», который при жизни почти не публиковал своих размышлений. А размышлял он ни много ни мало как о физическом, телесном бессмертии, причем не только тех будущих поколений, при жизни которых наука достигнет нужного уровня (это было бы понятно, но эгоистично с их стороны), но и всех прошлых, короче — о воскрешении отцов. В этом он видел главную цель науки, требовал даже университеты строить на кладбищах, чтобы юноши размышляли не о чепухе, а о победе над смертью. По современной терминологии, согласно которой отрасли науки делятся на фундаментальные и прикладные, он был, можно сказать, сторонником практического, прикладного Христианства.

А с какими мыслями он побывал на Памире? Не потому ли, что там и небо ближе, Солнце и Луна совсем белые, а звезды цветные и не мигающие...

«...Земля, тьмы поколений поглотившая, небесною сыновьнею любовью и знанием движимая и управляемая, станет возвращать ею поглощенных и населять ими небесные, ныне бездушные... звездные миры... Этот день будет дивный, чудный, но не чудесный, *ибо воскрешение будет делом не чуда, а знания и общего труда*» (Н. Ф. Федоров. Философия общего дела. М.: Мысль, 1982, с. 528, 529).

Следующее звено. В течение трех лет (1873—1876) этот русский философ руководил самообразованием К. Э. Циолковского. Идеи Федорова были восприняты его способным учеником как стимул к посильному деянию, но не по воскрешению отцов (этого никто тогда не мог, как, впрочем, и сейчас), а к подготовке уже следующего этапа — куда девать воскрешенные поколения отцов плюс все прибывающие поколения сыновей. Конечно же, вверх, к невесомости, в море света, океан энергии — в космос!

Скорее всего, именно об этом и размышлял будущий «отец русской космонавтики», глядя на звезды, выводя знаменитую формулу (3) и пытаясь мысленно проникнуть в тонкости космического быта *там* — так что при чтении его работ, созданных на основе законов физики, открытых на Земле, возникает ощущение, что он пришел уже *оттуда*, что он сам все это уже прочувствовал.

Конечно, это настойчивое требование философии Н. Ф. Федорова победы науки над смертью (не только грядущей, но и *свершившейся*) относится к классу идей, величие или нелепость которых трудно оценить современникам (по его признанию, точная дата возникновения этой основной идеи — 1851 год). И сейчас материалистически-атеистическое мышление подсказывает, что, скорее всего, это утопия. Но в год тридцатипятилетия первого искусственного спутника Земли (1957) разумно вспомнить о «духовной пружине», стимулировавшей творчество великих теоретиков Космоса.

Следующий этап — связь Циолковского с С. П. Королевым — важнейшее практическое звено в этой цепочке. Тут уже почти все на нашей памяти, так что и говорить долго не надо. Результат — первый искусственный спутник Земли. И вскоре вслед за этим Гагарин (1961): «Ну, поехали!» (Не случайно и совпадение отцовской фамилии философа и первого космонавта?)

Но, может быть, Н. Ф. Федоров и не первый, кто теоретически занимался практическим Христианством. Ведь есть и нетленные мощи святых и, возможно, еще многое, чего не знает автор этих строк. Но случайно ли обрывок цепочки, тянущейся в Вечность, причем с практической доминантой, возник именно на русской земле?

«Русский народ, подобно народу еврейскому, — народ мессианский. В лучшей своей части он ищет Царства Божьего, ищет правды и уповает, что не только день Божьего Суда, но и день торжествующей Божьей правды наступит после катастроф, испытаний и страданий» (Н. А. Бердяев. Самопознание. М.: Книга, 1991, с. 165).

Итак, вместо космонавтики государственной, военно-оборонительной — Космонавтика всемирная, общечеловеческая?...

Пятая международная, космическая...

В Москве в августе этого года прошла очередная международная конференция юных исследователей космоса. Конференция проводилась в рамках программы Международного года космоса, объявленного ООН.

Среди участников — ребята из США и Японии, Великобритании и Южной Кореи, Болгарии и стран СНГ. На конференцию приехал и «патриарх» движения — президент Международного совета юных астронавтов Джек Андерсон.

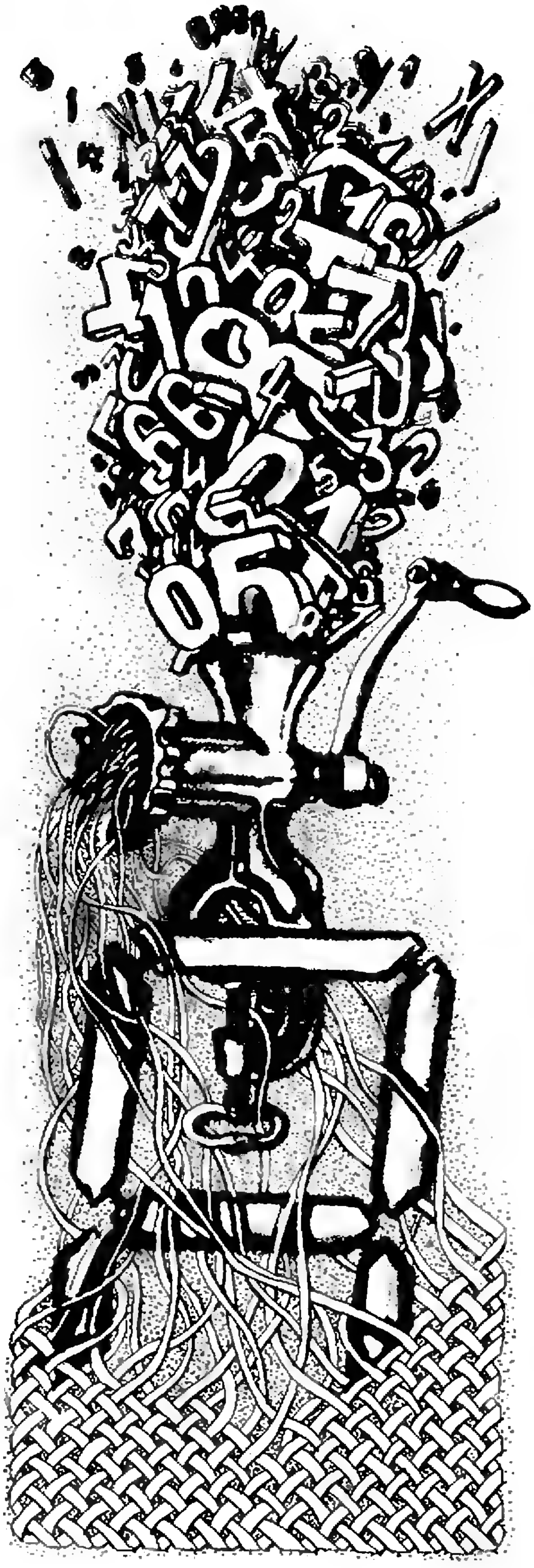
Конференция — не традиционный конкурс научно-технического творчества молодежи и не семинар по обмену опытом. Это яркий праздник, своеобразный космический фестиваль. И не случайно ее участников приветствовал Президент России Б. Ельцин.

За время работы конференции ребята побывали на многих космических объектах. А вечером начинали свою работу мастерские. Можно было собрать летающую модель ракеты, нарисовать фантастический пейзаж, сшить загадочного инопланетянина и даже приготовить космический обед! Что ж, не «железом» единым жива космонавтика...

В эти удивительные дни летало не только все, что обычно летает, но и то, что летать не должно вовсе, в том числе и садово-огородный инвентарь.

Ребята многому научились, но, может, самое главное — и они, и взрослые научились не принимать все всерьез. Хотя... учитывая, что в США, скажем, аэрокосмическое образование курирует сам президент страны — занятие это не такое уж несерьезное.

Д. Пайсон



Если сравнить школьные программы, по которым учитесь вы, с программами, например, Великобритании или США, то первое, что бросается в глаза — наличие в их программах курсов теории вероятностей и статистики. Введение этих курсов явилось требованием практики, жизненной потребностью, поскольку экономическая грамотность невозможна без знания основ статистики. Мы уверены, что через несколько лет в программах средних школ у нас будет как курс начальной экономики, так и курс статистики. А сейчас мы хотим предложить вам отрывок из книги Питера Спрента «Как обращаться с цифрами или статистика в действии», вышедшей в Англии в 1977 году и переведенной на русский язык белорусским издательством «Вышэйшая школа» в 1983 году.

ЗАЧЕМ НУЖНА СТАТИСТИКА?

П. СПРЕНТ

Начало

В январе 1976 года торговый дефицит Великобритании составил 275 миллионов фунтов стерлингов. В день Святого Патрика того же года 1 фунт стерлингов стоил 2,42 американского доллара. А через несколько дней экспериментатор нашел, что привес шести поросят за неделю меняется от 1218 до 1314 граммов. Эти цифры, или статистические данные, для кого-то могут представить интерес и уж точно имеют определенный смысл.

Против моего окна висит надпись, гласящая: «Не рискуйте! Пользуйтесь пешеходным переходом, он впятеро безопаснее!» Конечно, эта надпись содержит некоторую информацию: она сообщает, что для перехода улицы разумнее пользоваться пешеходным переходом. В это можно поверить, но что означают слова «впятеро безопаснее»? Вряд ли это значит, что моя безопасность возросла бы в пять раз, если бы я весь день прогуливался взад и вперед по переходу, а не писал книгу. Скорее уж это означает, что в каком-то смысле гораздо безопаснее пользоваться переходом, чем пересекать улицу в другом месте, но даже это утверждение нуждается в оговорках. Пешеходные переходы обычно расположены в оживленных местах. Если можно пересечь дорогу там, где движение транспорта невелико, то кажется невероятным, что более безопасно пройти несколько сот метров до оживленного перекрестка только затем, чтобы воспользоваться переходом. Однако пользоваться удобным переходом безопаснее, чем пробираться через интенсивный поток машин. Откуда все-таки взялось это «впятеро»? Разве сравнивал кто-нибудь число несчастных случаев с людьми, которые переходят улицу, скажем, за 200 метров до него? Об этом, пожалуй, нам ничего не известно, но об этом и беспокоиться не нужно, поскольку надпись висит как раз над переходом. Так что «впятеро» в конечном счете означает не очень-то много.

Когда же данные несут в себе бóльшую нагрузку, мы не можем столь вольно обращаться с их численным значением. Неутешительные цифры ежемесячного торгового баланса (вроде январских 1975 года) могут привести к многомиллионному падению цен на акции, тогда как резкое повышение индекса стоимости жизни может вызвать требования увеличения заработной платы с далеко идущими экономическими последствиями. Вопрос состоит в том, как извлечь максимально возможную информацию, которая содержится в числовых данных.

В обыденной жизни слово «статистика» имеет два значения. Во-первых, оно обозначает сами числа или данные; во-вторых — науку или искусство извлечения полезной информации из наборов чисел.

Мы слово «статистика» будем употреблять в обоих смыслах, но чаще во втором. Наша цель — выяснить, как нужно обращаться с данными, чтобы получить выводы с широкой областью применения.

Мы уже упоминали о еженедельном привесе поросят, изменяющемся от 1218 до 1314 граммов. Эти данные отражают общее явление: даже если поросята попадают к нам одинаковыми и содержатся в одинаковых условиях, все они не будут иметь одинаковый недельный привес. Более того, мы можем быть совершенно уверенными в том, что другая группа поросят за ту же неделю или эта же группа за другую неделю будет иметь другой привес. Проблема заключается в том, чтобы отделить такие естественные, неконтролируемые различия между особями (в данном случае — поросятами) от различий, которые возникают из-за управляемых изменений внешних условий. Например, мы можем содержать одну группу из шести поросят на одном рационе, а другую группу из шести поросят — на другом при прочих равных условиях. Хотелось бы выяснить, влияет ли рацион на привес поросят. Если недельный привес при одном рационе колеблется от 1218 до 1314 граммов, а при другом — от 893 до 947 граммов, то ясно, какой рацион лучше. Но если привес при втором рационе составляет от 1198 до 1283 граммов, то для выяснения, какой из рационов выбрать, необходима статистика.

Что прячется за цифрами

Работа статистика представляет собой удивительную смесь искусства и науки: когда разрабатываются математические модели, отражающие наблюдаемые явления,— это искусство, а когда делаются умозаключения в рамках строгой математической логики — это наука.

Математика, лежащая в основе статистики, дает ей огромную силу: одна математическая модель может одинаково хорошо описывать явления, происходящие в самых разных областях человеческой деятельности, например в политике, промышленности, медицине и сельском хозяйстве.

Нередко данные являются результатом измерений. Примером служит привес поросят, содержащихся на разных рационах.

Дело усложняется природным различием поросят, даже если в начале эксперимента они были одинаковыми и содержались в равных условиях. Статистике приходится повсеместно иметь дело с такими естественными вариациями, они представляют самую суть предмета, первопричину статистики и маскируются под множеством имен. Общее название для них — *ошибочное отклонение или ошибки*, но оно не совсем удобно, во всяком случае в биологии. Из того, что Джо выше Билла, нельзя заключить, что у кого-то из них рост ошибочный. Более современное название для неконтролируемых естественных отклонений — *шум* — термин, пришедший в статистику из теории связи и известный там под названием фонового шума.

Приводя пример с откормом поросят первым, мы следуем историческому ходу событий, так как часто статистические методы берут начало в сельскохозяйственных экспериментах. Хотя статистика и пользуется многими давно установленными математическими понятиями, в частности понятием вероятности, она является детищем XX века. Основоположник современных методов планирования эксперимента и его анализа Р. А. Фишер (1890—1962) выполнил фундаментальные работы, обрабатывая данные сельскохозяйственных экспериментов на Ротэмстедской экспериментальной станции в Хартфордшире. Многие из разработанных тогда методов применяются теперь с небольшими модификациями в таких разных областях человеческой деятельности, как промышленность, медицина и общественные науки.

Познакомимся с ошибками поближе

Ошибочные отклонения (или шум), которые в примере с поросятами выражались в разнице весов, имеют непредсказуемую природу. При совершенно одинаковом питании одни поросята прибавляют в весе чуть лучше, чем в среднем, другие — чуть хуже. Иногда возможно уменьшить такие нежелательные отклонения, выбирая поросят по возможности одинаковыми и помещая их в равные условия. Предосторожности такого рода могут быть дорогостоящими и все же не устранят шум полностью, так как никакими предосторожностями нельзя избавиться от различий, заложенных в наследственности.

Шум означает, что другая группа поросят привела бы наш эксперимент к другим результатам. Обусловленная шумом ошибка называется *случайной выборочной ошибкой* или проще — *случайной* либо *выборочной ошибкой*. Слово «случайная» отражает ее непредсказуемость, а «выборочная» означает, что разные выборки (в нашем примере — поросята) привели бы к различным результатам.

Эксперимент ставится, чтобы решить, лучше ли какой-то рацион *в среднем*, и если да, то насколько. Точные цифры привеса мы получим лишь для конкретной выборки поросят, но статистика дает нам инструмент, пользуясь которым можно установить нечто более важное и интересное, а именно: результаты применения любого из рационов ко всей *популяции* (совокупности) поросят будут такими же, как и в эксперименте.

В данном случае нас интересуют *систематические ошибки*, обусловленные конкретным рационом, но присутствие шума затрудняет определение их истинного значения.

Работа статистика заключается не только в том, чтобы отделить систематические ошибки от шума или случайных отклонений. Существует много систем, поведение которых на коротком отрезке времени непредсказуемо, т. е. определяется в основном случайными факторами, тогда как на большом отрезке времени становится регулярным и предсказуемым. Поведение системы, в котором главную роль играют случайные факторы, называется *стохастическим процессом;* это несколько высокопарное название дается всему, что развивается случайным образом.

Городская почта — неплохая модель для изучения таких явлений, как очереди. Обычно некоторое количество расчетных окон или обслуживающих точек выполняет ряд операций по требованию клиентов: у крайнего окна пожилой даме нужна всего одна марка для почтовой открытки, у соседнего — курьер из учреждения собирается купить несколько дорогостоящих почтовых и страховых марок разного достоинства. Кроме того, в очереди стоят люди, желающие сделать почтовые переводы, получить пенсию, заплатить за телефон или справиться о почтовых тарифах и т. д.

Работники почты на основании опыта могут с достаточной точностью предсказать, какое число людей им предстоит обслужить в конкретный день. Они также хорошо представляют себе, сколько времени в среднем необходимо для обслуживания одного клиента, и в общих словах могут рассказать, как оно зависит от клиента. Но бо́льшая неопределенность возникает, если речь идет о времени появления следующего посетителя и времени, необходимом для его обслуживания.

Система усложняется также из-за того, что невозможно предсказать поведение посетителя: встанет ли он (или она) в самую короткую очередь, займет ли очередь, ближайшую ко входу, либо очередь, которую обслуживает хорошенькая блондинка; будет ли он выбирать очередь, пытаясь «угадать» время, необходимое для ее обслуживания; если в одной очереди он видит массу людей с бланками на оформление документов, то, вероятно, не встанет в нее, так как знает, что это — дело долгое; он, по-видимому, не встанет и в очередь, где стоят несколько человек, каждый с кипой бумажек в руках. Сообразительный посетитель, который может быстро оценить, сколько времени уйдет на обслуживание каждой очереди, встанет в ту очередь, не обязательно самую маленькую, которая, по его мнению, продвигается быстрее. Система станет еще сложнее, если люди, считая, что соседняя очередь продвигается быстрее, переходят в нее.

Регулируя систему очередей, стремятся к устойчивости ее поведения в том смысле, что длинная очередь, равно как и долгий «простой» оператора, должны быть редкими. Однако даже устойчивую систему можно разрушить незначительным изменением условий. Система с тремя операторами может работать нормально, если клиенты прибывают в среднем по одному человеку в минуту, но если средний интервал между прибытиями снизится до 57 секунд, система превратится в хаос. И если обслуживание не ускорится, очередь будет расти и расти.

В очередях стоят не только люди, но и корабли, прибывающие в порт, и грузовики, которые доставляют либо забирают товары с фабрики или развозят их по магазинам.

Для исследования стохастических процессов, в частности систем с очередями, статистик строит соответствующую теорию. А электронно-вычислительные машины помогают ему *построить* (проиграть) модель и буквально в считанные секунды воспроизвести поведение системы, в которой приходится стоять в очереди, скажем, несколько недель или даже лет. Моделирование помогает исследовать влияние таких изменений, как введение дополнительной точки обслуживания или ускорение обслуживания.

Экономия ресурсов

В наш век, когда мы, как никогда раньше, сознаем необходимость экономии природных ресурсов или денег, мы научились ценить в должной мере сбор данных. Не только в научных экспериментах, но и в промышленности, и торговле сбор и анализ данных бывают единственным средством получения ответов на важные вопросы. Решение технологической проблемы может сохранить компании многие тысячи долларов. Планировать эксперименты нужно так, чтобы получить правильную информацию (часто в весьма сложных ситуациях) как можно скорее.

Например, завод, производящий органические удобрения, может выпускать разное количество продукции, если один или несколько внешних факторов, таких, как чистота реагентов, температура, давление, влажность, время процесса, меняются. Эти факторы взаимосвязаны, и, чтобы найти их наилучшую комбинацию, иногда приходится действовать методом проб и ошибок. Статистик же в состоянии свести к минимуму элемент случайности и быстро получить правильный ответ.

Чтобы показать, как может помочь статистик, допустим, что количество продукции определяется лишь двумя факторами — давлением и температурой. В эксперименте мы измеряем выход продукции при заданных давлении и температуре. Наша цель — найти такое их сочетание, при котором выход продукции будет максимальным.

Чтобы объяснить, как решается эта проблема, уместно воспользоваться аналогией. Положим, мы имеем контурную карту, на которой можно определить высоту любой точки, зная ее широту и долготу. Представим теперь, что температура — это широта, давление — долгота, а выход продукции — высота. Мы ищем, таким образом, на карте самый высокий пик.

Пусть карту нам не показывают, но позволяют выбрать четыре точки, задавая их широту и долготу, а затем дают высоту каждой из четырех точек. Зная эти значения, можно получить некоторое представление о характере местности. Разыскивая пик, мы получим дополнительную информацию, выбирая четыре следующие точки в направлении, которое кажется относительно наших первых точек идущим «в гору». Этот процесс может быть формализован математически, и он известен как метод *самого крутого восхождения**).

Пользуясь этой аналогией, экспериментатор выбирает четыре комбинации температуры и давления (соответствующие широте и долготе) и экспериментально определяет выход продукции для каждой из них. Затем он выбирает другие четыре точки в направлении наибольшего роста и продолжает в том же духе, пока не достигнет пика.

В целом это напоминает способ, пользуясь которым взбираются на гору. Если только на пути нет очевидных препятствий, мы выбираем путь, ведущий прямо вверх. В экспериментальной ситуации имеются два отличия: во-первых, у нас нет непрерывной картины, мы знаем высоты лишь выбранных точек (соответствующих нашим экспериментальным точкам); во-вторых, если мы повторим эксперимент при той же температуре и том же давлении, то, как правило, из-за шума или ошибок выборки не получим тот же выход продукции. Это аналогично правильному считыванию с карты широты и долготы, но совершению малых случайных ошибок в определении высоты.

Если характеристик несколько

Если мы знаем две или более характеристики одного человека, то могут ли эти характеристики помочь нам различить индивидуумов, принадлежащих к двум разным расам? Большинство с первого взгляда может отличить китайца от нигерийца, но менее вероятно отличить танзанийца от нигерийца, если не знать достаточно хорошо эти две страны.

Люди разных национальностей различаются не только качественными характеристиками типа цвета кожи, волос и покроя одежды, но могут также различаться фигурой и ростом, что поддается количественному описанию.

Можно задать вопрос: сколько различных рас представлено в некоей группе индивидуумов? Другой вопрос сформулируем так: имеются данные о некотором числе особей двух или более рас, как по этим данным можно

---

*) В нашей литературе обычно рассматривается спуск в овраг, и метод называется методом скорейшего спуска. (*Прим. пер.*)

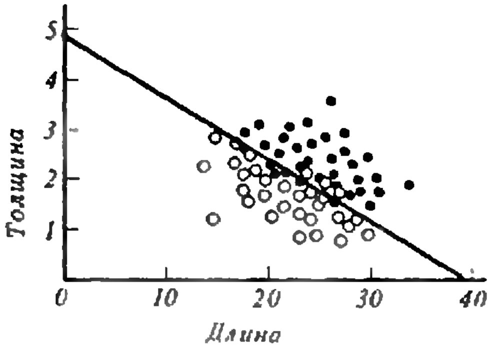


Рис. 1. Длина и толщина бедренной кости человека (●) и обезьяны (○).

выделить расу из другой группы индивидуумов? Задача первого типа известна как задача *классификации*, второго — как задача *распознавания*. Вот простой пример задачи распознавания. У антрополога есть несколько экземпляров бедренной кости, принадлежащих человекообразной обезьяне, и несколько экземпляров, принадлежащих первобытному человеку. Он измеряет длину и толщину каждой кости и наносит значения их на диаграмму, как показано на рисунке 1.

Из рисунка видно, что длина и толщина костей, принадлежащих обоим видам, перекрываются между собой. Однако если мы посмотрим на кружки, соответствующие человеку, и те, что относятся к обезьяне, то увидим, что они распадаются на две группы, а перекрытие их невелико. Прямая, соединяющая на рисунке точку 40 на оси длин и точку 5 на оси толщин, дает разумную границу между двумя группами. За некоторыми исключениями, точки, относящиеся к человеку, лежат выше этой границы, а относящиеся к обезьяне,— ниже.

Очевидно, что для любой точки, лежащей точно на прямой, выражение «длина+8×толщину» равно 40. Для точек выше прямой это выражение больше 40, а для точек ниже прямой оно меньше 40.

Поскольку точки, соответствующие человеку, лежат в основном над прямой, а обезьяне — под ней, можно так классифицировать другие кости неизвестного происхождения: они принадлежат человеку, если выражение «длина+8×толщину» больше 40, и принадлежат обезьяне, если оно меньше 40. Здесь мы считаем, что все кости принадлежат либо человеку, либо обезьяне. Поступая так, мы будем иногда ошибаться, но надеемся, что не слишком часто. Статистик владеет формальными способами определения «наилучшей» линии — границы типа той, которую мы провели на глаз на рисунке 1. В данном случае в слово «наилучший» мы вкладываем тот смысл, что ожидаемое число неверных классификаций будет как можно меньше. Мы можем оценить и достигнутую нами степень точности.

Функция

$$\text{длина} + 8 \times \text{толщину}$$

называется *функцией распознавания*, так как на основании именно ее значений можно различать кости людей и обезьян.

Часто приходится проводить и больше двух измерений для каждого образца, и тогда нанесения точек на лист бумаги недостаточно. Статистикам известны такие методы, которые сводят к минимуму возможность неверной классификации. Сказанное относится и к случаю, когда групп больше, чем две: например, образцы ископаемых костей могут принадлежать нескольким видам животных.

Задачи классификации и распознавания ни в коей мере не исчерпывают круг задач, связанных с несколькими характеристиками. Биолог, например, может поставить ловушку для насекомых, движущихся в направлении господствующего ветра. Он будет ежедневно записывать число насекомых каждого вида, попавших в ловушку, и измерять скорость ветра, чтобы проверить теорию, по которой насекомые летят по направлению ветра или сносятся им. Его экспериментальные данные подтвердят теорию, если при сильном ветре в соответствующем направлении в ловушку попадется больше насекомых и меньше — при слабом ветре или же при сильном ветре, но дующем не прямо на ловушку.

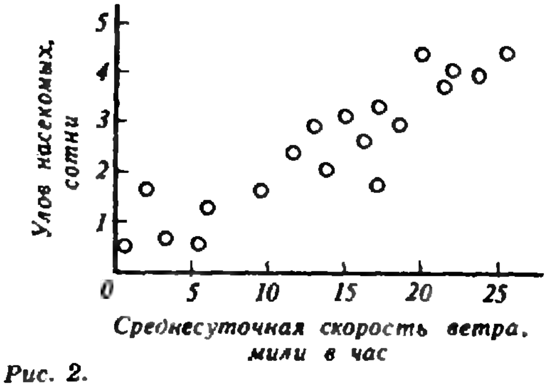


Рис. 2.

Данные наблюдений можно представить графически, откладывая по одной оси силу ветра, и по другой — число пойманных в день насекомых.

Пусть результаты эксперимента образуют картину, представленную на рисунке 2. Экспериментальные данные, показывающие большие числа насекомых, пойманных при сильном ветре, и малые — при слабом, подтверждают теорию, по которой насекомые летят в направлении ветра или сносятся им.

Здесь необходимо сделать одно предостережение. Зависимости между переменными, в особенности более или менее прямо пропорциональные, часто рассматриваются как причинно-следственные. В случае с ветром и насекомыми совершенно разумно считать, что на поимку насекомых влияет сила ветра. Это объяснение естественное, и оно обусловлено нашими представлениями о природе вещей. Мы не сделали бы вывода, что число пойманных насекомых влияет на силу ветра. Это противоречило бы здравому смыслу и расходилось бы с нашим знанием физических и биологических законов. Мы достаточно знаем о причинах, вызывающих ветер, и о его динамическом влиянии на насекомых.

С другой стороны, если обнаруживается строгая прямо пропорциональная зависимость между числом проданных порций мороженого в некотором году и числом проданных солнцезащитных очков, то не нужно рассматривать эти события как причину и следствие: на обе величины повлиял климат, и нет данных, что потребление мороженого меняет светочувствительность глаз или что ношение солнцезащитных очков вызывает страстное желание съесть мороженое.

С точки зрения торговли

Статистика находит все более широкое применение в промышленности и торговле. Владелец сети овощных магазинов заботится о том, чтобы продукты во всех филиалах были хорошего качества и чтобы это качество поддерживалось на высоком уровне.

В большинстве контрактов на поставку оговаривается, что нестандартных или дефектных изделий в каждой партии должно быть не более определенной малой доли. Если какая-то партия не удовлетворяет этому требованию, поставщик обязан или заменить нестандартные изделия, или согласиться на продажу партии по сниженным ценам, или заменить всю партию. Трудность выполнения этого требования состоит в том, что проверка каждого изделия может оказаться чрезмерно дорогой (или даже невозможной, если она сопряжена с разрушением изделия). Заключение, является ли партия товаров приемлемой, делается на основании контроля лишь некоторой выборочной части товаров, или выборки.

Директор овощного магазина закупает несколько тысяч ящиков грейпфрутов и специально оговаривает, что полную цену он заплатит в том случае, если в выборке из 20 ящиков более 98 % плодов высокого качества. Такой подход не гарантирует, что вся партия содержит более 98 % качественного товара, но он по крайней мере указывает на то, что количество испорченных плодов невелико. Проверки такого типа являются примером контроля качества.

Даже бухгалтеры, люди весьма придирчивые к цифрам, и те в целях экономии денег пользуются статистическими методами. Например, некая фирма получает 5123 накладных на поставку деталей, причем каждая на-

(Окончание см. на с. 52)

Задачник „Кванта"

Задачи

M1366—M1370, Ф1373—Ф1377

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 декабря 1992 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10—92» и номера задач, решения которых вы высылаете, например «M1366» или «Ф1373». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом и необходимым набором марок (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M1366—M1370 предлагались на Всероссийской олимпиаде по математике в 1992 году.

M1366. Точки M и N — середины сторон CD и DE пятиугольника $ABCDE$, в котором $BC \parallel AD$ и $BD \parallel AE$. Докажите, что площади четырехугольника $MDNO$ и треугольника ABO равны (O — точка пересечения отрезков BN и AM).

M1367. В некоторой стране между городами существует авиационное сообщение. В стране $2k+1$ авиакомпания, причем первая осуществляет один рейс, вторая — два рейса и т. д. (каждый рейс связывает между собой два города). В стране существует закон, согласно которому из каждого города не может выполняться более одного рейса каждой авиакомпании. Компании решили по-новому поделить между собой все рейсы так, чтобы каждая авиакомпания осуществляла одинаковое число рейсов. Докажите, что это можно сделать, не нарушая закона.

M1368. а) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Пусть O, O_1, O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC, ABD и ADC соответственно. Докажите, что точки O, O_1, O_2 и A лежат на одной окружности.

б) На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D, не являющаяся ее серединой. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABD и ADC соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к медиане AK треугольника ABC делит отрезок O_1O_2 пополам.

M1369. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{z}=c-zx, \\ \dfrac{b}{y}-\dfrac{c}{x}=a-xy, \\ \dfrac{c}{z}-\dfrac{a}{y}=b-yz, \end{cases}$$

где a, b, c — положительные параметры.

M1370. Рассматриваются наборы из n различных гирек. Масса каждой гирьки — целое число граммов, не превосходящее 21 г. При каком наименьшем n в любом таком наборе найдутся две пары гирек, уравновешивающие друг друга?

Ф1373. Однородная длинная пружина состоит из большого числа одинаковых витков и имеет в недеформированном состоянии длину L. Пружину поставили вертикально внутрь высокого цилиндра с гладкими стенками, при этом длина пружины уменьшилась в два раза. Затем в цилиндр налили воду до уровня, равного $L/2$. Какой стала длина пружины в этом случае? Плотность материала пружины ρ, плотность воды ρ_0.

С. Кротов

Ф1374. Два сосуда объемом $V=0{,}5$ л каждый соединены вертикальной стеклянной трубкой сечением $S=1$ см^2 (рис. 1). Трубка перекрыта подвижным поршнем-магнитом массой $m=2{,}0$ г, который может двигаться вдоль трубки без трения. При помощи катушек, подключенных к генератору переменного напряжения, возбуждают колебания поршня вдоль трубки. На рисунке 2 приведена экспериментально полученная зависимость амплитуды установившихся колебаний поршня от частоты приложенного переменного напряжения. Определите по этим данным отношение молярных теплоемкостей C_p/C_V для воздуха.

В первом опыте вентиль наверху был закрыт. При какой частоте наступит максимум при открытом вентиле? Оцените амплитуду колебаний поршня в этом случае на частоте f_0. Давление воздуха $p_0=1$ атм.*)

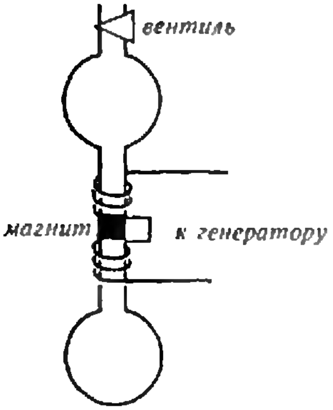


Рис. 1.

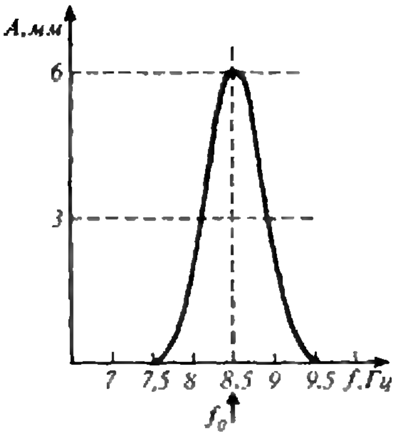


Рис. 2.

Ф1375*. Пленка при температуре $t_1=+50$ °С имеет коэффициент поверхностного натяжения $\sigma_1=0{,}020$ Н/м. После увеличения температуры до $t_2=+51$ °С коэффициент поверхностного натяжения падает до $\sigma_2=0{,}0195$ Н/м. Будем медленно растягивать пленку так, чтобы ее температура оставалась постоянной. Поглощает пленка при этом тепло из окружающей среды или, наоборот, отдает его? Оцените количественно этот теплообмен при растяжении пленки от $S_1=1$ м^2 до $S_2=1{,}5$ м^2 при температуре $+50$ °С.

Указание. Подумайте, как применить тут формулу *для КПД цикла Карно.*

Ф1376. При исследовании «черного ящика» с тремя выводами (рис. 3) были измерены его сопротивления: $R_{АБ}=300$ Ом, $R_{БВ}\approx R_{АВ}\approx 120$ кОм. Известно, что внутри находятся три резистора. Что можно сказать о схеме их соединения и о величинах их сопротивлений, основываясь на приведенных результатах?

Какие измерения еще нужно провести, чтобы определить сопротивления резисторов в «ящике»? В вашем распоряжении батарейка напряжением 4,5 В и авометр «Школьный».

А. Зильберман

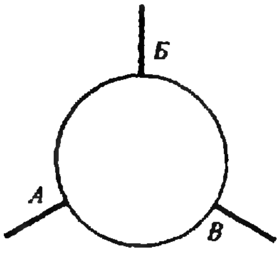


Рис. 3.

Ф1377. Для исследования резонанса собрана схема, показанная на рисунке 4. При какой частоте генератора вольтметр дает максимальные показания? Чему равно это максимальное напряжение, если амплитуда напряжения генератора $U_0=1$ В? Как изменятся максимальные показания вольтметра при уменьшении сопротивления r от 1 кОм до 100 Ом? Все элементы схемы можно считать идеальными.

З. Рафаилов

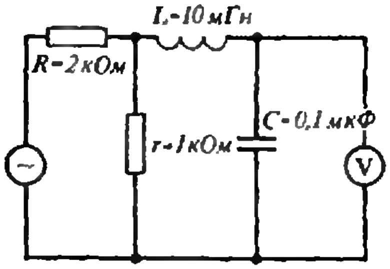


Рис. 4.

---

*) Эта задача была «запасной» на Международной физической олимпиаде 1991 года.

Решения задач

М1336 — М1340, Ф1353 — Ф1357

М1336. *Докажите для любых натуральных чисел m и n, больших 1, неравенство*

$$\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}}>1.$$

Докажем, что неравенство

$$(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x \qquad (*)$$

выполняется при $0<\alpha<1$ и $x>0$. Пусть

$$f(x)=(1+x)^{\alpha}-\alpha x-1.$$

Имеем

$$f(0)=0,$$
$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}-\alpha<0$$

при $x>0$. Следовательно, при $x\geqslant 0$ функция $f(x)$ убывает, поэтому $f(x)<f(0)=0$ при $x>0$.

Пользуясь неравенством (*), получаем, что

$$(1+m)^{1/n}<1+\frac{m}{n},\ (1+n)^{1/m}<1+\frac{n}{m},$$

откуда сразу следует, что

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{1+n}}>\frac{n}{m+n}+\frac{m}{m+n}=1.$$

В. Сендеров

М1337. *Выпуклая фигура на плоскости имеет 4 оси симметрии (углы между соседними осями составляют 45°). Через одну точку фигуры проведены параллельные этим осям прямые, которые делят фигуру на 8 частей, раскрашенных поочередно в голубой и розовый цвета (рис. 1). Докажите, что сумма площадей голубых частей равна сумме площадей розовых.*

Решим сначала эту задачу для квадрата.

Можно доказать равенство площадей голубых и розовых частей просто вычислением. Введем систему координат так, чтобы центр квадрата имел координаты (0; 0), а его вершины — $(\pm 1,\ \pm 1)$. Можно (в силу симметрии) считать, что точка P пересечения прямых имеет координаты $(a;\ b)$, где $a\geqslant b$ (рис. 2). Тогда в верхней по отношению к P области $y\geqslant b$ площадь розовых частей больше площади голубых на величину

$$2(1-b)-(1-a)^2-(1-b)^2=2a-a^2-b^2,$$

а в нижней ($y\leqslant b$) площадь голубых превышает площадь розовых на ту же величину:

$$2(1+b)-(1-a)^2-(1+b)^2=2a-a^2-b^2.$$

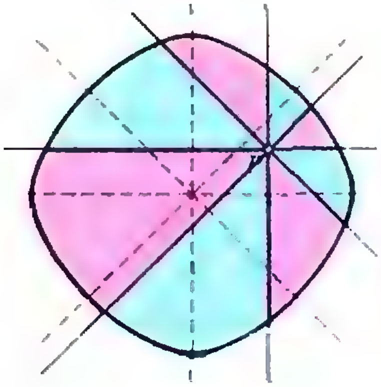


Рис. 1.

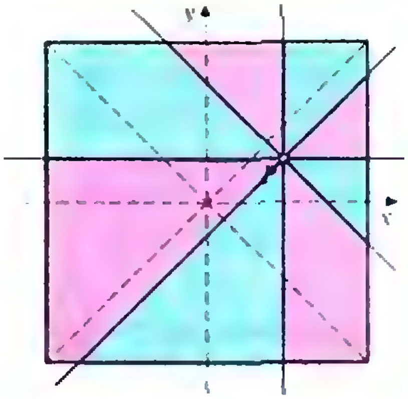


Рис. 2.

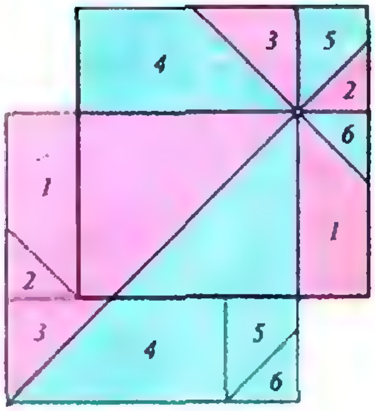


Рис. 3.

То же самое можно доказать «разрезанием и складыванием» (см. рис. 3; равные части обозначены одинаковыми цифрами).

Теперь решим задачу в общем виде.

Вокруг любой выпуклой фигуры можно описать квадрат с теми же осями симметрии. Достаточно доказать равенство площадей голубых и розовых частей в каемке между квадратом и фигурой (рисунки 4, *а* и 4, *б* показывают два немного отличающихся возможных расположения кусочков каемки). Разрезанием и симметричным отражением нетрудно составить из частей этой каемки каемку, половина которой будет голубой, а половина — розовой (рис. 5; из голубых кусочков *1* и *3*, например, можно составить одну четвертушку, из кусочков *2* и *4* — вторую).

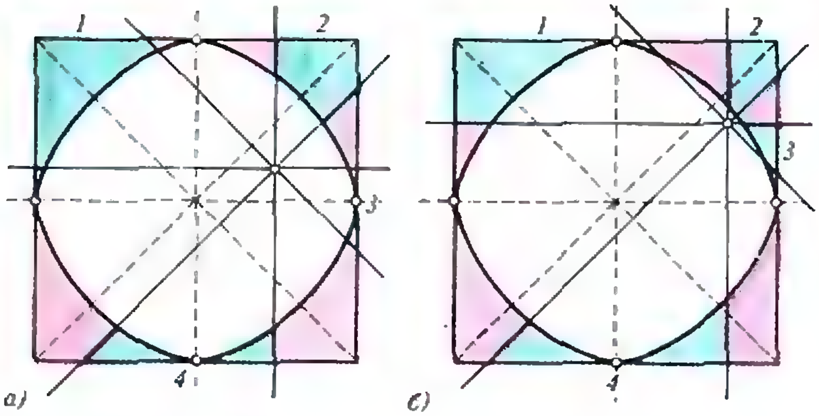


Рис. 4.

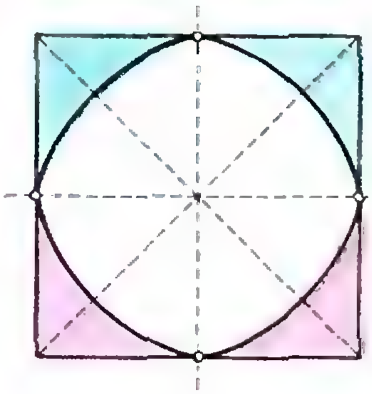


Рис. 5.

Интересно выяснить, насколько далеко можно обобщить этот результат. Например, верно ли аналогичное утверждение для фигуры с $4n$ осями симметрии и $4n$ прямых?

В. Произволов

M1338. *Укажите способ вычисления 2^n-го числа f_2-последовательности Фибоначчи $f_1=1$, $f_2=1$, $f_3=2$, $f_{k+1}=f_k+f_{k-1}$ $(k>1)$ не более чем за $6n$ операций сложения, умножения и вычитания.*

Очевидна следующая цепочка равенств:

$$u_{n+k}=u_2u_{n+k-1}+u_1u_{n+k-2}=u_3u_{n+k-2}+u_2u_{n+k-3}=\ldots$$
$$\ldots=u_{k+1}u_n+u_ku_{n-1}.$$

Положив $k=n$ и $k=n-1$, получим равенства

$$u_{2n-1}=u_n^2+u_{n-1}^2,$$
$$u_{2n}=u_{n+1}u_n+u_nu_{n-1}=u_{n+1}^2-u_{n-1}^2.$$

Следовательно, пару $(u_{2n-1};\ u_{2n})$ можно вычислить через $(u_{n-1};\ u_n)$ за шесть операций:

$$(u_{n-1};\ u_n)\to(u_{n-1};\ u_n;\ u_{n+1})\to(u_{n-1}^2;\ u_n^2;\ u_{n+1}^2)\to$$
$$\to(u_{n-1}^2+u_n^2;\ u_{n+1}^2-u_{n-1}^2)=(u_{2n-1};\ u_{2n}).$$

Отправляясь от $(u_0;\ u_1)=(0;\ 1)$ и совершая вышеописанный рекуррентный переход k раз, получим пару $(u_{2^k-1};\ u_{2^k})$ за $6k$ операций сложения, вычитания и умножения.

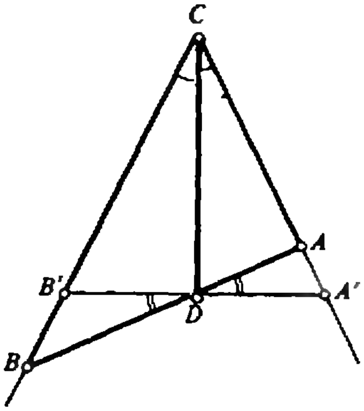
Замечание. С помощью рекуррентного перехода, используемого при решении задачи, можно построить очень эффективный алгоритм для вычисления остатка от деления n на некоторое натуральное q при больших номерах n. Подумайте, как это сделать.

В. Быковский

M1339. *Дан треугольник ABC. Пусть S — его площадь, γ — угол ACB, а l — длина биссектрисы, проведенной из вершины C.*

а) Докажите, что $S \geqslant l^2 \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

б) Для каких треугольников ABC выполняется равенство?



Первое решение. Обозначим через a и b стороны BC и AC треугольника ABC.
Имеем

$$l = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$$

(докажите это).
Тогда

$$l^2 \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{4ab}{a^2+b^2+2ab}\cdot\frac{1}{2}ab\cdot 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4ab}{2ab+2ab}\cdot\frac{1}{2}ab\sin\gamma = S.$$

Очевидно, что равенство выполняется тогда и только тогда, когда $a^2+b^2=2ab$, т. е. тогда и только тогда, когда $a=b$.

Второе решение. Пусть $a>b$, тогда $\angle A > \angle B$, и угол CDB — тупой. Проведем через точку D отрезок $A'B'$ (см. рисунок), перпендикулярный CD.

Поскольку $BD > AD$ (это легко следует из соотношения $BC/AC = a/b > 1$), площадь треугольника BDB' больше площади треугольника ADA'. Поэтому $S > S_{A'CB'} = l^2 \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$. При $a=b$ равенство $S = l^2 \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ очевидно.

Н. Немировская, В. Сендеров

M1340. *На красной окружности произвольным образом отмечены $N \geqslant 4$ различных синих точек. Начиная с какой-нибудь из них, будем перекрашивать каждую вторую синюю точку (по часовой стрелке) в красный цвет, соединяя ее при этом хордой со следующей перекрашиваемой точкой, и т. д., пока на окружности не останется синих точек. На сколько частей распадется внутренность окружности, если ее разрезать по всем проведенным линиям, при а) $N=32$? б) $N=1992$?*

Ответ: а) 86; б) 5960.

Занумеруем все точки подряд по часовой стрелке числами от 1 до N так, чтобы первой перекрашивалась точка 2 (второй — точка 4 и т. д., см. рис. 1 и 2).

Обозначим через $A(N)$ искомое число частей, через $S(N)$ — число хорд, выходящих из точки 3.

Докажем по индукции, что для любых N точек на окружности $A(N)$ определяется однозначно:

$$A(N) = A(N-1) + S(N-1) + 1.$$

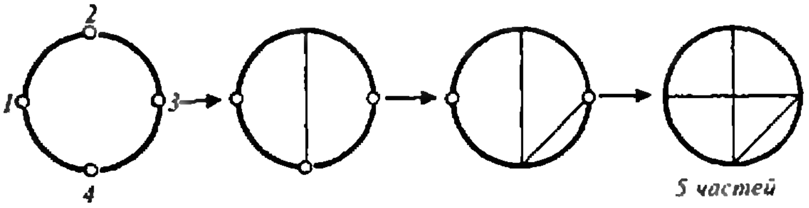


Рис. 1.

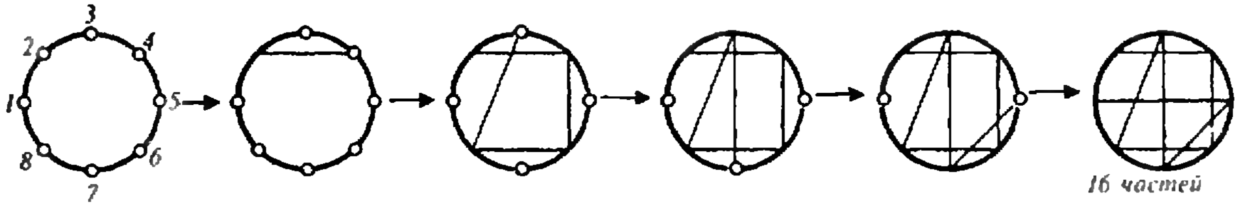


Рис. 2.

Для $N=4$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для $N=k$. Отметим на окружности произвольным образом $k+1$ точек. Проведем хорду 2—4 и перекрасим точку 2. Получим окружность с k точками, для которой число частей определяется однозначно. Проведя хорду 2—4, мы, очевидно, увеличим число частей на $S(k)+1$, откуда

$$A(k+1)=A(k)+S(k)+1,$$

т. е. для любого $N\geqslant 4$

$$A(N)=A(N-1)+S(N-1)+1.$$

Но из точки 3 может выходить либо 2 хорды, либо 1 (когда точка 3 перекрашивается последней). Поэтому число частей может увеличиваться при добавлении точки соответственно либо на 3, либо на 2.

Выясним, при каких N последней перекрашивается точка 3. Пусть на окружности отмечено $N=2^k$ точек. Пройдя окружность один раз, мы перекрасим $2^k/2=2^{k-1}$ точек, останется $2^k-2^{k-1}=2^{k-1}$ точек, причем следующей вновь будем перекрашивать первую (по часовой стрелке) точку после точки 1. Проходя круг за кругом, мы придем в конце концов к 2^0-й точке. Нетрудно видеть, что это — точка 1. Если же на окружности отмечено $N=2^k+l$ точек, где $2^k\leqslant N<2^{k+1}$, то, перекрасив l точек, мы придем к случаю $N=2^k$, но роль точки 1 будет играть теперь точка $2l+1$ (она есть на окружности, т. к. $l\leqslant 2^k+1$ и, следовательно, $2l\leqslant 2^k+1+l<N$), а значит, она и будет перекрашена последней.

Можно выписать общую формулу для номера последней точки m:

$$m=2(N-2^{[\log_2 N]})+1.$$

Поэтому точка 3 перекрашивается последней тогда и только тогда, когда $2l+1=3$, $l=1$, т. е. для всех $N=2^k+1$, $k\in N$.

Теперь, учитывая, что $A(3)=3$, $S(3)=1$, уже нетрудно выписать общую формулу, верную для всех $N\geqslant 4$:

$$A(N)=3+3(N-[\log_2(N-1)]-3)+2[\log_2(N-1)]=$$
$$=3N-6-[\log_2(N-1)].$$

В частности, поскольку $2^{10}<1991<2^{11}$, то

$$[\log_2 1991]=10 \text{ и } A(1992)=3\cdot 1992-6-10=5960.$$

С. Дориченко

Ф1353. *Найдите минимально возможный период обращения космического корабля вокруг Солнца *), зная, что видимый с Земли угловой размер Солнца $\alpha=9{,}3\cdot10^{-3}$ рад.*

Согласно третьему закону Кеплера,

$$\frac{T^2}{a^3}=\text{const};$$

следовательно, чем меньше радиус a орбиты космического корабля, тем меньше период T его обращения вокруг Солнца. Минимальному периоду обращения соответствует минимальный радиус орбиты, т. е. просто радиус Солнца:

$$a_{\min}=R_{\text{С}}=(\alpha/2)R_{\text{С}-\text{З}},$$

где $R_{\text{С}-\text{З}}$ — расстояние от Солнца до Земли. Теперь сравним движения корабля и Земли вокруг Солнца:

$$\frac{T_{\min}^2}{a_{\min}^3}=\frac{T_{\text{З}}^2}{R_{\text{С}-\text{З}}^3}.$$

Отсюда, зная период обращения Земли $T_{\text{З}}=365{,}25$ суток, получаем

$$T_{\min}=T_{\text{З}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{3/2}\approx0{,}116\ \text{суток}\approx2\ \text{ч}\ 47\ \text{мин}.$$

М. Гаврилов

Ф1354. *Шайба массой M скользит по льду со скоростью v_0 и налетает на неподвижную шайбу, масса которой 2M. После удара первая шайба останавливается, а вторая начинает двигаться. Она достигает бортика и, упруго от него отразившись, ударяет первую шайбу «в лоб». Найдите скорости обеих шайб после этого. Считайте, что при соударении шайб в тепло переходит определенная часть максимальной энергии деформации.*

Конечно, можно рассчитывать все удары шайб при помощи закона сохранения импульса и баланса энергий (с учетом тепловых потерь), но у этой задачи есть совсем простое решение.

Очевидно, что после первого удара шайба *2* имеет скорость $v_0/2$. Для расчета удара шайб после отражения от бортика удобно «пересесть» в систему отсчета, которая едет со скоростью $v_0/2$ от стенки. В этой системе шайба *2*, как и перед первым ударом, неподвижна, а шайба *1* снова едет прямо на нее — правда, ее скорость теперь в 2 раза меньше. После второго удара шайба *1*, как и после первого удара, остановится, а шайба *2* приобретет скорость $v_0/4$.

В неподвижной же системе отсчета скорость шайбы *1* будет равна $v_0/2$ и направлена от стенки, а скорость шайбы *2* будет равна $v_0/4$ и направлена тоже от стенки.

А. Варгин

Ф1355. *Нагреватель для аквариума Н подключен к батарее последовательно с амперметром, который показывает ток 0,1 А (рис. 1). К точкам А и Б под-*

Поскольку сопротивление амперметра мы считаем равным нулю, при перестановке резистора (рис. 2) ток через батарею не меняется. Отсюда следует, что ток нагревателя (сопротивлением Z) равен 0,05 А, а ток резистора (сопротивлением R) составляет 0,25 А. Тогда

$$\frac{Z}{R}=5.$$

При параллельном соединении нагревателя и резистора общее их сопротивление получается равным $Z/6$.

Сравним токи при подключении резистора и без него:

---

*) К сожалению, в ранее опубликованном условии задачи в этом месте допущена опечатка. Редакция приносит извинения читателям и автору задачи.

ключили резистор, после чего ток упал до 0,05 А. Резистор отключили от А и Б и подключили к точкам В и Г — ток в этом случае составил 0,3 А. Найдите КПД схемы во всех трех случаях. Сопротивления амперметра и проводов пренебрежимо малы.

Примечание: КПД схемы — это отношение мощности нагревателя к полной мощности, производимой батареей.

$$\frac{U}{Z+r}=0{,}1\text{ А},\ \frac{U}{Z/6+r}=0{,}3\text{ А}.$$

Отсюда

$$r=\frac{Z}{4}.$$

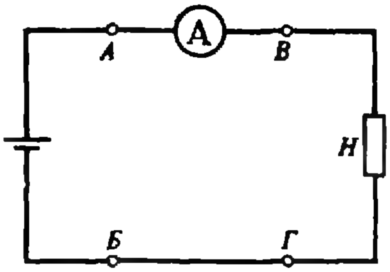


Рис. 1.

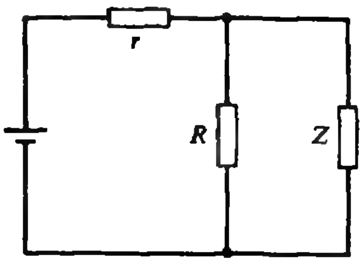


Рис. 2.

Теперь ясно, что в первом случае КПД составляет

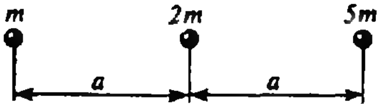
$$\eta_1=\frac{Z}{Z+r}=0{,}8=80\ \%.$$

Во втором и в третьем случаях КПД одинаковы. При этом ток через батарею возрос в 3 раза, т. е. полная мощность стала в 3 раза больше, а ток нагревателя упал в 2 раза, значит, полезная мощность стала в 4 раза ниже. В результате

$$\eta_2=\eta_3=\frac{\eta_1}{12}=\frac{1}{15}\approx 6{,}67\ \%.$$

З. Рафаилов

***Ф1356.** Три маленьких заряженных шарика закреплены на одной прямой, расстояние между соседними шариками a (см. рисунок). Массы шариков m, 2m и 5m, заряды их q, q и 2q соответственно. Шарики отпускают. Найдите их скорости после разлета на большие расстояния.*



После разлета шариков на большие расстояния их суммарная кинетическая энергия будет равна начальной энергии взаимодействия

$$W=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{a}+\frac{2q^2}{a}+\frac{2q^2}{2a}\right)=\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a}.$$

А вот ответить на вопрос — как эта энергия распределится между шариками, в общем виде (для произвольных зарядов и масс) вам наверняка не удастся (это очень сложная задача!). Однако числа в условии подобраны так, чтобы задачу все же можно было решить.

Найдем начальные ускорения шариков — это совсем легко:

$$a_1=\frac{q^2+2q^2/4}{4\pi\varepsilon_0 ma^2},\ a_2=\frac{2q^2-q^2}{4\pi\varepsilon_0\cdot 2ma^2},\ a_3=-\frac{2q^2+2q^2/4}{4\pi\varepsilon_0\cdot 5ma^2}.$$

Видно, что $|a_1|:|a_2|:|a_3|=3:1:1$ и ускорение шарика массой $5m$ направлено противоположно ускорениям шариков, массы которых m и $2m$. Заметим, что относительно среднего шарика ускорения крайних получаются одинаковыми — значит, они одинаково набирают скорости относительно среднего шарика и он все время будет находиться точно посередине между ними (ведь отношение ускорений сохраняется постоянным). Тогда $|v_1|:|v_2|:|v_3|=3:1:1$, и теперь ясно, как распределяется между шариками полная кинетическая энергия:

$$\frac{m(3v)^2}{2}+\frac{2mv^2}{2}+\frac{5mv^2}{2}=W=\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a}.$$

Отсюда

$$v=\sqrt{\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 ma}},$$

$$v_1=3v,\ v_2=-v_3=v.$$

А. Зильберман

Ф1357. ***При помощи фотоаппарата «Смена» делают снимок светящейся точки с расстояния 1 м. Рука фотографа дрожит, и вместо точки на пленке получается небольшое пятно. Оцените размеры этого пятна, если амплитуда смещения любой точки фотоаппарата не превышает 1 мм. Фокусное расстояние объектива 50 мм. Выдержку считайте большой.***

Вначале нужно разобраться — при каком именно смещении точек аппарата получается пятно максимального диаметра. Сразу видно, что сдвиг «взад-вперед» практически не приводит к размазыванию пятна (вспомните о так называемой глубине резкости). Сдвиг «вверх-вниз» также не очень опасен — это все равно, что двигать «вверх-вниз» фотографируемый предмет, а при расстоянии до него 1 м угловой размер точки предмета составит 2мм/1 м$\approx$0,002 и изображение точки будет иметь диаметр

$$d_1=0{,}002\cdot 50\ \text{мм}=0{,}1\ \text{мм}.$$

Гораздо хуже, если фотоаппарат «качается» по углу относительно направления на предмет, т. е. когда крайние точки фотоаппарата двигаются в разные стороны друг относительно друга. Максимальный угол получится тогда, когда эти крайние точки ближе всего друг к другу — т. е. это верх и низ.

Высота фотоаппарата «Смена» равна примерно 80 мм, поэтому угол поворота

$$\alpha\approx 2/80=1/40\ \text{рад}.$$

Это дает диаметр пятна

$$d_2=2\alpha F\approx 2(1/40)50\ \text{мм}\approx 2{,}5\ \text{мм}.$$

Отсюда следует, что фотографировать с большой выдержкой в таком состоянии не следует.

А. Ящиков

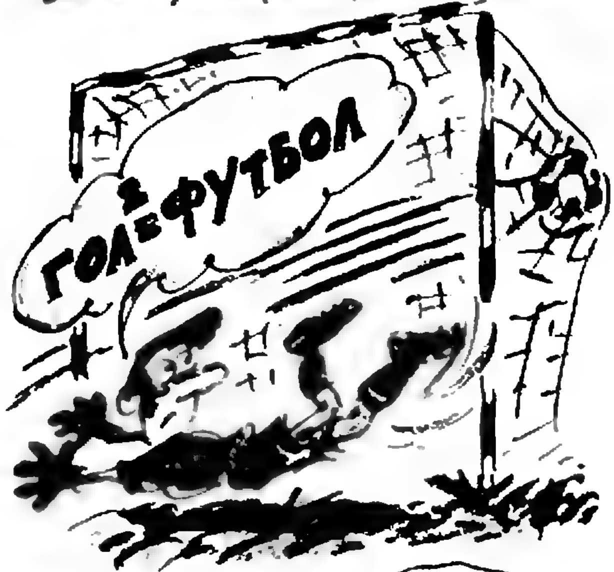
Поправка: В формулировку задачи про Тома Сойера (М1344, «Квант» № 5, с. 23) вкралась ошибка: легко видеть, что в условиях задачи доля окрашенной площади может быть сколь угодно малой. Приводим исправленную формулировку (срок присылки решений продлевается до 1 декабря):

Том Сойер красит забор, состоящий из бесконечной последовательности прямоугольных досок разной ширины и высоты. Каждая доска на 1 % уже, чем предыдущая, и выше нее, но не выше 2 м. Том начинает с первой доски и затем, если доска выше предыдущей более чем на 2 %, красит ее, а в противном случае — пропускает. Может ли забор быть таким, что он покрасит не менее: а) 40 %, б) 50 %, в) 60 % площади забора?

Задачи

1. Какое наибольшее число полей можно отметить на шахматной доске так, чтобы с любого из них на любое другое отмеченное поле можно было пройти ровно двумя ходами коня?

2. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.



3. На плоскости даны две прямые и точка M. Найдите на одной из прямых точку X такую, что отрезок MX делится другой прямой пополам.

4. В комнате находятся 12 человек. Некоторые из них всегда лгут, а остальные всегда говорят правду. Один из них сказал: «Здесь нет ни одного честного человека», второй: «Здесь не более одного честного человека», третий: «Здесь не более двух честных людей» и т. д., двенадцатый: «Здесь не более одиннадцати честных людей». Сколько в комнате честных людей?

5. Продолжите последовательность чисел:
1, 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, ...

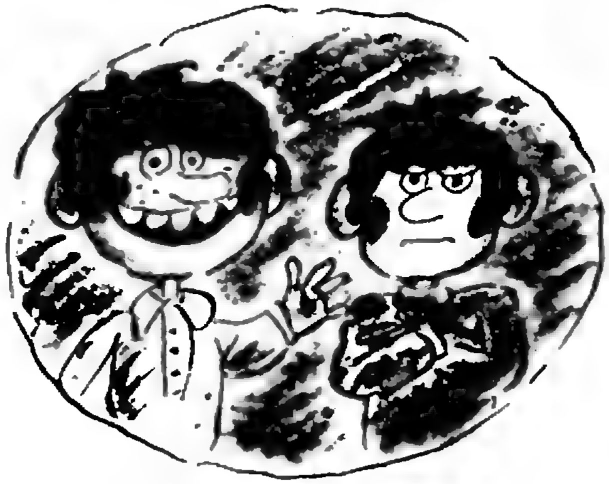
...ум, честь и совесть...

Эти задачи нам предложили В. Произволов, П. Филевич, В. Чичин, Д. Фомин и А. Савин.

СЕАНС ПАРАПСИХОЛОГИИ

Кандидат физико-математических наук
А. САВИН,
кандидат педагогических наук
Е. СЕМЕНОВ

На математическом вечере в нашей школе с большим успехом прошло выступление двух «экстрасенсов» — учеников 7 «А» класса Степы Мошкина и Тимура Егорова.



— Уважаемые зрители,— начал Степа,— Тимур обладает удивительной способностью читать мои мысли. Не далее как вчера он дал мне списать домашнее задание, хотя я его об этом еще не успел попросить. А после моего ответа на уроке географии он, не глядя в мой дневник, точно назвал отметку, которую туда поставила Людмила Николаевна. Замечу, что лучше всего мне удается передавать ему именно числа, и вы сейчас в этом убедитесь сами. Правда, я при этом должен поддерживать с ним контакт — словами активизировать его экстрасенсорные способности. Итак, сейчас на доске каждый из вас может написать любое число, а Тимур, стоя спиной к доске, назовет его, прочтя это число в моих мыслях. Кто первый?

К доске подбежала шустрая пятиклассница и написала число 87.

— Замечательно, Женя! — воскликнул Степа.

— Я не Женя, а Оля,— обиделась пятиклассница.

— Извини, Оля, а я займусь активизацией телепатических способностей Тимура,— ответил Степа.

— Не нужно,— заявил Тимур,— я знаю, что это число 87.

Зал ахнул, но один второклассник крикнул: — Халтура! Ему подсказали на пальцах число из зала!

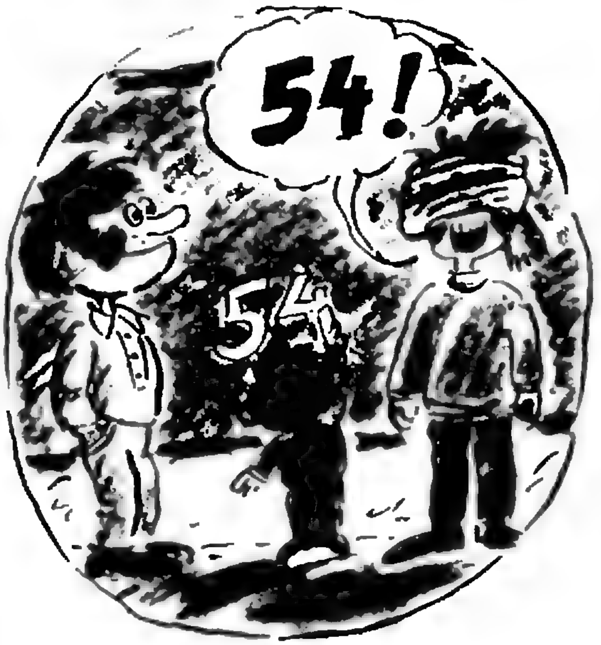
— Спокойно,— подняв руку, твердо сказал Степа,— мы усложняем эксперимент. Я завязываю Тимуру глаза! — и он обмотал голову Тимура полотенцем, оставив свободным лишь его рот.

К доске вразвалку подошел десятиклассник и написал число 33.

— Вот второе! — объявил Степа,— сосредоточься и назови.

— Это 33,— произнес Тимур.

Зал вновь зашумел, а в это время юркий первоклассник уже записывал на доске число 54.



— Думай, гадай,— взглянув на число, произнес Степа.

— Это число — 54,— заявил Тимур, почесав полотенце на затылке.

У сцены уже выстроилась очередь из желающих написать свое число. На доске появилось число 9.

— Интересное число,— прокомментировал его Степа, а Тимур тут же произнес: — Это число 9.

Увидев следующее число 111, Степа воскликнул: — Ай-ай-ай, такие большие числа очень трудно отгадывать. И немедленно Тимур назвал это число.

— Степа подсказывает! — крикнули из зала.

— А как? — отпарировал Степа.— Хорошо, я уйду, а Тимур без меня будет демонстрировать свои выдающиеся телепатические способности.— Степа торжественно сошел со сцены, а Тимур произнес:

— Опасный эксперимент! Прошу к доске стопроцентно здорового и интеллектуально полноценного индивидуума!

У доски снова оказалась пятиклассница Оля.

— Итак,— продолжал Тимур,— Степа ушел, полотенце у меня на глазах. Пусть тот, кто находится у доски, напишет число.

Оля написала число 14, а Тимур поднес руки к голове и произнес: — Мне необходимо, чтобы об этом числе постоянно думали, а еще лучше, чтобы с ним проводили арифметические действия. Ну-ка, прибавь к числу 11 и запиши. Теперь возведи оба записанных числа в квадрат. Отними от большего квадрата меньший. Готово? Сколько получилось?

— 429,— ответила девочка.

— Было задумано число 14,— объявил Тимур после недолгого размышления.

Я схватил ручку и листок бумаги, чтобы разобраться в этом фокусе, но тут Тимур снова пригласил желающего на сцену. Меня словно кто в спину толкнул — через три секунды я был уже на сцене.

— Рекордный эксперимент,— произнес Тимур,— я начинаю работать с трехзначными числами. Запиши трехзначное число,— сказал он, чуть повернувшись ко мне. Я написал 238 — номер моего почтового отделения.

— Припиши к нему еще раз это число!

Я написал: 238238.

— Умножь полученное число на 2,— потребовал Тимур.

Попыхтев, я написал 476 476.

— Раздели полученное число на 7,— последовал новый приказ.

Я начал делить. Число 476 разделилось на 7, и я легко получил результат: 68 068.

— Теперь раздели полученное число на 11,— сказал Тимур.

Как ни странно, но 68068 разделилось на 11 и в результате получилось число 6188.

— А теперь раздели полученное число на 13!

— А если не разделится? — робко спросил я.

— Раньше все делилось — разделится и сейчас,— ответил Тимур.

Я начал у края доски делить уголком 6188 на 13. К моему удивлению, деление произвелось нацело.

— Разделилось? — спросил Тимур.

— Да, — ответил я, — получилось 476.

— Тобой было задумано число 238,— торжественно произнес Тимур.— Сотри доску для следующего.

Когда я поднял руку с тряпкой, чтобы стереть доску, то с удивлением заметил, что я делил число 476 476, а получил 476. В чем же здесь фокус? Я двинулся было на свое место, как меня остановил голос Тимура.

— Прошу задержаться,— сказал он, вытаскивая из кармана конверт.— Возьми этот конверт и храни его в течение следующего эксперимента. А тот, кто стоит у доски, пусть напишет число, большее 50, но меньшее 100.

Стоявший у доски Петя Яблочкин из 6 «Б» написал число 69.

— Прибавь к нему 86,— попросил Тимур.

На доске появилось число 155.

— Сотри первую цифру и прибавь ее к оставшемуся числу.

Петя записал число 56.

— Вычти это число из первоначального,— последовал новый приказ.

На доске появилось число 13.

— Теперь посмотрите, что лежит в конверте! — воскликнул Тимур.

Я открыл конверт. На открытке, вложенной в него, крупно было написано число 13. Я был поражен. Сколько я ни думал — ничего понять не мог. А вы поняли секреты фокусов? Если нет, то посмотрите объяснения в конце журнала.

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач (по 3 в каждом номере) и закончится в апреле будущего года. Победители будут награждены призами журнала «Квант».

Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 января 1993 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

4. Гавиал, бегемот, пеликан и кашалот съели в общей сложности 37 рыб, причем кашалот съел во столько же раз больше пеликана, во сколько пеликан съел больше гавиала. Сколько съел каждый?

И. Акулич

5. Внутри треугольника отмечена точка M. Пусть L — длина наибольшего из отрезков, соединяющих точку M с вершинами, а l — длина наименьшего из отрезков, соединяющих точку M с серединами сторон. Докажите, что $L \geqslant 2l$.

В. Произволов

5. Когда закончился волейбольный турнир (в один круг), оказалось, что каждая команда выиграла столько же матчей, сколько и все побежденные ею команды. Сколько команд участвовало в турнире?

С. Токарев

Мой новый прибор... по своим действиям подражает лейденским банкам или электрическим батареям (имеются в виду батареи конденсаторов — А. Л.), вызывая такие же сотрясения, как и они.

А. Вольта

Искра при открытии цепи будет сильнее, когда длинную соединительную проволоку наматывают на цилиндр в виде спирали, а еще сильнее, когда цилиндр будет железный.

Э. Ленц

А так ли хорошо знакомы вам

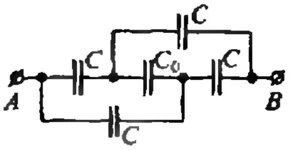
емкость и индуктивность ?

По существу, Вольта и Ленц упоминают известные вам устройства — конденсатор и соленоид, характеристиками которых являются емкость и индуктивность. Интересно, что если первый электрический конденсатор — лейденская банка — появился на свет, можно сказать, не специально, то соленоид был «открыт» Ампером в ходе целенаправленных опытов по исследованию магнитного действия электрического тока. Единицы измерения емкости и индуктивности впоследствии получили имена Фарадея и Генри, чем, надо полагать, физики не только отдали дань знаменитым ученым, но и подчеркнули важность этих понятий.

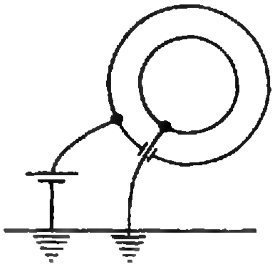
Безусловно, и емкости, и индуктивности можно было бы посвятить отдельные выпуски «Калейдоскопа». Но история науки распорядилась так, что им пришлось «поработать» и рука об руку. Как только выяснилось, что разряд лейденской банки, а затем и индукционной катушки, носит колебательный характер, в исследования колебательного контура включилась целая плеяда видных физиков — Гельмгольц, Томсон (лорд Кельвин), Кирхгоф и др. Увенчалось это «наступление» на колебательный контур открытием Герцем электромагнитных волн, что возвестило начало эпохи радио и телевидения. Какой бы областью электро-, радио- и телетехники сегодня мы ни заинтересовались, везде обнаружим либо сами конденсаторы и катушки, либо «отголоски» их присутствия в более совершенных приборах. Так происходит везде, где встречаются переменные токи и электрические колебательные процессы.

Вопросы и задачи

1. Всегда ли одинаковы емкости двух одинаковых изолированных проводников?
2. Можно ли зарядить лейденскую банку, не заземляя одну из обкладок?
3. Какова примерно электрическая емкость вашего тела?
4. Изменится ли емкость плоского конденсатора, если в воздушный зазор между его обкладками ввести незаряженную тонкую металлическую пластину?
5. Найдите емкость системы конденсаторов, включенных между точками A и B, как показано на рисунке.



6. Пластины заряженного плоского конденсатора попеременно заземляют. Что будет происходить с конденсатором при этом?
7. Плоский конденсатор подключен к источнику постоянной ЭДС. Что нужно сделать, чтобы вокруг конденсатора возникло магнитное поле?
8. В системе, изображенной на рисунке, соединяют с землей один раз внешнюю сферу, другой раз — внутреннюю. Будет ли одинакова емкость такого конденсатора в этих случаях?



9. Почему, если параллельно рубильнику включить конденсатор, искрение при размыкании рубильника прекращается?
10. Поверх длинного соленоида вплотную намотана катушка. Ток в соленоиде нарастает прямо пропорционально времени. Каков характер зависимости тока от времени в катушке?

11. В городскую сеть включили катушку с большим числом витков. Измерив протекающий по катушке переменный ток, установили, что ее сопротивление равно 20 Ом. Затем поверх этой катушки намотали точно такую же вторую и включили ее в цепь параллельно первой. Будет ли общее сопротивление катушек составлять 10 Ом?

12. Что произойдет, если трансформатор, рассчитанный на переменное напряжение первичной цепи 127 В, включить в сеть постоянного тока с напряжением 110 В?

13. Разборный школьный трансформатор, ко вторичной обмотке которого подключена нагрузка, включен в сеть. Как изменится ток в первичной и вторичной катушках при удалении верхней части сердечника?

14. Колебательный контур состоит из конденсатора постоянной емкости и катушки, в которую может вдвигаться сердечник. Один сердечник спрессован из порошка магнитного соединения железа (феррита) и является изолятором. Другой изготовлен из меди. Как изменится частота собственных колебаний контура, если в катушку вдвинуть а) медный сердечник, б) сердечник из феррита?

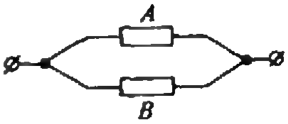
15. В колебательном контуре изменили начальную величину заряда на конденсаторе. Какие характеристики возникающих в контуре электрических колебаний изменятся от этого, а какие — нет?

16. Что произойдет, если заряженный конденсатор соединить сверхпроводником с таким же незаряженным конденсатором?

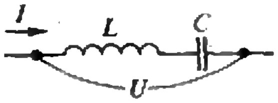
17. Входящий в колебательный контур плоский конденсатор таков, что его пластины могут перемещаться одна относительно другой. Каким образом осуществить «раскачку» контура посредством перемещения пластин?

18. Цепь переменного тока состоит из трех последовательно соединенных сопротивлений: омического, индуктивного и емкостного. Может ли одновременное увеличение каждого из них привести к уменьшению общего сопротивления?

19. По цепи, изображенной на рисунке, передаются одновременно постоянный ток и ток высокой частоты. Что нужно сделать, чтобы в ветви A проходил только постоянный ток, а в ветви B — только высокочастотный?



20. На рисунке показан участок цепи переменного тока. В каком случае напряжение U не зависит от величины тока I?



Микроопыт

Ваш приемник может настраиваться на прием радиоволн различной длины. Как вы должны изменять емкость или индуктивность приемного колебательного контура при настройке на более длинные волны?

Любопытно, что...

...немецкий каноник фон Клейст, независимо от голландского профессора Мушенбрука проведший опыт с лейденской банкой и испытавший ее разряд, пытался, по-видимому, использовать ее для получения электризованной воды, считавшейся полезной для здоровья.

...в 1827 году французский ученый Савар обнаружил, что после разряда лейденской банки через проволоку, намотанную на железную спицу, последняя часто оказывалась намагниченной. Удивительным же было то, что на одном и том же конце спицы появлялся иногда северный, а иногда южный полюс, хотя банка все время заряжалась одинаково. Объяснение пришло позже — вместе с пониманием колебательного характера разряда.

...Герц не только не помышлял о радиосвязи, но даже отрицал ее возможность.

...проблему передачи сигналов на расстояния пытался решить своим, отличным от Попова и Маркони, путем и Резерфорд. Однако, узнав в 1897 году о результатах Маркони, Резерфорд прекратил дальнейшие опыты в этой области и переключился на исследования радиоактивности.

...новый метод получения импульсных сверхсильных магнитных полей Капица предложил во время работы в Кавендишской лаборатории. Вот как описывал работу его установок знаменитый американский математик Норберт Винер: «...мощные генераторы... замыкались накоротко, создавая токи огромной силы, пропускавшиеся по массивным проводам: провода шипели и трещали, как рассерженные змеи, и в окружающем пространстве возникало магнитное поле колоссальной силы».

Что читать в «Кванте» о емкости и индуктивности

(публикации последних лет)

1. «Изобретатели радиотелеграфа» — 1987, № 2, с. 43;
2. «Генрих Герц и электромагнитные волны» — 1988, № 1, с. 48;
3. «Калейдоскоп «Кванта» — 1988, № 8, с. 32;
4. «Переходные процессы в электрических цепях» — 1990, № 4, с. 64;
5. «Явление самоиндукции» — 1990, № 6, с. 63;
6. «Генератор незатухающих колебаний» — 1990, № 9, с. 44;
7. «Загадка лейденской банки» — 1991, № 11, с. 28.

Материал подготовил А. Леонович

Победители конкурса «Математика 6—8»

Мы публикуем результаты нашего второго конкурса «Математика 6—8», проводившегося в 1991—1992 гг. (№ 9 — № 4). Итоги конкурса подводились по письмам, полученным редакцией. Мы сожалеем о несвоевременной доставке журнала (не по нашей вине). Возможно, из-за этого многие наши читатели не смогли участвовать в конкурсе.

Каждая из 24 предложенных задач оценивалась в 10 очков. Числа, стоящие перед фамилиями победителей конкурса — количество набранных ими очков.

Призами журнала награждаются:

239 Щербицкая В.— Минск, с. ш. 53, 8 кл.,
236 Санников Ю.— Севастополь, с. ш. 8, 7 кл.,
227 Гуляев Л.— Н. Новгород. с. ш. 82, 7 кл.,
220 Бойко М.— Харьков, с. ш. 27, 8 кл.,
219 Мельник А.— Гайворон, с. ш. 2, 7 кл.,
218 Зайцев Г.— Москва, с. ш. 444, 8 кл.,
216 Руссинковский В.— Чебоксары, с. ш. 20, 8 кл.,
215 Бондарева Л.— Львов, с. ш. 74, 8 кл.,
214 Барашков Д.— Жуковский, с. ш. 3, 8 кл.,
213 Математический кружок с. ш. 51 г. Киева, рук. Б. Н. Школьник,
208 Рязанова Э.— Курахово, с. ш. 1, 7 кл.,
206 Масальцев Д.— Харьков, с. ш. 27, 8 кл.,
206 Старобинская А.— Москва, с. ш. 38, 8 кл.,
198 Владышевский С., Павлишин М., Ховращук О.— Одесса, с. ш. 53, 8 кл.,
196 Кудинов А.— Минск, с. ш. 64, 6 кл.,
189 Плешачков А.— Жуковский, с. ш. 10, 7 кл.,
187 Кривошея А.— Винница, с. ш. 11, 6 кл.,
180 Кадочников П.— Псков, лицей, 8 кл.,
178 Бокий А.— Киев, с. ш. 98, 6 кл.,
177 Седых Ю.— Ангарск, с. ш. 10, 8 кл.,
176 Долганов П.— п. Черноголовка Московской обл., с. ш. 82, 8 кл.,
173 Пак К.— Душанбе, с. ш. 20, 8 кл.,
166 Зырянов Г.— Ташкент, с. ш. 91, 8 кл.,
165 Летита Т.— Стрый, с. ш. 10, 6 кл.

Жюри конкурса также отмечает успешное выступление на конкурсе следующих школьников:

156 Бакалейник Л.— Бар, с. ш. 2, 8 кл.,
151 Смирнова Е.— Дзержинск Нижегородской обл. с. ш. 11, 8 кл.,
150 Фейгенсон М.— Комсомольск-на-Амуре, с. ш. 51, 6 кл.,
144 Безделин В.— Псков, лицей, 8 кл.,
139 Евсеев А.— Москва, с. ш. 1016, 3 кл.,
138 Сошников К.— п. Черноголовка Московской обл., с. ш. 82, 6 кл.,
134 Петренко И.— п. Дружный Минской обл., с. ш. 1, 4 кл.,
130 Туровский А.— Баку, с. ш. 151, 7 кл.,
126 Хренков В.— Москва, с. ш. 550, 8 кл.,
123 Ногина О.— Челябинск, с. ш. 127, 8 кл.,
119 Рыкова О.— С. Петербург, с. ш. 517, 7 кл.,
114 Симунов С.— Жуковский, с. ш. 10, 7 кл.,
112 Щанов В.— Одесса, с. ш. 100, 8 кл.,
111 Шатунов С.— Киев, с. ш. 288, 6 кл.,
110 Гараев Р. и Гильфанова Р.— д. Илексаз, Татарстан, 7 кл.,
110 Кулик А.— Канев, с. ш. 4, 7 кл.,
109 Карпенков О.— Москва, с. ш. 444, 6 кл.,
109 Прохоров Д.— Минск, с. ш. 19, 8 кл.,
107 Евчик Т.— Пинск, с. ш. 4, 8 кл.,
106 Курманален Х.— Алма-Ата, с. ш. 90, 8 кл.,
105 Ханмагомедов — Дербент, с. ш. 19, 8 кл.,
103 Сенкевич О.— Иваново, с. ш. 22, 8 кл.,
100 Апальков Д.— Харьков, с. ш. 16, 8 кл.,
100 Ильичев А.— Реутов, с. ш. 3, 8 кл.,
100 Капля Е.— Капустин Яр, с. ш. 235, 8 кл.,
100 Минина Н.— Николаев, с. ш. 41, 8 кл.,
100 Окунева Е.— Арзамас, с. ш. 2, 7 кл.,
100 Полынский Н.— Миасс, с. ш. 10, 6 кл.,
100 Потапов Е.— Москва, с. ш. 633, 6 кл.

Дорогие читатели!

Напоминаем вам, что подписаться на наш журнал можно с любого номера, без ограничений, в агентствах, на почтамтах и в отделениях связи.

Индекс журнала в каталогах 70465.

Если вы проживаете в Москве или в Московской области и не хотите платить за доставку — подписывайтесь и получайте наш журнал прямо в редакции.

И где бы вы ни жили, если у вас возникнут проблемы с подпиской, обращайтесь к нам в редакцию.

Приглашаем всех желающих заняться распространением.

Школа в „Кванте"

Предел последовательности

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

Основные понятия и утверждения

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое действительное число a_n. Совокупность чисел $\{a_n\}$, где $n=1,2,\ldots$, называется *числовой последовательностью* или просто *последовательностью*; каждое число a_n называется *элементом или членом* этой последовательности, а n — его *номером*.

Числовая последовательность является частным случаем функции, а именно, последовательность представляет собой функцию, определенную на множестве натуральных чисел и принимающую значения во множестве действительных чисел.

Как задать числовую последовательность? Наиболее естественным является *аналитический* способ, указывающий в явном виде, какие действия нужно выполнить над числом n, чтобы получить общий член последовательности $a_n=f(n)$.

Примеры

1. Последовательность

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ldots$$

имеет общий член $a_n=\frac{1}{n}$.

2. Последовательность

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$$

задается правилом $a_n=(-1)^{n+1}$ или же $a_n=\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}$.

Другим распространенным способом задания последовательности является *рекуррентный* способ. Он указывает, какие действия нужно произвести над уже вычисленными членами последовательности

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,$$

чтобы получить следующий член — a_{n+1}; кроме того, должны быть заданы (смотря по характеру зависимости) несколько первых членов — так называемые начальные данные.

Примеры

1. Арифметическая прогрессия определяется рекуррентной зависимостью

$$a_{n+1}=a_n+d,\ n=1, 2, 3, \ldots$$

с начальным данным $a_1=a$.
Эта последовательность имеет вид

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ \ldots,\ a+(n-1)d,\ \ldots$$

2. Последовательность Фибоначчи определяется условием

$$a_{n+1}=a_n+a_{n+1},\ n=1,\ 2,\ \ldots$$

и начальными данными $a_1=1$, $a_2=1$.
Последовательность имеет вид

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots$$

Эту последовательность можно получить и в аналитической форме:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\},$$

$$n=1,\ 2,\ \ldots$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется

а) *ограниченной сверху*, если все ее члены меньше одного и того же числа M: $a_n<M$, $n=1, 2, 3, \ldots$

б) *ограниченной снизу*, если все ее члены больше одного и того же числа m: $a_n>m$, $n=1, 2, 3, \ldots$

в) *ограниченной*, если она ограничена и сверху и снизу:

$$m<a_n<M,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

А теперь сформулируем наше основное определение.

Число a называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое число N, что для всех номеров $n\geqslant N$ выполняется неравенство

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ или $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$.

Последовательность, у которой существует предел, называется *сходящейся*.

Введем теперь последовательности, имеющие своим пределом бесконечность. Такие последовательности называются *бесконечно большими* и определяются следующим образом:

Последовательность $\{a_n\}$ называется бесконечно большой, если для любого числа ε найдется такой номер N, что для всех $n\geqslant N$ выполняются неравенство $|a_n|>\varepsilon$.

Если последовательность такова, что $a_n>\varepsilon$, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$, если же $a_n>-\varepsilon$, то употребляют обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$. Во всех случаях говорят, что последовательность $\{a_n\}$ имеет *бесконечный* предел, равный $+\infty$ или $-\infty$.

В основе фактического вычисления пределов лежат следующие четыре теоремы.

Теорема 1. *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют пределы: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=b$, то последовательность $\{a_n+b_n\}$ также имеет предел*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b.$$

Теорема 2. *При тех же предположениях последовательность $\{a_n-b_n\}$ имеет предел*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b.$$

Теорема 3. *При тех же предположениях последовательность $\{a_nb_n\}$ имеет предел*

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=ab.$$

Теорема 4. *При тех же предположениях и дополнительном условии $b\neq0$ последовательность $\{a_n/b_n\}$ имеет предел*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}.$$

Очень часто теорему 1 формулируют кратко: «Предел суммы равен сумме пределов» и записывают в виде

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n,$$

причем условия теоремы подразумеваются. Аналогичные замечания справедливы и по поводу теорем 2—4.

Доказательства всех четырех теорем более или менее аналогичны, поэтому мы докажем лишь теорему 1.

Доказательство. Нам дано, что при достаточно больших n отклонения $|a_n-a|$ и $|b_n-b|$ делаются сколь угодно малыми. Требуется доказать то же самое для отклонения

$$|(a_n+b_n)-(a+b)|.$$

По свойству абсолютной величины имеем:

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| =$$
$$=|(a_n-a)+(b_n-b)| \leqslant |a_n-a|+|b_n-b|$$

Пусть задано некоторое число $\varepsilon>0$. Тогда можно подобрать такое N_1, что при $n>N_1$

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2},$$

и такое N_2, что при $n>N_2$

$$|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

В таком случае, обозначая через N наибольшее из чисел N_1 и N_2, будем иметь при $n>N$

$$|(a_n+b_n)-(a+b)| \leqslant$$
$$\leqslant |a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Введем теперь следующее определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если для каждого $n=1, 2, \ldots$ выполняется неравенство $a_n \leqslant a_{n+1}$ (соответственно, неравенство $a_n \geqslant a_{n+1}$). Невозрастающие и неубывающие последовательности называются *монотонными*. Если все упомянутые неравенства являются строгими, то последовательность называется *возрастающей* (*убывающей*). Например, последовательность $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ убывает, последовательность $\{n\}$ возрастает, а последовательность $\left\{\sin\frac{\pi n}{2}\right\}$ не является монотонной.

В теории пределов очень важно следующее свойство действительных чисел, которое обычно принимают за аксиому.

Аксиома Больцано-Вейерштрасса. *Всякая неубывающая (невозрастающая) последовательность имеет предел — конечный, если она ограничена сверху (снизу), и бесконечный, равный $+\infty$ ($-\infty$), если она не ограничена сверху (соответственно снизу).*

В курсе математического анализа доказывается, что аксиома Больцано-Вейерштрасса равносильна каждому из следующих утверждений:

если на числовой оси построена бесконечная последовательность отрезков так, что каждый следующий отрезок лежит внутри предыдущего, то все отрезки имеют по крайней мере одну общую точку;

всякое действительное число можно записать в виде бесконечной (периодической или непериодической) десятичной дроби, и каждой такой дроби соответствует некоторое действительное число.

Если одно из этих утверждений принять за аксиому, то второе утверждение и аксиома Больцано—Вейерштрасса станут теоремами, которые можно доказать.

Теорема 5. *Из всякой последовательности, содержащей бесконечное множество чисел, можно выбрать другую последовательность, стремящуюся к некоторому конечному или бесконечному пределу.*

Доказательство. Если в данной последовательности $\{a_n\}$ содержится лишь конечное множество чисел, не превосходящих a_1, то в ней обязательно будет бесконечное множество чисел, бо́льших a_1. Чтобы иметь дело с определенным случаем, мы предположим, что в нашей последовательности содержится бесконечное множество чисел, бо́льших a_1. Пусть одно из них a_{r_1}. Может случиться, что среди следующих за ним чисел найдется число $a_{r_2}>a_{r_1}$, среди следующих за a_{r_2} чисел найдется число $a_{r_3}>a_{r_2}$ и т. д. Если продолжать такой выбор чисел беспредельно, то из данной последовательности выделится последовательность, имеющая по аксиоме Больцано — Вейерштрасса конечный или бесконечный предел.

В противном случае встретится некоторое число a_{r_i}, которого не превзойдет ни одно из следующих за ним чисел; тем самым, выделится конечная цепочка чисел

$$a_1 < a_{r_1} < a_{r_2} < \ldots < a_{r_i}.$$

Среди чисел, следующих за a_{r_i}, снова будет, по предположению, бесконечное множество чисел, бóльших a_1, но не превосходящих a_{r_i}. Начиная с одного из них, скажем a_{s_1}, составляем, подобно предыдущему, возрастающую последовательность, которая, как и первая, либо продолжится беспредельно (и тогда теорема будет доказана), либо оборвется на некотором числе a_{s_j}, которого ни одно из последующих чисел не превзойдет но само оно будет не больше a_{r_i}. Таким образом, получится новая конечная цепочка чисел

$$a_1 < a_{s_1} < a_{s_2} < \ldots < a_{s_j},\ a_{r_i} \geqslant a_{s_j}.$$

Продолжая далее таким же образом, мы получим ряд цепочек

$$\begin{gathered} a_1 < a_{r_1} < a_{r_2} < \ldots < a_{r_i}, \\ a_1 < a_{s_1} < a_{s_2} < \ldots < a_{s_j}, \\ a_1 < a_{t_1} < a_{t_2} < \ldots < a_{t_k}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

При этом мы либо дойдем до последовательности с бесконечным числом возрастающих членов (и теорема будет доказана), либо получим последовательность, состоящую из бесконечного множества невозрастающих членов

$$a_{r_i} \geqslant a_{s_j} \geqslant a_{t_k} \geqslant \ldots,$$

имеющую по аксиоме Больцано—Вейерштрасса конечный предел, так как все они больше a_1.

Теорема 6. *Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности, обладающие следующими свойствами:*

1) если из $\{a_n\}$ выбрана подпоследовательность $\{a_{r_i}\}$, стремящаяся к пределу a, то подпоследовательность $\{b_{r_i}\}$ стремится к некоторому пределу b;

2) различным значениям пределов a соответствуют различные значения пределов b.

Тогда, если $\{b_n\}$ имеет определенный предел, то и $\{a_n\}$ также имеет определенный предел.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Действительно, если бы последовательность $\{a_n\}$ не имела определенного предела, то мы могли бы выделить из нее подпоследовательности, имеющие различные пределы a, которым соответствовали бы и различные значения b, что противоречит существованию определенного значения предела для $\{b_n\}$.

Теорема 7. *Если $\{a_n\}$ — некоторая последовательность и $\{b_n\}$ — бесконечно возрастающая неограниченная последовательность, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}, \tag{1}$$

в предположении, что второй предел существует.

Доказательство. Обозначим через l предел, стоящий в правой части равенства (1). Тогда возможно найти такое число N, что при $n > N$ всегда

$$\left| \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Другими словами, все дроби

$$\frac{a_{N+1} - a_N}{b_{N+1} - b_N},\ \frac{a_{N+2} - a_{N+1}}{b_{N+2} - b_{N+1}},\ \ldots,\ \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

содержатся между $l - \frac{\varepsilon}{2}$ и $l + \frac{\varepsilon}{2}$. Вместе с тем, поскольку все знаменатели положительны, будем иметь

$$\left| \frac{a_n - a_N}{b_n - b_N} - l \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возьмем N достаточно большим для того, чтобы имело место не только последнее неравенство, но и неравенство $b_N > 0$, что всегда возможно, потому что по условию $\{b_n\}$ бесконечно возрастает. На том же основании, при фиксированном N можно выбрать n таким, чтобы число $\frac{\varepsilon}{2} b_n$ превзошло абсолютную величину числа $a_N - l b_N$ и затем при возрастании n постоянно оставалось бóльшим последнего числа. Замечая теперь, что

$$\frac{a_n}{b_n}-l=$$

$$=\frac{a_N-lb_N}{b_n}+\left(1-\frac{b_N}{b_n}\right)\left(\frac{a_n-a_N}{b_n-b_N}-l\right),$$

непосредственно находим, что

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<\varepsilon,\text{ т. е. }\lim\frac{a_n}{b_n}=l.$$

Следствие 1. *Если некоторая последовательность стремится к конечному пределу, то к тому же пределу стремится и среднее арифметическое и среднее геометрическое ее первых n членов.*

В самом деле, на основании последней теоремы мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n, \qquad (2)$$

в предположении, что предел в правой части существует.

Ниже мы увидим (пример 3° следующего раздела), что

$$\lim_{n\to\infty}(\log_b a_n)=\log_b(\lim_{n\to\infty}a_n).$$

Считая это доказанным и заменяя в предыдущем равенстве a_n на $\log_b a_n$, получим

$$\lim_{n\to\infty}(\log_b\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\lim_{n\to\infty}(\log_b a_n),$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}=\lim_{n\to\infty}a_n, \qquad (3)$$

в предположении, что предел в правой части равенства существует.

Следствие 2. *Если в некоторой последовательности* $\{a_n\}$ *отношение* $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ *стремится к некоторому конечному пределу, то к этому же пределу стремится и* $\sqrt[n]{a_n}$.

Действительно, стоит лишь заменить в равенстве (3) a_n на $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, чтобы получить

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}},$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}\left(=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\right). \qquad (4)$$

Примеры вычисления пределов

1°. Пусть нам дано положительное число a и требуется найти предел a^n при возрастании n до бесконечности. При $a=1$ имеем всегда $a^n=1$. При $a<1$ имеем $a^n=a^{n-1}\cdot a<a^{n-1}$, т. е. последовательность $\{a^n\}$ монотонно убывает и поэтому, в силу аксиомы Больцано—Вейерштрасса должна стремиться к конечному пределу $l\geqslant 0$. Но из равенства $a^n=a^{n-1}\cdot a$ при переходе к пределу следует, что $l=la$, т. е. $(a-1)l=0$, откуда $l=0$. При $a>1$ имеем $a^n=a^{n-1}\cdot a>a^{n-1}$. Значит, последовательность $\{a_n\}$, монотонно возрастая вместе с n, должна стремиться к конечному или бесконечному пределу; но этот предел конечным быть не может, потому что он должен быть положительным числом l, а предыдущее равенство при переходе к пределу дает $l=la$, откуда $l=0$. Итак,

$$\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}0\text{ при }a<1,\\ 1\text{ при }a=1,\\ +\infty\text{ при }a>1.\end{cases}$$

2°. Допустим, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ и пусть b — некоторое заданное положительное число. Найдем предел последовательности $\{b^{a_n}\}$. Предположим сперва, что b меньше единицы и обозначим через α_n абсолютную величину a_n-a: $\alpha_n=|a_n-a|$. Если задано некоторое сколь угодно малое положительное число ε, то на основании предыдущего примера можно найти такое число m, чтобы $(1-\varepsilon)^m$ было меньше b. Не изменяя m, выберем теперь n таким, чтобы α_n было меньше $1/m$ и оставалось таким при дальнейшем возрастании n (это возможно, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$).

Тогда будем иметь

$$1-b^{\alpha_n}<1-(1-\varepsilon)^{m\alpha_n}<1-(1-\varepsilon)=\varepsilon.$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}b^{\alpha_n}=1,$$

и, значит, $\lim\limits_{n\to\infty}b^{a_n}=b^a$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}b^{a_n}=$ $=b^{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$.

При $b>1$ можно написать

$$\lim_{n\to\infty} b^{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b^{-a_n}} = \frac{1}{b^{-a}} = b^a.$$

3°. Считая, что последовательность $\{a_n\}$ стремится к пределу a, найдем предел последовательности $\{\log_b a_n\}$. Положим $\log_b a_n = c_n$. Тогда $a_n = b^{c_n}$. Если $\{c_n\}$ стремится к пределу c, то, согласно примеру 2°, последовательность $\{a_n\}$ стремится к пределу b^c. Поэтому (по теореме 6) справедливо и обратное — если существует предел $\{a_n\}$, то существует и предел $\{c_n\}$, причем

$$a = b^c, \quad c = \log_b a.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (\log_b a_n) = \log_b (\lim_{n\to\infty} a_n).$$

4°. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $a_n>0$ и $\{b_n\}$ стремятся соответственно к пределам a и b. Найдем предел последовательности $\{a_n^{b_n}\}$. Полагая $c_n = a_n^{b_n}$, имеем

$$\log_2 c_n = b_n \log_2 a_n,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \log_2 c_n = \log_2 \lim_{n\to\infty} c_n = b \log_2 a = \log_2 a^b.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = (\lim_{n\to\infty} a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

5°. Исследуем теперь последовательность $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$.

Прежде всего, докажем некоторые неравенства. Пусть $x_1, x_2, x_3, \dots$ — некоторые положительные числа, меньшие 1. Обозначим через $s_{n,r}$ сумму произведений из n первых чисел данной последовательности по r сомножителей в каждом:

$$s_{n,1} = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$
$$s_{n,2} = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + \dots + x_{n-1}x_n$$
$$s_{n,n} = x_1x_2x_3\dots x_n.$$

Из правила умножения многочленов вытекает, что

$$(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n) = 1 - s_{n,1} + s_{n,2} - \dots + (-1)^n s_{n,n}. \qquad (5)$$

Покажем, что всегда можно записать равенство

$$(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n) = 1 - s_{n,1} + s_{n,2} - \dots + (-1)^r \Theta s_{n,r}, \qquad (6)$$

где Θ лежит между нулем и единицей. Иными словами, если в правой части равенства (5) опустить все члены, следующие за $s_{n,r}$ при данном r, то получим число, меньшее или большее, чем то, которое находится в левой части, в зависимости от того, будет ли r нечетным или четным. Воспользуемся методом математической индукции. Нам достаточно доказать, что равенство (6), очевидно справедливое при $n=r$, останется справедливым при замене $n \geqslant r$ на $n+1$, если оно выполняется при каком-нибудь n. Умножая обе части равенства (6) на $1-x_{n+1}$, получим

$$(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{n+1}) = 1 - s_{n,1} + s_{n,2} - \dots + (-1)^r \Theta s_{n,r} - x_{n+1} + x_{n+1}s_{n,1} - \dots + (-1)^{r-1} x_{n+1} \times s_{n,r-1} + (-1)^r \Theta x_{n+1} s_{n,r}.$$

Замечая, что

$$s_{n+1,r} = s_{n,r} + x_{n+1}s_{n,r-1},$$

находим

$$(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{n+1}) = 1 - s_{n+1,1} + s_{n+1,2} - \dots + (-1)^{r-1} \times s_{n+1,r-1} + (-1)^r (x_{n+1}s_{n,r-1} + \Theta(1-x_{n+1})s_{n,r}).$$

Величина в скобках, очевидно, положительна и не превосходит

$$x_{n+1}s_{n,r-1} + (1-x_{n+1})s_{n,r} = s_{n+1,r} - x_{n+1}s_{n,r} < s_{n+1,r}.$$

Поэтому ее можно представить в виде $\Theta' s_{n+1,r}$, где Θ' лежит между нулем и единицей, что и требовалось доказать.

В частности, из формулы (6) при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ и $r=1$ следует, что

$$(1-x)^n > 1 - nx, \qquad (7)$$

поскольку в этом случае $s_{n,1} = nx$.

Воспользуемся теперь формулами

(6) и (7) для анализа последовательности $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Из формулы (7) при $x=\frac{1}{n^2}$ вытекает, что

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n>1-\frac{1}{n}, \text{ т. е.}$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n}.$$

Замечая, далее, что

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \qquad (8)$$

получаем

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=a_{n-1}.$$

Стало быть, последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает. Но по той же формуле (6)

$$(1-x)^n>1-\frac{n}{1}x+$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3$$

и, в частности, при $x=\frac{1}{n}$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n>\frac{n^2-1}{3n^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

А отсюда с помощью равенства (8) находим, что

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}>\frac{1}{3}, \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<3.$$

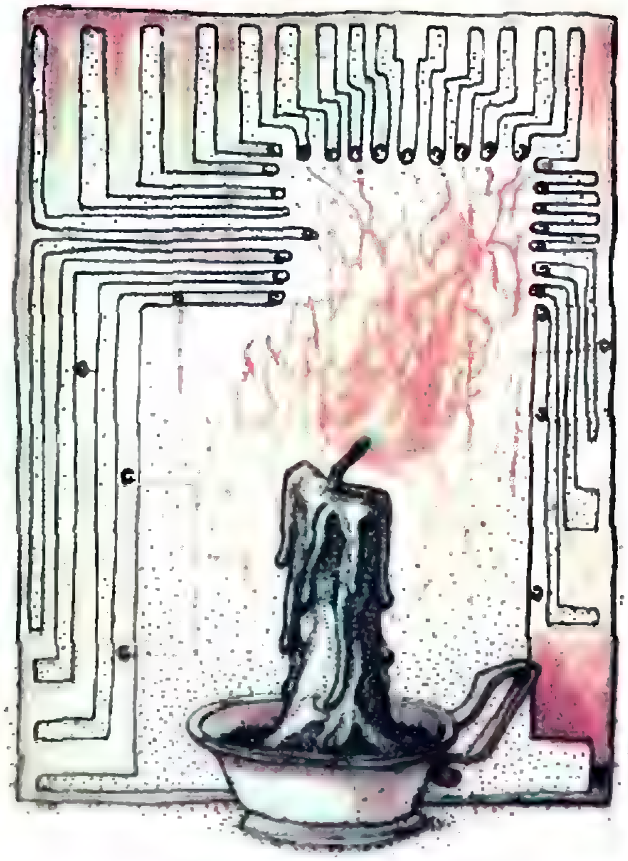
Таким образом, мы видим, что члены $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, монотонно возрастая вместе с n, не могут превзойти числа 3. Поэтому последовательность $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ стремится к конечному пределу. Этот предел обозначают через e. В курсах математического анализа доказывается, что число e иррационально и, более того, трансцендентно, т. е. не является корнем никакого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Справедливо приближенное равенство

$$e\approx 2{,}718281828459045.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислите следующие пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{(n+1)^2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+2}}{n+2}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2+3-\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\left(a+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots\right.$ $\left.\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2\right)$;
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}$;
8. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$;
9. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})$;
10. $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+1}-n)$;
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{4}{3}}-(n^2-1)^{\frac{2}{3}}\right)$.



Лаборатория „Кванта"

Электрическое действие пламени

Кандидат физико-математических наук
В. КОЗЛОВСКИЙ

В одном из экспериментов, проведенных известнейшим физиком девятнадцатого столетия У. Томсоном (лордом Кельвином), было обнаружено, что помещенная в электрическое поле горящая спиртовка приобретает электрический заряд*). Во время опыта спиртовка помещалась на изолирующую подставку, укрепленную на медной пластинке. Над спиртовкой располагалась цинковая труба, в которую направлялось пламя. Когда труба и пластинка соединялись проводником, спиртовка приобретала положительный потенциал. Если же пластинка и труба изготавливались из одного металла, электризации спиртовки не происходило.

Наблюдаемый эффект Томсон объяснял так. Контакт разнородных металлов обусловливает появление электрического поля. Под действием этого поля происходит некоторое смещение положительных и отрицательных зарядов внутри спиртовки. В результате поднимающаяся струя горячего воздуха уносит заряд одного знака, а сама спиртовка оказывается носителем заряда противоположного знака.

Этот опыт легко воспроизвести, например в школьном физическом кабинете. Для простоты пластинку и трубу можно сделать из одного материала, а для создания разности потенциалов использовать батарею (рис. 1). Но прежде чем начать экспериментировать, давайте рассчитаем, какой потенциал приобретет спиртовка. Это сделать нетрудно, если спиртовку представить проводящим шариком. Поскольку поле практически не проникает в глубь проводящего цилиндра, нижний срез цилиндра можно считать эквипотенциальной плоскостью, потенциал которой равен потенциалу цилиндра. Таким образом, спиртовка оказывается в почти однородном поле, образованном плоскостями, находящимися под напряжением батареи.

На поверхности спиртовки появляется заряд, плотность которого изме-

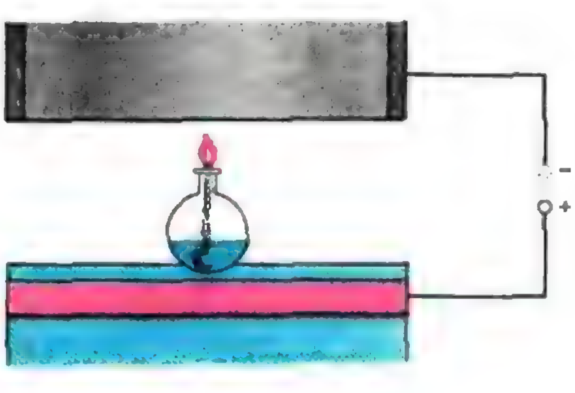


Рис. 1.

---

*) W. Thomson. Reprint of papers on electrostatics and magnetism. London. Macmillan. 1872.

няется с широтой (угол $\pi/2-\theta$ на рисунке 2; направление внешнего поля принимается за полярную ось). Для расчета величины плотности заряда примем, что нейтральный шарик содержит однородные объемные заряды одной и той же величины, но противоположных знаков. Центры шариков смещаются во внешнем поле в противоположных направлениях на одно и то же микроскопическое расстояние, что приводит к появлению заряда на поверхности, где нет их взаимной компенсации. Пламя будем считать небольшим по размерам и почти не искажающим внешнее поле.

Воспользуемся тем, что однородно заряженный с объемной плотностью ϱ шар создает внутри себя в точке на расстоянии r от центра поле напряженностью

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_r}{r^2}=\frac{\varrho r}{3\varepsilon_0},$$

где ε_0 — электрическая постоянная. Это поле всего заряда, расположенного внутри сферы радиусом r, в то время как сферические слои бóльшего радиуса здесь поля не создают. В зависимости от знака ϱ электрическое поле направлено от центра шара ($\varrho>0$) или к центру ($\varrho<0$).

Рассмотрим небольшую кольцевую площадку ΔS на поверхности сферы, ограниченную двумя окружностями, соответствующими углам θ и $\theta+\Delta\theta$. Когда центр сферы O переходит в новое положение O', площадка прочерчивает скошенный цилиндр, объем которого

$$\Delta V=\Delta S\cdot OO'\cos\theta.$$

Если содержащийся в этом цилиндре заряд $\varrho\Delta V$ мы разделим на площадь основания ΔS, получим поверхностную плотность

$$\sigma=\varrho\cdot OO'\cos\theta.$$

Величину перемещения OO' определим из условия отсутствия поля внутри проводника (рис. 3). Напряженность собственного поля в некоторой точке M складывается из напряженностей полей каждого из двух противоположно заряженных шаров. Концы векторов слагаемых полей и равнодействующего поля обозначим K, L и R соответственно. В треугольниках MOO' и KRM углы RKM и OMO' равны, а образующие их стороны пропорциональны, значит, эти треугольники подобны. Из подобия следует, что равнодействующее поле параллельно линии центров сфер, а его величина равна

$$\frac{E\cdot OO'}{r}=\frac{\varrho\cdot OO'}{3\varepsilon_0}.$$

Таким образом, собственное поле одинаково для всех точек проводящего шара и может всюду компенсировать однородное внешнее поле E_0. Отсюда находим плотность наведенного заряда в зависимости от напряженности внешнего поля:

$$E_R=E_0\Rightarrow\varrho=\frac{3\varepsilon_0E_0}{OO'}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sigma=\varrho\cdot OO'\cos\theta=3\varepsilon_0E_0\cos\theta.$$

Продолжим наши рассуждения. Пламя располагается в верхнем полюсе сферы ($\theta=0$), где плотность наведенного заряда имеет максимальное значение. По мере горения с шара стекает заряд одного знака и на шаре накапливается заряд противоположного знака. Этот заряд — обозначим его q — распределяется по поверхности шара — радиусом a — с постоянной плотностью

$$\sigma'=\frac{q}{4\pi a^2},$$

поскольку поле внутри шара должно отсутствовать. Нарастание плотности

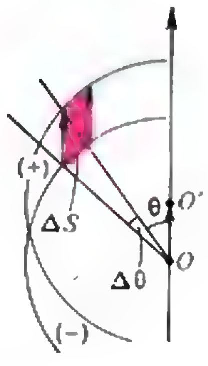


Рис. 2.

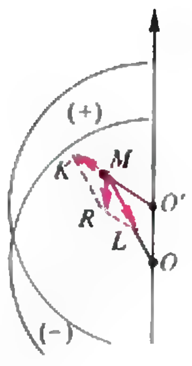


Рис. 3.

σ' прекращается, когда полюс становится нейтральным, что происходит при величине заряда шара

$$q'_m = 4\pi a^2 \sigma_m = 12\pi\varepsilon_0 a^2 E_0.$$

Этому максимальному заряду соответствует потенциал изолированного шара

$$U'_m = \frac{q'_m}{4\pi\varepsilon_0 a} = 3aE_0.$$

Напряженность внешнего поля определяется напряжением батареи U и расстоянием l между пластинкой и основанием трубы*):

$$E_0 = \frac{U}{l}.$$

Окончательно

$$U'_m = \frac{3aU}{l}.$$

В заключение заметим, что этот опыт можно модифицировать. Так, одним из вариантов является постепенная нейтрализация предварительно заряженного шара вследствие уноса заряда пламенем. Пример из жизни — открытый огонь на поверхности земли (скажем, от горения нефтяных скважин) приводит к переносу заряда с поверхности в атмосферу, что влияет на образование осадков.

---

*) Внешнее поле в отсутствие шара может быть принято однородным и остается таковым при внесении шара, если расстояние между «обкладками» существенно превышает его размеры.

Зачем нужна статистика?

(Начало см. на с. 20)

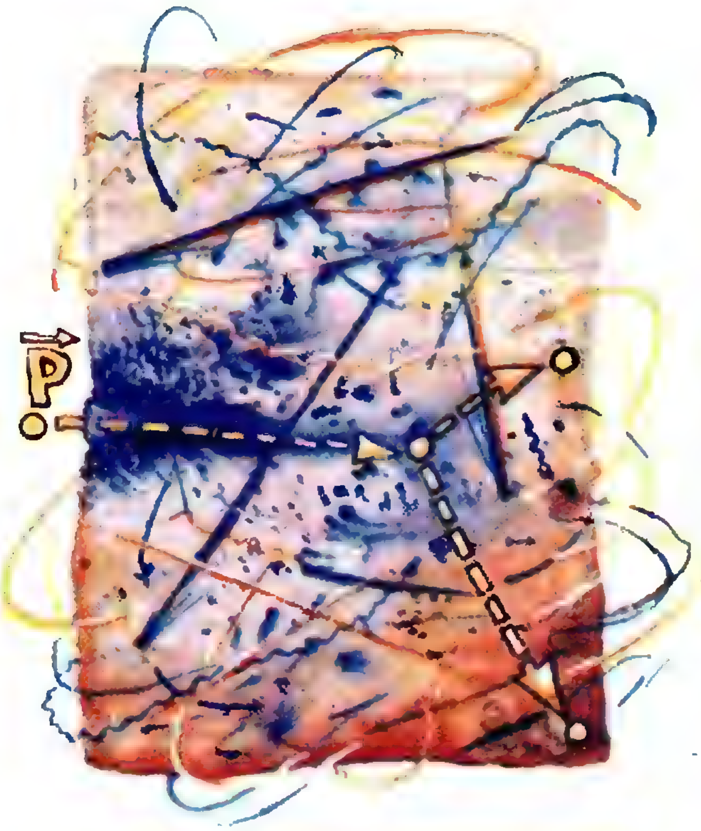
кладная на сумму менее чем в 5 фунтов стерлингов. Проверка каждой накладной может потребовать сравнения ее с общей ведомостью поставок, и на это уходит в среднем около двух минут. Таким образом, на проверку всех 5123 накладных потребовалось бы примерно 170 человеко-часов. С учетом накладных расходов затраты составили бы сотни фунтов. Такой контроль вряд ли был бы экономически оправдан. Если же сделать выборку, скажем, 50 накладных, стоимость их проверки составила бы примерно 1 % стоимости полной проверки. Если все оказывается в порядке или обнаруживается лишь небольшое число незначительных ошибок, то все 5123 накладных следует оплатить. Если в выборке обнаруживаются существенные ошибки, то, вероятно, лучше заплатить за проверку всех накладных. Здесь есть над чем подумать статистику! Например, насколько велики должны быть ошибки, чтобы можно было принять решение о проверке всех накладных? Статистик может также дать они могут оказаться нетипичным набором, подготовленным возможно, неопытным клерком, выполняющим работу вместо более компетентного больного сотрудника.

В идеале нужно произвести *случайную выборку*, когда любая насовет, как произвести выборку: вряд ли рекомендуется брать последовательно 50 накладных в том порядке, как их получила фирма, поскольку кладная может попасть в данную выборку с равной вероятностью. Были разработаны различные приемы получения случайных или эффективно случайных выборок. Существуют, в частности, компьютеры, которые на основе эффективно случайных выборок определяют выигрышные комбинации чисел в лотереях.

Мы совершили краткий экскурс в мир статистики. Многих важных тем и практических применений мы не касались. Например, влияния компьютеров на характер и способ решения задач.

В заключение предлагаем поразмыслить над тем, как поставить эксперимент, чтобы выяснить, есть ли какое-либо статистическое доказательство, что 13 является, как это часто считается, числом несчастливым, или оно — число счастливое.

Перевод с английского А. Якубова



Практикум абитуриента

Законы сохранения в релятивистской динамике

А. КОРЖУЕВ

Некоторое время тому назад в программе по физике для поступающих в вузы появился новый раздел — «Элементы теории относительности». Так что теперь на вступительном экзамене вам могут встретиться задачи и на эту тему.

Рассмотрим несколько конкретных задач на движение тел с так называемыми релятивистскими скоростями, т. е. со скоростями, сравнимыми со скоростью света. Для их решения нам понадобятся хорошо известные в классической механике законы сохранения импульса и энергии, но записанные в специальной форме. Так, релятивистский импульс тела с массой покоя m_0, движущегося со скоростью v, вычисляется по формуле

$$\vec{p}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

а полная энергия —

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

где c — скорость света. Заметим, что эти формулы справедливы лишь для частиц с отличной от нуля массой покоя. А, например, для фотона — частицы, движущейся со скоростью c и имеющей нулевую массу покоя, энергия записывается в виде

$$E=h\nu,$$

а импульс —

$$p=\frac{h\nu}{c},$$

где $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, ν — частота излучения.

А теперь — задачи.

Задача 1. *При аннигиляции медленно движущихся электрона и позитрона образуются два гамма-кванта. Под каким углом друг к другу они разлетаются? Какова частота возникшего излучения?*

В рассматриваемом процессе

$${}^{1}_{0}p+{}^{-1}_{0}e\to 2\gamma$$

выполняются законы сохранения импульса и энергии. Поскольку начальные скорости частиц малы, по закону сохранения импульса получим

$$0=\frac{h\nu_1}{c}-\frac{h\nu_2}{c},$$

т. е.

$$\nu_1=\nu_2.$$

При этом очевидно, что угол разлета равен 180° (рис. 1), ибо только в этом случае суммарный импульс частиц после взаимодействия может быть равным нулю.

Теперь запишем закон сохранения энергии:

$$2m_0c^2=h\nu_1+h\nu_2,$$

откуда, учитывая, что $\nu_1=\nu_2=\nu$,

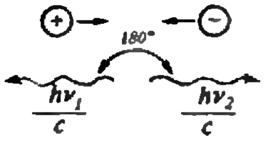


Рис. 1.

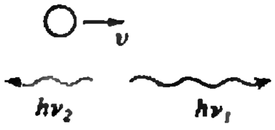


Рис. 2.

найдем

$$\nu = \frac{m_0c^2}{h}.$$

Задача 2. *Летевшая со скоростью $v=0{,}8\,c$ нейтральная частица распадается на два фотона, движущихся затем в противоположных направлениях (рис. 2). Каково отношение частот этих квантов?*

Вновь применим законы сохранения импульса и энергии.

Согласно закону сохранения импульса, начальный импульс частицы равен сумме проекций импульсов фотонов на первоначальное направление движения частицы:

$$\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{h\nu_1}{c} - \frac{h\nu_2}{c},$$

а по закону сохранения энергии полная энергия частицы равна суммарной энергии квантов:

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = h\nu_1 + h\nu_2.$$

Подставляя сюда значение скорости $v=0{,}8\,c$ и умножая обе части первого уравнения на c, получим

$$\frac{4}{3}\,m_0c^2 = h\nu_1 - h\nu_2,$$

$$\frac{5}{3}\,m_0c^2 = h\nu_1 + h\nu_2.$$

Вычитая и складывая полученные уравнения, найдем частоты излучений:

$$\nu_1 = \frac{3m_0c^2}{2h}, \quad \nu_2 = \frac{m_0c^2}{6h}$$

и искомое отношение:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = 9.$$

Задача 3. *При распаде нейтральной частицы образовались два фотона, движущихся под углами $\alpha_1=30°$ и $\alpha_2=60°$ к первоначальному направлению движения частицы. Какова была ее скорость?*

В этом случае закон сохранения импульса необходимо записать в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси (рис. 3):

$$\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{h\nu_1}{c}\cos\alpha_1 + \frac{h\nu_2}{c}\cos\alpha_2, \quad (1)$$

$$0 = \frac{h\nu_1}{c}\sin\alpha_1 - \frac{h\nu_2}{c}\sin\alpha_2. \quad (2)$$

Закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = h\nu_1 + h\nu_2. \quad (3)$$

Из уравнения (2) с учетом того, что $\sin\alpha_1 = 1/2$ и $\sin\alpha_2 = \sqrt{3}/2$, получим

$$\nu_1 = \nu_2\sqrt{3}.$$

Подставим этот результат в уравнения (1) и (3):

$$\frac{m_0vc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 2h\nu_2, \quad \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = h\nu_2(\sqrt{3}+1)\ .$$

Теперь разделим полученные равенства одно на другое и найдем

$$\frac{c}{v} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Окончательно

$$v = \frac{2c}{\sqrt{3}+1} \approx 0{,}73\ c.$$

Задача 4. *Частица, двигавшаяся первоначально со скоростью $v=0{,}8\,c$, распадается на два фотона. Найдите минимальный угол разлета этих фотонов.*

Применив законы сохранения энергии и импульса, получим (рис. 4)

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = h\nu_1 + h\nu_2,$$

$$\left(\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 = \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 -$$

$$- \frac{2h^2\nu_1\nu_2\cos\beta}{c^2}, \text{ где } \beta = 180° - \alpha.$$

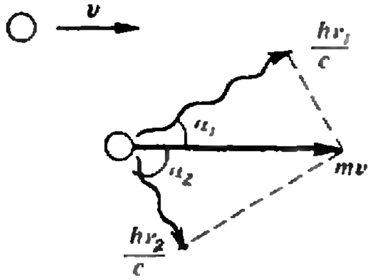


Рис. 3.

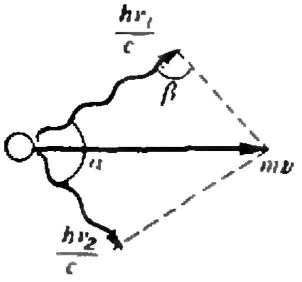


Рис. 4.

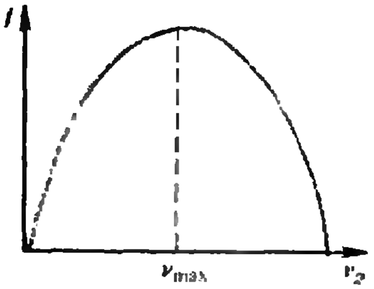


Рис. 5.

Подставим сюда $v=0{,}8\,c$ и умножим второе равенство на c:

$$\frac{5}{3}m_0c^2=h\nu_1+h\nu_2,$$

$$\frac{16}{9}m_0^2c^4=(h\nu_1)^2+(h\nu_2)^2+2h^2\nu_1\nu_2\cos\alpha.$$

Выделим во втором уравнении полный квадрат:

$$\frac{16}{9}m_0^2c^4=(h\nu_1+h\nu_2)^2-2h^2\nu_1\nu_2(1-\cos\alpha).$$

Так как сумма энергий фотонов постоянна и равна $5/3\ m_0c^2$, то

$$2h^2\nu_1\nu_2(1-\cos\alpha)=m_0^2c^4,$$

т. е.

$$1-\cos\alpha=\frac{m_0^2c^4}{2h^2\nu_1\nu_2}.$$

Чтобы угол разлета α, а значит, и разность $1-\cos\alpha$ были минимальными, произведение $\nu_1\nu_2$ должно быть максимальным. Как известно из математики, произведение двух чисел, сумма которых постоянна (ибо $h\nu_1+h\nu_2=5/3m_0c^2$), будет максимальным, когда сомножители равны: $\nu_1=\nu_2$. Это же можно доказать более строго. Запишем произведение $\nu_1\nu_2$, а точнее $h\nu_1h\nu_2$, в виде $(5/3m_0c^2-h\nu_2)h\nu_2$ и исследуем на максимум функцию

$$f(\nu_2)=\left(\frac{5}{3}m_0c^2-h\nu_2\right)h\nu_2=\frac{5}{3}m_0c^2h\nu_2-h^2\nu_2^2.$$

Ее графиком будет парабола (рис. 5), которая достигает максимума в точке

$$\nu_2=\frac{5}{6}\frac{m_0c^2}{h}.$$

Тогда

$$h\nu_1=\frac{5}{3}m_0c^2-\frac{5}{6}m_0c^2=\frac{5}{6}m_0c^2,$$

а искомое произведение

$$\nu_1\nu_2=\frac{25}{36}\frac{m_0^2c^4}{h^2}.$$

Подставляя этот результат в выражение для разности $1-\cos\alpha$, получим

$$1-\cos\alpha_{\min}=\frac{18}{25}=0{,}72,$$

откуда

$$\alpha_{\min}=\arccos 0{,}28\approx 47^\circ.$$

Задача 5. *Может ли свободный электрон поглотить фотон?*

Опять воспользуемся законами сохранения импульса и энергии. Пусть электрон до поглощения фотона покоился, а затем приобрел скорость v. Тогда, согласно закону сохранения энергии,

$$m_0c^2+h\nu=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

а согласно закону сохранения импульса,

$$\frac{h\nu}{c}=\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Найдя $h\nu$ из второго уравнения и подставив его в первое, получим

$$m_0c^2+\frac{m_0vc}{\sqrt{1-v^2/c}}=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

После преобразований придем к уравнению

$$(c-v)^2=c^2-v^2.$$

Формальными его решениями являются значения скорости $v=c$ и $v=0$. Другими словами, скорость электрона должна быть равна либо скорости света c, что невозможно, либо нулю, что не имеет физического смысла, поскольку в этом случае частота фотона оказывается равной нулю.

Теперь попробуйте решить несколько подобных задач самостоятельно.

Упражнения

1. Докажите, что покоящийся свободный электрон не может излучить фотон.

2. При распаде нейтральной частицы образовались два фотона, двигавшиеся под углами $\alpha=60^\circ$ и $\beta=90^\circ$ к первоначальному направлению движения частицы. Какова ее первоначальная скорость?

3. Частота фотона, налетающего на покоящийся электрон, ν_1, скорость электрона после взаимодействия $0{,}6\ c$. На сколько изменилась частота фотона и каков его угол рассеяния?

Вычисления в тригонометрии

Как и в прошлом номере, предлагаем вам для самостоятельного решения задачи, но на этот раз по тригонометрии.

Найдите значения выражений:

1. $\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$.

2. $\operatorname{tg}435^\circ+\operatorname{tg}375^\circ$. 3. $\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}195^\circ$.

4. $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{12}-\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$.

5. $\dfrac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ-\sin 39^\circ\cos 21^\circ}$.

6. $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}$.

7. $\dfrac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cos 41^\circ-\cos 49^\circ\cos 19^\circ}$.

8. $\dfrac{\cos 66^\circ\cos 6^\circ+\cos 84^\circ\cos 24^\circ}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ+\cos 85^\circ\cos 25^\circ}$.

9. $\sin^2 70^\circ\sin^2 50^\circ\sin^2 10^\circ$.

10. $\sin 15^\circ$; $\cos 15^\circ$. 11. $\sin 18^\circ\sin 54^\circ$.

12. $\operatorname{ctg}10^\circ\operatorname{ctg}50^\circ\operatorname{ctg}70^\circ$.

13. $\dfrac{\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ}{\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ}$.

14. $\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$.

15. $\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{10}$. 16. $8\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$.

17. $\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{tg}15^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ+\operatorname{ctg}15^\circ$.

18. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$. 19. $\cos 36^\circ-\sin 18^\circ$.

20. $\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$.

21. $\sin 20^\circ\cos 50^\circ\sin 60^\circ\cos 10^\circ$.

22. $\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}$.

23. $\dfrac{\cos 68^\circ\cos 8^\circ-\cos 82^\circ\cos 22^\circ}{\cos 53^\circ\cos 23^\circ-\cos 67^\circ\cos 27^\circ}$.

24. $\dfrac{\cos 70^\circ\cos 10^\circ+\cos 80^\circ\cos 20^\circ}{\cos 69^\circ\cos 9^\circ+\cos 81^\circ\cos 21^\circ}$.

25. $\dfrac{\cos 67^\circ\cos 7^\circ-\cos 83^\circ\cos 23^\circ}{\cos 128^\circ\cos 68^\circ-\cos 38^\circ\cos 22^\circ}-\operatorname{tg}164^\circ$.

26. $\dfrac{\sin 22^\circ\cos 8^\circ+\cos 158^\circ\cos 98^\circ}{\sin 23^\circ\cos 7^\circ+\cos 157^\circ\cos 97^\circ}$.

27. $\cos\frac{\pi}{33}\cos\frac{2\pi}{33}\cos\frac{4\pi}{33}\cos\frac{8\pi}{33}\cos\frac{16\pi}{33}$.

28. $\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}$.

29. $\operatorname{tg}20^\circ\cos^{-1}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\cos^{-1}40^\circ\operatorname{tg}60^\circ\times\cos^{-1}60^\circ\operatorname{tg}80^\circ\cos^{-1}80^\circ$.

30. $\sin 10^\circ\sin 20^\circ\sin 30^\circ\sin 40^\circ\sin 50^\circ\sin 60^\circ\times\sin 70^\circ\sin 80^\circ$.

31. $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\times\cos\frac{7\pi}{15}$.

32. $\operatorname{ctg}80^\circ\operatorname{ctg}70^\circ+\operatorname{ctg}70^\circ\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ\times\operatorname{ctg}80^\circ$.

33. $\operatorname{ctg}70^\circ+4\cos 70^\circ$.

34. $\cos 67^\circ30'$. 35. $\cos 75^\circ$.

36. $\cos 24^\circ+\cos 48^\circ-\cos 84^\circ-\cos 12^\circ$.

37. $\dfrac{96\sin 80^\circ+\sin 65^\circ\sin 35^\circ}{\sin 20^\circ+\sin 50^\circ+\sin 110^\circ}$.

38. $\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ$.

39. $\dfrac{\operatorname{ctg}15^\circ+1}{2\operatorname{ctg}15^\circ}$.

40. $\sin 160^\circ\cos 110^\circ+\sin 250^\circ\cos 340^\circ+\operatorname{tg}110^\circ\operatorname{tg}340^\circ$.

41. $96\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6}$.

42. $\sin\left(\frac{7\pi}{2}-2\alpha\right)\cos\left(\frac{6\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha,\quad \alpha=\frac{3\pi}{16}$.

43. $\dfrac{\sin 110^\circ\sin 250^\circ+\cos 540^\circ\cos 290^\circ\cos 430^\circ}{\cos^2 1260^\circ}$.

44. $\dfrac{1}{\cos 290^\circ}+\dfrac{1}{\sqrt{3}\cos 250^\circ}$.

45. $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$.

46. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}$. 47. $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$.

Публикацию подготовил Б. Рудой

Аномальные флексагоны

И. КАН

Одной из наиболее интересных и удивительных головоломок XX века является флексагон. Его нетрудно изготовить из бумаги при помощи клея и ножниц следующим образом.

Возьмите бумажную ленту шириной 3—5 см и такой длины, чтобы ее можно было разделить на 37 равносторонних треугольников, которые в дальнейшем для краткости будем именовать секторами. Заполните ленту числами, как на рисунке 1. Теперь согните ленту по линиям *A—A*, *B—B*,… …, *K—K*, накладывая «•» на «11»; «12»; и «12»; «7» на «7» и т. д.— одинаковые числа одно на другое. После сгиба по линии *K—K* длина ленты сократится уже почти вдвое. Продолжайте сгибать ленту, закрывая одинаковые числа: «6»—«6», «5»—«5», «4»—«4» и т. д. Осталась лента из 10 секторов. Чтобы свернуть ее в шестиугольник (а именно такую форму имеет флексагон), согните ленту еще три раза, каждый раз закрывая пару соседних двоек. Теперь тот конец ленты, который помечен числом «11», всуньте в другой конец, который имеет число «11» внутри, так, чтобы совместились друг с другом, во-первых, числа «11», а во-вторых, две «звездочки». Осталось склеить «звездочки», и флексагон готов (рис. 2).

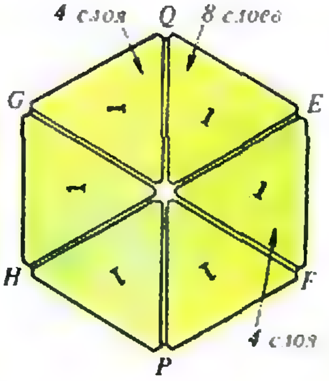


Рис. 2. Исходное положение флексагона.

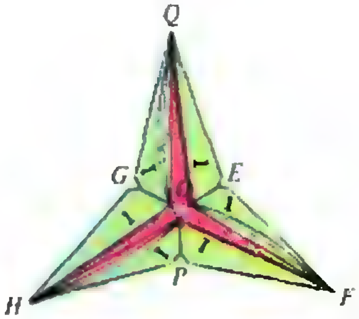


Рис. 3. Позиция «пропеллер».

Первое удивительное свойство флексагона состоит в том, что путем перегибаний от «единиц» наверху и «троек», которые сейчас на другой стороне флексагона, можно перейти к «двойкам». Для этого согните флексагон по линиям *OQ*, *OF*, *OH* (см. рис. 2) от себя, так чтобы точки *E*, *G*, *P* удалялись. Пусть эти точки сомкнутся в одну, тогда получится нечто похожее на трехлопастный пропеллер (рис. 3). Раскройте полученную фигуру спереди. Теперь на лицевой стороне флексагона оказываются «двойки», а на тыльной «единицы».

В качестве начального положения флексагона выберем такое, как на рисунке 2: на лицевой стороне — шесть «единиц», на обратной (тыльной) стороне — шесть «троек», причем под сектором *QOE* с «единицей» (заметьте, что это правый из двух верхних секторов *GOQ* и *QOE*) находится еще 7 слоев, а под соседними секторами — меньше (по 3 слоя).

Операцию, состоящую из последовательности всех сгибов, при помощи которых мы перешли от «единиц» и «троек» к

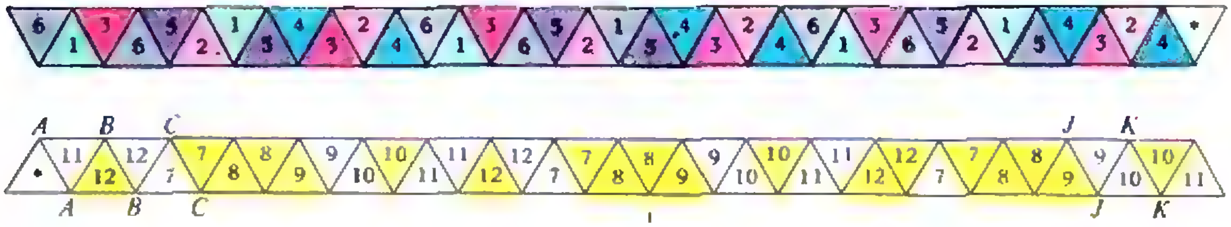


Рис. 1. Разметка и раскраска развертки флексагона.

«двойкам», обозначим через V. Необходимо следить за тем, чтобы при ее выполнении флексагон не поворачивался (иначе это приведет к путанице). Так, после применения V к начальному положению должен получиться флексагон, в котором большее количество слоев бумаги находится уже под левым из двух верхних секторов. Операцию, обратную к V (т. е. такую, что последовательное выполнение V и V^{-1} оставляет флексагон без изменений), естественно обозначить V^{-1}.

Совокупность шести чисел, которые одновременно раскрываются при выполнении операции V, называется плоскостью. Плоскости с числами «1», «2», «3» нами уже получены. Подумайте, как получить плоскости с числами от «4» до «12».

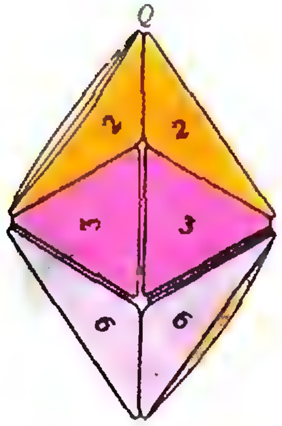


Рис. 4. Позиция «лодочка».

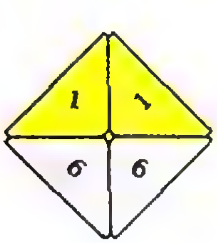


Рис. 5. Позиция «корзинка».

Если вы уже накопили некоторый опыт в «перелистывании» плоскостей, то наверняка удивитесь, узнав, что есть плоскости, помеченные сразу несколькими числами. Это и есть аномальные положения флексагона. К ним можно прийти следующим образом.

Операции U, W. Пусть флексагон находится в начальном положении (рис. 2). Согните его по линии PQ от себя. При этом «тройки» закрываются, а вершины G и E, H и F совмещаются попарно. Раскройте флексагон спереди, так чтобы получилась «лодочка» (рис. 4). Два верхних сектора, помеченных «двойками», опустите в середину, на две «тройки». Получится «корзинка» (рис. 5). Сложите «корзинку» пополам, накладывая «шестерку» на «шестерку» и «единицу» на «единицу». Раздвиньте вверху «лопасти», раскрывая «пятерки». Получается «перевернутый пропеллер» (рис. 3, «вверх ногами»). Если теперь этот «пропеллер» вы раскроете спереди, то тем самым закончите выполнение операции W (рис. 6), а если сзади — то будет выполнена операция U (рис. 7).

Две следующие операции носят тривиальный характер:

T — это поворот флексагона в его плоскости на 60° против часовой стрелки; *П* — это поворот флексагона в пространстве на 180° относительно его вертикальной оси симметрии PQ.

Теперь вы можете начать самостоятельные эксперименты с флексагоном. Рекомендуется записывать все выполненные операции, чтобы иметь возможность вернуться обратно от любого положения, к которому вы пришли. При работе с флексагоном вам пригодится следующее правило устранения аномалий (не являющееся, однако, алгоритмом): в любом аномальном положении следует искать те операции, которые как можно большее количество раз совмещают друг с другом секторá, помеченные одним и тем же числом. Так, в положении, изображенном на рисунке 7, наиболее целесообразно выполнить операцию U^{-1}, совмещающую сектора с «пятерками» (заметьте, что если операции U^{-1} и *П*U*П* одновременно применимы в данном положении, то результат их выполнения — один и тот же).

После некоторого количества экспериментов вы обнаружите, что наибольшую трудность представ-

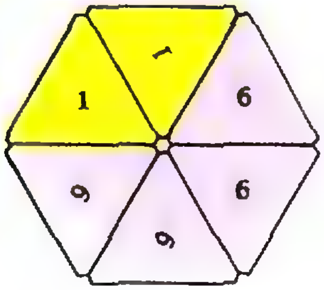


Рис. 6. Результат операции W.

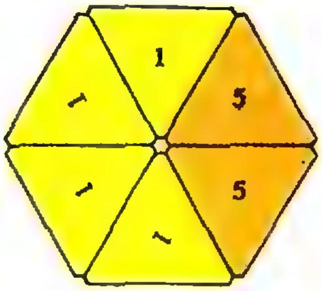


Рис. 7. Результат операции U.

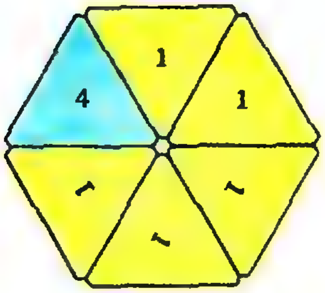


Рис. 8. Положение типа «5» — «1».

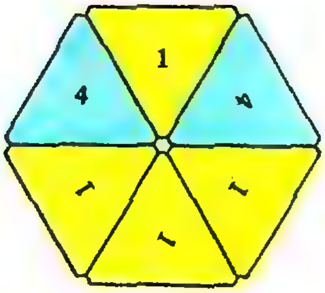


Рис. 9. Положение типа «4» — «2».

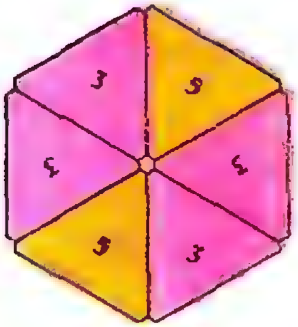
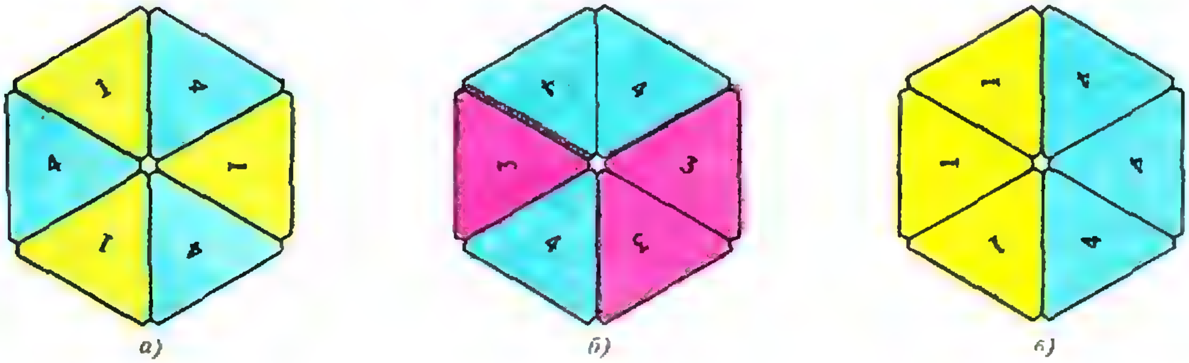


Рис. 10. Второй вариант положения типа «4» — «2».



а) *б)* *в)*

Рис. 11. Положения типа «3» — «3».

ляют собой такие аномалии, когда на одной из плоскостей только одно число отличается от остальных пяти чисел (такие аномалии назовем положениями типа «5» — «1»). К такой ситуации приводит, например, следующая последовательность операций, примененная к начальному положению: $TWUW^{-1}$ (рис. 8).

В флексагоне, который получился, не все плоскости аномальны, в чем легко убедиться, «перелистав» его с помощью преобразования V: плоскости, помеченные числами «5» и «8», присутствуют здесь в своем обычном виде. Постарайтесь обнаружить и другие положения типа «5» — «1», существенно (как именно?) отличающиеся от только что приведенного. Эти аномалии интересны тем, что последовательности операций для их устранения играют ключевую роль в алгоритме устранения любых аномалий (известном автору, но не приведенном здесь из-за недостатка места).

Рассмотрим теперь аномалии типа «4» — «2», т. е. когда в аномальном флексагоне на некоторой плоскости только два совпадающих числа отличаются от остальных четырех, также совпадающих. Две из таких аномалий даны на рисунках 6 и 7. Еще одна получится, если к начальному положению применить последовательность операций $T(WUW^{-1}T^2)^2$ (рис. 9). Положение на рисунке 10, также типа «4» — «2», попытайтесь получить самостоятельно.

Следующее положение (рис. 11, *а*) получается из начального по уже очевидной формуле $T(WUW^{-1}T^2)^3$, а положение на рисунке 11, *б* по формуле $V^2TW^{-2}\Pi W^{-1}\times$ $\times\Pi T^2W^{-1}V^{-1}$. На рисунке 11, *в* представлено еще одно положение типа «3» — «3», оставленное в качестве упражнения.

Какие еще интересные аномалии вам удастся получить? Признаюсь, мне не известен ответ на вопрос: можно ли на двух внешних плоскостях флексагона получить одновременно 12 различных чисел (если флексагон имеет 12 плоскостей)?

Олимпиады

XVIII Всероссийская олимпиада по математике и физике

С окончанием весенних школьных каникул завершилась и XVIII Всероссийская олимпиада школьников по математике, физике и химии, заключительный, четвертый этап которой проходил в этом году с 22 по 29 марта в Костроме, Нижнем Новгороде, Курске и Омске.

Общими организационными вопросами проведения Всероссийской олимпиады ведает ее Центральный оргкомитет, созданный Министерством образования Российской Федерации. В него вошли специалисты Министерства, видные ученые, преподаватели вузов и учителя-методисты. Подготовкой рекомендуемых конкурсных заданий четвертого этапа (как и третьего, областного) занимаются предметно-методические комиссии, образованные Оргкомитетом. Активное участие в их работе принимают студенты и аспиранты московских вузов.

Заключительный этап Всероссийской олимпиады проводится в четырех зонах: Северо-Западной, Центральной, Юго-Западной и зоне Сибири и Дальнего Востока. Каждая из них включает в себя около 20 территорий — областей, краев, республик,— и каждая из этих территорий посылает на четвертый этап олимпиады по одному победителю третьего этапа среди школьников 9, 10 и 11 классов. Кроме того, по персональным приглашениям в заключительном этапе участвуют победители конкурса «Задачник «Кванта», а также те участники заключительного тура предыдущей Всероссийской олимпиады и предыдущей Межреспубликанской олимпиады, которые были награждены дипломами I и II степени.

В каждом городе, где проходит заключительный этап Всероссийской олимпиады, для его проведения создаются оргкомитеты и жюри, в которые входят специалисты органов народного образования, преподаватели вузов, учителя, студенты и аспиранты. Со своей стороны, Центральный оргкомитет командирует своих представителей для работы в составе жюри олимпиады, для осуществления координации и обеспечения единства требований.

Каждый участник заключительного этапа олимпиады может познакомиться с результатами оценки его работы и обсудить возникшие вопросы с членами жюри.

Участники заключительного этапа, занявшие первые четыре места в своей возрастной группе (среди 9, 10 или 11 классов), а также обладатели дипломов I и II степени предыдущей Межреспубликанской олимпиады (которые участвуют в последнем этапе Всероссийской олимпиады вне конкурса), составляют команду своей зоны на предстоящую Межреспубликанскую олимпиаду. Кроме того, учащиеся 11-х классов, показавшие хорошие результаты на заключительном этапе, получают приглашения и рекомендации для поступления в Московский физико-технический институт.

Математика

Как обычно, состязания проводились в два дня, каждый день участникам предлагалось по 4 задачи. После формулировки задачи в скобках указано количество баллов, присуждавшихся за полное ее решение.

9 класс

Первый день

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3-5\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{6}{y}, \\ y^3-5\dfrac{x^2}{y}=\dfrac{6}{x}. \end{cases} \qquad (5)$$

2. Двое игроков по очереди ставят фишки на клетки доски 99×99. Игрок может ставить фишку на свободную клетку, если все соседние клетки свободны или если хотя бы на одну из соседних клеток уже поставил фишку соперник (клетки считаются соседними, если они имеют общую сторону). Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре? (7)

3. Окружность, вписанная в дельтоид $ABCD$ ($AB=BC$, $CD=AD$), касается его сторон AB, BC и AD в точках K, M и N соответственно. Диагональ AC пересекает отрезок MN в точке P. Докажите, что точки A, K, P и N лежат на одной окружности. (7)

4. План города имеет вид квадрата со стороной $(n-1)$, расчерченного на $(n-1)^2$ единичных квадратиков. Нужно открыть несколько автобусных (двусторонних) маршрутов так, чтобы каждый маршрут имел не более одного поворота и чтобы с любого перекрестка на любой другой можно было проехать, сделав не более одной пересадки. Каким наименьшим числом маршрутов можно обойтись? (9)

Второй день

5. Из шахматной доски вырезали
а) клетку $b2$,
б) клетки $b2$ и $g2$.

Можно ли, начав путь из клетки $c2$, обойти фишкой всю доску, побывав на каждой клетке по одному разу, если фишка каждым ходом передвигается в соседнюю клетку (клетки считаются соседними, если они имеют общую сторону)? а) (1); б) (5).

6. Решите в простых числах уравнение

$$2^{x+1}+y^2=z^2. \qquad (7)$$

7. На стороне BC треугольника ABC выбрали точки B_1 и C_1. Оказалось, что $BB_1=CC_1$ и $\angle BAB_1=\angle CAC_1$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный. (8)

8. В некоторой стране между городами существует авиационное сообщение. В стране $2k+1$ авиакомпания, причем первая осуществляет один рейс, вторая — два рейса и т. д. (каждый рейс связывает между собой два города). В стране существует закон, согласно которому из каждого города не может выполняться более одного рейса каждой авиакомпании. Компании решили по-новому поделить между собой все рейсы так, чтобы каждая авиакомпания осуществляла одинаковое число рейсов. Докажите, что это можно сделать, не нарушая закона. (11)

10 класс

Первый день

1. В квадрате 7×7 покрашены 19 клеток. Строка или столбец квадрата называются покрашенными, если в них содержится не менее четырех покрашенных клеток. Какое наибольшее количество покрашенных строк и столбцов может быть в квадрате? (5)

2. Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{a}{x}-\frac{b}{z}=c-zx,\\ &\frac{b}{y}-\frac{c}{x}=a-xy,\\ &\frac{c}{z}-\frac{a}{y}=b-yz, \end{aligned}\right.$$

где a, b, c — положительные параметры. (6)

3. а) В некоторых целочисленных точках положительного квадранта на плоскости расположено бесконечное число прожекторов. Каждый из них освещает угол со сторонами, параллельными осям координат и сонаправленными с ними. Докажите, что можно погасить все прожекторы, кроме конечного числа, так, что при этом все ранее освещенные точки плоскости останутся освещенными. (5)

б) Та же задача для прожекторов, освещающих трехгранные углы и расположенных в целочисленных точках положительного октанта в пространстве. (4)

4. Точки M и N — середины сторон CD и DE пятиугольника $ABCDE$, в котором $BC\parallel AD$ и $BD\parallel AE$, O — точка пересечения отрезков BN и AM. Докажите, что площади четырехугольника $MDNO$ и треугольника ABO равны. (9)

Второй день

5. Решите уравнение

$$x+\frac{92}{x}=[x]+\frac{92}{[x]}$$

($[x]$ — целая часть числа x). (5)

6. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Пусть O, O_1, O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABC, ABD и ADC соответственно. Докажите, что точки O, O_1, O_2 и A лежат на одной окружности. (7)

7. Рассматриваются наборы из n различных гирек. Масса каждой гирьки — целое число граммов, не превосходящее 21. При каком наименьшем n в любом таком наборе найдутся две пары гирек, уравновешивающие друг друга? (8)

8. См. задачу 8 для 9 класса. (11)

11 класс

Первый день

1. См. задачу 1 для 10 класса. (5)

2. См. задачу 2 для 10 класса. (6)

3. В стране несколько городов. Между некоторыми из них в одном направлении летают самолеты. Известно, что существует город, вылетев из которого нельзя, перелетая из города в город, побывать в каждом городе страны. Докажите, что часть городов может отделиться так, что ни в один из отделившихся городов нельзя будет попасть с помощью авиаперелетов ни из какого города оставшейся части. (8)

4. На плоскости задано конечное множество точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Известно, что для любых трех точек A, B и C из этого множества ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника ABC также принадлежит этому множеству. Найдите все такие множества. (10)

Второй день

5. Последовательность (a_n) задана рекуррентно:

$$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+\frac{1}{[a_n]},\ \text{если}\ n\geqslant 1$$

($[a_n]$ — целая часть числа a_n). При каких значениях n справедливо неравенство $a_n>20$? (5)

6. Существует ли в пространстве множество M прямых, удовлетворяющее двум условиям:

1) через каждую точку пространства проходят ровно две прямые из M;

2) любую точку пространства можно соединить с любой другой точкой пространства ломаной, звенья которой являются отрезками, лежащими на прямых из M? (8)

7. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D, не являющаяся ее серединой. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, опи-

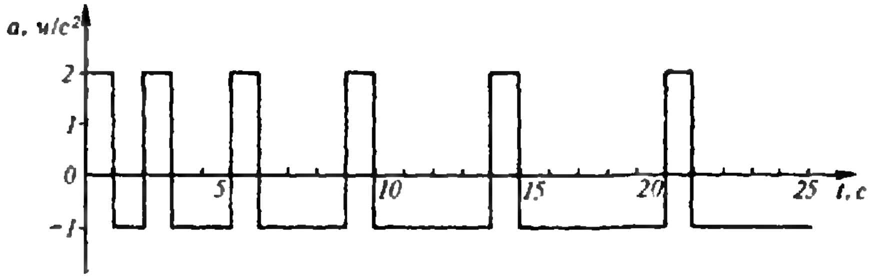


Рис. 1.

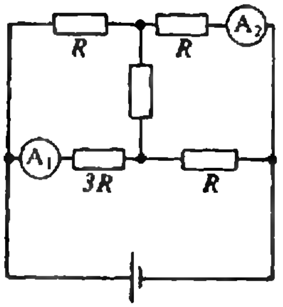


Рис. 2.

санных около треугольников *ABD* и *ADC* соответственно. Докажите, что серединный перпендикуляр к медиане *AK* треугольника *ABC* делит отрезок O_1O_2 пополам. (8)

8. В куче лежат *N* камней. Двое играют, по очереди забирая из кучи камни. Своим ходом игрок может взять из кучи число камней, равное делителю того количества камней, которое взял своим предыдущим ходом противник. Первый игрок своим первым ходом может взять любое (отличное от нуля) число камней, но не все *N* сразу. Выигрывает тот, кто возьмет камни последним. При каком наименьшем $N>1992$ второй игрок имеет выигрышную стратегию? (10)

Г. Яковлев, Н. Агаханов, А. Калинин, Л. Купцов, С. Резниченко, Д. Терёшин

Физика

По сложившейся традиции, олимпиада по физике включала в себя два тура — теоретический и экспериментальный, на каждый из которых отводилось по 4 часа.

Теоретический тур*)

9 класс

1. Покоящийся в начальный момент космический корабль начинает маневрировать вдоль прямой линии с ускорением, изменяющимся во времени так, как показано на рисунке 1. Через какое время корабль удалится на максимальное расстояние в положительном направлении от исходной точки?

2. «Вечерело. Уставший за нелегкий трудовой день Абдулла ибн Сауд присел на берегу речки и стал обдумывать свой социальный статус. В колхоз не берут, кооперативы эмир разогнал, к нему самому на службу устраиваться — так стражники без золотых даже во дворец не пускают. Эх, жизнь... Но тут взгляд Абдуллы остановился: по реке плыл какой-то предмет, и лишь маленький кусочек сургуча был виден над водой. Абдулла бросился в воду и вытащил оттуда старинный глиняный кувшин, герметично закупоренный сургучем. Распечатав кувшин и перевернув его, Абдулла обомлел: сверкнуло золото. Из кувшина высыпалось 147 одинаковых золотых монет. Монеты Абдулла спрятал, а сосуд запечатал и бросил обратно в воду. Поплыл кувшин дальше, примерно треть его объема торчала над водой.» Так говорится в одной из восточных сказок. Предполагая, что кувшин был двухлитровым, оцените массу одной золотой монеты.

3. Любитель-рыбовод, разводивший «тропических» рыб, решил поменять свои привязанности и разводить «арктических» рыб. При разведении тропических рыб для поддержания температуры воды в аквариуме $\tau_{троп}=25$ °C он использовал погруженный в воду электрический нагреватель мощностью $P_0=100$ Вт. Для холодолюбивых рыб необходима температура воды в аквариуме $\tau_{арк}=12$ °C. Чтобы обеспечить такой температурный режим, рыбовод решил использовать водопроводную воду, температура которой $\tau_{хол}=8$ °C, пропуская ее через погруженную в аквариум длинную медную трубку. (Эффективность такого теплообменника оказалась столь высокой, что выходящая из трубки вода практически находилась в тепловом равновесии с аквариумом.) Предполагая, что мощность теплообмена между аквариумом и окружающей средой пропорциональна разности температур между ними, определите минимальный расход воды ($k=\Delta m/\Delta t$) для поддержания заданного температурного режима. Комнатная температура $\tau_0=20$ °C. Удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг·К). Сильно ли изменится ответ, если любитель-рыбовод опять поменяет свои привязанности и будет разводить рыб, предпочитающих температуру $\tau^*_{арк}=16$ °C?

4. В схеме, изображенной на рисунке 2, амперметр A_1 показывает ток I_1. Какой ток показывает амперметр A_2? Оба прибора идеальные. Отмеченные на рисунке параметры считайте известными.

10 класс

1. Определите максимальную амплитуду гармонических колебаний системы из двух брусков и двух невесомых пружин, изображенной на рисунке 3. Жесткость правой пружины $k=10$ Н/м, левой — $2k=20$ Н/м, масса каждого бруска $m=100$ г, коэффициент трения между брусками $\mu=0{,}5$. В положении равновесия правая пружина растянута на $\Delta x_0=2$ см. Трения между бруском и полом нет.

2. На рисунке 4 приведены результаты

---

*) Часть задач теоретического тура публикуется в «Задачнике «Кванта».

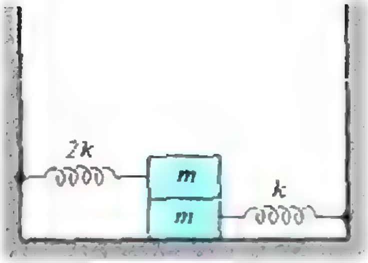


Рис. 3.

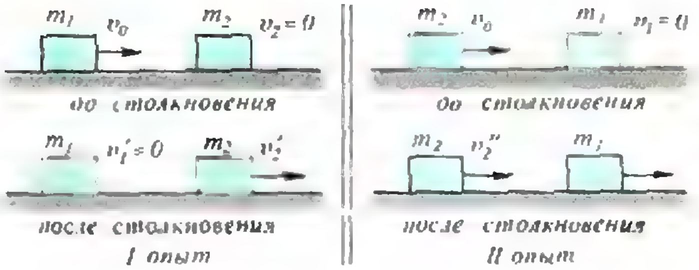


Рис. 4.

двух опытов с двумя шайбами. Поверхность стола горизонтальная и абсолютно гладкая. Измерения показали, что $v_2'=v_2''$. Найдите отношение масс шайб.

3. Кубический резервуар с ребром $a=1$ м, заполненный воздухом при нормальных условиях, разделен пополам тонким поршнем (рис. 5). Через кран левую половину резервуара медленно заполняют водой до уровня $h=a/2$. На какое расстояние сместится при этом поршень? Трения нет. Давлением паров воды можно пренебречь. Резервуар находится в изотермических условиях.

4. Над тонкостенной металлической сферой радиусом $R=5$ см на высоте $h=10$ см находится капельница с водой (рис. 6). Капли из капельницы попадают в небольшое отверстие на вершине сферы. Какой максимальный заряд может приобрести сфера, если заряд каждой капли $q=1{,}8\cdot10^{-11}$ Кл, радиус капель $r=1$ мм? Примечание: объем шара $V=4/3\ \pi R^3$.

11 класс

1. На кронштейне с помощью тонкой невесомой нити длиной $l=10$ см подвешен маленький шарик (рис. 7). Какую наименьшую горизонтальную скорость v_0 необходимо сообщить шарику, чтобы он ударился в точку подвеса?

2. — Товарищи космонавты! Вам выпала почетная обязанность первыми полететь на Солнце!

— Но там же жарко! Какой корабль это выдержит?

— Наверху сидят люди не глупее вас! Ночью полетите!

(Народный фольклор 70-х годов)

Предполагая, что наши космические корабли могут выдержать все, что угодно, найдите минимально возможный период обращения такого корабля вокруг Солнца (и обоснуйте, почему такой период минимален), зная, что видимый с Земли угловой размер Солнца равен $\alpha=9{,}3\cdot10^{-3}$ рад.

3. 1 моль одноатомного идеального газа находится в теплоизолированном цилиндре, поршень которого удерживается двумя одинаковыми гирями (рис. 8). Поршень может скользить без трения. Начальная температура газа T_1, давление вне цилиндра равно нулю. Как изменится температура газа, если одну из гирь снять, а затем через некоторое время поставить обратно?

4. Три небольших одинаковых металлических шарика, находящихся в вакууме, помещены в вершинах равностороннего треугольника. Шарики поочередно по одному разу соединяют с удаленным проводником, потенциал которого поддерживается постоянным. В результате на первом шарике оказывается заряд Q_1, а на втором — Q_2. Определите заряд третьего шарика.

Экспериментальный тур

9 класс

1. Найдите центр тяжести тела неправильной формы.

Оборудование: тело неправильной формы, нить (прочность нити не позволяла подвешивать груз), миллиметровая бумага.

2. Исследуйте зависимость силы взаимодействия металлической гайки с подковообразным магнитом при различных положениях метал-

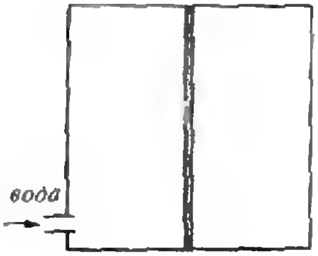


Рис. 5.

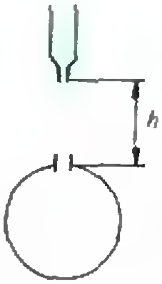


Рис. 6.

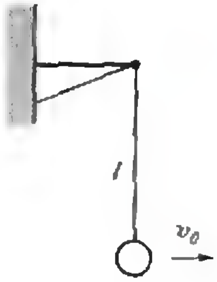


Рис. 7.

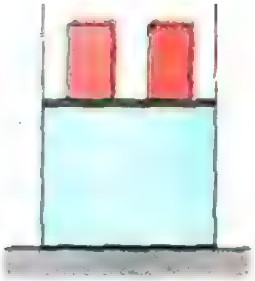


Рис. 8.

лической перемычки, соединяющей полюса магнита.

Оборудование: подковообразный магнит, металлическая перемычка, железные опилки, гайка, нить, динамометр, миллиметровая бумага.

10 класс

1. Определите, при какой концентрации соли можно получить минимальную температуру, смешивая снег с солью.

Оборудование: калориметр школьный, термометр, весы с разновесами, снег или колотый лед, соль поваренная.

2. Определите длину куска металлической проволоки.

Оборудование: источник тока, амперметр, вольтметр, ключ, соединительные провода, реостат, кусочек металлической проволоки (металлическая проволока такая же, что и на реостате).

11 класс

1. Определите плотность вещества, из которого изготовлен груз.

Оборудование: динамометр, груз, часы с секундной стрелкой.

2. Найдите среднюю плотность деревянного стержня.

Оборудование: сосуд с водой, нить, штатив с лапкой, деревянный стержень, линейка.

Жюри олимпиады приступало к проверке работ участников сразу после окончания каждого тура. Большую помощь жюри оказали студенты (главным образом — МФТИ), которые сами в прошлом участвовали и побеждали в различных олимпиадах.

Работы теоретического тура (они были зашифрованы) внимательно проверялись членами жюри не менее двух раз. При этом одну и ту же задачу у всех участников проверяла одна и та же бригада жюри (как правило, 2—3 человека) — таким образом достигалось максимальное единообразие критериев оценок. Правильно и полностью решенная задача оценивалась в 10 баллов, но за особо оригинальное решение (или же решение-обобщение, анализирующее условия применимости используемой модели) можно было получить даже 11—12 баллов.

Проверка показала, что, несмотря на то, что задачи для 9 класса были достаточно легкими, полностью справились с их решением не так много школьников. Немало участников не смогли сформулировать для себя сущность физического вопроса во второй и третьей задачах.

По традиции наиболее сложным теоретический тур был для десятиклассников. Связано это, в частности, с тем, что формирование команды на Международную олимпиаду начинается более чем за год до самой олимпиады — большинство кандидатов в команду отбирается уже по результатам выступления в 10 классе.

К сожалению, как и в прошлом году, очень легким оказался набор задач для 11 класса. Более четверти участников предложили правильные (в идейном плане) решения или контуры решений всех четырех задач. Не всем, правда, удалось довести свои мысли до победного конца.

Из экспериментальных задач хотелось бы отметить первую задачу для 10 класса — о получении минимальной температуры смеси снега и соли. (Кстати говоря, здесь возникли сложности с оборудованием — трудно оказалось отыскать необходимое количество термометров, измеряющих отрицательные температуры.) Как ни странно, именно эта задача давала наибольший простор для импровизаций — результат сильно зависел от способа приготовления смеси. Соответственно, совершенно различными получались и минимальные температуры. (Полученную участником температуру нужно было «предъявить» дежурному члену жюри.) Выявился также «профессионализм» сибиряков — как правило, у них температуры получались (почему-то) существенно ниже, чем у ребят из других регионов. За получение наинизших температур были вручены соответствующие спецпризы и грамоты.

На следующий после проведения эксперимента день каждый участник ознакомился с оценкой своей работы. Желающие могли побеседовать непосредственно с проверявшими каждую задачу членами жюри и, в случае несогласия с мнением жюри, пойти на апелляцию.

На закрытии олимпиады победителям были вручены дипломы, грамоты и спецпризы за успешное участие в олимпиаде, а также специальные грамоты Министерства образования Российской Федерации учителям, подготовившим призеров олимпиады.

Но, конечно, главными призами победителям стали путевки на Межреспубликанскую олимпиаду (правопреемницу Всесоюзной), которая состоялась несмотря на все политические события.

М. Гаврилов,
О. Овчинников

Призеры XVIII Всероссийской олимпиады по математике и физике

Математика

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Богданов И.— Пермь,
Гильфанов С.— Ижевск,
Мясников Н.— Омск,
Сенцов Ю.— Калуга,
Стрельников О.— Волгоград;

по 10 классам —

Александровский И.— Новосибирск,
Артельных И.— Челябинск,
Кочерова А.— Долгопрудный,
Кухта А.— Комсомольск-на-Амуре,
Семенов К.— Саратов;

по 11 классам —

Бобков А.— Балаково,
Зайцев С.— Тула,
Изместьев И.— п. Суна Кировской обл.,
Кириллов М.— Новосибирск,
Климов С.— Ижевск,
Кожевников П.— Калуга,
Хайкис Д.— Ижевск.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Борисов А.— Нижний Новгород,
Кравцов А.— Старый Оскол,
Царев А.— Кострома,
Чубаров Д.— Новосибирск;

по 10 классам —

Алексеев М.— Нижний Новгород,
Бирюк А.— Краснодар,
Гуреев А.— Новгород,
Потапов И.— Новосибирск;

по 11 классам —

Берколайко Г.— Воронеж,
Казанцева Е.— Екатеринбург,
Машин А.— Новокузнецк,
Никулин М.— Обнинск,
Фельдман К.— п. Черноголовка Московской обл.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Аксенов Ю.— Северодвинск,
Дерезин С.— Ростов-на-Дону,
Дьяченко А.— Армавир,
Кострыкин С.— Ангарск,
Тарасов А.— Ухта;

по 10 классам —

Костин В.— Саратов,
Павловский И.— Омск,
Пионтковская И.— Тула,
Сосыка Е.— Краснодар,
Тиунов А.— Пенза;

по 11 классам —

Ветров А.— Волгоград,
Ефремов И.— Кондопога,
Лисицын Н.— Ижевск,
Мищенко В.— Омск.

Физика

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Ковальский А.— Казань,
Кроковный И.— Новосибирск,
Сербин А.— Ростов-на-Дону,
Стратонников А.— пгт Сясьстрой Ленинградской обл.;

по 10 классам —

Бабурин Д.— Красноярск,
Беленов Р.— Нижний Новгород,
Малинин С.— Ярослааль,
Чиркин Д.— Грозный;

по 11 классам —

Базаров И.— Владивосток,
Гуляев Н.— Нижний Новгород,
Горгадзе В.— Нальчик,
Землянов А.— Ростов-на-Дону,
Курбатов М.— пгт Востряково Московской обл.,
Панков С.— Тула,
Померанский А.— Новосибирск,
Юдин Д.— Самара.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Горяйнов А.— Липецк,
Гращенко С.— Барнаул,
Любшин Д.— Пермь,
Сытник Д.— Тверь,
Табакин Д.— Архангельск;

по 10 классам —

Бочкарёв О.— Саратов,
Ларькин В.— пгт Правдинск Нижегородской обл.,
Томилов Ф.— Архангельск,
Тяписев А.— Новокузнецк;

по 11 классам —

Болдырев С.— Ростов-на-Дону,
Июткин Б.— Тула,
Мифтахов В.— Туймазы,
Шихирев К.— Новосибирск.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Барыбин И.— Барнаул,
Киракозов М.— Вологда,
Конаков М.— Алатырь,
Осиновский Д.— Курск;

по 10 классам —

Гвоздев П.— Котельнич,
Головатый А.— Ступино,
Кокорич М.— пгт Агинское Читинской обл.,
Погорелов О.— Брянск;

по 11 классам —

Абалмасов В.— Прокопьевск,
Галанин А.— Сергиев Посад,
Козлов В.— Старый Оскол,
Полянский М.— Нижний Новгород.

IV Всероссийская олимпиада по информатике

Одним из следствий бурных политических событий, происшедших со времени проведения предыдущей Всероссийской олимпиады по информатике, стал выход ее на уровень общенациональных олимпиад. Чтобы соответствовать новому статусу, пришлось во многом пересмотреть порядок организации этой олимпиады. В этом году в ней приняли участие команды Москвы, Санкт-Петербурга и специализированных школ-интернатов, традиционно добивавшиеся высоких результатов на прежних всесоюзных соревнованиях. В итоге, в подмосковном городе Троицке с 22 по 27 марта состязались 102 школьника из более чем 70 территорий России.

Проведение олимпиады осложнилось организационными и финансовыми проблемами, так что менее чем за месяц до начала олимпиады нельзя было определенно сказать, где она состоится. В этой сложной ситуации все заботы о проведении IV Всероссийской олимпиады по информатике взял на себя Комитет по народному образованию администрации Московской области во главе с его председателем В. Егоровым. Благодаря его усилиям и энтузиазму сотрудников Троицкого центра информатики «Байтик», олимпиада состоялась и по отзывам всех участников прошла на достойном для таких олимпиад уровне.

Как и на всех прошлых международных и всесоюзных олимпиадах по информатике, оба тура здесь были равноправными. В каждом туре участникам предлагалось по одной задаче и на ее решение отводилось четыре часа. Разрешалось пользоваться любой литературой; запрещалось лишь использование дискет с нестандартным программным обеспечением.

Изменился и подход к формированию олимпиадных задач. Если раньше предлагалось несколько разноплановых задач, то на этот раз на каждом этапе задача имела многоуровневый характер и содержала несколько подзадач различной сложности, объединенных общей идеей.

После тщательного обсуждения предложенных задач жюри, возглавляемое заместителем директора Троицкого института инновационных и термоядерных исследований Д. Соболенко, отобрало следующие две.

Задача I тура

(автор В. Прохоров)

Пусть W — множество всех замкнутых односвязных ломаных на координатной плоскости xOy, удовлетворяющих условиям:

а) каждые два соседних звена ломаной взаимно перпендикулярны;

б) каждое звено ломаной параллельно одной из осей координат;

в) отсутствуют самопересечения или самокасания ломаной;

г) $(x1, y1)$, ..., (xN, yN) — целочисленные координаты всех точек, где ломаная претерпевает излом (порядок нумерации произволен и неизвестен), N — количество изломов.

Требуется:

А. Написать по возможности оптимальные (по времени исполнения) программы (с обоснованием алгоритмов), которые по задаваемым N и $(x1, y1)$, ..., (xN, yN) выдавали бы и отображали на экране монитора:

1) какую-либо ломаную из множества W;

2) ломаную из множества W, имеющую наибольшую длину, и значение этой длины;

3) ломаную из множества W, ограничивающую наибольшую площадь, и значение этой площади;

4) количество ломаных в множестве W.

Б. Решить задачу А, исключив пункт б) из определения W.

Примечание. Односвязной называется ломаная, из любой точки которой можно попасть в любую другую ее точку, двигаясь по этой ломаной.

Задача II тура

(авторы Е. Андреева и А. Марченко)

В билете пассажира оказалось пробито отверстий больше, чем штырей в компостере. Пассажир утверждал, что пользовался только одним компостером, но случайно нажал его несколько раз. Контролеру требуется определить, могло ли быть получено заданное расположение отверстий одним и тем же компостером, если билет можно пробивать с обеих сторон неограниченное число раз и произвольно перемещать и поворачивать относительно компостера. Пробитые отверстия не выходят за пределы билета. В билете было пробито N ($N<10$) отверстий.

Требуется:

А. Для компостера с двумя штырями ($S=2$) составить программу, которая:

1) Определяет, можно ли получить заданным компостером требуемое расположение отверстий в билете. Если это возможно, то изображает вид билета после каждого нажатия компостера. В противном случае, выводит соответствующее сообщение.

2) Определяет количество K различных компостеров, каждым из которых можно пробить заданную конфигурацию.

3) При $K=0$ (см. пункт 2) находит компостер, с помощью которого можно пробить наибольшее количество из заданных отверстий.

4) Находит минимальное число нажатий, требуемое для пробивки заданной конфигурации

отверстий, для каждого компостера из пункта 2.

Б. Решить задачу А для компостеров с числом штырей S ($S>2$).

Примечания. Все исходные данные — натуральные числа.

Компостеры, дающие при однократном нажатии совпадающие конфигурации отверстий, считаются одинаковыми.

Относительное расположение отверстий в билете и штырей в компостере вводятся либо с клавиатуры, либо из файла с именем COMP.DAT.

Структура вводимой информации: $\{N, x1, y1, ..., xN, yN, S, u1, v1, ..., uS, vS\}$, где xi, yi — координаты отверстий в билете, ui, vi — координаты штырей в компостере.

Нажатие компостера следует моделировать клавишей «Пробел».

При выводе конфигурации на экран следует изображать координатную сетку. При этом программа должна осуществлять подходящее масштабирование.

На обоих турах всем участникам предоставлялись однотипные персональные компьютеры IBM PC XT. В качестве систем программирования допускалось использование Turbo Pascal 5.0, Turbo Pascal 5.5, Quick Basic, GW-Basic, Microsoft C, Quick C, Turbo C++.

При проверке каждая задача оценивалась исходя из 100 баллов. Оценка задачи 1 тура осуществлялась с помощью тестов и путем анализа представленных описаний с обоснованиями наилучших алгоритмических решений, как это требовалось в условии. Лучшими были признаны решения Дмитрия Давыдка из Санкт-Петербурга (87 баллов), Сергея Иоффе из подмосковной Черноголовки (65 баллов) и Игоря Офенбаха из Омска (59 баллов).

Задача второго тура оценивалась из предположения, что правильность представленных алгоритмов должна подтверждаться результатами работы программы. Многие участники олимпиады справились с этим заданием лучше, чем с предыдущим. Здесь наибольшего успеха добились москвич Евгений Кузнецов (61 балл), Андрей Ласкин из подмосковного города Фрязино (54 балла) и Марат Шарифуллин из Усинска (53 балла).

Абсолютными победителями по итогам двух туров были признаны Сергей Иоффе (117 баллов), Дмитрий Давыдок (113 баллов) и Роман Елизаров, как и Дмитрий, петербуржец (104 балла).

Среди учеников 11-х классов 5 человек получили дипломы I степени (они набрали от 90 до 117 баллов), 6 человек — дипломы II степени (63—84 балла), 6 человек — дипломы III степени (48—61 балл). Диплом третьей степени получила также единственная девушка на олимпиаде — Елена Никитина (г. Екатеринбург). Она же была награждена специальным призом центра информатики «Байтик».

Среди учащихся невыпускных классов диплом I степени получили двое (91—104 балла), диплом II степени — четверо (55—67 баллов) и диплом III степени — пятеро (31—50 баллов). Наряду с дипломами многие победители олимпиады получили памятные призы и подарки. Среди специальных призов были также призы компьютерного журнала для молодежи «Байтик». Особо хотелось бы отметить ученика 8 класса средней школы № 55 Нижнего Новгорода Андрея Черняховского, который получил диплом III степени и приз как самый юный участник олимпиады.

По окончании олимпиады были объявлены кандидаты в сборную России по информатике для участия в олимпиаде СНГ. Ими стали все обладатели дипломов первой степени.

В. Кирюхин

Призеры IV Всероссийской олимпиады по информатике

Дипломы I степени

по 8—10 классам получили

Елизаров Р.— Санкт-Петербург,
Шевяков Р.— Волгоград;

по 11 классам—

Иоффе С.— п. Черноголовка Московской обл.,
Давыдок Д.— Санкт-Петербург,
Кузнецов Е.— Москва,
Жуков Д.— Москва,
Россиев А.— Красноярск.

Дипломы II степени

по 8—10 классам получили

Кленин А.— Владивосток,
Миронов И.— Санкт-Петербург,
Виноградов А.— Рыбинск,
Бычков С.— Москва;

по 11 классам —
Гузеев А.— Пермь,
Офенбах И.— Омск,
Тучинский С.— Воронеж,
Гладышев П.— Челябинск,
Шарифуллин М.— Усинск,
Черенков А.— Нальчик.

Дипломы III степени

по 8—10 классам получили

Нестеренко О.— Нальчик,
Черняховский А.— Нижний Новгород,
Орлов Л.— Чебоксары,
Каляткин И.— Бийск,
Каменский Н.— Бийск;

по 11 классам —
Пер Ю.— Тула,
Ласкин А.— Фрязино Московской обл.,
Шестаков А.— Оренбург,
Кунков С.— Екатеринбург,
Хохолков В.— Сургут,
Меньков А.— Костомукша,
Никитина Е.— Екатеринбург.

XXXII Всеукраинская математическая олимпиада

Предлагаем вам задачи заключительного этапа XXXII Всеукраинской математической олимпиады, состоявшегося в конце марта 1992 г. в Чернигове.

8 класс

1. Докажите, что если для натуральных чисел n и m справедливо равенство $2m=n^2+1$, что число m можно представить в виде суммы квадратов двух целых чисел.

2. Четырехугольник $ABCD$, вписан в окружность, а центр O этой окружности лежит внутри четырехугольника. Известно, что $\angle AOB+\angle COD=180°$. Докажите, что сумма длин перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны четырехугольника, равна половине периметра четырехугольника $ABCD$.

3. На каждой грани непрозрачного куба написано некоторое натуральное число. Если несколько граней куба (одну, две или три) можно увидеть одновременно, то выписываем сумму чисел, написанных на этих гранях. Какое максимальное количество разных чисел можно получить таким способом?

4. Известно, что значение трехчлена $p(x)=ax^2+bx+c$ для любого целого числа x также будет целым числом. Обязательно ли

а) хотя бы один из коэффициентов a, b, c будет целым числом;

б) все коэффициенты a, b, c будут целыми числами?

5. На плоскости даны четыре точки A, B, C и D, причем известно, что из точек A, C, D ближе всех к B лежит точка A, а из точек A, B, C ближе всего к D лежит точка C. Докажите, что отрезки AB и CD не имеют общих точек.

6. Докажите, что если действительные a, b, c удовлетворяют условию $a\geqslant b\geqslant c>0$, то выполняется неравенство

$$\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b}\geqslant 3a-4b+c.$$

9 класс

1. Сумма всех членов арифметической прогрессии a_1, a_2, ..., a_k $(k\geqslant 92)$ равна 1992. Какие значения может принимать сумма $a_{10}+a_{92}$ в зависимости от числа k?

2. На каждой грани непрозрачного куба написано некоторое натуральное число. Если несколько граней куба можно увидеть одновременно, то выписываем сумму чисел, написанных на этих гранях.

а) Докажите, что на гранях куба можно написать такие числа, чтобы все суммы были разными.

б) Какое наименьшее значение может принимать наибольшая из таких сумм, если известно, что все эти суммы различные.

3. Пусть $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ — многочлен с целыми коэффициентами a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n. Докажите, что если ни одно из чисел $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(1992)$ не делится на 1992, то многочлен $f(x)$ не имеет целых корней.

4. На данной окружности выбрали точку A, а внутри окружности — точку D. Пусть M — центроид треугольника ABC, вершины B и C которого лежат на данной окружности, а сторона BC проходит через точку D. Найдите геометрическое место точек M.

5. Два игрока по очереди ставят шашки (первый — белые, второй — черные) на клетки шахматной доски 25×25. Шашки можно ставить на любые свободные поля, кроме тех полей, на всех сосед-

них с которыми уже стоят шашки того же цвета (соседними считаются поля, которые имеют общую сторону). Проигрывает тот, кто не может сделать свой очередной ход. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его соперник?

6. Найдите все простые числа $p \leqslant 1000$, для которых $2p+1$ будет степенью натурального числа (т. е. будет выполняться равенство $2p+1=m^n$, где m и n — натуральные и $n \geqslant 2$).

7. Можно ли правильный 1992-угольник разрезать на параллелограммы?

8. Проверьте, что окружность $x^2+2x+y^2=1992$ проходит через точку A (42; 12), и докажите, что эта окружность содержит бесконечное число точек $B(x;\ y)$, обе координаты x и y которых — рациональные числа.

10 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC. Докажите, что равенство $\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{CC_1}=\vec{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда треугольник — правильный.

3. Докажите, что система уравнений

$$x^2+4yz+2z=0,$$
$$x+2xy+2z^2=0,$$
$$2xz+y^2+y+1=0$$

не имеет решений в действительных числах.

4. Дана конечная последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n$ действительных чисел. Член a_k этой последовательности будем называть отмеченным, если среди чисел a_k, $a_k+a_{k+1}, \dots, a_k+a_{k+1}+\dots+a_n$ хотя бы одно положительно. Докажите, что сумма всех отмеченных чисел положительна.

5. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого неравенство

$$\sin^n x+\cos^n x>1/2$$

выполняется при всех $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Точки A и B лежат на сторонах выпуклого многоугольника F, а точка A_1 такова, что $\vec{AB}=\vec{BA_1}$. Пусть F_1 — выпуклый многоугольник наименьшей площади, содержащий многоугольник F и точку A_1. Докажите, что его площадь не больше удвоенной площади многоугольника F.

7. Докажите, что для любых чисел a, b, c, d из отрезка [1, 2] выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{c+d}{d+a} \leqslant \frac{4(a+c)}{b+d}.$$

8. Из шахматной доски размером 100×100 вырезано 800 четырехклеточных фигурок в виде буквы «Т». Докажите, что из оставшейся части доски можно вырезать еще одну такую фигурку.

11 класс

1. Существует ли набор из 1991 попарно не параллельных векторов такой, что для любых двух векторов этого набора среди остальных найдется третий вектор, перпендикулярный к этим двум векторам?

2. Пусть ABC — произвольный треугольник. Через точку K, взятую на стороне AB, проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону BC в точке L, и прямая, параллельная BC и пересекающая сторону AC в точке M. При каком положении точки K площадь треугольника KLM будет наибольшей? Чему равна эта площадь, если площадь треугольника ABC равна S?

3. В каждой вершине правильного 1992-угольника записано положительное число, причем каждое из этих чисел равно или среднему геометрическому, или среднему арифметическому двух чисел, записанных в соседних вершинах. Известно, что среди записанных чисел есть число 26. Найдите остальные записанные числа.

4. Докажите, что число $(\mathrm{arctg}\,4/3)/\pi$ — иррационально.

5. Докажите, что если $a>b>c$, то

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}>a+2b+c.$$

6. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что равенство $\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{CC_1}=\vec{0}$ выполняется тогда и только тогда, когда треугольник ABC — правильный.

7. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания. Плоскость, проходящая через вершину A и перпендикулярная ребру SC, пересекает боковые ребра SC, SB и SD в точках C_1, B_1 и D_1. Докажите, что вокруг многогранника $ABCDB_1C_1D_1$ можно описать сферу.

8. См. задачу 8 для 10 класса.

Публикацию подготовили А. Ганюшкин, В. Михайловский, И. Опульский, В. Радченко

Кто вы: физик или математик?

Как вы мыслите: физически или математически? Следующий великолепный тест позволит безошибочно определить, физик вы или математик.

Вы находитесь в летней кухне. В вашем распоряжении нерастопленная плита, коробок спичек, кран с холодной водой и пустая кастрюля. Требуется нагреть кастрюлю воды. Что бы вы стали делать? Должно быть, на этот вопрос вы ответили бы так: «Я налил бы в кастрюлю холодной воды из крана, зажег плиту, поставил кастрюлю на огонь и подождал бы, пока вода в кастрюле не нагреется». Прекрасно! На этом этапе между математиками и физиками царит полное согласие. Различие в подходе обнаруживается при попытке решить следующую задачу.

Вы снова находитесь в летней кухне. В вашем распоряжении нерастопленная плита, коробок спичек, кран с холодной водой и кастрюля, в которую налита холодная вода. Требуется нагреть кастрюлю воды. Что бы вы стали делать? Большинство людей отвечает: «Зажег бы плиту и поставил кастрюлю с водой на огонь». Если вы думаете так же, то вы физик! Математик бы вылил воду из кастрюли и тем самым свел бы новую задачу к предыдущей, которая решена.

Мы могли бы продвинуться еще на один шаг и рассмотреть случай, когда кастрюля с холодной водой уже поставлена на огонь. Как получить горячую воду в этом случае? Физик просто подождал бы, пока вода не нагреется, а математик погасил бы огонь, вылил воду из кастрюли и тем самым свел бы нашу новую задачу к первой (или ограничился бы тем, что погасил огонь, сведя задачу ко второй, уже решенной).

Еще более наглядно различие между физиком и математиком проявляется в следующем («драматическом») варианте задачи. Представьте себе, что в доме, где вы находитесь, начался пожар. В вашем распоряжении пожарный кран и шланг (не присоединенный ни к чему). Как потушить пожар? Ясно, что прежде всего необходимо присоединить шланг к крану, а затем пустить струю воды в пламя. Предположим теперь, что в вашем распоряжении пожарный кран, шланг (не присоединенный ни к чему) и никакого пожара в доме нет. Как бы вы стали тушить пожар? Математик сначала поджег бы дом, чтобы свести задачу к предыдущей.

Из книги Р. Смаллиана
«Как же называется эта книга?»
(М.: Мир, 1981).
Перевод с английского
Ю. Данилова

Ответы, указания, решения

[redacted] с парапсихологии

При угадывании чисел Степа Мошкин подсказывал Тимуру следующим образом. Цифрам поставили в соответствие первые 10 букв алфавита: 1 — а, 2 — б, 3 — в, 4 — г, 5 — д, 6 — е, 7 — ж, 8 — з, 9 — и, 0 — к. Если взять первые буквы слов, произнесенных Степой, то получим необходимые числа.

Теперь о фокусах, показанных Тимуром. Если Оля написала число a, а Тимур назвал число b, то после проведения описанных действий получится число $(a+b)^2-a^2=(2a+b)b$. Таким образом, если Тимур разделит названный результат на b, из частного вычтет b и результат разделит на 2, то получит число a.

Следующий фокус основан на том, что произведение $7\cdot11\cdot13=1001$. Ясно, что Тимур получит первоначальное число, разделив последний результат на 2.

В третьем фокусе Тимур записывает на открытке число от 1 до 50, а называет число, дающее в сумме с написанным 99. Это число больше 50, но меньше 100, поэтому сумма двух чисел — написанного первоначально на доске и произнесенного Тимуром — больше 100, но меньше 200. Значит, стирается цифра 1, т. е. записанная сумма уменьшается на 100, потом прибавляется 1, т. е. уменьшение будет равно 99. Если теперь из первоначального числа вычесть полученное число, то получим число, равное разности 99 и числа, названного Тимуром, т. е. число, записанное на открытке.

[redacted] ны сохранения
ятивистской динамике

1. Запишем закон сохранения энергии:

$$m_0c^2=m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}+h\nu,$$

откуда $\nu<0$, что противоречит здравому смыслу.

2. $v=(c\cos\alpha)/(1+\sin\alpha)\approx0{,}27\ c$.

3. $\Delta\nu=\nu_1-\nu_1'=m_0c^2/(4h)$;

$$\alpha=\arccos\left(1-\frac{m_0^2c^4}{h\nu_1(4h\nu_1-m_0c^2)}\right).$$

[redacted] II Всероссийская олимпиада
атематике и физике

Математика

9 класс

1. **Ответ:** $(\sqrt6;\sqrt6)$, $(-\sqrt6;-\sqrt6)$, $(\sqrt2;-\sqrt2)$, $(-\sqrt2;\sqrt2)$, $(\sqrt3;-\sqrt3)$, $(-\sqrt3;\sqrt3)$.

Указание. Разделив первое уравнение на x, а второе — на y, вычтем второе из полученных уравнений из первого. После преобразований приходим к уравнению $x^2=y^2$.

2. Всю доску, кроме какой-либо одной клетки, разделим на прямоугольники 1×2. Первый ход начинающему нужно сделать в эту отдельную клетку. Затем, если второй игрок занимает клетку какого-либо прямоугольника 1×2, то следующим ходом начинающему надо занять вторую клетку этого же прямоугольника. Таким образом, начинающий игрок всегда сможет сделать очередной ход.

3. Из условия следует, что $BM=BK$, а так как $AB=BC$, то $AC\parallel KM$, и $\angle APN=\angle KMP$. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle NKA=\angle KMP$. Значит, $\angle AKN=\angle APN$ и точки A, K, P, N лежат на одной окружности (рис. 1).

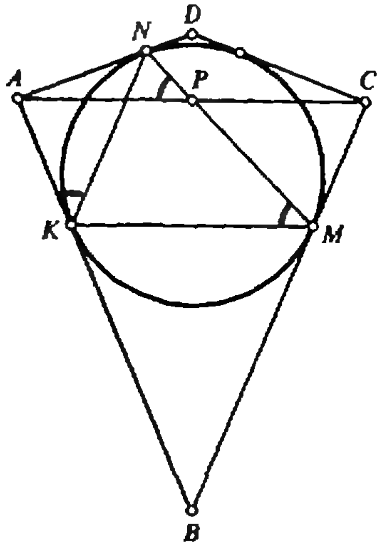


Рис. 1.

4. Так как каждый маршрут имеет не более одного поворота, то он идет не более чем по одной вертикальной и не более чем по одной горизонтальной улицам. Поэтому, если допустить, что маршрутов менее n, то найдутся горизонтальная и вертикальная улицы, по которым не проходит ни одного маршрута, и по перекрестку, образуемому этими улицами, также не пройдет никакой маршрут. Следовательно, маршрутов должно быть не менее n. Автобусная сеть из n маршрутов, удовлетворяющая всем условиям задачи, существует. Например, сеть, i-й маршрут которой определяется следующим образом: он проходит по

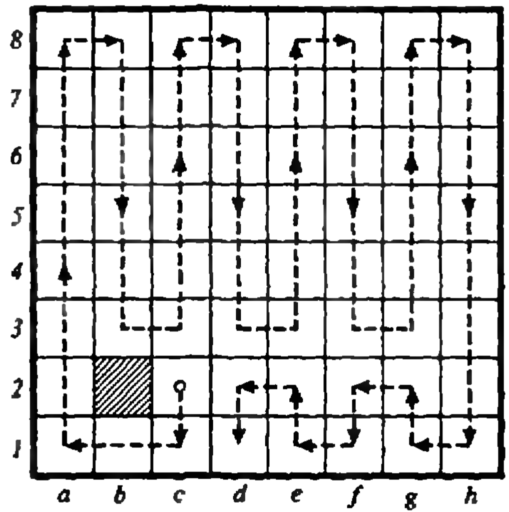


Рис. 2.

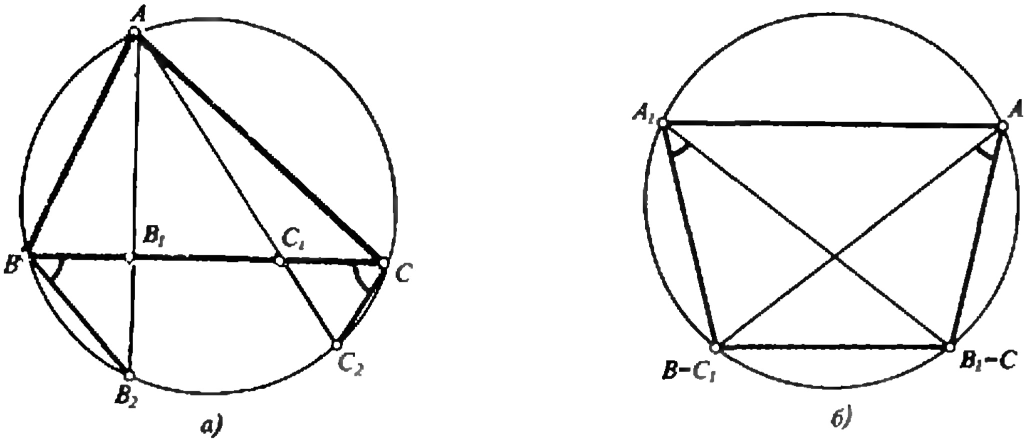


Рис. 3. а) б)

всей i-й вертикальной улице и затем слева направо по последней горизонтальной улице.

5. а) Можно (см. рис. 2). б) Нельзя. Вырезанные клетки — черные, поэтому на доске осталось 30 черных и 32 белых клетки. При каждом ходе цвет клетки, в которой находится фишка, меняется. А это значит, что число белых клеток, в которых побывала фишка, может превзойти количество черных клеток не более, чем на единицу.

6. Ответ: $x=y=3$, $z=5$. Из условия следует, что $2^{x+1}=(z-y)(z+y)$, т. е. $z-y=2^k$, $z+y=2^{x-k+1}$, где k — целое число, причем $0\leqslant k\leqslant x-k+1$. Отсюда $z=2^{k-1}+2^{x-k}$, $y=2^{x-k}-2^{k-1}$. Если $k-1\geqslant 1$, то y и z не могут быть одновременно простыми. Если $k=1$, то $z=2^{x-1}+1$, $y=2^{x-1}-1$, а числа $y=2^{x-1}-1$, 2^{x-1} и $z=2^{x-1}+1$ — последовательные натуральные числа, поэтому одно из них делится на три, т. е. либо z, либо y делится на 3, т. е. равно трем. Если $z=3$, то $y=1$ и не является простым. Если $y=3$, то $z=5$, а $x=3$.

7. Первое решение. Продлим AB_1 и AC_1 до пересечения с описанной вокруг треугольника ABC окружностью в точках B_2 и C_2 (рис. 3, *а*). Так как $\angle BAB_1=\angle CAC_1$, равны дуги BB_2 и CC_2, а значит, и хорды BB_2 и CC_2. Углы BCC_2 и CBB_2 равны как вписанные, опирающиеся на равные дуги. Таким образом, треугольники BB_1B_2 и CC_1C_2 равны, откуда $\angle BB_2B_1=\angle CC_2C_1$, т. е. равны хорды AB и AC.
Второе решение. (Предложено учеником 9 класса Олегом Стрельниковым из Волгограда.) Перенесем треугольник AC_1C параллельно так, чтобы отрезки BB_1 и C_1C совпали (рис. 3, *б*). Пусть точка A при этом переходит в точку A_1. Трапеция A_1ABB_1 равнобокая, т. к. около нее можно описать окружность ($\angle BA_1B_1=\angle BAB_1$) и, следовательно, имеет равные диагонали AB и A_1B_1.

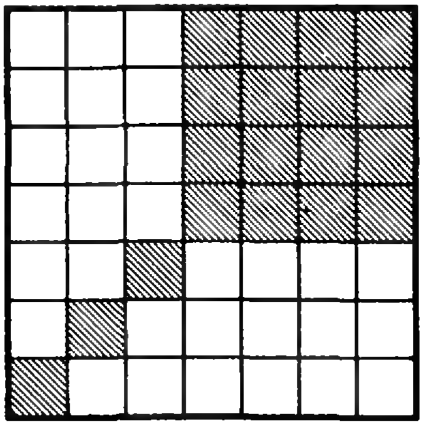


Рис. 4.

8. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

10 класс

1. Ответ: 8. Покажем, что покрашенных строк и столбцов не больше 8. Действительно, если их общее количество больше 8, то по крайней мере 5 строк, либо 5 столбцов покрашены. Это означает, что в покрашенных строках (столбцах) не менее 4×5=20 покрашенных клеток, а их, по условию задачи, 19.
На рисунке 4 приведен пример с 8 покрашенными строками и столбцами (4 строки и 4 столбца) при 19 покрашенных клетках.

2. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

3. а) Оставим гореть прожектор A, один из ближайших к оси Ox, и прожектор B, один из ближайших к оси Oy. Кроме того, оставим гореть все прожекторы, расположенные в прямоугольнике (возможно, вырожденном) с противоположными вершинами A и B и сторонами, параллельными осям координат.
б) Рассмотрим проекции всех прожекторов на плоскость Oxy и выберем из них конечное число по способу а). Для каждой выбранной проекции оставим в пространстве гореть прожектор с наименьшим значением z-координаты, имеющий эту проекцию. Пусть n — наибольшая z-координата всех оставленных прожекторов. Тогда всякий прожектор с z-координатой, не меньшей n, уже освещается выбранными. Остается рассмотреть конечное число слоев $z=1, 2, \dots, n$, и в каждом из них по способу а) выбрать конечное число прожекторов.

4. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

5. Ответ: $x=n$, n — любое отличное от нуля целое число, и $x=-9{,}2$.
Из уравнения следует, что $x\neq 0$, $[x]\neq 0$ и

$$(x-[x])\left(1-\frac{92}{x[x]}\right)=0,$$

т. е. либо $x=[x]$, либо $1-\dfrac{92}{x[x]}=0$.

В первом случае x — целое число, во втором: $x[x]=92$. Пусть $[x]=n$, тогда $x=n+\alpha$, где $0\leqslant\alpha<1$ и

$$n(n+\alpha)=92. \qquad (1)$$

В силу неравенств $n\leqslant n+\alpha<n+1$ из (1) следует при $n>0$, что $n^2\leqslant 92<n(n+1)$.

Это неравенство не имеет решений в целых числах. При $n<0$ из (1) следует, что $n^2\geqslant 92>n(n+1)$.

Это неравенство имеет решение в целых числах, а именно: $n=-10$. Тогда $(-10)\cdot(-10+\alpha)=92$, $\alpha=0{,}8$, т. е. $x=-9{,}2$.

6. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

7. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

8. См. решение задачи 8 для 9 класса.

11 класс

1. См. решение задачи 1 для 10 класса

2. См. решение задачи 2 для 10 класса.

3. Из условия следует, что существуют города A и B такие, что из A нельзя попасть в B. Предположим, что отделились города, в которые нельзя попасть из A. Если из A можно попасть в C, а D — город из отделившейся части, то в D нельзя попасть из C, так как иначе можно было бы из A через C перелететь в D. Следовательно, отделившаяся часть городов удовлетворяет требуемому условию.

4. Пусть H — ортоцентр треугольника ABC. Тогда углы ABC и AHC со взаимно-перпендикулярными сторонами в сумме дают 180° (рис. 5, *а, б, в*). Следовательно, во-первых, если треугольник ABC тупоугольный, то треугольник AHC — остроугольный. Во-вторых, по теореме синусов ($2R=a/\sin\alpha$) радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и AHC равны, так как у этих треугольников сторона AC общая, а синусы углов ABC и AHC равны. Из первого следует, что возможны два случая: а) любые три точки, входящие в данное множество M, являются вершинами прямоугольного треугольника; б) множество M содержит в себе вершины остроугольного треугольника.

В случае а) множество M состоит из трех точек — вершин прямоугольного треугольника,— либо из четырех точек — вершин прямоугольника.

Рассмотрим случай б). Опишем около каждого остроугольного треугольника с вершинами в точках множества M окружность и выберем из них окружность наибольшего радиуса. Пусть это окружность s радиуса R, описанная около $\triangle ABC$ (рис. 6). Покажем, что множество M не может содержать точку E, отличную от точек A, B, C и H (H — ортоцентр $\triangle ABC$). Пусть точка E лежит в $\triangle ABC$, например, в $\triangle AHC$ (точка E_1), H_1 — ортоцентр $\triangle AE_1C$. Тогда если R_1 — радиус окружностей, описанных около $\triangle AE_1C$ и $\triangle AH_1C$, то из теоремы синусов $R_1>R$, так как $\angle AE_1C>\angle AHC>90^\circ$ и, значит, $\sin\angle AE_1C<\sin\angle AHC$.

Аналогично показываем, что $\sin\angle AEC<\sin\angle AHC$ в случаях, когда точка E лежит внутри окружности s, но вне $\triangle ABC$ (для точки E_2: $\angle AE_2C>\angle ALC=\angle AHC$, так как $\angle ALC+\angle ABC=180^\circ$), и когда точка E лежит вне s (для точки E_3: $\angle AE_3C<\angle ANC=\angle ABC<90^\circ$). Таким образом, в этих случаях возникает противоречие с нашим предположением о максимальности R. Если же точка E лежит на окружности s (точка E_4), то ортоцентр H_4 $\triangle AE_4C$ отличен от точек A, B, C, H и не лежит на s (если $H_4\in s$, то $\angle AE_4C=90^\circ$, и, следовательно, $\angle ABC=90^\circ$). Поэтому, как мы показали выше, радиус одной из окружностей будет больше R. Итак, мы доказали, что в случае б) множество M может состоять только из четырех точек: вершин произвольного остроугольного треугольника и его ортоцентра.

Замечание. Другое решение этой задачи (предложенное учеником 11 класса Александром Бобковым из г. Балаково Саратовской области) можно получить, рассмотрев наименьший выпуклый многоугольник (так называемую *выпуклую оболочку*), содержащий все точки данного множества. Легко заметить, что этот многоугольник не содержит тупых углов, следовательно, является либо прямоугольником, либо нетупоугольным треугольником. Далее можно показать, что в первом случае и в случае прямоугольного треугольника внутри выпуклой оболочки больше нет точек данного множества, а в случае остроугольного треугольника есть еще одна точка — его ортоцентр.

5. Ответ: $n>191$.

Вычислив несколько первых членов последовательности

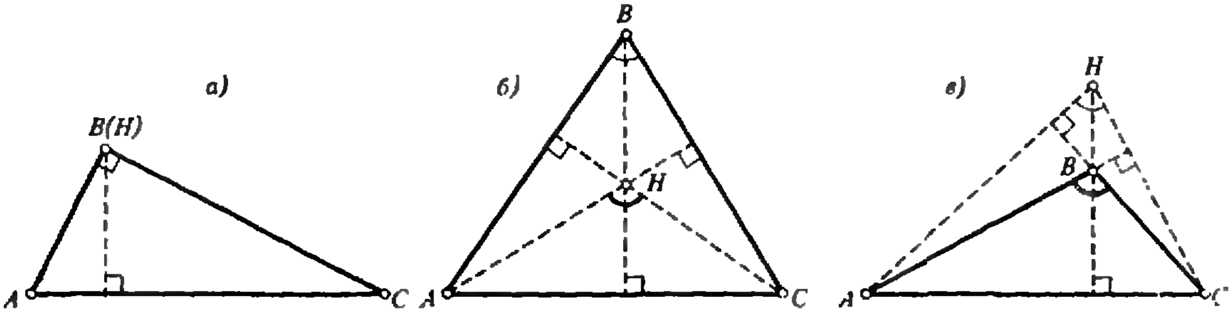


Рис. 5.

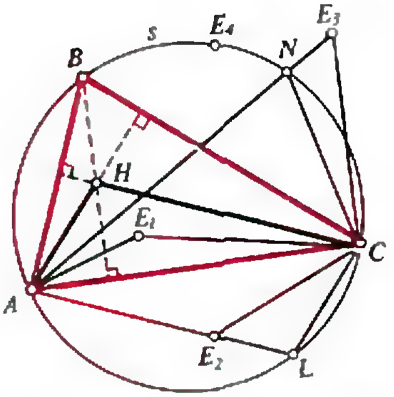


Рис. 6.

$$a_2=2,\ a_3=2\frac{1}{2},\ a_4=3,\ a_5=3\frac{1}{3},\ a_6=3\frac{2}{3},$$

$$a_7=4,\ a_8=4\frac{1}{4},\ \ldots,$$

замечаем закономерность: последовательность монотонно возрастает и ее члены имеют вид

$$m+\frac{k}{m},\ \text{где}\ 0\leqslant k\leqslant m-1.$$

Докажем это.

При $n=1$ утверждение очевидно. Если $a_n=$ $=m+\frac{k}{m}$, то $[a_n]=m$ и, значит, $a_{n+1}=a_n+$ $+\frac{1}{[a_n]}=\left(m+\frac{k}{m}\right)+\frac{1}{m}=m+\frac{k+1}{m}$.

Получили, что $a_{n+1}=m+1$, если $k=m-1$, и $a_{n+1}=m+\frac{l}{m}$, где $l\leqslant m-1$, если $k<m-1$.

Итак, один член последовательности имеет целую часть, равную 1, два члена — равную 2, три — равную 3,... Поэтому целую часть, не превосходящую 19, имеют $1+2+3+\ldots+19=$ $=\frac{19\cdot 20}{2}=190$ членов последовательности, $a_{191}=20$ и $a_n>20$ при $n>191$.

6. **Ответ:** множество M существует.

Первый пример. Для удобства введем в пространстве систему координат $Oxyz$. Множество M образуем из четырех множеств M_1, M_2, M_3 и M_4 ($M=M_1\cup M_2\cup M_3\cup M_4$):

множество M_1 состоит из всех прямых, параллельных оси Ox;

множество M_2 состоит из всех прямых, параллельных оси Oy и лежащих в полупространстве $x>0$;

множество M_3 состоит из всех прямых, параллельных оси Oy и лежащих в полупространстве $x<0$;

множество M_4 состоит из прямых, лежащих в плоскости $x=0$ и параллельных в этой плоскости биссектрисе $y=z$.

В полупространствах $x>0$ и $x<0$ мы можем перемещаться вдоль прямых множеств M_1, M_2 и M_3, причем возможно перемещение (вдоль прямых множества M_1) из одного полупространства в другое. Таким образом, возможно любое перемещение в плоскости, параллельной плоскости Oxy. Переход с одной такой плоскости на другую можно осуществить с помощью перемещения вдоль прямых множества M_1.

Второй пример. Можно предыдущий пример «облагородить» в том смысле, что во множестве M не будет таких разрывов как в построенном ранее. Множество M мы образуем из множества M_1 и M_5 ($M=M_1\cup M_5$). Множество M_1 из первого примера, а M_5 построим следующим образом: через все точки каждой плоскости $x=a$ проведем параллельные друг другу прямые так, что проекция прямой, проходящей через точку (a; 0; 0) на плоскость Oyz, имеет уравнение $z=ay$. Докажите самостоятельно, что построенное множество прямых удовлетворяет условию задачи.

7. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта»».

8. **Ответ:** $N=2048$.

Докажем, что при $N>1$ второй игрок имеет выигрышную стратегию тогда и только тогда, когда $N=2^n$.

Пусть $N=2^n(n\geqslant 1)$, и своим первым ходом первый игрок взял из кучи $2^{n_1}(2k_1+1)$ камней, $n_1\geqslant 0$, $k_1\geqslant 0$. Тогда второй игрок выигрывает, если будет придерживаться следующей стратегии: первым ходом он берет 2^{n_1} камней и далее каждым m-м ($m\geqslant 2$) ходом — ровно столько, сколько взял своим ($m-1$)-м ходом противник. Действительно, после каждого хода первого игрока, при котором берется 2^{n_m} камней, $0\leqslant n_m\leqslant n_{m-1}$, остающееся число камней равно нечетному числу, умноженному на 2^{n_m}. Поэтому последний камень достанется второму игроку.

Пусть теперь $N=2^n(2k+1)$, $k\geqslant 1$. В этом случае выигрывает первый игрок, если он будет играть следующим образом: первым ходом он берет 2^n камней и далее каждым m-м ($m\geqslant 2$) ходом — ровно столько, сколько взял своим ($m-$ -1)-м ходом противник. Выигрышность этой стратегии доказывается аналогично предыдущему случаю.

Итак, второй игрок имеет выигрышную стратегию лишь при $N=2^n$. Наименьшая степень двойки, превосходящая 1992, равна 11, т. е. искомое наименьшее значение N равно $2^{11}=$ $=2048$.

[illegible]зика

9 класс

1. $t=12$ с.
2. $m\approx 4{,}54$ г.
3. $\frac{\Delta m}{\Delta t}\approx 9{,}5$ г/с; $\frac{\Delta m^*}{\Delta t}\approx 2{,}4$ г/с.
4. $I_2=2I_1$.

10 класс

1. $x_{\max}\leqslant 5{,}8$ см.
2. $m_2/m_1=2$.
3. $x\approx 0{,}17$ м.
4. $Q_{\max}\approx 1{,}9\cdot 10^6$ Кл.

11 класс

1. $v_{0\,\min}\approx 1{,}93$ м/с.
2. См. решение задачи Ф1353 из «Задачника «Кванта» в этом номере журнала.
3. $\Delta T=0{,}12T_1$.
4. $Q_3=Q_2^2/Q_1$.

I тур. Решение п.А задачи основывается на том факте, что для заданных координат $(x1, y1)$, ..., (xN, yN) множество W либо пусто (ломаную построить нельзя), либо включает только одну ломаную. Действительно, исходя из условий а) и б), через каждую точку излома можно провести одно вертикальное звено, направленное вверх или вниз. Поскольку каждое такое звено определяется двумя точками, то количество вершин, имеющих одинаковую абсциссу, должно быть четным, и тогда по этим вершинам можно однозначно восстановить все вертикальные звенья ломаной путем их попарного соединения вдоль каждой абсциссы. Аналогичное можно сказать и о всех звеньях, параллельных оси абсцисс. Из этого следует, что при выполнении условий четности, заданный набор точек, в которых ломаная претерпевает излом, будет однозначно определять ломаную, удовлетворяющую условиям а) и в).

Легко видеть, что полученная таким образом ломаная может не являться искомой, так как здесь могут иметь место самопересечения, либо она может оказаться разомкнутой. Дополнительные проверки должны установить факт наличия или отсутствия ломаной в множестве W.

Основная идея решения п. Б задачи сводится к следующему. Одну из заданных точек излома последовательно соединяем с каждой из оставшихся точек, совмещая при этом с полученным направлением одну из осей координат. Для каждого из расположений осей координат осуществляем пересчет координат всех заданных точек излома, после чего с помощью ранее рассмотренного для п. А алгоритма находим требуемое решение. Легко видеть, что это можно сделать в цикле, длина которого равна $(N - 1)$.

II тур. При решении этой задачи важное значение имеет структура данных, используемая для формального описания компостера и конфигурации отверстий в билете. Для этих целей лучше использовать матричное представление. В частности, в качестве элементов матрицы компостера P (размерность матрицы $S \times S$) необходимо взять квадраты расстояний между центрами соответствующих штырей. Эта матрица является симметричной с нулевыми элементами на главной диагонали. То же самое можно сказать и о матрице билета R (размерность матрицы $N \times N$).

Для решения п. А задания матрицу P можно не использовать, так как компостер в этом случае будет однозначно определяться только квадратом расстояния $S0$ между центрами двух штырей. Возможность пробивки данным компостером заданной конфигурации отверстий в билете (см. п. 1) связана с наличием величины $S0$ в каждой строке матрицы R. Это можно проверить, анализируя последовательно строки матрицы R, начиная с первой. Просмотр можно ускорить, исключая из последующего рассмотрения строки, номера которых совпадают с номерами позиций элементов $S0$ в текущей строке. При определении числа компостеров K, с помощью которых можно пробить заданную конфигурацию отверстий в билете (см. п. 2), необходимо учитывать тот факт, что возможный компостер характеризуется одним из элементов первой строки матрицы R. Выполнив для каждого элемента этой строки первый пункт задания А, можно определить искомое число K. Если $K=0$, то для нахождения компостера, обеспечивающего пробивку максимального количества отверстий в билете (см. п. 3), необходимо для каждого элемента матрицы R, расположенного слева от главной диагонали (таких элементов будет $N \times (N-1)/2$), подсчитать, в скольких строках этой матрицы он содержится. Элемент, имеющий максимальное значение этой величины, будет соответствовать искомому компостеру. Требуемое в п. 4 минимальное число нажатий для пробивки всех отверстий в билете заданным компостером $S0$ определяется из условия минимизации количества повторных пробивок одних и тех же отверстий. В худшем случае билет пробивается за $(N-1)$ нажатие, в лучшем за $[(N+1)/2]$ нажатий. Очевидно, что j-ю точку в билете можно пробить однозначно, если в j-й строке матрицы R величина $S0$ встречается один раз. С учетом этого путем целенаправленного перебора можно определить искомое число нажатий.

Выполнение п. Б. задания, в отличие от п. А., существенно усложняется по двум причинам. Во-первых, компостер в этом случае необходимо отображать уже в виде матрицы P размерностью $S \times S$, а во-вторых, одна и та же конфигурация штырей компостера может описываться различными матрицами P. Последнее также справедливо и для описания конфигурации пробитых отверстий в билете. Исходя из этого, на начальном этапе решения важно установить, каким образом можно определить попадание штырей компостера в отверстие в билете при однократном его нажатии. Анализируя всевозможные ситуации, можно прийти к выводу, что все штыри компостера попадут в какие-либо S отверстий в билете, если в матрице R найдется S различных строк, каждая из которых включает все элементы одной из строк матрицы P, причем между этими строками должно быть взаимно однозначное соответствие. Если хотя бы для одной строки матрицы не удается найти соответствующую строку в матрице R, то можно сразу сказать, что таким компостером нельзя пробить заданную конфигурацию отверстий в билете. В п. 1 этой части задания достаточно определить одно подмножество таких строк в матрице R. Максимально возможное число названных подмножеств равно числу сочетаний из N по S. Если все требуемые подмножества сформировать, то путем перебора $2n-1$ вариантов нажатий (n — число найденных подмножеств), можно решить п. 4. Учитывая сказанное выше, находим решение и для других пунктов этой задачи.

ант» для младших школьников

«Квант» № 9)

1. Если обозначить веса Малыша, Карлсона, фрекен Бок и торта через M, K, Φ и T, а вес куска торта, съеденного Карлсоном через C, то получим два уравнения: $\Phi+K=M+T$ и $K+C=\Phi+M+T-C$. Заменив во втором уравнении $M+T$ на $\Phi+K$, получим после приведения членов $C=\Phi$.

2. $10247+10247+10247=30741$.

3. У Алеши 5 значков, у Вити — 14.

4. Обозначим через x количество страниц, пройденных Степой с первым милиционером. Сумма номеров x страниц равна $x(x+1):2$, а год рождения каждого из милиционеров, очевидно, не меньше 1900 и не больше 1972. Единственное значение для x, удовлетворяющее этим условиям, есть число 62. При этом первый милиционер родился в 1953 году. Если в книге было y страниц, то год рождения второго милиционера равняется $y(y+1):2-1953$. Единственное значение для y, удовлетворяющее условиям задачи, есть число 88. При этом год рождения второго милиционера 1963.

5. Заметим сначала, что площадь прямоугольника не меньше, чем $p-1$ (p — полупериметр прямоугольника), если каждая его сторона не меньше 1. Действительно, если a — бо́льшая сторона прямоугольника, то $p\geqslant a+1$. Умножив обе части неравенства на положительное число $a-1$, получим неравенство $pa-p\geqslant a^2-1$. Оно равносильно неравенству $a(p-a)\geqslant p-1$, где слева стоит площадь прямоугольника, а справа указанная оценка. Заметим, что неравенство превращается в равенство только в том случае, если меньшая сторона прямоугольника равна 1. Поскольку сумма площадей прямоугольников равна 100, то сумма их полупериметров не больше 120, а сумма периметров не больше 240 и равняется 240, если в каждом прямоугольнике меньшая сторона равна 1, но сумма периметров прямоугольников действительно равняется 240, поскольку она равна периметру квадрата — 40 плюс удвоенная длина пропилов — 200.

ебраические уравнения
еравенства

(см. «Квант», № 9)

1. а) -3; $-1/3$; б) $\{-4\}\cup[-1;\ 0]$; в) $1/2$; $(-1\pm\sqrt{2})/2$.

Указание. Уравнение вида $|f(x)|=g(x)$ равносильно совокупности двух систем: $f(x)=g(x)$, $g(x)\geqslant 0$ и $f(x)=-g(x)$, $g(x)>0$; г) $-1/4$; 0; д) $1/6$; $1/2$; $3/2$; е) -5; 1. **Указание.** Воспользуйтесь указанием к п. в) (дважды); ж) $-\sqrt[3]{3}$; 0. См. указание к пункту в).

2. а) -1; -1992. **Указание.** Корень $x=-1$ угадывается легко. Второй корень находится с помощью теоремы Виета; б) $1/1992$; 1; в) $1\pm\sqrt{2}$; $1\pm\sqrt{3}$. **Указание.** Выполните замену $y=x^2-2x$; г) -2; 1. **Указание.** Преобразуйте уравнение к виду

$$\frac{2(x^2+x)+1}{(x^2+x)^2}=\frac{5}{4}$$

и выполните замену $y=x^2+x$;
д) -1; 3. **Указание.** Замена $y=x^2-2x$;
е) -2; 3. **Указание.** Замена $y=x^2-x$;
ж) $2\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{2}$. **Указание.** Поскольку $x\neq 1$, можно разделить обе части уравнения на $(x-1)^2$ и выполнить замену

$$y=(x^2-3x+1)/(x-1);$$

з) $3\pm\sqrt{7}$; $(-1\pm\sqrt{21})/2$. **Указание.** Заметив, что $x^2-4=(x^2-5x+1)+5(x-1)$, воспользуйтесь указанием к предыдущей задаче;
и) 1. **Указание.** Замена $y=x+1/x$.
к) $(-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2})/2$. **Указание.** Преобразуйте левую часть к виду $x^4+2x^2+1-2x^2+4x-1=(x^2+1)^2-2(x-1)^2$.

3. а) 3; б) 3; в) $99/49$; 2. **Указание.** Здесь удобно выполнить замену $y=\sqrt{x-2}$; г) 1; д) -3; 2; е) -3; ж) 4; 259; з) $1/2$. **Указание.** Замена $y=\sqrt{12+16x-16x^2}$; и) 1. **Указание.** Заменой $y=\sqrt[3]{x-9}$ уравнение приводится к виду $\sqrt[3]{y^3+16}=4+y$; к) -1; $-1/2$; 0. **Указание.** Возведем обе части уравнения в куб, пользуясь формулой $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\times(a+b)$, где $a=\sqrt[3]{x+1}$, $b=\sqrt[3]{2x+1}$; л) $-3/4$. **Указание.** Пользуясь соотношением $\sqrt{a}-\sqrt{b}=(a-b)/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$, получаем, что либо $x=-3/4$, либо $\sqrt{5x+7}+\sqrt{x+4}=1$. Но это уравнение не имеет корней, т. к. если $5x+7\geqslant 0$, то $x+4>1$; м) $(-1\pm\sqrt{17})/2$. **Указание.** Замена $y=x^2+x$; н) 5. **Указание.** Преобразуйте уравнение к виду $(\sqrt{2x+3}-3)(\sqrt{x+8}+\sqrt{x+4})=4$, а затем — к виду $\sqrt{2x+3}-3=\sqrt{x+8}-\sqrt{x+4}$; о) 1. **Указание.** Перепишите уравнение так:

$$\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3x^2+2x-3}=\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+2},$$

а затем воспользуйтесь указанием к задаче пункта л); п) 1; $(1+\sqrt{5})/2$. **Указание.** Преобразуем уравнение к виду $\left(\sqrt{x+1}-1\right)\times\sqrt{\frac{x-1}{x}}=\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)^2$. При $x\neq 1$ правая часть положительна в своей области определения, и поэтому $x>0$. Замечаем, что $x=1$ — корень уравнения, а при $x>1$ после преобразований получаем:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x^2+x}.$$

Возводя в квадрат, получаем после замены $y=\sqrt{x^2-x}$ уравнение $y^2-2y+1=0$. Остальное ясно; р) $-\sqrt{2}/2$; $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$. **Указание.** Уравнение равносильно системе $2x\sqrt{1-x^2}=1-8(x^2-x^4)$, $x^2\leqslant 1/2$.
Выполнив замену $y=2x\sqrt{1-x^2}$, получаем, что либо $y=-1$, либо $y=1/2$.

Первый случай дает $x^2=1/2$, $x<0$, т. е. $x=-\sqrt{2}/2$. Во втором случае приходим к биквадратному уравнению $x^4-x^2+1/16=0$, решить которое мы должны с учетом ограничений $0<x<\sqrt{2}/2$;

с) $-1/2$; 3. Указание. Заменой $y=\sqrt{2x+1}$ приводим уравнение к виду $|y-1|+|y-3|=4$;

т) -1. Указание. Все квадратные трехчлены, стоящие под знаком радикала, имеют корень $x=-1$. Уравнение приводится к виду

$$\sqrt{|x+1|}\,(\sqrt{|5x+1|}-\sqrt{|2x+3|})=$$

$$=|x+1|\,(\sqrt{|6x-2|}+\sqrt{|x+6|}),$$

при решении которого следует рассмотреть два случая $x\leqslant-6$ и $x\geqslant1/3$ и убедиться, что оно корней не имеет.

4. а) $[-1;\ 3]$; б) $(-4/5;\ 0)$; в) $[1/2;\ +\infty)$; г) $[-2;\ +\infty)$. Указание. Неравенство $|u|\leqslant v$ равносильно системе $-v\leqslant u\leqslant v$;

д) $(-2-\sqrt{3};\ -2)\cup(-2;\ -2+\sqrt{3})\cup(2-\sqrt{3};\ 2)\cup\cup(2;\ 2+\sqrt{3})$. Указание. Выполните замену $y=|x|$ и воспользуйтесь указанием к задаче пункта г);

е) $[3-2\sqrt{3};\ 1]\cup[3;\ 3+2\sqrt{3}]$;

ж) $(-\infty;\ -2+\sqrt{6})\cup[-1+\sqrt{3};\ +\infty)$. Указание. Неравенство $|u|\geqslant v$ равносильно совокупности неравенств: $u\geqslant v$ и $u\leqslant-v$;

з) $(-\infty;\ -2]\cup[(2-\sqrt{10})/3;\ 0]\cup[(2+\sqrt{10})/3;\ +\infty)$. Указание. Неравенство $|u|\geqslant|v|$ равносильно неравенству $(u-v)(u+v)\geqslant0$;

и) $(-\infty;\ 2)\cup\{3\}\cup(4;\ +\infty)$;

к) $(-\infty;\ -1]\cup[0;\ 1/2]\cup[1;\ +\infty)$. Указание. См. указание к задаче пункта з); л) $[1;\ +\infty)$; м) $(-\infty;\ 1]$.

5. а) $(-\infty;\ -6]\cup[0;\ 6]$; б) $[1-\sqrt{5};\ 0]\cup\cup[2;\ 1+\sqrt{5}]$. Указание. Выполните замену $y=x^2-2x$;

в) $(-2;\ -1/3)\cup(1/2;\ +\infty)$;

г) $(-2;\ -(1+\sqrt{7})/3)\cup(0;\ (\sqrt{7}-1)/3)\cup(1;\ +\infty)$;

д) $(-\infty;\ -(1+\sqrt{5})/2)\cup[0;\ (\sqrt{5}-1)/2)$;

е) $(-\infty;\ -(1+\sqrt{17})/4)\cup(-1;\ (1-\sqrt{37})/6)\cup\cup(1-\sqrt{2};\ (\sqrt{17}-1)/4)\cup(1;\ (1+\sqrt{37})/6)\cup(1+\sqrt{2};\ +\infty)$. Указание. Заметим, что $x=0$ удовлетворяет неравенству, при $x\neq0$ выполним замену $y=x-1/x$, после чего неравенство приводится к виду

$$(y-1)/(2y+1)>1/(3y-1);$$

ж) $[-4;\ -3)\cup[-3/2;\ 0)\cup[1;\ +\infty)$. Указание. Преобразуя левую часть, получаем эквивалентное неравенство

$$\frac{(2x+3)(x-1)(x+4)}{x(x+3)}\geqslant0;$$

з) $(-6;\ 6(1-\sqrt{26})/5)\cup(0;\ 6)\cup(6(1+\sqrt{26})/5;\ 9)\cup\cup(9;\ +\infty)$. Указание. Поскольку

$$2\,\frac{x^2+36}{x^2-36}=\frac{x+6}{x-6}+\frac{x-6}{x+6},$$

перепишем неравенство так:

$$\frac{x+6}{x-6}\left(\left(\frac{x-4}{x+4}\right)^2-1\right)+$$

$$+\frac{x-6}{x+6}\left(\left(\frac{x+9}{x-9}\right)^2-1\right)>0,$$

или

$$\frac{4x(9(x-6)^2(x+4)^2-4(x+6)^2(x-9)^2}{(x^2-36)(x+4)^2(x-9)^2}>0.$$

После этого разложение на множители становится очевидным.

6. а) $[-2;\ 2)$; б) $[-5/4;\ 5)$; в) $(-\infty;\ -1/2)$;
г) $(22;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ -3]\cup[22;\ +\infty)$;
е) $(0;\ 3+2\sqrt{5})$;
ж) $[-2;\ -1)\cup[(-1+\sqrt{7})/2;\ 2]$;
з) $(-\infty;\ -5)\cup[-4{,}1;\ -4]\cup[4;\ +\infty)$;
и) $(-(3+\sqrt{5})/2;\ 1]$;

к) $[-3/2;\ -1)\cup(1;\ 2]$. Указание. Рассмотрите отдельно случаи $x<-3/2$, $x=3/2$ и $x>-3/2$;

л) $(-\infty;\ -1]\cup(6;\ +\infty)$. Указание. Рассмотрите случаи $x>6$ и $x<6$.

м) $[2{,}5;\ 3)$. Указание. Эту задачу можно решить обычным способом, т. е. избавляясь от радикалов. Однако у нее есть совсем короткое решение. Заметим, что при $x=3$ левая часть неравенства равна правой. После этого перенесем $\sqrt{x+1}$ в левую часть и перепишем неравенство так:

$$5/(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+1})>\sqrt{2x-5}.$$

Функция в левой части убывающая, а в правой — возрастающая и при $x=3$ левая часть равна правой. Следовательно, неравенство справедливо при $2{,}5\leqslant x<3$;

н) $[-5;\ -(9+\sqrt{61})/8)$. Указание. Заменой $y=\sqrt{x+5}$, неравенство приводится к виду $\sqrt{16-3y^2}>1+y$, откуда $0\leqslant y<(\sqrt{61}-1)/4$;

о) $[3;\ (1+\sqrt{37})/2)\cup((1+\sqrt{37})/2;\ +\infty)$. Указание. Нетрудно убедиться, что данное неравенство не имеет решений при $x<3$. Если $x\geqslant3$, перепишем его в виде $\sqrt{x-9/x}<x-\sqrt{9-9/x}$, после чего возведем в квадрат (при $x=3$ правая часть положительна!), а затем сделаем замену $y=\sqrt{x^2-x}$;

п) $(\sqrt[3]{5/4};\ +\infty)$. Указание. Непосредственно видно, что $x>1$. После возведения в квадрат и упрощений приходим к неравенству $\sqrt{x^6-1}>2-x^3$, заведомо справедливому при $x>\sqrt[3]{2}$. При $1<x\leqslant\sqrt[3]{2}$ получаем после возведения в квадрат и упрощений неравенство $4x^3>5$.

Московская математическая олимпиада

(см. «Квант» № 9)

8 класс

1. Из условия сразу следует, что $a+b>c+d$ и $a+b>-(c+d)$. Поэтому $a+b>|c+d|$.

2. Ответ: нет. Все черные клетки доски образуют как 8 диагоналей, показанных на ри-

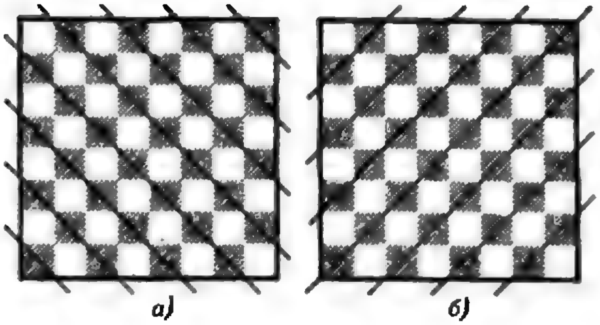

а)　б)

Рис. 7.

сунке 7, *а*, так и 7 диагоналей, показанных на рисунке 7, *б*. Хотя бы на одной из черных диагоналей число фигур должно быть четным, поскольку сумма 8 нечетных чисел не может равняться сумме 7 нечетных чисел.

3. Каждый участник решил ровно столько задач, сколько получится, если суммировать количество решенных во второй день задач по всем участникам олимпиады.

4. **Ответ:** 9 гирь, например 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 12 г. Докажем, что в наборе должно быть не менее 9 гирь. Для удобства общий вес гирь примем равным 60 г; кучки будут 20-, 15- и 12-граммовые. Каждая гиря весит не более 12 г, поэтому каждая из 15-граммовых кучек содержит не менее двух гирь. Число гирь в наборе, таким образом, не менее 8.

Допустим, что гирь ровно 8. Отметим гири, масса которых (в граммах) не является целым числом, делящимся на 3; такие гири есть, поскольку возможно разложение на 20-граммовые кучки. В каждой 15-граммовой кучке обе гири должны быть отмечены либо не отмечены одновременно, откуда среднее арифметическое масс отмеченных гирь — 7,5 г. Но, с другой стороны, это среднее арифметическое не может превышать 6 г, поскольку в каждой 12-граммовой кучке, имеющей отмеченные гири, число последних не менее двух. Противоречие.

5. **Указание.** На рисунке 8 угол B треугольника ABC — прямой, BD — его биссектриса, A' и C' — проекции на прямую BD точек A и C соответственно; для определенности полагаем $AB \leqslant BC$. Из подобия треугольников $AA'D$ и $CC'D$ получаем $A'D \leqslant DC'$, откуда $BD \leqslant \frac{1}{2}(BA'+BC') = \frac{1}{2}(AA'+CC')$. Но $AA'+CC'$ и есть длина проекции гипотенузы на любую прямую, перпендикулярную BD.

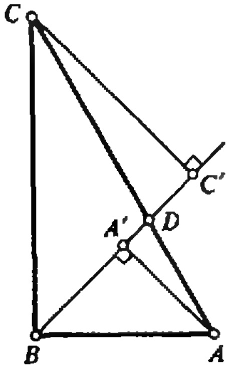


Рис. 8.

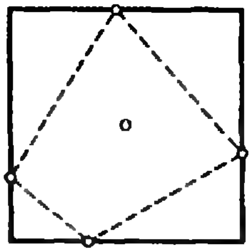


Рис. 9.

6. Решение этой задачи (частный случай задачи М1363) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

9 класс

1. Любой участник выиграл ровно столько партий, сколько партий в соревновании закончились победой черных.

2. **Ответ:** поровну. **Указание.** Разбив числа на пары (n_1; n_2), для которых $n_1+n_2=10\,000$, заметим, что $n_1^9+n_2^9$ делится на n_1+n_2 и, следовательно, на 10 000. Поэтому для чисел m_1 и m_2, образованных четверками последних цифр чисел n_1^9 и n_2^9, имеем $m_1+m_2=10\,000$, откуда следует, что неравенство $n_1>m_1$ равносильно неравенству $m_2>n_2$.

3. **Ответ:** нет. **Указание.** После каждого отрезания остается выпуклый многоугольник, у которого какие-то 4 стороны лежат на сторонах исходного квадрата. Поэтому всегда можно выбрать по одной неотрезанной точке на каждой из сторон квадрата. Четырехугольник (обозначенный на рисунке 9 пунктиром) с вершинами в таких точках целиком лежит в

1	1	8	39	39	114	339	339	678
1		7	31		75	225		339
1	2	7	24	41	75	150	225	339
1	1	5	17	17	34	75	75	114
1		4	12		17	41		39
1	2	4	8	12	17	24	31	39
1	1	2	4	4	5	7	7	8
1		1	2		1	2		1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Рис. 10.

неотрезанной части и содержит центр квадрата.

4. **Ответ:** 678 путями. Это видно из рисунка 10, где в каждой клетке написано, сколько путей ведут в нее из левой нижней клетки таблицы (в каждой клетке записана сумма чисел в соседних клетках слева и снизу от нее).

5. **Указание.** Достаточно доказать, что прямая AB делит пополам отрезок FG, параллельный отрезку DE (рис. 11). Для этого заметим, что $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5$ и $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4$, откуда $\triangle BCG=\triangle BCD$ и $BG=BD=BF$.

6. Решение этой задачи (задача M1363) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

10 класс

1. Если α, β, γ, δ — углы четырехугольника, то $0=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta=$

$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=$$

$$=-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\sin\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2},$$

откуда либо $\alpha+\beta=180°$, либо $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180°$, либо $\alpha+\gamma=\beta+\gamma=180°$.

2. **Ответ:** в пятиугольник, закрашенный на рисунке 12. **Указание.** Очевидно, что поставленная не в заштрихованную область свечка отрезается. Доказательство того, что в заштрихованной области свечка не может быть отрезана, основано на идее решения задачи для 9 класса (там у нас область состояла всего из одной точки).

3. **Ответ:** если сумма $m+n$ нечетна, то обеспечить себе выигрыш могут белые, в противном случае — черные.

Указание. Белые выигрывают (когда $m+n$ нечетно), следуя плану: 1) встать на одну диагональ с черной фишкой (это достигается за $|m-n|$ ходов); 2) делать ходы всегда на ту диагональ, где стоит черная фишка, приближаясь к ней. Если же $m+n$ четно, то после первого сделанного белыми хода указанную стратегию могут применить черные.

4. **Ответ:** 11 гирь, например 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 9, 10 г. Минимальность числа гирь можно доказать так же, как и в задаче 4 для 8 класса. (При общей массе гирь 60 г кучки будут 15-, 12- и 10-граммовыми, а те гири, масса которых не выражается целым четным числом граммов, будут отмеченными.)

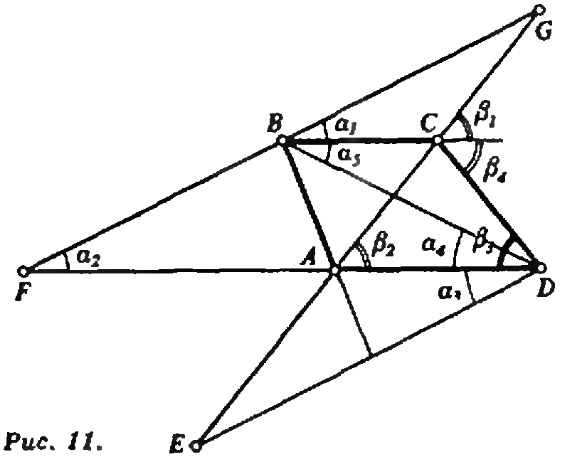


Рис. 11.

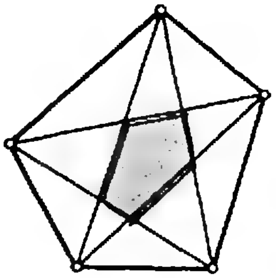


Рис. 12.

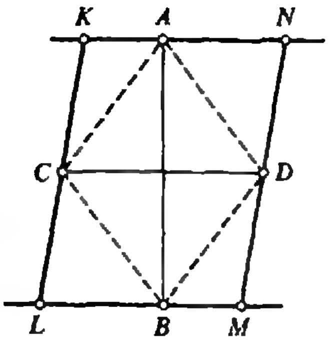


Рис. 13.

5. Пусть A и B — наиболее удаленные друг от друга точки многоугольника. Тогда он целиком лежит в полосе AB, а середина отрезка AB — центр симметрии. Пусть C и D — симметричные точки границы многоугольника, лежащие на серединном перпендикуляре к AB. Тогда (в силу выпуклости) многоугольник целиком лежит и в полосе между некоторой прямой KL (содержащей C) и симметричной ей прямой MN (содержащей D), т. е. помещается в параллелограмм $KLMN$ (рис. 13). Четырехугольник $ACBD$ — ромб, его площадь равна половине площади $KLMN$ и он целиком лежит в многоугольнике. Отсюда и вытекает утверждение задачи.

6. Решение этой задачи (задача M1365) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

11 класс

1. а) **Ответ:** да. Запишем по 1 во все клетки верхней и нижней строк, (—1) в центральную клетку и нули во все остальные. б) **Ответ:** нет. Раскрасив таблицу в два цвета в шахматном порядке, воспользуемся наблюдениями, сделанными при решении задачи 2 для 8 класса. Сумма всех чисел, записанных в черных клетках, не может равняться 1992 и 1991 одновременно.

2. **Ответ:** $\angle A=\angle C=70°$, $\angle B=120°$, $\angle D=100°$.

Указание. Проведем окружность через точки A, B и C, тогда точка D окажется внутри круга на диаметре BE (см. рис. 14, где дуга

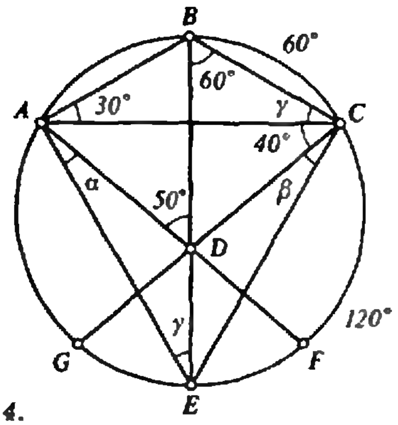


Рис. 14.

BCE равна $60°+120°=180°$). Из равенств $\alpha+\gamma=50°$ и $\beta+40°+\gamma=90°$ имеем $\alpha=\beta$, поэтому F, G, а с ними точки A, C, и весь четырехугольник $ABCD$, симметричны относительно BE.

3. Рассмотрим движущийся диаметр экватора, всегда проходящий через точку, в которой находится Аладдин. Пусть K — фиксированный конец этого диаметра. Точка K движется по экватору непрерывно и всегда в том же направлении, что и Аладдин. Множество точек, пробегаемое K,— дуга, составляющая не менее половины экватора. (Противоположный конец диаметра пробегает симметричную дугу, а обе такие дуги вместе должны содержать все точки экватора.) Выберем на этой дуге точки A и B такие, что длина дуги AB больше 0,449 длины экватора. Отрезок времени между моментами прохождения точек A и B точкой K и является искомым.

4. Рассмотрим единичные векторы $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, $\vec{e_4}$, перпендикулярные граням тетраэдра и направленные внутрь него. Пусть $\vec{a}$ — вектор, перпендикулярный данному треугольнику и по длине равный его площади. Тогда $P_i=|(\vec{a}, \vec{e_i})|$ для $i=1, 2, 3, 4$. Умножив равенство $S_1\vec{e_1}+S_2\vec{e_2}+S_3\vec{e_3}+S_4\vec{e_4}=0$ скалярно на $\vec{a}$, получим

$$P_1S_1=|(\vec{a}, S_1\vec{e_1})|=|-(\vec{a}, S_2\vec{e_2})-(\vec{a}, S_3\vec{e_3})-$$
$$-(\vec{a}, S_4\vec{e_4})|\leqslant P_2S_2+P_3S_3+P_4S_4.$$

5. Решение этой задачи будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

6. а) Прибор получает серию пар: $\log_{25}75$ и $\log_{65}260$, $\log_{25}3$ и $\log_{65}4$; $\log_4 65$ и $\log_3 25$; $\log_4(65/4)$ и $\log_3(25/3)$; $\log_4(65/16)$ и $\log_3(25/9)$. Так как $65/16>4$ и $25/9<3$, то после последней пары будет выдан ответ (левое число больше правого).

б) Предположив, что прибор бесконечно долго сравнивает числа $x_1=\log_a b<\log_c d=y_1$, возьмем натуральные числа m_0, m_1, для которых $x_1<m_0/m_1<y_1$. Тогда, применив несколько раз первое правило, прибор перейдет к числам $\{x_1\}<\{y_1\}$, где $\{a\}$ означает дробную часть числа a. Между $\{x_1\}$ и $\{y_1\}$ лежит число m_2/m_1, где $0<m_2<m_1$, число m_2 — натуральное. Применив второе правило, прибор перейдет к числам $x_2=1/\{y_1\}<y_2=1/\{x_2\}$, между которыми лежит число m_1/m_2. Далее снова применяется первое правило и т. д. Но тогда получается убывающая последовательность натуральных чисел m_1, m_2, m_3, ..., которая не может быть бесконечной. Противоречие.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко,
С. Табачников, В. Тихомирова, В. Уроев,
А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, А. Калинин, Л. Кардасевич, С. Коновалов, А. Котова, А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
А. Астрин, Н. Кузьмина, Т. Макарова, Э. Назаров, А. Хоменко, П. Чернуский

Редактор отдела художественного оформления
П. Чернуский

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Т. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», тел. 250-33-54, факс 251-55-57

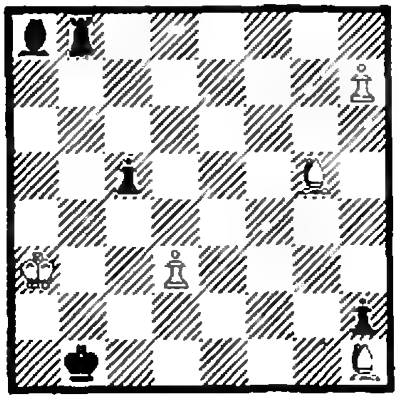
Сдано в набор 29.07.92. Подписано к печати 16.09.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,64.
Тираж [illegible] экз. Заказ 987. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

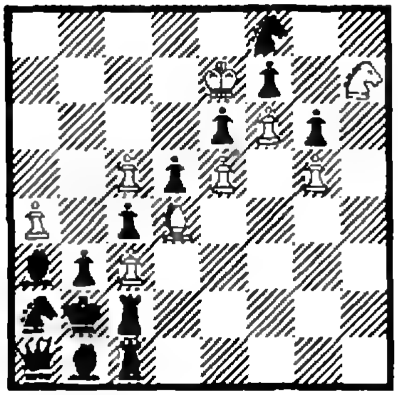
ПО ПРОТОРЕННОЙ ДОРОЖКЕ

Вернемся к теме симметрии, начатой нами в прошлый раз. Вот еще пример, в котором одна из сторон (белые) копирует, словно обезьяна, ходы противника.



П. Жойца, 1972
Ничья

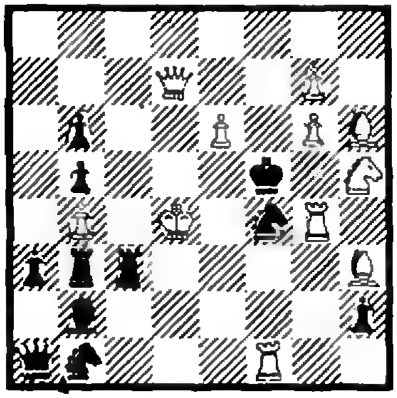
После короткого вступления **1. Cf4 Лh8 2. Ce5 C:h1** белые начинают дублировать ходы черных. **3. C:h8 Ca8! 4. Ca1! h1Ф 5. h8Ф Фb7 6. Фb2+!** В этом все дело — если бы на 4-м ходу слон отошел в другое место, белые сейчас были бы беззащитны. 6... Ф:b2 7. C:b2. **Ничья.** Чернопольный слон проложил дорогу своему ферзю. Эта тема в задачной композиции называется бристольской прокладкой пути.



Д. Бебеши, 1955
Кооперативный мат в 4 хода

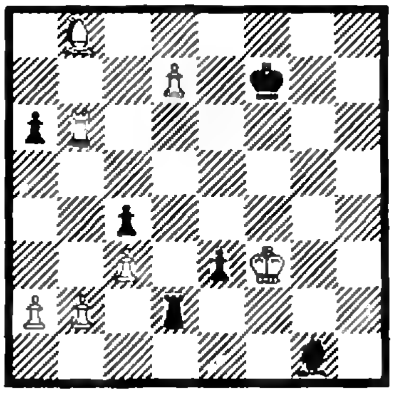
Как мы знаем, в кооперативной задаче начинают черные, которые помогают белым поставить мат. **1. Kd7 Kf8 2. Kb6 Kd7 3. K:a4 Kb6 4. K:c3 Ka4×**. Мы видим уникальную скачку коней: не успевает черный конь освободить какое-то поле, как тут же его место занимает белый конь. Забавное преследование, редкое даже для этюда.

«Обезьянья» тема ярко проявляется в дуэли двух фигур, представленной в разных вариантах. Здесь и всевозможные «кресты», «звездочки», параллельные танцы и «змейки», поединки пешек, апогеем которых является четырехкратное превращение в четыре разные фигуры — ферзя, ладью, слона и коня.



Я. Кноппель, 1972
Обратный мат в 2 хода

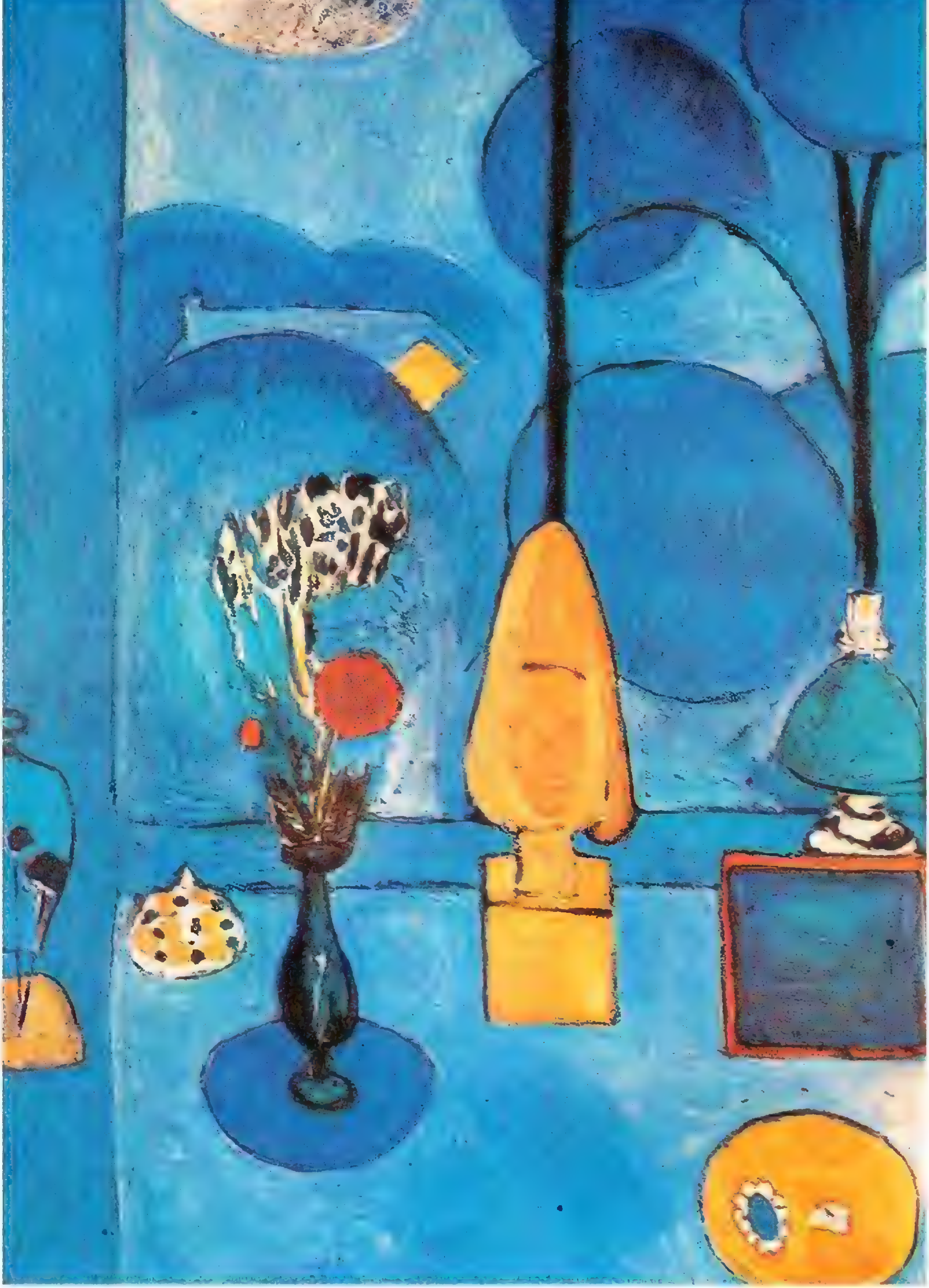
В задаче на обратный мат начинают белые, которые заставляют черных поставить мат. Идея белых — вынудить ладью c3 сделать ход, объявляя мат. Решает превращение пешки «g», но в какую фигуру? Допустим, белая пешка становится ладьей — 1. g8Л с угрозой 2. Лh4+ — пешка g6 защищена и приходится играть 2... Л:h4×. Однако в ответ и черная пешка становится ладьей — 1... h1Л!, нарушая замысел белых. Пусть теперь белая пешка превращается в слона — 1. g8C — пешка e6 защищена и грозит 2. Ф:b5+ Лc5×. Но вновь и черная пешка обезьянничает — 1... h1C! и на 2. Ф:b5+ следует 2... Cd5. Идем дальше — 1. g8K с угрозой 2. Kg3+ Л:g3×. Читатель уже догадался, что у черных есть ответ 1... h1K! Правильно только **1. g8Ф!** с двумя угрозами — 2. Лh4+ и 2. Ф:b5+, и копирование **1... h1Ф** на сей раз парируется — **2. Фd5+ Ф:d5×**.



Доннели — Левис, 1965

Экзотический эпизод турнирной борьбы. Вместо 1... Л:d7 с простой ничьей черные решили схитрить, сыграв 1... e2 в расчете на 2. d8Ф? e1K+! и 3... Л:d8. Однако белые сами превратили пешку в коня — **2. d8K+! Kpe7 3. Лe6+ Kp:d8 4. Л:e2 Л:e2 5. Kp:e2** и черным предстояла нелегкая борьба за ничью.

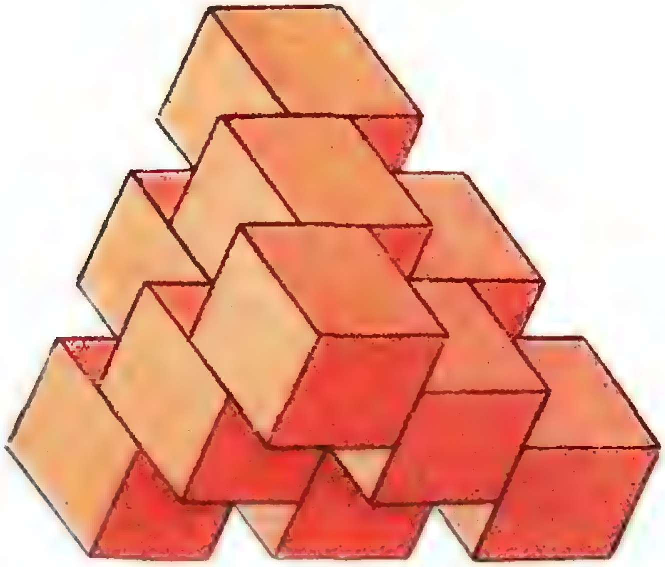
Е. Гик

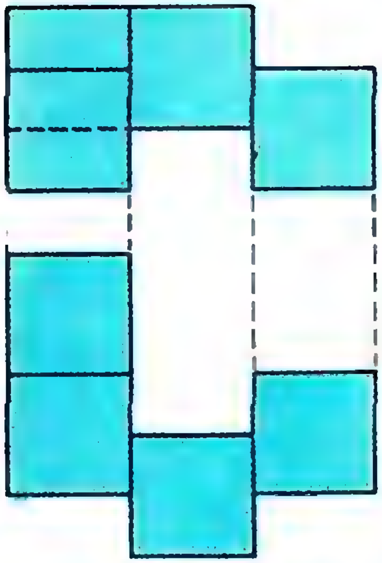


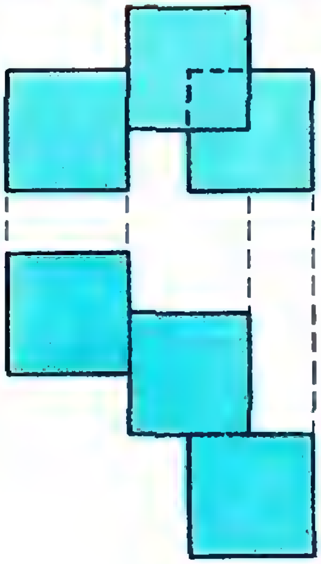
1 р. 10 к.
Индекс 70465

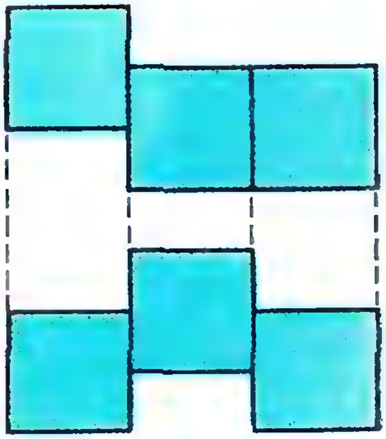
ТЕТРАЭДР ИЗ КУБИКОВ

Американский математик Стюарт Коффин периодически удивляет мир своими оригинальными головоломками. Сегодня вы видите на рисунке его очередное изобретение. Из 10 одинаковых кубиков склеены 3 детали, а из них собрана треугольная пирамида. Пирамиду из 10 отдельных кубиков сложит любой ребенок, нетрудно и разобрать головоломку Коффина на 3 части, но вот правильно соединить между собой 3 детали и собрать пирамиду заново оказывается очень трудной задачей. Вы можете убедиться в этом сами. Возьмите 10 готовых кубиков или склейте их из плотной бумаги или картона. Проекции деталей, показанные внизу, содержат всю необходимую информацию для склеивания трех деталей из 10 кубиков. Кубики склеивают со сдвигом в 1/2 ребра. Очень важно, чтобы все кубики были в точности одинаковы по размеру, иначе вы будете обречены никогда не увидеть свою головоломку решенной. Когда покорите пирамиду Коффина, попробуйте изобрести собственные конструкции. Измените конфигурацию деталей из кубиков. Придумайте детали, из которых можно собрать головоломки в форме четырехугольной пирамиды, октаэдра или шарообразного тела. Ваши модели присылайте в редакцию в раздел «Коллекция головоломок», который появится в нашем журнале в 1993 году.









НОМЕР
11

Квант

11 1992

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители —
Президиум Российской Академии наук,
Президиум Российской Академии образования
и коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *Ю. Соловьев.* Николай Иванович Лобачевский
10 *Ю. Носов.* Микроэлектроника обретает зрение

Задачник «Кванта»

18 Задачи М1371 — М1375, Ф1378 — Ф1382
20 Решения задач М1341 — М1343, М1345, Ф1358 — Ф1362
26 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

27 Задачи
28 *Л. Крыжановский.* Игра нитей в опыте Рихмана
31 Конкурс «Математика 6—8»

Школа в «Кванте»
Физика 9—11:

32 Кинематика, да и только
35 Ах, уж эта влажность
37 Избранные школьные задачи по физике

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Математический кружок

42 *А. Канель, А. Ковальджи.* Треугольники и катастрофы

Практикум абитуриента

51 Тригонометрические задачи

Информатика

52 *В. Дубровский, А. Калинин.* Новости кубологии

Информация

57 Новый прием в ВЗМШ на отделение «Биология»

Олимпиады

58 XXVI Межреспубликанская олимпиада по математике
61 XXVI Межреспубликанская олимпиада по физике
67 Межгосударственная олимпиада по информатике

Игры и головоломки

69 Кроссворд

70 **Ответы, указания, решения**

Нам пишут *(39)*

Наша обложка

1 *Эта красивая поверхность четвертого порядка обладает теми же симметриями, что и правильный тетраэдр.*
2 *«Ноябрьский небесный пришелец» — такое название дали бы мы сегодня этой картине известного бельгийского художника Р. Магритта.*
3 *Шахматная страничка.*
4 *Головоломка «Флексо-квадрат».*

© «Квант», 1992

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

(к 200-летию со дня рождения)

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ

23 февраля 1826 года на заседании физико-математического отделения Императорского Казанского университета был прочитан доклад под названием «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных линиях». Эта дата рассматривается как день рождения неевклидовой геометрии и является гранью двух эпох. Предшествующие двадцать пять веков были эпохой создания классической геометрии. Принципы, лежащие в ее основе, и вместе с ними и вся геометрия считались незыблемыми, не допускающими никаких изменений. Но в этот февральский день родилась новая геометрия, неизмеримо расширившая человеческие представления о пространстве и форме, радикально изменившая устоявшиеся взгляды на всю математику и окружающий мир. Творцу этой новой геометрии было тогда 33 года. Его звали Николай Иванович Лобачевский.

О первых годах жизни Лобачевского известно очень немного. Родился он 1 декабря 1792 г. в Нижнем Новгороде в бедной семье. Отец его — коллежский регистратор Иван Максимович Лобачевский — был уездным землемером, мать — Прасковья Александровна — происходила из нижегородских мещан. В семье Лобачевских было три сына — Александр, Николай и Алексей. Семья рано лишилась кормильца. Точная дата смерти Ивана Максимовича неизвестна; судя по записям нижегородской Сретенской церкви, это случилось в 1801 году.

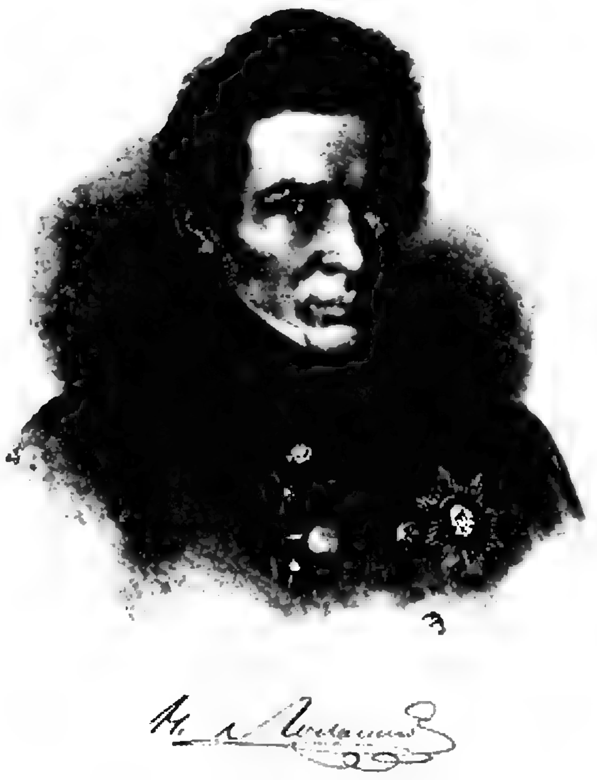
В ноябре 1802 года по ходатайству Прасковьи Александровны ее сыновья были приняты в первую Казанскую гимназию на казенное содержание. Жизнь гимназии того времени ярко описана в «Семейной хронике» знаменитым русским писателем С. Т. Аксаковым (в декабре 1800 года он был зачислен казеннокоштным воспитанником в ту же самую гимназию). Курс был четырехлетним. Кроме первоначальных и общих предметов, здесь преподавались языки — латинский, французский, немецкий и татарский; из философских наук — логика и практическая философия; из физико-математических наук — геометрия, тригонометрия, механика, гидравлика, физика, химия, натуральная история (геология), землеведение и гражданская архитектура; из юридических — практическое законоискусство; из военных — артиллерия, фортификация, тактика; и, наконец, искусства — рисование, музыка, фехтование и танцы. Усвоение этой программы требовало очень большого напряжения, редко кому удавалось с ней справиться. Большинство учащихся оставались в одном классе по два, иногда по три года.

Несмотря на трудную программу, учился Николай Лобачевский очень легко и хорошо. В гимназических ведомостях он аттестован «весьма прилежным и благонравным, занимающимся с особым прилежанием математикой и латинским языком».

В январе 1807 года Николай Лобачевский окончил гимназию и поступил в Казанский университет, основанный в ноябре 1804 года высочайшим повелением императора Александра I. Устав вновь открытого университета не отличался от типового устава российских университетов того времени. Он был построен на основах широкой автономии: все должностные лица университета, начиная с преподавателя и кончая ректором, должны были избираться советом университета, университет имел свой суд и даже свою полицию; он не только пользовался правом бесцензурного печатания своих изданий, но его редакционный комитет служил органом, разрешавшим к печати все научные произведения, публиковавшиеся в Казани, кем бы они ни были написаны.

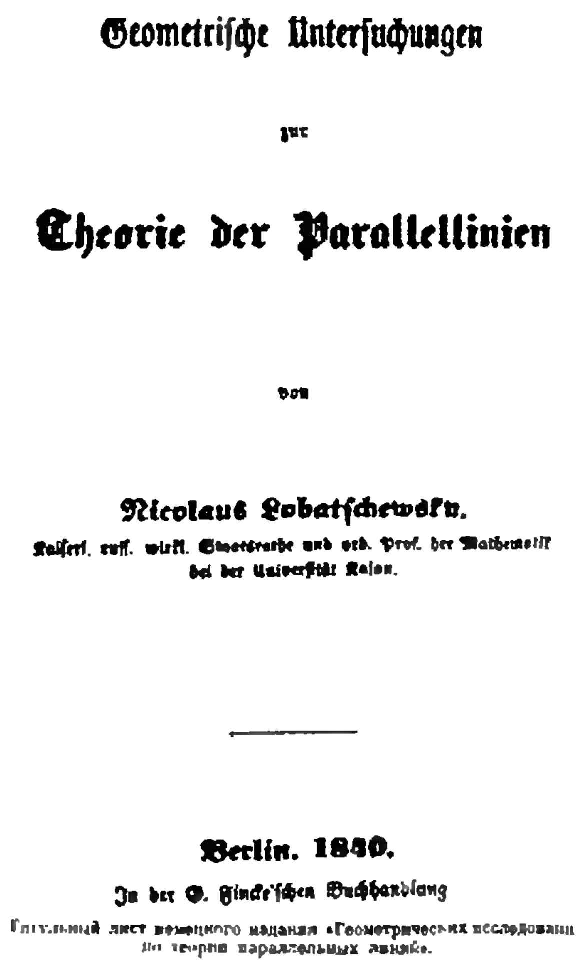
Первоначально университету было предоставлено здание, отстроенное для губернаторского дома, и один из корпусов гимназии. В первые три года занятия в университете велись силами преподавателей гимназии, а затем на работу в университет были приглашены профессора из-за границы. Разумеется, эти профессора не знали ни слова по-русски, так что преподавание велось на немецком и французском языках.

В 1808 году для преподавания математических наук в Казанский университет прибыл профессор Бартельс (Мартин Федорович, как его звали в России), сыгравший важную роль в математическом образовании Лобачевского. В свое время Бартельс был помощником учителя в школе, где учился великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс. Затем Бартельс учился и преподавал в Геттингенском университете, где вновь встретился с Гауссом и не прерывал с ним связи до конца жизни. По-видимому, Гаусс рекомендовал Бартельса секретарю Петербургской Академии наук Фуссу, который занимался подбором профессоров для вновь созданного университета. Бартельс был хорошо образованным ученым, прекрасным педагогом и чрезвычайно добросовестным человеком. Он был одним из немногих иностранных профессоров, вложивших в работу всю свою энергию, все внимание и всю любовь к делу. В Казани он пробыл двенадцать лет и положил начало казанской математической школе. Крупным математиком он не был, однако писал хорошие учебники и умел привить молодым людям тягу к научному творчеству.



Портрет Н. И. Лобачевского работы художника Крюкова.

Студенты университета изучали в то время следующие дисциплины: философию, историю, географию, всеобщую и российскую статистику, греческий и латинский языки, российскую словесность, высшую арифметику, алгебру, геометрию, конические сечения, дифференциальное, интегральное и вариационное исчисления, аналитическую геометрию, механику, аэростатику, гидростатику, гидравлику, физику, химию, естественную историю, технологию, право. Во всех дисциплинах Лобачевский показывал отличные успехи. Но особенно углубленно он занимался математикой. В своем отчете попечите-



Geometriſche Unterſuchungen

zur

Theorie der Parallellinien

von

Nicolaus Lobatſchewſky.

Kaiſerl. ruſſ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. der Mathematik
bei der Univerſität Kaſan.

Berlin. 1840.

In der G. Fincke'ſchen Buchhandlung

Титульный лист немецкого издания «Геометрических исследовани[й]
по теории параллельных линий».

Титульный лист немецкого издания «Геометрических исследований по теории параллельных линий».

лю Казанского учебного округа профессор Бартельс писал: «Студенты Симонов и Лобачевский, особливо же последний, оказали столько успехов, что они даже во всяком европейском университете были бы отличными, и я льщусь надеждой, что если они продолжать будут упражняться в усовершенствовании своем, то займут значащие места в математическом кругу».

3 августа 1811 года Лобачевский окончил университет и был утвержден в звании магистра. По уставу университета магистры должны были, с одной стороны, готовиться к научной и профессорской деятельности, а с другой — быть помощниками профессоров. Одновременно с Лобачевским звания магистра был удостоен и его однокурсник И. М. Симонов. Это был человек, обладавший большими дарованиями, преимущественно занимавшийся астрономией. С этого времени они в течение свыше 35 лет вели в университете без видимых разногласий совместную работу, сменяя друг друга на кафедрах и административных должностях.

Математике оба молодых магистра учились у Бартельса. В качестве основных сочинений, над которыми должен был работать Лобачевский, Бартельс выбрал пятитомную «Небесную механику» Лагранжа и «Арифметические исследования» Гаусса. В 1813 году Лобачевский выполняет свою первую самостоятельную научную работу: находит разложение многочлена деления круга*)

$$P_n(z)=z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z+1$$

на неприводимые множители для некоторых значений показателя n.

26 марта 1814 года распоряжением министра народного просвещения Лобачевский был возведен в звание адъюнкта физико-математических наук (по современной терминологии — кандидата); таким образом, в возрасте 21 года Лобачевский официально становится преподавателем университета. Он ведет активнейшую преподавательскую работу, читает многочисленные курсы, поражающие широтой диапазона: элементарная математика, все без исключения разделы высшей математики, механика, опытная и теоретическая физика, теоретическая и наблюдательная астрономия. К началу двадцатых годов им написаны два учебника «Алгебра. Исчисление конечных» и «Геометрия» (опубликованные значительно позже), в рукописном виде распространявшиеся среди студентов. И все эти годы Лобачевский углубленно занимается теорией параллельных.

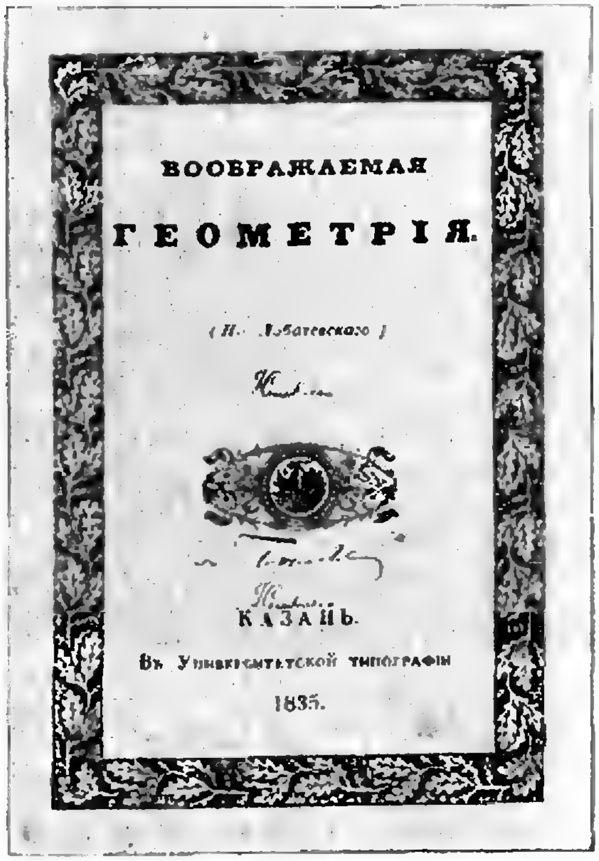
Проблема параллельных уходит своими корнями в античную Грецию. Проникновение геометрии из Междуречья и Египта в Грецию привело к тому, что отрывочные, опытные, на глаз установленные факты здесь начинают превращаться в цепь связанных между собой предложений; каждое из них занимает в этой цепи определенное место и логически вытекает из предыдущих. Соответственно этому развитие геометрии шло в Греции в двух направлениях: во-первых, стремились логическими средствами найти возможно большее число геометрических истин; во-вторых, старались свести к возможному минимуму те геометрические факты, которые устанавливаются опытом. Огромную роль в формировании такого взгляда на геометрию сыграл великий греческий ученый Аристотель (384—322 г. до н. э.), создавший теорию дедукции, т. е. логического вывода. По схеме Аристотеля всякая дедуктивная наука должна начинаться установлением основных понятий, не подлежащих определению, и аксиом — основных истин, не подлежащих доказательству. Все остальное должно получаться строгим логическим выводом из этих исходных предпосылок. Применительно к геометрии этот замысел был в известной мере выполнен Евклидом (конец IV — начало III в. до н. э.), создавшим первый в истории свод геометрических знаний в 13 книгах — «Начала». Схема Аристотеля реализуется в «Началах» следующим образом. Первой книге предпосланы аксиомы и постулаты. Аксиомы, или, как называл их Евклид, общие достояния нашего ума,— это истины, относящиеся ко всяким величинам, не только геометрическим (например: две величины, порознь равные третьей, равны между собой; если к равным прибавить равные, то получим равные). Постулаты — это требования геометрического характера, которые нужно принять, чтобы на их основе делать все дальнейшие выводы. Этих постулатов у Евклида пять. Вот их оригинальные формулировки.

---

*) Об этом многочлене было рассказано в статье С. Гиндикина «Дебют Гаусса» («Квант», 1972, № 1).

«Нужно потребовать:

I. *чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию;*



ВООБРАЖАЕМАЯ
ГЕОМЕТРІЯ.

(Н. Лобачевскаго)

КАЗАНЬ.
Въ Университетской типографіи
1835.

Титульный лист первого издания «Воображаемой геометрии».

II. *чтобы каждую ограниченную прямую можно было продолжить неограниченно;*

III. *чтобы из любого центра можно было описать окружность любым радиусом;*

IV. *чтобы все прямые углы были равны между собой;*

V. *чтобы если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов оказалась меньше двух прямых, то эти прямые при достаточном их продолжении пересекались бы и притом с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых.*»

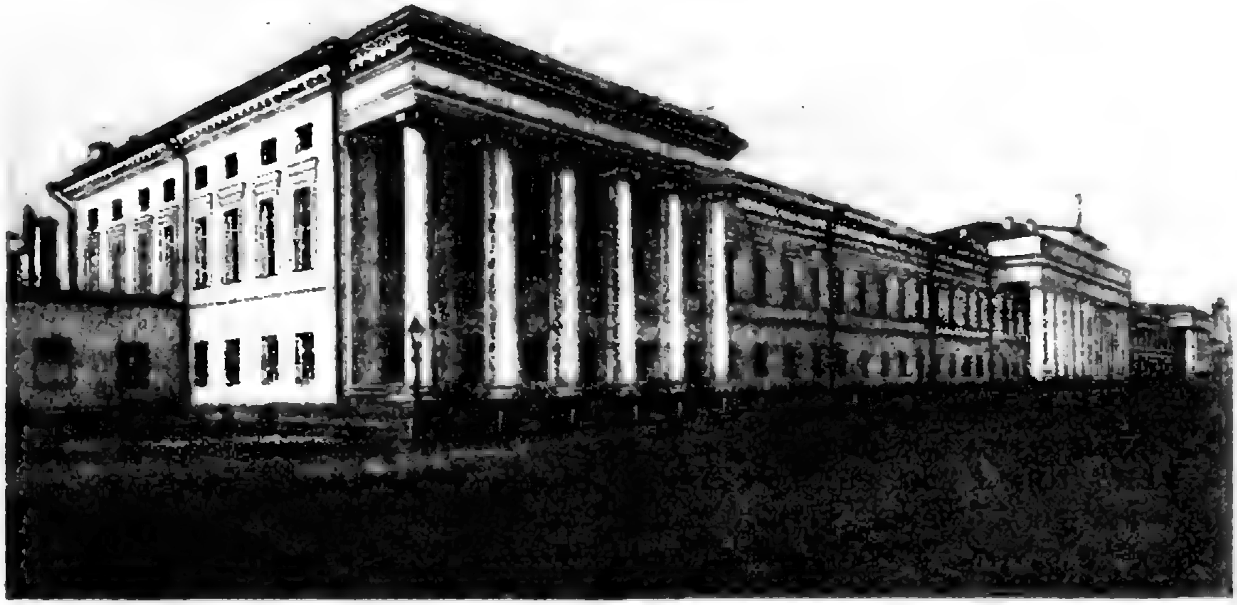
Необходимость последнего, пятого постулата для построения геометрии не кажется очевидной: сам Евклид доказывает целый ряд теорем, не опираясь на него, и совершенно неясно, почему в этот ряд не могут быть включены все теоремы евклидовой геометрии. Особая роль пятого постулата, его сложность и недостаточная наглядность привели к тому, что математики позднейших времен стали пытаться доказать его как теорему. Некоторые из них старались вывести этот постулат из остальных постулатов и аксиом Евклида, не добавляя к ним новых утверждений, другие же заменяли его иной аксиомой, которую они считали более простой и наглядной. Но анализ этих новых аксиом неизменно показывал, что при такой замене использовались утверждения, равносильные пятому постулату. Такими наиболее употребительными заменителями являются утверждения: «через точку вне прямой можно провести в их плоскости не более одной прямой, не пересекающей данной», «сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым» и т. д.

Многие попытки доказательства проводились методом доказательства от противного, т. е. предполагалось, что пятый постулат неверен, и из этого делался ряд выводов. Если бы при этом удалось прийти к противоречию, то пятый постулат был бы доказан. Наиболее далеко по этому пути продвинулись итальянский священник Джироламо Саккери (1667—1733) и швейцарский математик Иоган Генрих Ламберт (1728—1777). При этом было накоплено много фактов, которые имели бы место в геометрии, в которой верны все аксиомы евклидовой геометрии, кроме аксиомы о параллельности, а последняя неверна. Особенно много удивительных теорем, которые были бы справедливы в такой геометрии, если бы она была возможна, получил Ламберт. Однако ни Саккери, ни Ламберт не допускали и мысли о том, что кроме геометрии Евклида возможна другая непротиворечивая геометрия. Все построения Саккери и Ламберта завершались тем, что явно или неявно использовалось утверждение, равносильное пятому постулату, в результате чего и обнаруживалось противоречие.

Лобачевский занялся исследованием той совокупности теорем, которая может быть выведена из системы аксиом, получаемой, если заменить аксиому параллельных евклидовой геометрии противоположным утверждением: *в плоскости через точку A, не принадлежащую прямой l, можно провести более одной прямой, не пересекающейся с l.* Созданная таким образом геометрическая система носит теперь имя неевклидовой геометрии или геометрии Лобачевского.

Независимо от Лобачевского существование такой системы установили Карл Фридрих Гаусс и венгерский математик Янош Бойяи. Однако Гаусс, боясь быть непонятым, не пошел дальше первых шагов в этой геометрии и не опубликовал ни одной строчки о своем открытии. Бойяи опубликовал результаты своих исследований в 1832 году в виде приложения к обширному геометрическому трактату своего отца. Эта работа по достоинству считается одним из замечательных произведений мировой математической литературы, однако и в ней развиты лишь первые понятия новой геометрии. Стоит отметить, что к открытию неевклидовой геометрии был близок немецкий ученый Франц Адольф Тауринус. В 1826 году он даже опубликовал в Кельне небольшую брошюру, содержащую несколько теорем новой геометрии. К сожалению, изложены они были очень сжато и маловразумительно. Не встретив ни малейшего признания своих идей, Тауринус, по словам одного из своих современников, «впал в меланхолию»: в припадке болезни он сжег оставшиеся у него экземпляры брошюры и никогда более не возвращался к этому предмету.

Лобачевский впервые выступил с публичным изложением своей геометрии 23 февраля 1826 года. В этот день перед учеными физико-математического факультета стоял не просто уважаемый молодой профессор, а творец новой науки. Этот доклад был первым из серии докладов, сделанных им в том же 1826 году и опубликованных в первых номерах только что организованного научного журнала «Казанский вестник» в 1829 году



Казанский университет. Гравюра 30-х годов XIX века.

под общим названием «О началах геометрии». В этом сочинении содержалось не только полное изложение новой геометрии, но и многочисленные применения ее в математическом анализе.

С периодом активной разработки новой геометрии совпало еще одно важное для Лобачевского событие. В 1827 году он был выбран ректором Казанского университета, и с этого времени в жизни университета наступила цветущая пора. Были построены новые университетские здания, астрономическая обсерватория, создана превосходная библиотека, многочисленные лаборатории, значительно увеличилось число студентов. Лобачевский избирался ректором шесть раз подряд и находился на этой должности 13 лет. В годы своего управления университетом Лобачевский создал все свои научные труды. Если даже отвлечься от их значения, если только учесть, сколько труда нужно было затратить на их написание (изданное в конце сороковых годов собрание сочинений Лобачевского составляет пять увесистых томов), на выполнение вычислений, на подготовку их к печати, то этой научной деятельности с лихвой хватило бы для всякого ученого. Но, кроме того, все эти годы Лобачевский интенсивно вел преподавание по нескольким кафедрам, проявляя недюжинную эрудицию и педагогическое мастерство. Одной только этой деятельности было бы вполне достаточно для любого незаурядного профессора, а Лобачевский совмещал ее с титанической административной работой. Достаточно сказать, что, занимаясь постройкой новых университетских зданий, он досконально изучил архитектуру и участвовал в проектировании университетского городка. И всегда он оставался человеком, преданным университету, человеком безукоризненной честности, уважающим мнения других, действующим лишь силой убеждения.

Созданную им новую геометрию Лобачевский назвал «воображаемой», говоря, что если она не существует в природе, то во всяком случае существует в математическом анализе. Как уже отмечалось, почти в полном объеме она была представлена на суд ученых в обширной работе «О началах геометрии». Первая реакция на это сочинение появилась в 1834 году. В журнале «Сын отечества» № 47, издававшемся Н. Гречем и Ф. Булгариным, появился отзыв, подписанный литерами С. С. Доподлинно неизвестно, кто скрывался за этими литерами (по мнению крупнейшего знатока жизни и творчества Лобачевского профессора В. Ф. Кагана, это были петербургские математики С. Бурачек и С. Зеленый). И по существу, и по форме это был не отзыв, а грубый пасквиль, проникнутый неприкрытым издевательством. Это была не единственная отрицательная реакция. Даже такой крупный математик, как М. В. Остроградский, не скрывал насмешки, отзываясь о воображаемой геометрии.

Лобачевскому было суждено до дна испить горькую чашу непонимания и невежественной критики. Гениальное открытие Лобачевского было настолько революционным, что научная мысль была совершенно не подготовлена к его восприятию. Тяжелы были переживания ученого, на которого обрушилась столь несправедливая критика, но неизмеримо сильнее было его убеждение в правильности своих идей. Твердость духа и уверенность в грядущем торжестве его открытия составляли, пожалуй, наиболее характерную черту Лобачевского.

В тридцатые годы Лобачевский значительно развивает основы новой геометрии, изложенные в его первой работе. Появляются новые обширные труды «Воображаемая геометрия» (1835), «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» (1835—1838). Однако, насколько можно судить, никто этих сочинений в то время не прочитал. В 1840 году Лобачевский пишет на немецком языке небольшую книгу, содержащую короткое и, возможно, наиболее доступное изложение своей геометрии: «Geometrische Untersuchurgen zur Theorie der Parallellinien» («Геометрические исследования по теории параллельных линий»). Она также получила неблагоприятный отзыв, но именно эта книга обратила на себя внимание Гаусса. Судя по всему, он был первым человеком, до конца осознавшим значение работ Лобачевского. Известно, что после прочтения «Исследований» шестидесятитрехлетний Гаусс два года изучал русский язык и освоил его в такой мере, что смог свободно прочесть остальные труды Лобачевского. Более того, по предложению Гаусса 23 ноября 1842 года Лобачевский был избран членом-корреспондентом Геттингенского королевского научного общества, уже тогда имевшего значение академии наук. Это было единственным научным признанием, которое Лобачевский получил при своей жизни. Однако в печати Гаусс о своем отношении к работам Лобачевского никогда не высказывался, так что диплом Геттингенского общества оставался лишь формальным знаком внимания. В письмах к своему другу Шумахеру Гаусс говорил о великом значении геометрии Лобачевского, но эта переписка была издана лишь в 60-х годах, после смерти Лобачевского, и только тогда на его работы обратили внимание математики Западной Европы.

В 1846 году сменилось руководство Казанским учебным округом, и Николай Иванович Лобачевский помимо своего желания был назначен помощником попечителя округа с увольнением от должностей профессора и ректора. По существу это была опала. Трудно сказать, чем было вызвано это назначение, но совершенно ясно, что прямой и самостоятельный Лобачевский оказался неугоден новым лицам в министерстве.

В конце своей жизни ему пришлось испытать массу огорчений, насмешек и несправедливостей. Силы угасали. С прекращением службы в университете значительно ухудшилось его материальное положение. Новый попечитель округа настоял, чтобы семья Лобачевского освободила казенную квартиру. Вскоре после этого заболел туберкулезом и скоропостижно умер его старший любимый сын Алексей. Лобачевский очень тяжело переживал эту утрату. И все же больной, подавленный грузом забот, ослепший — Лобачевский нашел силы подытожить результаты своих геометрических исследований в сочинении «Пангеометрия», которое он диктовал своим ученикам.

24 февраля 1856 года, ровно через тридцать лет после своего первоначального доклада по неевклидовой геометрии на физико-математическом факультете, Лобачевский скончался непризнанным и почти забытым. Только в середине шестидесятых годов, после опубликования переписки Гаусса, работы Лобачевского сделались известными, и его замечательные идеи получили первое признание. Выходят в свет переводы его сочинений на французский, немецкий и итальянский языки, появляются первые последователи. Остается проблема логической непротиворечивости новой геометрии — центральный вопрос, на котором было сосредоточено внимание Лобачевского в течение всей его жизни. Наконец, в 1868 году итальянский математик Э. Бельтрами (1835—1900) находит положительное решение и этого вопроса, построив поверхность вращения, реализующую геометрию Лобачевского. С этого момента новая геометрия становится неотъемлемой частью математики, ее идеи и методы находят применение в теории чисел, теории функций, теории дифференциальных уравнений, в математической физике.

На основе идей Лобачевского выросла вся современная геометрия, играющая ключевую роль как в математике, так и вообще в точном естествознании. Имя творца этой новой геометрической системы — великого русского математика Николая Ивановича Лобачевского — по праву занимает одно из первых мест в истории мировой науки.

16 октября 1992 года на 75-м году жизни скончался замечательный ученый и блестящий популяризатор науки, доктор физико-математических наук, профессор ЯКОВ АБРАМОВИЧ СМОРОДИНСКИЙ.

Я. А. Смородинский был одним из инициаторов создания журнала «Квант», членом редакционной коллегии журнала со дня его основания, автором, редактором и рецензентом огромного числа книг и статей. Это был необыкновенно эрудированный, добрый, веселый и обаятельный человек. Таким мы и будем помнить Якова Абрамовича Смородинского.

Редакционная коллегия
Редакционный совет
Редакция журнала «Квант»

МИКРОЭЛЕКТРОНИКА ОБРЕТАЕТ ЗРЕНИЕ

Доктор физико-математических наук
Ю. НОСОВ

На очереди — видеоинформация

Знамение времени — компьютеризация. Микро-, мини-, просто, супер-, а теперь еще и персональные (знаменитые *PC*) компьютеры стали поистине надеждой и реальностью прорыва в интеллектуально-информационное общество будущего, которое видится «золотым веком» человечества (по крайней мере сейчас, пока этот век еще не настал). Однако что собственно все эти большие и малые ЭВМ вычисляют, какую такую информацию они «переваривают»? Если надо рассчитать траекторию космического корабля или мостовые фермы, спроектировать кузов автомобиля с наилучшей аэродинамикой, «увязать» между собой миллиарды цифр народнохозяйственного плана — здесь ЭВМ и «карты в руки». Управление производственными процессами, поиск необходимых справок, перебор и сопоставление разнообразных данных, анализ сложнейших химических реакций и многое многое другое в том же роде компьютеры делают быстрее, надежнее, лучше человека.

Но все это — помощь в работе. А в повседневной жизни, в быту, какую информацию обрабатывает наш поистине «персональный компьютер» — головной мозг? Ответ очевиден — только то, что мы видим, слышим, осязаем. Причем главным образом, более чем на 90 %, то, что видим — ведь и услышанное внутри нас преобразуется в зрительные образы. Иначе говоря, восприятие, распознавание, обработка изображений, картин, образов — вот основа основ нашего информационного общения с окружающим миром. Гармоничный альянс глаза с мозгом великолепно обеспечивают это общение. А в компьютер информация, как правило, вводится через клавиатуру или другим подобным способом, который иначе как убогим назвать трудно. Изощреннейший «электронный мозг» слеп — противоречие налицо. И пока не появятся электронные (точнее, микроэлектронные) сенсоры, электронное зрение в первую очередь,— действительно всеобъемлющая компьютеризация невозможна. Приборы, способные выполнить эту деликатную миссию,— так называемые полупроводниковые приборы с зарядовой связью (ПЗС) — появились не сегодня, и скорее всего не из этой статьи читатель впервые о них узнает.

Изобретены ПЗС в 1969 году американскими учеными В. Бойлом и Дж. Смитом, к 1980 году они — ПЗС — достигли физико-технической «зрелости», а наше время характерно тем, что ПЗС неудержимо ринулись в большую жизнь.

Два слова о предшественниках, о том, как осуществлялось (и осуществляется) в электронике восприятие изображений. Самые совершенные средства для этого предоставляет телевидение (рис. 1). Мы все — «потребители» ТВ и в качестве таковых имеем дело с его конечной, выходной частью. Для нас ТВ — это телевизионный приемник, телевизор. Однако есть еще и вход системы, ее начало, передатчик. Здесь происходит восприятие изображения, осуществляет это видикон — специфическая электронно-лучевая трубка. Через объектив изображение фокусируется на экран (или растр) видикона — стеклянное окно, изнутри покрытое пленкой фоточувствительного состава. Свет возбуждает в пленке свободные электроны, чем ярче тот или иной фрагмент наблюдаемой картины, тем сильнее заряжается соответствующий участок растра. Экспозиция длится 1/25 секунды — длительность одного ТВ-кадра — за это время изображение преобразуется в подобное ему распределение заряженности по площади растра. Теперь наступает очередь элект-

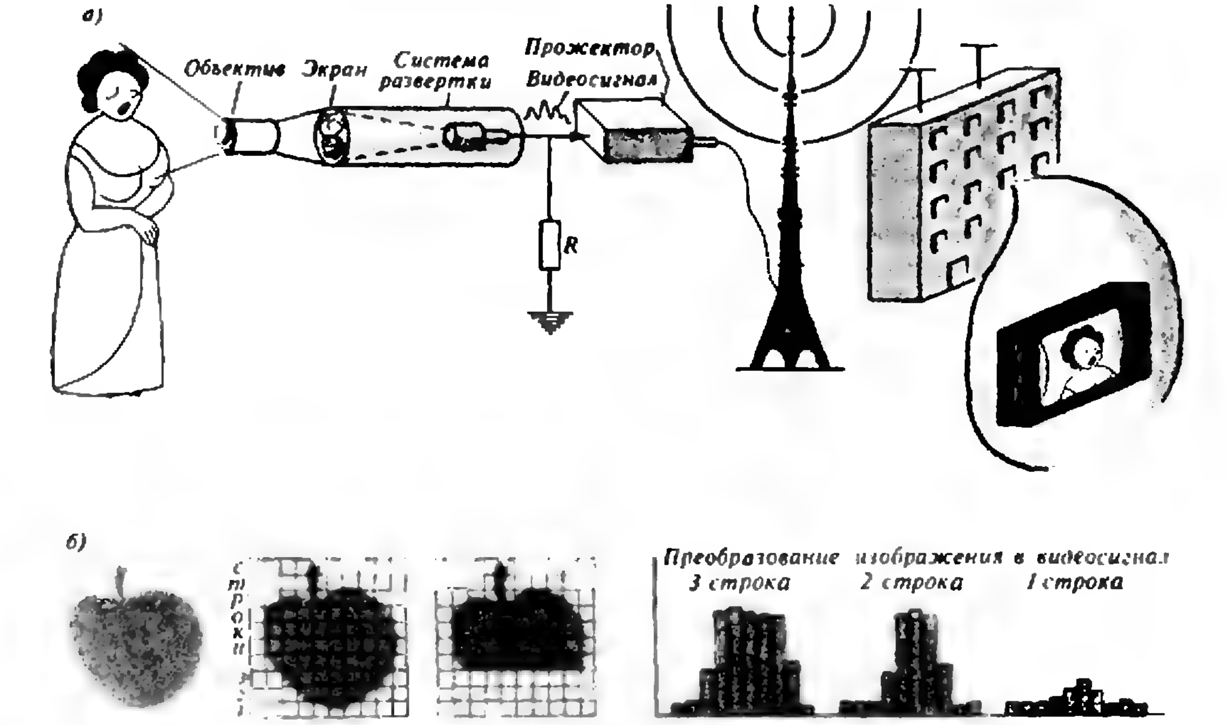


Рис. 1. Телевидение — это просто. а) Как певица из студии «попадает» на экран наших телевизоров. б) «Превращение» яблока в видеосигнал.

ронного луча, который, подчиняясь изменяющемуся напряжению развертки на отклоняющих пластинах, прочерчивает на экране строку за строкой, обегая в конечном счете весь светочувствительный растр. При этом луч «чувствует» степень заряженности участков экрана — на нагрузочном резисторе формируется соответствующий электрический сигнал, называемый видеосигналом. Тем самым замыкается такая цепочка преобразований: яркий фрагмент изображения→сильно заряженный участок растра→всплеск видеосигнала (аналогично и «темный фрагмент→...»). Характерно, что в результате процедуры считывания (ее также называют сканированием) двухмерная картина преобразуется в сигнал, «вытянутый» вдоль оси времени.

Дальнейшее (хотя это уже не по теме) выглядит так. Видеосигнал преобразуется в радиоволны, рассылаемые телебашней к нашим антеннам, а здесь все идет в обратном порядке: радиоволна → видеосигнал → →всплеск электронного луча кинескопа→свечение экрана телевизора. И если нет искажений и потерь, мы видим то же, что «видел» видикон.

Заметим, что описанный алгоритм восприятия изображений достаточно универсален — нечто подобное происходит и в «аппарате» человеческого зрения. Глазной «объектив» — хрусталик — фокусирует изображение на сетчатку, состоящую из десятков миллионов фоточувствительных рецепторов («растр»). Здесь световая энергия порождает биоэлектрические импульсы («видеосигнал»), которые по нервным волокнам поступают в кору головного мозга («компьютер» и «запоминающее устройство»). Число волокон значительно меньше числа рецепторов, следовательно, и принцип сканирования тоже как-то работает.

Начало прорыва

Пора, однако, переходить к теме. Внешне ПЗС прост (рис. 2, *а*) — это кремниевый кристалл, покрытый тончайшей диэлектрической пленкой диоксида кремния (SiO_2), на которую нанесены параллельные друг другу узкие алюминиевые полоски-электроды, подобные штакетнику в дачном заборе. Только поперечное соединение этих «штакетин» между собой чуть посложнее — через две на третью.

При воздействии на кристалл светового изображения (рис. 2, *б*) фотоны, поглощаясь в кремнии, порождают в нем свободные электроны (из расчета «один фотон→один электрон»), количество их тем больше, чем ярче и продолжительнее засветка. Чтобы не растерять образовавшиеся заряды, ко всем вторым электродам каждой тройки прикладывают положительное напряжение — электроны, разумеется, устремляются к плюсу источника питания, но на их пути глухой стеной встает диэлектрическая пленка SiO_2. Поэтому электроны скапливаются в приповерхностной зоне кристалла, образуя зарядовые «капли», или «пакеты», которые могут сохраняться достаточно долго.

Так световая картина преобразуется в эквивалентную ей картину распределения зарядовых пакетов по площади кристалла (рис. 2, *в*). Правда при этом плавное по координате изменение яркости превратилось в ступенчатое изменение амплитуд зарядовых пакетов, но при последующем воспроизведении изображения глаз сам осуществляет сглаживание. Надо только, чтобы «шаг дискретизации» был достаточно мал — здесь это фрагмент из трех электродов, называемый также элементарной ячейкой ПЗС или элементом разложения (имеется в виду картина). Чем больше их на кристалле и чем плотнее они размещены, тем выше разрешающая способность ПЗС, тем точнее передается воспринимаемое изображение.

Итак, первый акт ПЗС-представления — фаза экспозиции, накопления (или хранения) — благополучно завершился.

Интрига второго акта очевидна — надо выудить зарядовые пакеты из кристалла, попутно превратив их в электрические импульсы. Разумеется, нечего и думать о подключении порознь к каждой ячейке — паутина невообразимо перепутанных проводников, необходимых для этого, превзошла бы все «шедевры» театра абсурда. Но прелесть ПЗС в том и состоит, что в нем работает механизм внутреннего, «встроенного» самосканирования.

Вернемся к элементарной ячейке в момент окончания экспозиции (см. рис. 2, *б*). Если к электроду *3* приложить импульс напряжения считывания больший, чем напряжение хранения на электроде *2*, то зарядовый пакет перетечет в это новое более уютное место — здесь потенциальная яма глубже.

Это общий закон: рыба ищет, где глубже, человек — где лучше, а электрон — где его энергия минимальна. Если теперь потенциал с электрода 2 снять, а на электроде 3 уменьшить до напряжения хранения $U_{хр}$, то, как видим, картина оказывается полностью подобной первоначальной, но вся она на один электрод сдвинута вправо. Наигрывая эти несложные двухтактные рулады, можно зарядовые пакеты всей ПЗС-строки вытянуть на край кристалла. Здесь их поджидает *p* — *n*-переход (простейший диод), который, «проглатывая» очередную порцию зарядов, формирует на нагрузочном резисторе соответствующий импульс напряжения.

Вот и все — световая картина превратилась в распределение зарядов, которое в результате сканирования породило видеосигнал. Занавес.

Мы здесь рассмотрели простейшие линейные ПЗС, способные воспринимать узкую полоску, «вырезанную» из картинки. Чтобы охватить ее всю, надо ввести еще поперечное механическое сканирование, например, покачивая ПЗС (или картинку) туда-сюда. Более универсальны матричные ПЗС, у которых на кристалле изготовлена не одна, а большое количество строк, расположенных друг под другом. Каждый элемент такой матрицы задается двумя координатами: номером строки и номером в строке (или номером столбца). При использовании матричного ПЗС сканирование по обеим координатам осуществляется электронным способом. Матрица воспринимает изображение все целиком и сразу.

Число элементов в матрице обычно очень велико, и на то, чтобы их вытянуть через один выходной p — n-переход, требуется значительное время. В этот период экспозиция невозможна: вытекающие заряды перепутались бы с генерируемыми — поистине все бы «смешалось в доме Облонских». Чтобы «развязать» эти процессы, на кристалле выделяют две равные области (рис. 2, *г*): фоточувствительную (матрица накопления) и затененную (матрица считывания). После завершения экспозиции очередного кадра зарядовые

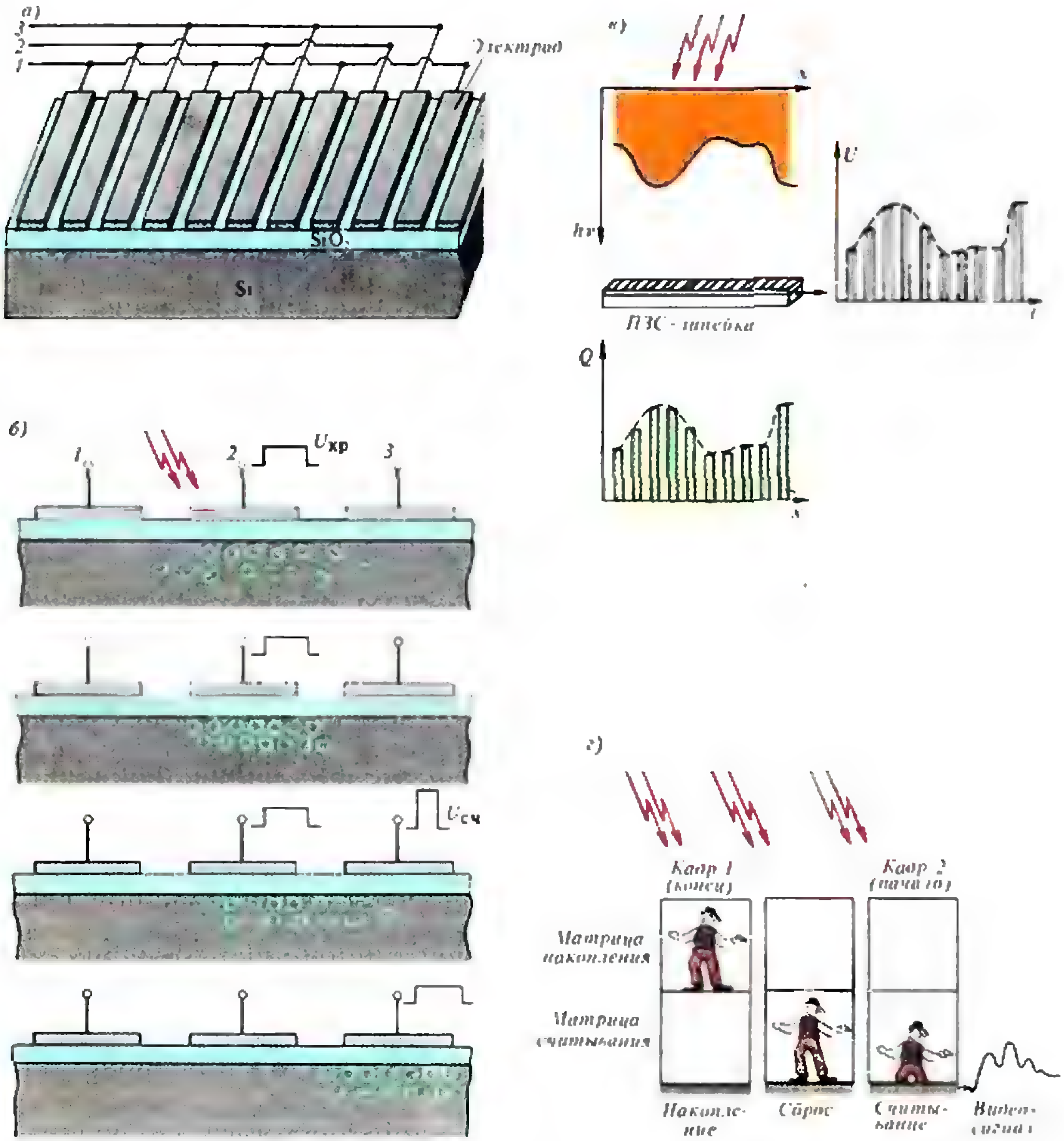

а)
3
2
1
Электрод
SiO₂
Si
в)
hν
U
ПЗС - линейка
t
Q
x
б)
1
2
Uхр
3
Uсч
г)
Кадр 1 (конец)
Кадр 2 (начало)
Матрица накопления
Матрица считывания
Накопление
Сброс
Считывание
Видеосигнал

Рис. 2. Всё о ПЗС. а) ПЗС — это очень просто?! б) Фотонно-электронные игры в кристалле: «превращение» фотонов в электроны; локализация и перетекание электронов; электроны на новом месте. в) В ПЗС-линейке ниточка света (hν) преобразуется в цепочку зарядов (Q), которые вытекая образуют видеосигнал (U). г) Работа ПЗС-матрицы с кадровым переносом изображения.

пакеты из матрицы накопления вдоль по столбцам «сбрасываются» в матрицу считывания, причем очень быстро, за время менее 1/1000 с. В течение времени следующего кадра (1/25 с) каждая матрица занимается своим делом: фоточувствительная накапливает новую информацию, затененная — освобождается от предыдущего кадра, формируя видеосигнал.

Именно эта изюминка ПЗС и запатентована его изобретателями: «передача локализованного заряда с помощью манипуляции электрическими потенциалами». Каждый алюминиевый электрод и фрагмент структуры под ним представляет собой МДП-конденсатор («металл — диэлектрик — полупроводник»), а ПЗС-строка — цепочку таких конденсаторов с одной общей обкладкой. Когда-то, в начале 60-х годов, подобные цепочки делали с использованием транзисторов, вмонтированных между конденсаторами в качестве ключевых элементов. Их называли «пожарными цепочками» — при правильной манипуляции ключами заряд перетекает из ячейки в ячейку подобно тому, как ведро с водой, переходя из рук в руки, передается по людской цепочке на пожаре. Бойл и Смит максимально сблизили конденсаторы, и оказалось, что можно обойтись без специальных ключей. А вместе с упрощением пришло и новое качество — заряды стали перемещаться только внутри полупроводника, не вытекая в соединительные электроды.

Возможно, что именно эти скучноватые техницизмы сформировали логику открытия, а возможно и что-то еще. Когда представишь, как по воле человека в ПЗС вдоль поверхности кристалла с громадной скоростью (а она не меньше, чем у суперэкспресса на магнитной подвеске) мчат целеустремленно сотни тысяч электронных капель, то мгновенно останавливаясь, то меняя направление, когда представишь это — душу охватывает торжество сродни тому, которое рождают в ней первые такты бетховенской «Пятой...»

Через тернии — к звездам

Конечно, описанное — всего лишь схема. Разыграть ее под силу провинциальной любительской труппе, но получится ли при этом настоящий спектакль?

В упрощенном рассмотрении выпало из кадра множество неучтенных мешающих факторов, каждый из которых способен похоронить яркую идею ПЗС.

Однако оказалось, что простейшая схема очень пластична, мобильна, она дает необозримый простор для творчества. Со временем в ПЗС пришли свои — полупроводниковые — Чеховы, Станиславские, Шостаковичи, которые вдохнули в эту схему подлинную жизнь, а заодно ввели в пьесу побочные интриги, по-новому организовали мизансцены, подобрали аранжировку...

Вернемся к началу: «свет возбуждает в кристалле электроны». Но как? Ведь чуть ли не вся его поверхность отдана под алюминиевые электроды — на электронный глаз опущено немигающее металлическое веко. Есть, правда, узкие зазоры между электродами — первые ПЗС этими щелочками и довольствовались. Чувствительность, разумеется, была невысокой, к тому же улучшение «внутренних параметров» ПЗС требует сужения зазоров. Как быть? Перевернули структуру, стали светить сзади, где ничто не мешает — получилось неплохо. Только сначала пришлось кристалл превратить в тончайшую мембрану — иначе электроны гибнут, не добежав до противоположной поверхности. Конструкция стала сложной, малонадежной, дорогостоящей. К счастью, удалось найти альтернативу алюминию: поликремний — мелкодисперсный, поликристаллический кремний. Его несложно наносить в виде тонкой пленки, которая имеет высокую проводимость, но в отличие от алюминия — прозрачна. Проблема фоточувствительности решилась, ПЗС-глаз прозрел. Но проблема эта, увы, не единственная. Помните, образованные светом электроны вытягиваются электродами и локализуются на поверхности. Так вот, худшего места для хранения электронов не найти во всем кристалле. Кто не наслышан о чистоте и совершенстве кремниевых кристаллов, используемых в микроэлектронике? И это так, пока речь идет об объеме. Обеспечить идеальность структуры и на поверхности кристалла невозможно, а тут еще поверхность спечена со стеклообразным SiO_2. На границе двух разнородных материалов всегда образуются дефекты и механические напряжения, губительные для свободных электронов. Здесь электрон оказывается как в ловушке, превращаясь из подвижного в связанный — для ПЗС он потерян. Вот и получается, что электроны, рожденные в начале экспозиции, к моменту окончания ТВ-кадра уже успевают погибнуть, в результате чего зарядовые пакеты не достигают своих расчетных значений. Зарядовый рельеф оказывается не адекватным световому.

Еще хуже обстоит дело при сканировании. Свободные ловушки под каждым следующим электроном буквально обгладывают зарядовый пакет, подобно акулам, набрасывавшимся на «большую рыбу» хемингуэевского Старика. Но и это не все. Ловушки препятствуют движению — поверхностная подвижность электронов в несколько раз меньше объемной.

Конечно, количественное выражение этих неприятностей зависит от тщательности изготовления прибора. И там, где технологи сработали на совесть, потери заряда не превышают 1 % при пробегании цепочки из 100 электродов, а время единичного перескока пакета достигает одной десятимиллионной доли секунды. Прекрасный результат, но ненасытным «телевизионщикам» этого мало.

Что же делать, ведь достигнутое — это почти теоретический предел? «К счастью» — ах, сколько за этим легким (для литератора) способом решения проблем стоит нелегкого труда — к счастью, выход снова нашелся.

Введя специальное легирование приповерхностной зоны кристалла, научились так «деформировать» распределение электрического поля, что максимальное значение потенциала от поверхности смещается чуть-чуть в глубь кристалла. Именно здесь теперь оказывается дно потенциальной ямы, здесь локализуются зарядовые пакеты и вдоль этой плоскости они перемещаются. Поверхностное барахтание, всегда неэффективное, заменяется эластичным и быстрым подводным плаванием. Эти ПЗС со скрытым, или объемным, каналом (попросту, объемные ПЗС) дали выигрыш в уменьшении потерь переноса зарядов и в повышении скорости сканирования чуть ли не в 10 раз. ПЗС-телевидение стало реальностью.

И еще об одной проблеме. ПЗС появились в то время, когда телевидение повсеместно стало цветным, и терять это качество даже в «обмен» на твердотельность ТВ-передатчика никто бы не согласился. Цветоразличение — величайшее достижение самосовершенствования земной фауны, наиболее полно воплотившееся в ее венце — человеке. «Просто человек» различает 150—300 цветовых оттенков, художник — до 3000, наиболее полные цветовые атласы содержат их около 10 миллионов! Отнимите эту способность у человека, и он скатится по эволюционной лестнице на несколько ступеней вниз. Вот почему цветовосприятие и цветовоспроизведение — пробный камень совершенства каждого нового видеоинформационного прибора.

Общий принцип оперирования с цветными изображениями основан на разложении (в передатчике) и сложении (в приемнике) спектров. Он является логическим следствием того факта, что глазная сетчатка содержит три типа рецепторов, преимущественно чувствительных в красной (red, R), зеленой (green, G) и синей (blue, B) областях видимого спектра. В технике эти цвета образуют R — G — B-тройку основных цветов.

В первых цветных ПЗС-камерах входная призма из общего светового потока выделяла основные составляющие, каждая из которых направлялась на свою ПЗС-матрицу. Три полученных видеосигнала, пройдя ТВ-тракт, возбуждают на экране кинескопа R — G — B-триады и формируют цветное изображение.

Такая система обеспечивает высокое качество, но сложна, громоздка, фактически пригодна лишь для изготовления единичных образцов. С середины 80-х годов «зазвучала» технология пленочных цветокодирующих фильтров. На поверхность кремниевого кристалла наносятся разноцветные органические пленки, образующие мозаику чередующихся R — G — B-триад, совмещенных с ПЗС-ячейками. Таким образом, все устройство — это как бы вдвинутые друг в друга три ПЗС-матрицы, каждая из которых реагирует на один из основных цветов. Конечно, это требует утроения числа элементов разложения на кристалле и утроения скорости сканирования, т. е. очередных бессонных ночей технологов, но для нас — потребителей — это всего лишь «технические трудности», которые рано или поздно преодолеваются. Зато в итоге видится полностью интегральное, компактное, технологически совершенное, дешевое устройство, вырабатывающее трехцветный видеосигнал — с таким электронным глазом хоть в XXI век.

Так современные Гераклы одну за другой срубают головы бессмертной гидры нерешенных проблем, непреодолимых трудностей. И вот результаты.

Сегодняшний типичный ПЗС — это кремниевый кристалл площадью в 1/6 почтовой марки, содержащий 400—600 строк, а всего около 300 тысяч элементов разложения (в рекордных образцах это число доходит до нескольких миллионов). Потеря заряда при переносе пакета по цепочке из 500—1000 ячеек обычно менее 1 %, тактовая частота сканирования составляет 20—50 МГц. Пороговая фоточувствительность такова, что ПЗС в состоянии увидеть несколько десятков фотонов, упавших на одну элементарную ячейку (односекундная вспышка комнатной лампочки, удаленной от ПЗС на 10 км). «Микроэлектронные гены» в полной мере наделили ПЗС такими родовыми свойствами, как твердотельность, миниатюрность, долговечность, надежность, устойчивость к жестким механическим воздействиям. Приборы требуют низковольтного питания (до 30 В), потребляют малую мощность. Они технологичны, могут изготавливаться массовыми тиражами, и — потенциально — дешевы. При сравнении с видиконами количественные приобретения по каждой из этих характеристик могут составлять десятки, сотни, тысячи раз.

Но кроме того, ПЗС обладает и рядом принципиально новых качеств, вообще неведомых электронно-лучевым трубкам. Одна из его особенностей — жесткий геометрический растр: местоположение каждой ячейки однозначно определено номерами строки и столбца, вырабатываемый ею импульс также строго привязан к меткам времени. Поэтому при обработке видеосигнала нет опасения перепутать его элементарные составляющие или потерять часть их. ПЗС-растр не знает дисторсии — искажения изображений по краям. ПЗС-видеосигнал по самой своей природе удобен для цифрового представления. На одном кристалле с фоточувствительной матрицей могут быть размещены интегральные схемы управления и обработки видеосигналов, микропроцессоры, запоминающие устройства — кристалл станет не только «зрячим», но и «думающим» или хотя бы немного «соображающим».

Одним словом, ПЗС гармонично встраивается в идеологию компьютеризации, универсальность, плодотворность, всеобщность которой уже не требует доказательств. Назвать ПЗС микроэлектронным аналогом видикона, как это частенько делается в печати, значит принизить и обеднить это новое поколение приборов для восприятия и обработки изображений.

(Окончание следует)

Задачник „Кванта"

Задачи

М1371—М1375, Ф1378—Ф1382

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 января 1993 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1371» или «Ф1378». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1371—М1375 предлагались на Межреспубликанской математической олимпиаде 1992 года.

М1371. На окружности с центром O расположены точки A и B. Точка P находится на меньшей из дуг AB, точки Q и R симметричны точке P относительно прямых OA и OB соответственно, P' — точка пересечения отрезков AR и BQ. Докажите, что точки P и P' симметричны относительно прямой AB.

В. Произволов, Б. Кукушкин

М1372. Имеется прибор, позволяющий находить все действительные корни любого кубического многочлена $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a\neq 0$. Придумайте, как с помощью этого прибора решить систему

$$\begin{cases} x=P(y), \\ y=P(x). \end{cases}$$

Д. Туляков

М1373. Дана плоскость, пересекающая сферу с центром O по окружности. На сфере по разные стороны от плоскости взяты точки A и B, причем радиус OA перпендикулярен данной плоскости. Через прямую AB проводится произвольная плоскость. Она пересекает окружность в точках X и Y. Докажите, что произведение $BX \cdot BY$ не зависит от выбора такой плоскости.

Б. Чиник

М1374. Найдите все натуральные числа $k>1$, удовлетворяющие условию: для некоторых натуральных m и n, $m\neq n$, числа k^m+1 и k^n+1 получаются друг из друга перестановкой в обратном порядке цифр десятичной записи этих чисел.

А. Скопенков

М1375. В кинотеатре m рядов по n мест в каждом. Рассеянный кассир продал mn билетов, не следя за тем, чтобы они были проданы на разные места. Оказалось, что зрителей можно рассадить в зале так, чтобы у каждого в билете был правильно указан хотя бы один из номеров — ряда или места.

а) Докажите, что зрителей можно рассадить так, чтобы хотя бы у одного из них были правильно указаны оба номера, а для остальных выполнялось прежнее условие.

б) Какое наибольшее количество зрителей можно заведомо посадить на свои места с сохранением прежнего условия для остальных?

Е. Малинникова

Задачник „Кванта"

Ф1378. Тонкий длинный стержень движется с постоянной скоростью вдоль своей оси. Наблюдатель находится на большом расстоянии от оси. В тот момент, когда луч, направленный на середину стержня, составил угол α с направлением движения, видимая длина стержня оказалась равной его длине в состоянии покоя. С какой скоростью движется стержень?

И. Мартин

Ф1379. Шар массой M падает с высоты H без начальной скорости. В тот момент, когда он оказывается на высоте $H/2$, в него попадает горизонтально летящая пуля массой m, имевшая перед ударом скорость v_0, и застревает в шаре. Изменится ли в этом случае время падения шара? На какую высоту он подпрыгнет после абсолютно упругого удара о пол? Какое количество теплоты выделится в системе?

Р. Александров

Ф1380. Возьмем короткую трубочку небольшого диаметра d и выдуем мыльный пузырь радиусом $R \gg d$. Откроем теперь конец трубочки и подождем, пока пузырь сдуется. Оцените время жизни такого пузыря от начала сдувания, если $d=2$ мм, $R=2$ см. Коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma \approx 0{,}07$ Н/м.

В. Дроздов

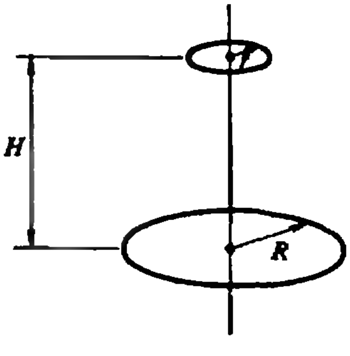


Рис. 1.

Ф1381*. Два кольца из тонкого провода расположены на одной оси на расстоянии H друг от друга (рис. 1). Радиусы колец r и R, причем $r \ll R$. По кольцам протекают токи I_1 и I_2. С какой силой одно из колец действует на другое?

Для решения задачи вам понадобится выражение для магнитной индукции на оси кольца с током:

$$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+H^2)^{3/2}},$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная.

А. Зильберман

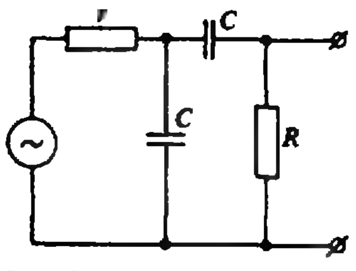


Рис. 2.

Ф1382. К генератору звуковой частоты подключена цепь из двух резисторов и двух конденсаторов (рис. 2). При какой частоте генератора сдвиг фаз между его напряжением и током через резистор сопротивлением R окажется равным нулю? Во сколько раз при этом напряжение на этом резисторе будет меньше выходного напряжения генератора?

З. Рафаилов

Задачник „Кванта"

Решения задач

M1341—M1343, M1345, Ф1358—Ф1362

[redacted]

M1341. Пусть m, n и k — натуральные числа, причем $m>n$. Какое из двух чисел больше —

а) $\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{m+\ldots}}}$

или $\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{n+\ldots}}}$;

б) $\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots+\sqrt{n}}}}$

или $\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{m+\ldots+\sqrt{m}}}}$

(в каждом числе — k знаков корня)?

Легко видеть, что

$$a_k=\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{m+\ldots}}}>b_k=\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots}}},$$

а

$$c_k=\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{m+\ldots}}}>d_k=\sqrt{n+\sqrt{m+\sqrt{n+\sqrt{m+\ldots}}}}.$$

Докажем, что $b_k>c_k$, т. е. пункт б) задачи (отсюда, конечно, будет следовать и пункт а)).

Пусть $x_1=\sqrt{n}$, $x_{k+1}=\sqrt{n+x_k}$, $y_1=\sqrt{m}$, $y_{k+1}=\sqrt{m+y_k}$. Докажем неравенство $m+x_k>n+y_k$.

Для этого применим метод индукции. При $k=1$ неравенство очевидно. Пусть $m-n>y_k-x_k$. Тогда

$$y_{k+1}-x_{k+1}=\frac{m-n+y_k-x_k}{y_{k+1}+x_{k+1}}<\frac{2(m-n)}{y_{k+1}+x_{k+1}}<m-n,$$

что и требовалось.

В. Сендеров

[redacted]

M1342. Напишем строчку из n чисел от 1 до n. Под ней напишем вторую строчку из n чисел: сначала — числа, стоящие в первой строчке на нечетных местах (по порядку), а затем числа, стоящие на четных местах (тоже по порядку). Далее будем писать следующие строчки по тому же правилу до тех пор, пока на некотором шаге не получится m-я строчка, совпадающая с первоначальной. Докажите, что такая строчка встретится и $m\leqslant n$.

Удобнее вместо чисел от 1 до n рассматривать числа от 0 до $n-1$.

Пусть сначала n нечетно. По нашему правилу строчка из $n=2k+1$ чисел

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2k-1},\ a_{2k}$$

переходит в строчку

$$a_0,\ a_2,\ a_4,\ \ldots,\ a_{2k},\ a_1,\ a_3,\ a_5,\ \ldots,\ a_{2k-3},\ a_{2k-1}.$$

Проследим, как меняются номера чисел при обратном переходе. Строчка

$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{k-1},\ b_k,\ b_{k+1},\ \ldots,\ b_{2k-1},\ b_{2k}$$

получается из строчки

$$\begin{array}{ccccccccc} b_0, & b_{k+1}, & b_1, & b_{k+2}, & b_2, \ldots, & b_{2k-1}, & b_{k-1}, & b_{2k}, & b_k \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2k-3 & 2k-2 & 2k-1 & 2k \end{array}$$

Мы видим, что при обратном переходе число b_i с номером i $(0\leqslant i\leqslant 2k)$ попадает на место с номером $2i$, если $i\leqslant k$, и $2i-(2k+1)$, если $k+1\leqslant i\leqslant 2k$ («номера мест» показаны выше красным цветом). Другими словами, номера преобразуются по правилу: номер места i переходит в остаток от деления $2i$ на $2k+1$.

Это можно записать короче так:

$$i\to 2i \bmod (2k+1).$$

Именно в этом месте проявляется удобство выбранной нами нумерации.

За t обратных переходов номер числа переходит в остаток от деления 2^ti на $2k+1$ (т. е. короче $i\to 2^ti \bmod (2k+1)$).

Остается воспользоваться такой арифметической леммой: если числа n и a взаимно просты, то найдется

0	1	2	3	4	5
0	2	4	1	3	5
0	4	3	2	1	5
0	3	1	4	2	5
0	1	2	3	4	5

0	1	2	3	4
0	2	4	1	3
0	4	3	2	1
0	3	1	4	2
0	1	2	3	4

$m<n$ такое, что a^m-1 делится на n (в нашем случае $a=2$).

Доказывается это *с помощью принципа Дирихле.* Если среди остатков от деления на n чисел $1=a^0, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ нет 1, то, поскольку число разных остатков (от 0 до $n-1$) равно n, должны встретиться два одинаковых. Пусть $a^i\equiv a^{i+m} \pmod n$. Тогда $a^{i+m}-a^i=a^i(a^m-1)$ делится на m, а значит, (a^m-1) делится на n.

Выбрав, согласно лемме, $m<n$ так, что $2^m\equiv 1 \pmod n$, мы получим, что за m обратных переходов номер преобразуется по правилу $i\to 2^m i \pmod n$, или $i\to i \pmod m$, т. е. каждое число займет прежнее место.

Таким образом, в этом случае первоначальная строчка встретится менее чем через $n-1$ шагов.

Пусть теперь n — четно. По нашему правилу строчка из $n=2k+2$ чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}$ переходит в строчку

$$a_0, a_2, a_4, \ldots, a_{2k}, a_1, a_3, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k+1},$$

т. е. a_{2k+1} (как и a_0) перемещается так же, как и для $n=2k+1$, тем самым задача сводится к уже рассмотренному случаю (сравните таблички на полях для $n=6$ и $n=5$). Таким образом, первоначальная строчка встретится не больше чем через $n-1$ *шагов.*

Я. Брискин, Н. Васильев

М1343. *Три хорды окружности γ попарно пересекаются в точках A, B, C. Построим еще три окружности: одна касается сторон угла CAB и окружности γ (изнутри) в точке A_1, вторая — сторон угла ABC и окружности γ (изнутри) в точке B_1, третья — сторон угла ACB и окружности γ (изнутри) в точке C_1. Докажите, что три отрезка AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (рис. 1).*

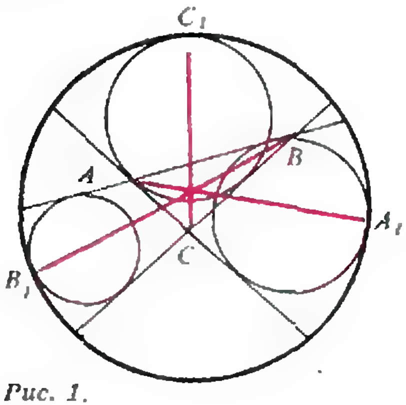


Рис. 1.

Пусть γ_0 — окружность, вписанная в треугольник ABC, I — ее центр, K — центр окружности γ, L — центр гомотетии H, переводящей окружность γ в γ_0 (точка K лежит на продолжении отрезка KI за точку I, причем отношение LI/KI равно отношению радиусов окружностей γ_0 и γ).

Докажем, что отрезок AA_1 (рис. 2) проходит через точку L (точно так же мы можем рассуждать и об отрезках BB_1 и CC_1).

Гомотетию H можно рассматривать как композицию двух гомотетий: первая из них H_1 с центром A_1 переводит γ в окружность γ_A, касающуюся окружности γ в точке A_1, вторая H_2 с центром A переводит γ_A в γ_0, при этом, конечно, $H=H_2\circ H_1$.

Тот факт, что точка L лежит на прямой (даже на отрезке) AA_1, вытекает из так называемой «теоремы о трех центрах подобия»: если H_1 и H_2 — две гомотетии с коэффициентами k_1 и k_2, $k_1k_2\neq 1$, то их композиция $H=H_2\circ H_1$ — тоже гомотетия с коэффициентом k_1k_2, причем центры всех трех гомотетий лежат на одной прямой.

Докажем это в интересующем нас случае, когда $0<k_1<1$ и $0<k_2<1$ (при этом центр гомотетии H будет лежать на отрезке, соединяющем центры гомотетий H_1 и H_2).

Возьмем три точки P, Q и X, не лежащие на одной прямой (рис. 3). Пусть $P_1=H(P)$, $Q_1=H(Q)$, $X_1=H(X)$. Треугольник $P_1Q_1X_1$ подобен треугольнику PQX, причем их сходственные стороны либо параллельны, либо лежат на одной прямой. Отсюда следует, что найдутся

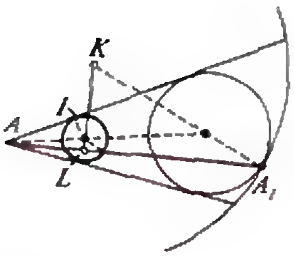


Рис. 2.

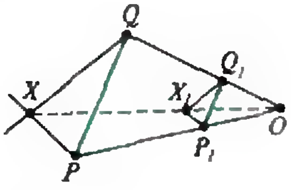


Рис. 3.

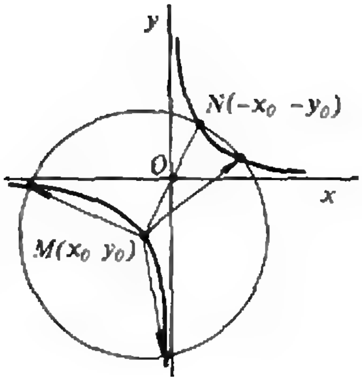
две стороны (пусть для определенности это будут PQ и P_1Q_1), лежащие на несовпадающих параллельных прямых.

Прямые PP_1 и QQ_1 пересекаются в некоторой точке O (поскольку $P_1Q_1=kPQ<PQ$), лежащей по ту же сторону от прямой PQ, что и точки P_1 и Q_1. Теперь ясно, что точки X и X_1 лежат на одной прямой, причем $OX_1/OX=k$, т. е. H — гомотетия с центром O и коэффициентом $k=k_1k_2$. Если O_1 — центр гомотетии H_1, а O_2 — центр гомотетии H_2, то $H(O)=H_2(O_1)$ лежит на отрезке $O_1O_2(k_2<1)$; это значит, что прямая O_1O_2 проходит через точку O, причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от точки O на прямой O_1O_2 ($0<k_1<1$ и $0<k_2<1$). Отсюда следует, что точка O лежит на отрезке O_1O_2.

Утверждение задачи тем самым доказано — все три отрезка AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через точку L.

Н. Васильев

М1345. *На гиперболе $y=1/x$ взяты две точки $M(x_0;\ y_0)$ и $N(-x_0;\ -y_0)$, симметричные относительно начала координат. Окружность с центром M, проходящая через точку N, пересекает гиперболу еще в трех точках. Докажите, что эти точки лежат в вершинах правильного треугольника.*



Для решения этой задачи нам понадобится следующая

Лемма. Пусть точки A, B, C лежат на окружности с центром M. Тогда треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OM}$.

Доказательство. Из данного равенства сразу следует, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, но это означает, что точка M совпадает с центром тяжести треугольника ABC, т. е. с точкой пересечения его медиан (убедитесь в этом). Таким образом, длины всех медиан треугольника ABC равны. Отсюда следует, что этот треугольник правильный. (Обратное утверждение очевидно.)

Теперь приступим к решению задачи. Пусть координаты точек A, B, C и M равны соответственно $(x_A;\ y_A)$, $(x_B;\ y_B)$, $(x_C;\ y_C)$ и $(x_M;\ y_M)$. По условию,

$$\begin{cases} xy=1, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=4(x_0^2+y_0^2). \end{cases}$$

Подставив $y=1/x$ из первого уравнения системы во второе, после несложных преобразований получаем уравнение для x:

$$x^4-2x_0x^3+\ldots=0.$$

Мы выписали только два старших члена, поскольку остальные слагаемые нас не интересуют. По теореме Виета сумма всех корней этого уравнения, включая корень $(-x_0)$, равна $2x_0$. Поэтому $x_A+x_B+x_C=3x_0$.
Аналогично $y_A+y_B+y_C=3y_0$.
Последние равенства означают, что

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OM},$$

где O — начало координат. Осталось воспользоваться доказанной нами леммой.

В. Сендеров

Ф1358. *При каких значениях коэффициента трения жесткая палочка длиной l с резиновыми наконечниками сможет удерживаться в горизонтальном положении под куполом радиусом R (рис. 1)?*

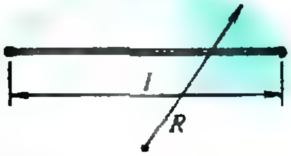


Рис. 1.

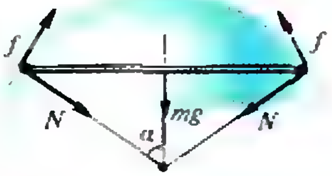


Рис. 2.

Обозначим силу нормальной реакции $\vec{N}$ — она направлена к центру купола, а силу трения обозначим f — чтобы найти верное направление этой силы, достаточно посмотреть, в какую сторону сместилась бы точка упора, если бы трение исчезло. Запишем *условие равновесия* палочки (рис. 2):

$$2N\cos\alpha - 2f\sin\alpha + mg = 0.$$

Если сначала прижать палочку посильнее, то N и f станут больше, а mg *не изменится. Нас интересует* минимально возможный коэффициент трения, поэтому будем считать, что мы прижали очень сильно, так что силой mg в этом случае можно просто пренебречь. Тогда

$$N\cos\alpha = f\sin\alpha \leqslant \mu N\sin\alpha,$$

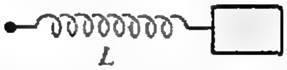
или

$$\mu \geqslant \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{R^2 - l^2/4}}{l/2} = \sqrt{\frac{4R^2}{l^2} - 1}.$$

Собственно, ответ мы получили. Осталось несколько замечаний. Ясно, что если $l > 2R$, вставить палочку под купол мы не сможем. Если взять, наоборот, короткую палочку, то получатся большие — не имеющие смысла! — значения *для* μ. *И еще — резина* вещество со сложными свойствами, трение ее о твердую поверхность не совсем хорошо описывается законами сухого трения (впрочем, это уже тема другого разговора).

Д. Григорьев

Ф1359. *На гладком горизонтальном столе расположен пружинный маятник — тяжелый груз на легкой пружине, длина которой в свободном состоянии $L = 50$ см (см. рисунок). Из-за небольшого вязкого трения о воздух колебания маятника медленно затухают — амплитуда уменьшается в 2 раза за 10 полных колебаний. Для поддержания амплитуды неизменной поступают следующим образом: свободный конец пружины быстро сдвигают на $l = 1$ мм навстречу грузу в*



Обозначим установившуюся амплитуду x_m, тогда сила, деформирующая пружину, при максимальной (и минимальной) длине равна

$$F = kx_m,$$

где k — жесткость пружины. Если перемещение конца $l < x_m$ (это еще нужно будет проверить!), то работа внешних сил равна

$$A = Fl = kx_m l.$$

Эта работа, совершаемая дважды за период, должна компенсировать потери энергии за тот же период:

$$2kx_m l = \alpha W = \alpha k x_m^2/2,$$

откуда

$$x_m = 4l/\alpha.$$

Теперь найдем α. За 10 периодов амплитуда падает в 2 раза, значит, энергия уменьшается в 4 раза. Следовательно,

$$(1-\alpha)^{10} = \frac{1}{4}, \quad \text{и} \quad \alpha = 1 - \frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

тот момент, когда длина пружины минимальна, и возвращают в прежнее положение, когда она максимальна. Определите установившуюся амплитуду таких колебаний.

Итак,

$$x_m = \frac{4l}{1-1/\sqrt[4]{2}} \approx 0{,}031 \text{ м},$$

что действительно много больше $l=1$ мм.

З. Рафаилов

***Ф1360.** В цилиндрическом сосуде под тяжелым поршнем находится кислород (рис. 1). Поршень поднимают на высоту h от положения равновесия, дожидаются установления температуры, затем сосуд теплоизолируют и поршень отпускают. На каком расстоянии от прежнего положения равновесия установится поршень, когда система вновь придет в равновесие? Теплоемкостью стенок и поршня пренебречь.*

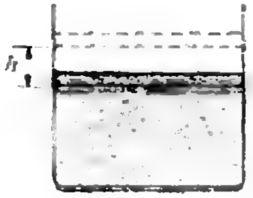


Рис. 1.

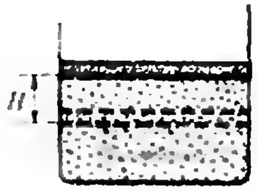


Рис. 2.

Запишем прежде всего условие равновесия поршня в начальном положении — на высоте H_1:

$$\frac{Mg}{S}\,SH_1 = \nu RT_1,$$

где M — масса поршня, S — его площадь, ν — число молей кислорода и T_1 — его начальная температура. А теперь — после того, как поршень остановится, опустившись на H (рис. 2):

$$Mg(H_1+h-H) = \nu RT_2,$$

где T_2 — новая температура газа.

Из баланса энергий находим

$$MgH = \nu C_V(T_2-T_1),$$

где $C_V = 5/2\ R$ — молярная теплоемкость кислорода при постоянном объеме.

После несложных преобразований получаем

$$\nu RT_2 - \nu RT_1 = Mg(H_1+h-H) - MgH_1 =$$

$$= Mg(h-H) = \frac{R}{C_V}MgH,$$

откуда

$$H = \frac{h}{1+R/C_V} = \frac{5}{7}\,h.$$

А. Зильберман

***Ф1361.** Несколько заряженных проводников расположены вдали от других тел. Потенциал одного из них равен φ_1 и становится равным нулю после того, как заряды всех остальных тел изменяют на про-*

Для решения задачи мы воспользуемся принципом суперпозиции электрических полей. Вначале

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{C_1} + \sum_{2}^{n}\frac{q_i}{C_{ij}},$$

где C_{ij} — некоторые коэффициенты (так называемые взаимные емкости проводников). После того как заряды *тивоположные. Каким станет потенциал первого проводника, если его заряд увеличить теперь в 4 раза?*

изменили на противоположные —

$$0=\frac{q_1}{C_1}-\sum_2^n\frac{q_i}{C_{1i}},$$

откуда

$$\sum_2^n\frac{q_i}{C_{1i}}=\frac{q_1}{C_1}.$$

Тогда искомый потенциал

$$\varphi_x=\frac{4q_1}{C_1}-\sum_3^n\frac{q_i}{C_{1i}}=\frac{3q_1}{C_1}=\frac{3}{2}\varphi_1.$$

Р. Александров

Ф1362. *Виток в форме квадрата ABCD, сделанный из тонкого провода, имеет индуктивность L_1. Виток более сложной формы $ABCC_1B_1A_1A$ (рис. 1) из того же провода имеет индуктивность L_2. Чему равна индуктивность еще более сложного витка $ABB_1C_1D_1DA$? $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — это куб.*

Полный магнитный поток через сложный контур рассчитать «в лоб» затруднительно. Однако можно этот контур представить в виде наложенных друг на друга простых контуров: если все токи одинаковы и направлены так, как показано на рисунке 2, то в части ребер куба они скомпенсируются и останется только нужный нам «угловатый» ток.

Осталось получить формулы для потоков, создаваемых таким «контурным» током через свой контур и через соседний. Свой поток Φ_1 выражается сразу:

$$\Phi_1=L_1I.$$

Для нахождения соседнего потока Φ_{21} рассмотрим рисунок 3 и заметим, что

$$L_2=\frac{2\Phi_1-2\Phi_{21}}{I}$$

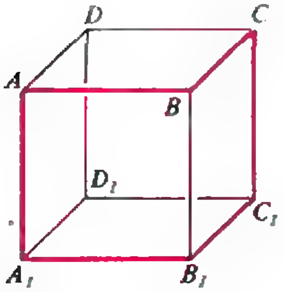


Рис. 1.

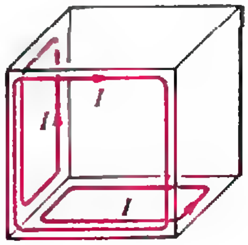


Рис. 2.

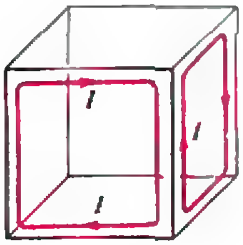


Рис. 3.

(знак «минус» получается при сравнении своего и соседнего потоков от контурного тока I — нарисуйте картинку «силовых» линий от такого тока и все станет очевидным).

Теперь можно найти L_3:

$$L_3=\frac{3\Phi_1-6\Phi_{21}}{I}=3(L_2-L_1).$$

М. Цыпин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1321 — М1335, Ф1328 — Ф1342, справились с задачами М1326, М1330, М1331. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Ю. Алексеенко (Киев) 21, 23, 24, 27, 32—34; *А. Ахмедов* (Баку) 21—25, 27, 28, 33—35; *С. Балахонов* (Обнинск) 27, 28; *Н. Батаев* (Киев) 21; *Ю. Батаев* (Киев) 21; *И. Белоус* (Днепропетровск) 32; *А. Бикмуллина* (Казань) 32; *М. Бокий* (Киев) 34; *К. Брейкш* (Брест) 32; *О. Бурд* (Киев) 23, 24, 27, 28, 32—34; *Н. Бурыкина* (Киев) 21, 22, 27, 29, 32—34; *Б. Вайнер* (Киев) 21—24, 27, 32—35; *А. Воскобойник* (Киев) 32; *П. Гаврилов* (Москва) 27, 28; *О. Гайдай* (Львов) 21—24, 27, 28, 33—35; *М. Гайдук* (Киев) 33; *Л. Григозарян* (Ереван) 32; *А. Григорьев* (Великие Луки) 23; *С. Гулийев* (Баку) 23; *А. Гурбанов* (Баку) 23, 28; *А. Даниленко* (Волгоград) 28; *А. Даценко* (Киев) 27; *С. Дектярев* (Санкт-Петербург) 21, 23, 24; *И. Доманов* (Донецк) 27, 28; *Д. Дудко* (Киев) 32—35; *Ф. Еникеева* (Ташкент) 21, 32, 34; *М. Ершов* (Троицк) 32, 34; *Ю. Забелышинский* (Харьков) 21—24, 27; *В. Замятин* (Киров) 21, 23, 24, 27—29, 32—35; *С. Зеленов* (Киров) 22, 23, 27, 29, 32—35; *И. Казменко* (Дмитровград) 32; *И. Карабаш* (Донецк) 21, 23, 24, 27, 28, 32—35; *А. Карпицкий* (Обнинск) 27, 28; *Т. Кириченко* (Киев) 32; *Н. Когабаев* (Усть-Каменогорск) 21, 27, 28, 32; *А. Кравец* (Старый Оскол) 27; *Р. Кривень* (Павлодар) 32, 34; *В. Кулагин* (Харьков) 27, 28, 34; *М. Куликов* (п. Черноголовка Московской обл.) 21, 23—25; *Д. Кулин* (Санкт-Петербург) 27, 32; *А. Лапунов* (Киров) 21, 23, 24; *Е. Левашов* (Петропавловск) 21, 23, 27; *В. Левин* (Гомель) 32, 34; *П. Левин* (Москва) 21, 23, 24, 34, 35; *С. Маковей* (п. Черноголовка Московской обл.) 21, 24, 28; *И. Малашкин* (Москва) 27, 28, 34, 35; *К. Мальков* (Киров) 21, 23—25, 29, 32—35; *Ш. Мамедов* (Баку) 23; *Е. Матюшин* (Москва) 34; *А. Мильман* (Одесса) 23; *Т. Мальштейн* (Москва) 33; *С. Мясников* (Омск) 32, 34; *О. Наврузов* (Ургенч) 27; *Б. Насыпанный* (Гайворон) 21, 23, 24, 27—29, 32—34; *О. Неретина* (Санкт-Петербург) 27; *И. Нуретдинов* (Москва) 21; *С. Осипян* (Ереван) 33; *Д. Павлов* (Санкт-Петербург) 23, 27, 28, 32—34; *Д. Павлов* (Первомайск Николаевской обл.) 27, 32; *И. Павловский* (Омск) 23, 27, 28, 32, 34; *А. Памфилов* (Киев) 23; *Т. Пашаев* (Баку) 23; *В. Пиковский* (Киев) 21, 23, 24, 27—29, 32—34; *Е. Порошенко* (Алма-Ата) 21, 27, 28, 32, 34, 35; *А. Поташник* (Киев) 21, 32; *А. Прокофьев* (Донецк) 27, 28, 32, 34; *С. Расходникова* (Минск) 27, 28; *З. Сабиров* (к/з Коммунар Хорезмской обл.) 21, 23, 24, 33, 34; *С. Саприкин* (Одесса) 21, 23, 24, 27, 28, 32—34; *С. Сикорский* (с. Вузловая Львовской обл.) 28; *О. Синица* (Владивосток) 27, 28; *А. Солодушкин* (Степногорск) 22—24, 27, 28, 32—34; *А. Солонин* (Донецк) 27, 32, 34; *Д. Сонкин* (Калуга) 21; *И. Сороко* (Минск) 21; *В. Сушков* (Винница) 21, 28, 32—34; *О. Тевс* (Донецк) 27, 32, 34; *А. Топчий* (Омск) 21—25, 27, 28, 32—35; *М. Тройников* (Ижевск) 21, 23, 27—29, 32—34; *Е. Турчин* (Днепропетровск) 21, 23, 27, 29, 32—34; *А. Фрид* (Кемерово) 27; *С. Фукс* (Львов) 23; *П. Хицканян* (Тула) 32; *Р. Хмель* (Киев) 27; *И. Чаленко* (с. Камышовка Одесской обл.) 21—23; *А. Чижов* (Москва) 28; *А. Шныр* (Львов) 28, 32—34; *Е. Яковлев* (Алма-Ата) 21, 23, 27, 28, 32, 34; *Н. Ясинская* (Винница) 34.

Физика

А. Абдрахманов (Алма-Ата) 30; *И. Аввакумов* (Нижний Тагил) 29, 30, 33, 34, 36, 39; *А. Аграновский* (Воткинск) 30, 34; *М. Аллаберганов* (Ургенч) 29, 30, 34, 36; *А. Антонов* (п. Черноголовка Московской обл.) 30; *Д. Апальков* (Харьков) 28—30, 34—36; *Ю. Арбузов* (Старый Оскол) 29; *Г. Асадова* (Имишли) 29, 30; *С. Бабенкова* (Тамбов) 28, 30, 34, 36, 39, 40; *С. Балахонов* (Обнинск) 30, 32, 34; *Н. Батаев* (Киев) 30; *Ю. Батаев* (Киев) 30; *Д. Бокий* (п. Черноголовка Московской обл.) 29, 30, 32; *А. Болотов* (Винница) 29, 30; *Х. Болтаев* (Шават) 30; *А. Болтасева* (Канаш) 29, 30, 32—34, 38, 39, 42; *С. Борщев* (Алма-Ата) 30, 39, 40; *А. Бурханбаев* (Алма-Ата) 29, 30, 34, 36; *А. Быстров* (Нижний Новгород) 30, 34; *Р. Ващенко* (Брест) 30, 32; *А. Ващилко* (Барановичи) 29, 30, 32, 34—36, 39, 40, 42; *А. Ведихин* (Казань) 29, 30; *А. Ветров* (Северодвинск) 30, 32, 34, 36, 38, 39; *А. Волозин* (Севастополь) 29, 30, 34, 36; *В. Воскобойников* (п. Черноголовка Московской обл.) 30, 32; *А. Вылугин* (Донецк) 29—32; *А. Галушко* (Борисов) 30; *П. Гвоздев* (Котельнич) 29, 30; *Р. Гладких* (Мурманск) 30, 34, 36; *Е. Горбенко* (Алма-Ата) 29, 30, 34, 36, 39; *В. Горгадзе* (Нальчик) 34, 36, 39, 40, 42; *О. Горобец* (Донецк) 31, 32; *С. Гращенко* (Барнаул) 30, 39; *П. Гребенев* (Кузнецовск) 30, 32, 34—37; *Я. Грода* (Брест) 29, 30, 32, 36; *Д. Дадимов* (Минск) 30; *М. Дусчанов* (Шават) 30, 36; *О. Евнин* (Ростов) 29, 30, 32; *М. Емеленко* (Ижевск) 30, 34; *М. Емцева* (Мурманск) 30; *С. Жак* (Тернополь) 28—31; 33—42; *В. Железняков* (Вольск) 29, 30, 34, 36; *А. Жуков* (Омск) 29, 30; *Ю. Зализняк* (Киев) 32; *А. Засепский* (Брест) 29, 30, 32; *Б. Иманов* (Алма-Ата) 30, 36, 39, 40; *Ш. Исмоилов* (Ургенч) 29, 30, 34, 36; *А. Итин* (Калининград) 30, 32, 34, 36; *Е. Калинин* (Алма-Ата) 29, 30, 33—36, 39; *О. Каргальцев* (Мичуринск) 30; *А. Карпицкий* (Обнинск) 30, 32; *Т. Кендзерская* (Черновцы) 30; *А. Кирилюк* (Одесса) 30; *С. Киселев* (Днепропетровск) 29—32; *А. Ковалев* (Киров) 29, 30, 39; *К. Коваль* (Запорожье) 29, 30, 39, 40; *Б. Койчубаев* (Алма-Ата) 29, 30, 39, 40; *А. Колесников* (Воронеж) 29, 30, 32, 35, 40, 42; *М. Косицин* (Тольятти) 29, 30, 32—34, 36, 39;

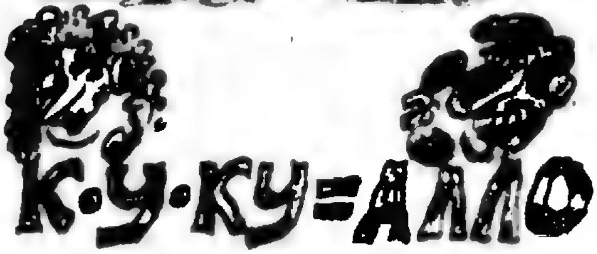
(Продолжение см. на с. 50)

„Квант" для младших школьников

Задачи

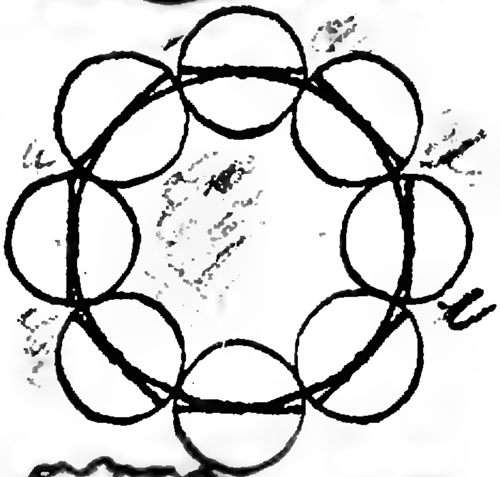
1. Фома и Ерема нашли на дороге по пачке семнадцатирублевок. В чайной Фома заплатил без сдачи этими купюрами за четыре стакана чая и семь калачей. Ерема взял шесть калачей и один стакан чая. Докажите, что и он сможет расплатиться этими купюрами без сдачи. (Стакан чая, как и калач, стоит целое число рублей.)

2. Решите числовой ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. КУ — простое число. А если КУ — составное?



3. Парижский метеоролог-любитель, ведший наблюдения с 1897 по 1907 год, делил все дни на холодные, средние и жаркие. Оказалось, что в некотором году число средних дней на столько же превосходило число жарких, на сколько число жарких превосходило число холодных. Назовите этот год.

4. Рассмотрим цепочку из равных касающихся окружностей, центры которых лежат на заданной окружности C (см. рисунок). Что больше: длина окружности C или сумма длин диаметров окружностей?



5. Мышка ночью пошла гулять.
Кошка ночью видит — мышка!
Мышку кошка пошла поймать.

А вот перевод (построчный) этого стишка на язык племени Ам-Ям:

Ам ту му ям,
Ту ля бу ам,
Гу ля ту ям.

Составьте фрагмент русско-ам-ямского словаря по этому переводу.

Ам ту му ям
Ту ля бу ам
Гу ля ту ям

Эти задачи нам предложили Н. Антонович, М. Роллова, И. Акулич, А. Савин и Е. Федоров.

ИГРА НИТЕЙ В ОПЫТЕ РИХМАНА

Л. КРЫЖАНОВСКИЙ

Георг Вильгельм Рихман (1711—1753), немец по происхождению, но уроженец и подданный Российской империи, по праву считается родоначальником систематических исследований электричества в России. Начав их на полтора века позднее, чем на Западе, он быстро достиг уровня своих зарубежных коллег, а кое в чем даже превзошел их. Так, в 1745 году Рихман создал, по-видимому, первый в мире электроизмерительный прибор, который он назвал электрическим указателем (по-латыни — index electricus), для определения степени наэлектризованности тел.

Подвижная система прибора представляла собой льняную нить длиной $1^1/_2$ фута (46 см), к концу которой прикреплялось $^1/_2$ грана (31 мг) свинца (поэтому нить называлась «отвешенной»). Нить приклеивалась к верхней части металлического бруска. Прибор был снабжен круговой шкалой. Когда бруску сообщали заряд, по углу отклонения нити можно было фактически измерить электрическую силу.

На Западе рихмановский электрометр получил название электрического гномона, поскольку по своей конструкции он напоминал древнейший астрономический инструмент — гномон, который служил для определения высоты и азимута Солнца и иногда применялся как солнечные часы.

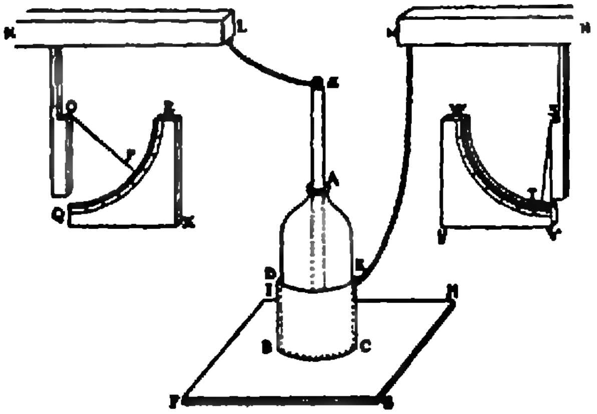
Много различных опытов, в которых использовался указатель, провели и сам Рихман, и его последователи. Расскажем об одном из них — об опыте Рихмана с лейденской банкой. В этом опыте два электрических указателя подключались к так называемым обкладкам заряженной лейденской банки (см. рис. на с. 30). При прикосновении рукой к обкладкам заряженной банки или к соединенным с ними металлическим брускам наблюдалось опускание одной нити и подъем другой. Причем нити могли находиться в отклоненном состоянии достаточно долго, а опыт можно было повторять многократно, зарядив банку только один раз. На рисунке, взятом из публикации Рихмана, представлена ситуация после того, как экспериментатор прикоснулся к бруску *MN*. Если теперь коснуться бруска *KL*, то нить *OP* упадет, а нить *ST* поднимется.

Этот опыт хорошо известен: он был опубликован в трудах Петербургской Академии наук за 1758 год, а еще раньше — в трудах Лондонского Королевского общества за 1754 год. Кроме того, в 1956 году в нашей стране были изданы на русском языке все известные труды Рихмана по физике. Однако и для современного читателя опыт является таким же загадочным, каким он был для современников петербургского ученого.

Почему же возникает наблюдаемая «игра нитей»? Попробуем ответить на этот вопрос, обратив особое внимание на конструктивную особенность лейденской банки Рихмана. Дело в том, что внешней обкладкой банки Рихмана служил металлический цилиндр (наподобие подстаканника), который соприкасался со стеклянным сосудом лишь в некоторых местах. Как теперь известно*), в таком случае практически весь заряд оказывается сосредоточенным на водяной пленке, покрывающей стеклянную поверх-

---

*) См., например, статью «Загадка лейденской банки» («Квант», 1991, № 11).



ность банки. А тогда все процессы, происходящие в установке Рихмана, можно свести к процессам в электрофоре — приборе, построенном итальянским физиком Алессандро Вольта (1745—1827) в 1775 году. Полное название прибора — elettroforo perpetuo — в переводе означает «вечный электроноситель». Как же он устроен?

Представьте себе две накладываемые друг на друга пластины: одну, нижнюю, металлическую со слоем диэлектрика сверху (в первоначальном варианте — из смеси смолы и сургуча) или просто диэлектрическую (например, из эбонита), а другую, верхнюю, металлическую с изолирующей ручкой или изолирующим подвесом. Натирая диэлектрик тканью (или мехом), создают на нем заряд и накладывают на наэлектризованный диэлектрик верхнюю пластину. Вследствие несовершенства поверхностей, пластина будет соприкасаться с диэлектриком лишь в немногих точках, так что только незначительная часть заряда диэлектрика сможет перейти на пластину, остальная же наэлектризованная поверхность диэлектрика будет наводить (индуцировать) на обращенной к ней стороне пластины заряд противоположного знака, а на внешней (верхней) стороне пластины — заряд того же знака, который экспериментатор отводит в землю кратковременным прикосновением рукой. (При больших размерах электрофора отводить заряд через свое тело не безопасно, и в этом случае лучше предусмотреть специальный разрядник.) Если затем поднять пластину, она окажется заряженной. Пластину можно положить обратно и повторять описанную операцию многократно, не натирая диэлектрик и каждый раз получая на пластине почти неизменный заряд. С ней можно проделать различные опыты, например извлечь искру или зарядить лейденскую банку.

Возможно, вам будет интересно познакомиться со старинной инструкцией по изготовлению электрофора: (на основе) «круглого деревянного блюда, около полутора фута в поперечнике, коего края оклеены толстою бумагою на дюйм вышиною. Сей плоский сосуд обкладывается внутри листовым оловом или окленвается золотою бумагою и наливается сполна составом из смолы и канифоли так, чтобы сверху было везде гладко. Когда сей состав совершенно застынет, то потри оный фланелью или кошечьею кожею и положи на него жестяную тарелочку, висящую на трех шелковых снурках. Сия тарелочка должна быть меньше нижнего сосуда, так чтоб края обоих на 1 или $1^1/_2$ дюйма друг от друга отстояли. Сделав сие, возьми одною рукою за снурки и спусти на потертый смоляной состав; потом дотронись другою рукою до тарелочки; после сего, подняв за снурки всю тарелочку, снова до нее дотронься; тогда соразмерно величине машины почувствуешь исходящую электрическую искру. Сие можно повторять очень долго и часто, не имея нужды смоляной состав натирать снова» («Краткое руководство к физике, для употребления в народных училищах Российской империи».— СПб., 1787, с. 80—81). Напомним перевод старинных мер длины в метрическую систему: 1 дюйм=2,54 см, 1 фут==30,5 см.

Возвращаясь к опыту Рихмана, отметим, что под действием заряда водяной пленки, покрывающей стекло, происходит разделение зарядов в «подстаканнике» (так называемая электростатическая индукция). Кратковременно касаясь обкладки или соединенного с ней металлического бруска, экспериментатор отводит в землю заряд с внешней поверхности обкладки. При этом на ее внутренней поверхности остается заряд противоположного знака, на который и реагирует электрометр. Аналогичные явления могут происходить и во внутренней обкладке лейденской банки.

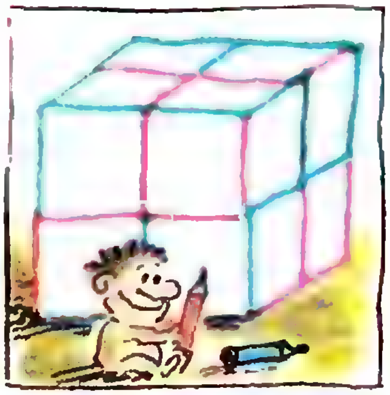
Электрофор и рихмановская установка в принципе отличаются друг от друга только способом создания исходного заряда: электризацией трением в электрофоре и зарядкой от электрической машины в установке Рихмана.

Рихмана, погибшего от удара молнии при исследовании атмосферного электричества, сменил на его посту в Петербургской Академии наук немецкий ученый Франц Ульрих Теодор Эпинус (1724—1802), с 1757 года обосновавшийся в России. Пытаясь объяснить загадочный опыт Рихмана, Эпинус в своем знаменитом трактате «Опыт теории электричества и магнетизма» мысленно упростил экспериментальную установку Рихмана, заменив лейденскую банку плоским стеклянным конденсатором, а рихмановские электрометры — просто льняными нитями, приклеенными к верхней части обкладок вертикально расположенного конденсатора. Эпинус не смог дать физического объяснения «игры нитей», тем не менее стимулировал дальнейшие исследования.

Мысленный опыт Эпинуса был реализован его учеником и коллегой по совместным электрическим опытам в Германии Иоганном Карлом Вильке (1732—1796), который с 1759 года жил и работал в Швеции. Для нас представляет интерес описанный ученым в статье 1762 года плоский стеклянный конденсатор со съемными *пластинчатыми обкладками, перемещающимися* по изолирующим направляющим. К стержневым выводам конденсатора были приделаны пробные льняные нити. Вильке производил те же манипуляции и наблюдал те же эффекты, что и Рихман, с той только разницей, что мог перемещать обкладки. К сожалению, и Вильке не сделал четких выводов из своего опыта.

Конкурс «Математика 6—8»

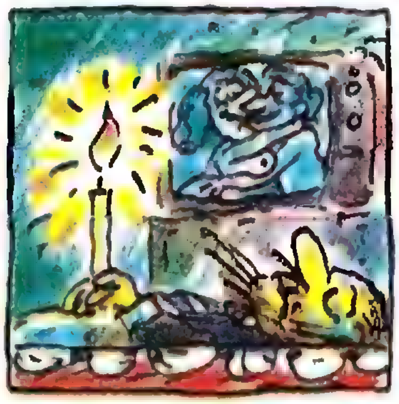
Мы продолжаем третий конкурс по решению задач «Математика 6—8». Условия конкурса: в нем могут участвовать учащиеся 6—8 классов. Будет предложено 24 задачи, по 3 в каждом номере журнала. Победители будут награждены призами и дипломами. Решения задач этого номера высылайте до 1 февраля 1993 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант», с пометкой: «Конкурс «Математика 6—8». Не забудьте указать фамилию, имя, школу, класс и домашний адрес.



Задачи

7. В 1988 году телевидение Анчурии начало демонстрацию телесериала «По колено в слезах», причем в каждом году, начиная с 1989, было показано либо на 40 % больше, либо на 40 % меньше серий, чем в предыдущем. Чтобы не наносить большого ущерба экономике страны, ежедневно показывали не больше двух серий. При просмотре 1230-й серии зрители были опечалены ссорой главных героев, но ровно через два года в 1992 году порадовались их счастливому примирению в последней серии. Сколько серий содержал этот замечательный телефильм?

И. Акулич



8. Укажите хотя бы одно шестизначное число, являющееся точным кубом, такое, что все числа, получающиеся из него циклической перестановкой цифр (*abcdef* — *bcdefa* — *cdefab* — *defabc* — *efabcd* — *fabcde*), делятся на кубический корень из этого числа.

Л. Курляндчик

9. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Всякий отрезок, являющийся общей стороной двух из 24-х полученных квадратов, окрашен в синий или красный цвет. Известно, что красных отрезков 26. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная линия, состоящая только из красных отрезков.

В. Произволов

Школа в „Кванте"

Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Кинематика, да и только» предназначена девятиклассникам, заметка «Ах, уж эта влажность» — десятиклассникам.

Кроме того, мы продолжаем публикацию «Избранных школьных задач по физике».

Кинематика, да и только

Как известно, векторы перемещения, скорости и ускорения — важнейшие понятия кинематики. Попробуем расширить их круг.

Пусть, например, движение происходит вдоль некоторой координаты $l_\parallel$. Договоримся перемещение измерять в $м_\parallel$, а скорость $v_\parallel = \Delta l_\parallel / \Delta t$ — в $м_\parallel/с$. Теперь умножим скорость на площадь поперечного сечения $S_\perp$. Размерность величины $v_\parallel S_\perp$ будет $м_\parallel м^2_\perp/с$, или попросту $м^3/с$ (правда, в этой последней записи уже потеряна информация о том, что чему параллельно или перпендикулярно). При этом мы получим очень полезную вещь — единицу измерения объемного расхода. Это может быть, скажем, расход воды в реке или в ванне. В физике такие величины называют *потоками*. В принципе можно построить поток любого вектора (механического, электрического, магнитного), но в рассмотренном конкретном случае мы получили чисто кинематическое понятие, так как в него входят только пространственно-временные характеристики движения — скорость и площадь поперечного сечения.

А что, если скорость умножить на перемещение вдоль той же координаты, по которой происходит движение: $v_\parallel l_\parallel$? Получим нечто, измеряемое в $м^2_\parallel/с$. Ничего особенного, казалось бы. Однако это новое понятие становится особенно полезным, когда движение происходит по замкнутой траектории, например по окружности радиусом r. Тогда величина (тоже кинематическая) $v l_1$, где $l_1 = 2\pi r$, приобретает собственное имя: *циркуляция скорости*.

Такие движения — их обычно называют вихревыми — часто встречаются в природе — например, смерчи, торнадо, тайфуны; их можно наблюдать при сливе воды из раковины, иногда можно увидеть, как закручивается дымок выхлопной струи за автомобилем или любоваться цветными струями дымовых шашек за крыльями самолетов на авиапарадах.

Мы рассмотрим здесь простейший из вихрей, в котором величина скорости, направленной в каждой точке по касательной к окружности, обратно пропорциональна ее радиусу: $v = \Gamma/(2\pi r)$, где буква Γ и обозначает эту самую циркуляцию. Посмотрим, как в поле скоростей такого вихря деформируется какая-нибудь фигура, например первоначально (в момент времени $t=0$) имевшая вид круга с центром в точке O и радиусом r_0 (рис. 1).

Все точки очень тонкой полоски, принадлежащей кругу и заключенной между двумя очень близко расположенными дугами с радиусами r и $r+\Delta r$ с общим центром на оси вихря C (эта полоска закрашена), имеют одну и ту же скорость, так что ни длина, ни форма этой полоски со временем изменяться не будут. В моменты времени t_1, $2t_1$, ..., когда радиус CO повернется на угол φ_1, $2\varphi_1$, ..., эта полоска будет занимать положения, изображенные на рисунке тоже в виде закрашенных участков.

Точки всех других дуговых полосок будут двигаться по окружностям тоже с неизменными, но другими скоростями. Например, точка B будет двигаться быстрее, а точка A — медленнее закрашенной полоски, $|v_A| < |v_B|$. По кривой вверху рисунка можно узнать величину скорости каждой точки такой полоски и, поскольку угол ее поворота вокруг C пропорционален скорости, построить положения центров всех полосок в моменты времени t_1, $2t_1$, ...

Диаметр AOB нашего круга теперь будет принимать вид кривых $A_1O_1B_1$, $A_2O_2B_2$, ..., а окружность (которой принадлежат концы полосок) — вид некоторых замкнутых кривых, длина которых будет расти со временем.

Можно сказать и так: поскольку в поле вихря скорость каждой точки обратно пропорциональна ее расстоянию r до центра вихря C, за некоторое время каждая точка опишет дугу, длина которой тоже обратно пропорциональна этому расстоянию (модулю своего радиуса-вектора r). Но, как известно, центральный угол прямо пропорционален длине своей дуги и обратно пропорционален ее радиусу. В результате за одно и то же время радиус-вектор каждой точки повернется на угол, обратно пропорциональный квадрату ее расстояния от центра: $\varphi \sim t / r^2$.

Очевидно, что площадь, ограниченная этими замкнутыми кривыми, будет оставаться неизменной и равной πr_0^2.

(Для собственного удовольствия вы можете перед сном рассмотреть, как

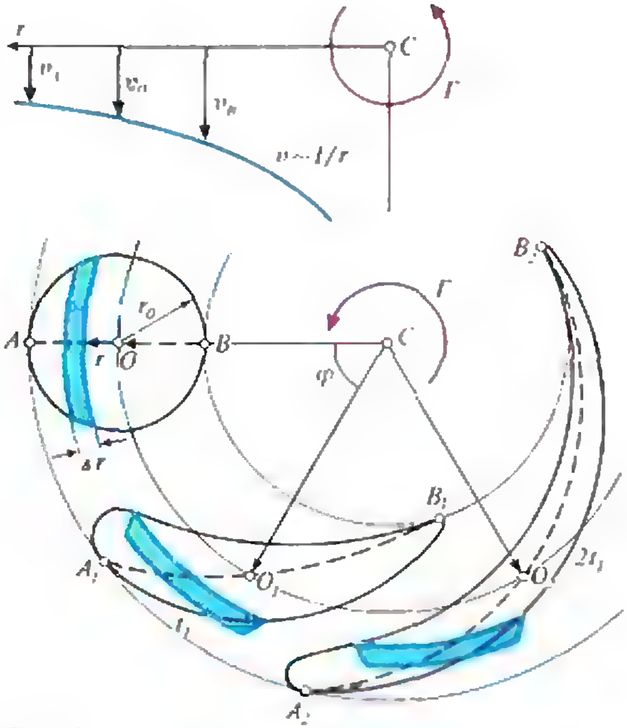


Рис. 1.

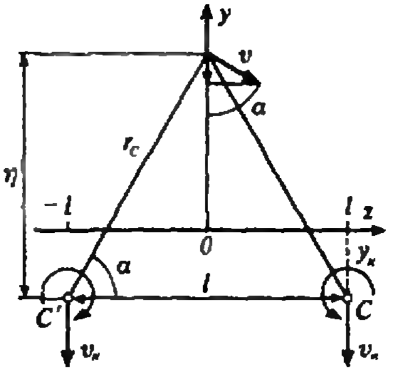


Рис. 2.

поле вихря деформирует любую другую замкнутую фигуру — квадрат, треугольник, вашу фотографию.)

Что мы описали таким образом? Ну, например, этот круг можно считать начальным сечением струи двигателя самолета, попавшей в поле вихря, образовавшегося у конца крыла (см. статью «Самолет в озоне» — «Квант», 1992, № 5 и 6). Тогда линия *AOBC* на рисунке 1 идет вдоль правого крыла самолета — при виде сзади.

Конечно, тут мы не рассмотрели еще один процесс — диффузию струи, которая будет приводить к дополнительному «расплыванию» первоначально круглого сечения. И еще не рассмотрели второй вихрь, с осью *C′*, расположенный слева. А это попробуем сделать, учитывая, что он тоже создает поле скоростей, обратно пропорциональных по величине расстоянию до этого вихря, и используя принцип суперпозиции.

Примéним этот принцип для точек, лежащих в плоскости симметрии между двумя вихрями (рис. 2). Прежде всего, если расстояние между вихрями l, то каждый вихрь будет создавать в том месте, где расположен второй вихрь, скорость $v_к = -\Gamma/(2\pi l)$ (ведь сам на себя вихрь не действует). Значит, оба вихря будут «топить» друг друга в воздухе с этой постоянной скоростью, а их ординаты будут линейно меняться со временем:

$$y_к = -|v_к|t.$$

В точках плоскости симметрии два вихря создадут суммарную скорость, направленную вертикально вниз (горизонтальные компоненты уничтожаются) и равную

$$v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = -2\frac{\Gamma}{2\pi r_C}\cos\alpha,$$

$$\text{где } r_C = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \eta^2},$$

$$\eta = y - y_к, \quad \cos\alpha = \frac{l/2}{r_C},$$

или

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = -2\frac{\Gamma l/2}{2\pi\left((l/2)^2 + (y + |v_к|t)^2\right)}.$$

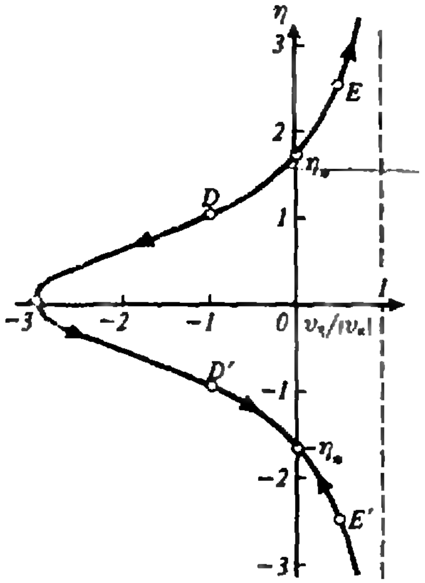


Рис. 3.

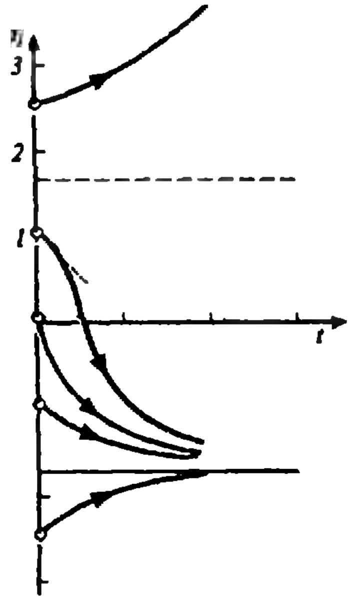


Рис. 4.

Правая часть этого уравнения зависит сразу и от y, и от t, и хотя для компьютера это не затруднение, но для нашего анализа это неудобно. Поэтому «пересядем» в систему координат, связанную с движущимися вихрями (поскольку они опускаются с постоянной скоростью, такая «пересадка» не приведет к появлению каких-либо дополнительных сложностей — обе системы инерциальны). Это равносильно вычитанию вертикальной скорости $v_к$, так что в новой системе вертикальная составляющая скорости $v_\eta = \Delta\eta/\Delta t$ будет равна

$$v_\eta = v_y - v_к = \frac{\Gamma}{2\pi l}\left(1 - \frac{l^2}{(l/2)^2+\eta^2}\right) =$$

$$= |v_к|\,\frac{\eta^2 - 3(l/2)^2}{\eta^2+(l/2)^2}\,.$$

Проанализируем дробь в правой части этого уравнения как функцию расстояния η между горизонтальной линией CC', соединяющей центры вихрей, и рассматриваемой точкой с координатой y в плоскости симметрии. Видно, прежде всего, что эта функция симметрична относительно значения $\eta=0$: изменение знака η не изменяет значения этой функции. В точке $\eta=0$ дробь принимает значение $v_\eta/|v_к| = -3$. В двух точках $\pm\eta_* = \pm\sqrt{3}\,l/2$ она равна нулю. При всех $|\eta|<\eta_*$ дробь отрицательна, при $|\eta|>\eta_*$ — положительна. При очень больших значениях $|\eta| \gg l/2$ она стремится к единице. Соответствующая кривая изображена на рисунке 3.

Теперь качественно проанализируем изменение ординаты η со временем (рис. 4). Если в начальный момент времени $t=0$ значение η лежит внутри интервала от $-\eta_*$ до $+\eta_*$, например в точках, соответствующих D или D', то скорость v_η при этом отрицательна и в обоих случаях ордината с течением времени будет стремиться к значению $-\eta_*$. Если при $t=0$ окажется, что $|\eta|>\eta_*$ (например, для точек E и E'), то скорости v_η будут положительными, только из E' значение координаты η стремится к $-\eta_*$, а из E — уходит от η_*. Можно сказать, что точка $-\eta_*$ «притягивает» к себе траектории, а точка $+\eta_*$ «отталкивает», и потому положение струи здесь неустойчиво. Впрочем, оказывается, все струи в плоскости симметрии неустойчивы, но это уже другой разговор.

В порядке тренировки попробуйте перерисовать кривые, изображенные на рисунках 3 и 4, для $y(t)$, т. е. вновь перейти в систему координат, связанную с самолетом, а не с вихрями.

Итак, только кинематика — как и было обещано.

А. Стасенко

Ах, уж эта влажность

Что такое влажность воздуха? Как ее можно рассчитать? Что нужно сделать, чтобы определить ее практически? Обсудим эти и подобные вопросы на примере одной-единственной задачи — задачи № 563 из Сборника задач по физике для средней школы (Рымкевич А. П., 1990). Вот ее условие:

Найдите относительную влажность воздуха в комнате при температуре 18 °С, если при 10 °С образуется роса.

И ответ: 59 %.

Решим задачу. Воспользуемся примечанием, которое приведено тут же в сборнике на соседней странице:

Относительной влажностью можно считать отношение плотности ρ водяного пара, фактически находящегося в воздухе, к плотности ρ_0 насыщенного пара при данной температуре:

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_0}\,100\,\%. \qquad (1)$$

Плотность ρ_0 мы можем найти из таблицы зависимости плотности насыщенного пара от температуры: при $t_1 = 18$ °С $\rho_0 = 15{,}4$ г/м^3. А плотность ρ найдем из следующих соображений. Будем понижать температуру в комнате, считая ее герметически закрытой, до тех пор, пока не начнет выпадать роса. Тогда плотность водяного пара ρ при температуре t_1 и плотность насыщенного пара ρ' при точке росы, т. е. при $t_2=10$ °C, будут одинаковыми:

$$\rho=\rho'=9{,}4\ \text{г/м}^3.$$

В результате вычислений получаем ответ:

$$\varphi=61\ \%.$$

Сравнивая с ответом в задачнике, видим, что они заметно не совпадают. Почему?

Попробуем иначе. Решим теперь задачу по-другому — используя определение относительной влажности из школьного учебника по физике для 10 класса (Мякишев Г. Я., Буховцев Б. Б., 1990):

Относительной влажностью воздуха φ называют отношение парциального давления p водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению p_0 насыщенного пара при той же температуре, выраженное в процентах:

$$\varphi=\frac{p}{p_0}\,100\ \%. \tag{2}$$

Обратимся к таблице зависимости давления насыщенных водяных паров от температуры и найдем в ней нужные нам значения: $p=1{,}23$ кПа, $p_0=2{,}07$ кПа. Отсюда получим

$$\varphi=59\ \%.$$

Этот ответ совпадает с ответом в задачнике.

Какое же из двух решений является более точным?

Обратимся к газовым законам. Пусть p, V и m — параметры водяного пара в ненасыщенном состоянии при некоторой температуре T, а p_0, V_0 и m_0 — параметры насыщенного водяного пара при той же температуре. Запишем уравнение Менделеева — Клапейрона для этих двух состояний:

$$pV=\frac{m}{M}RT, \quad p_0V_0=\frac{m_0}{M}RT,$$

или

$$p=\frac{\rho RT}{M}, \quad p_0=\frac{\rho_0 RT}{M}.$$

Поделив равенства друг на друга, получим

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\rho}{\rho_0}.$$

Таким образом, значения относительной влажности, вычисленные по формулам (1) и (2), должны совпадать?!

Поиски продолжаются. При решении задачи мы в обоих случаях «крутились» вокруг точки росы. А что это такое собственно?

В последнем издании школьного учебника это понятие вообще не обсуждается, но в более раннем (1988 г.) говорилось:

Охлаждение пара при постоянном давлении рано или поздно превратит его в насыщенный пар... Температуру t_p, при которой водяной пар становится насыщенным, называют точкой росы.

Точку росы можно непосредственно определить с помощью так называемого конденсационного гигрометра. В специальный резервуар наливают легко испаряющийся эфир, вставляют туда же термометр и с помощью груши начинают быстро прокачивать воздух, вызывая тем самым интенсивное испарение эфира и понижение температуры в резервуаре. По термометру замечают температуру, при которой на полированной поверхности резервуара появляется матовый налет — роса. Это и есть точка росы.

Появление росы указывает, что пар стал насыщенным. Далее авторы учебника утверждают:

Давление в области, прилегающей к стенке (резервуара), можно считать постоянным, так как эта область сообщается с атмосферой и понижение давления за счет охлаждения компенсируется увеличением концентрации пара... Зная температуру воздуха и точку росы, можно найти парциальное давление водяного пара и относительную влажность с помощью таблицы зависимости давления насыщенного пара от температуры... Если точка росы известна, то тем самым известно парциальное давление водяного пара p. Зная p и p_0, находим относительную влажность:

$$\varphi=\frac{p}{p_0}\,100\ \%.$$

Значит, при определении точки росы в этом случае происходит процесс охлаждения при постоянном давлении. При этом исследуемый воздух не изолируется от атмосферы, и в процессе охлаждения его объем будет уменьшаться. Сюда — в незагерметизированную комнату или к охлаждаемой поверхности гигрометра — со всех сторон будет устремляться окружающий воздух, восстанавливая при этом прежнее давление. Следовательно, действительно давление насыщенного пара при точке росы будет в этом процессе таким же, как и парциальное давление водяного пара в исследуемом воздухе. Иными словами, замена в формуле (2) парциального давления ненасыщенного водяного пара на величину давления насыщенного пара при точке росы вполне законна.

Но надо иметь в виду, что в этом случае плотность водяного пара не остается неизменной, а все время увеличивается — из-за подтока окружающего воздуха, и поэтому формулой (1) пользоваться нельзя.

При решении задачи первым способом подход к точке росы совершенно другой — объем исследуемого воздуха, его масса и плотность предполагаются постоянными при охлаждении от комнатной температуры до точки росы. Значит, вместе с понижением температуры будет понижаться и парциальное давление, т. е. при таком подходе нельзя пользоваться, наоборот, формулой (2).

А какой из двух подходов к получению точки росы осуществляется на практике? В подавляющем большинстве случаев при определении относительной влажности приборами процесс происходит при постоянном давлении. Следовательно, решение по формуле (2) можно считать более правильным.

Ну, а как же быть с разными ответами, полученными по формулам (1) и (2)? Как мы выяснили, плотность ρ при комнатной температуре T_1 меньше, чем плотность ρ_{02} насыщенного пара при точке росы T_2, если понижение температуры происходит при постоянном давлении p. Используя уравнение Менделеева — Клапейрона для этих двух состояний, запишем

$$pV_1=\frac{m_1}{M}RT_1,\quad pV_2=\frac{m_2}{M}RT_2.$$

Заменив m_1/V_1 на ρ, m_2/V_2 на ρ_{02}, получим

$$\rho=\rho_{02}\frac{T_2}{T_1}.$$

Подставив это выражение в формулу (1), найдем

$$\varphi=\frac{\rho_{02}}{\rho_0}\,\frac{T_2}{T_1}100\,\%=59{,}4\,\%.$$

Резюме. Все изложенные здесь рассуждения — правильные. Ошибка была допущена только в одном предположении, что точка росы определяется при постоянном объеме, а в действительности, на практике, она измеряется при постоянном давлении.

В. Соловьянюк

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Сплошной диск катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью v (рис. 1). Определите величину и направление скоростей точек A, B, C и D обода диска относительно неподвижного наблюдателя.

2. Тонкий обруч радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и положили на горизонтальный стол. Через какое время обруч остановится, если коэффициент трения между столом и обручем μ? Сколько оборотов сделает обруч до остановки?

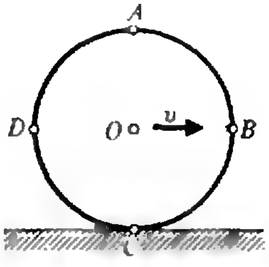


Рис. 1.

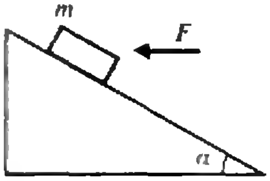


Рис. 2.

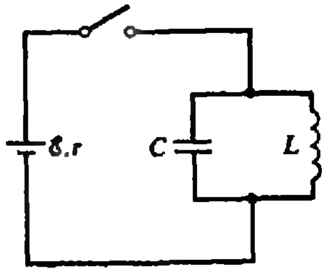


Рис. 3.

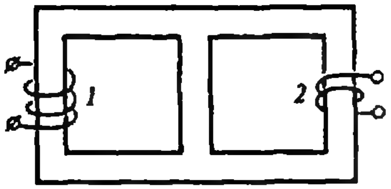


Рис. 4.

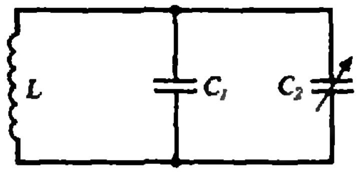


Рис. 5.

3. Тело массой $m=1$ кг лежит на горизонтальной плоскости. Коэффициент трения $\mu=0{,}1$. На тело действует горизонтальная сила F. Определите силу трения для двух случаев: $F_1=0{,}5$ Н и $F_2=2$ Н.

4. Все тела, измеренный пружинными весами, на экваторе некоторой планеты оказался на 10 % меньше, чем на полюсе. Найдите среднюю плотность планеты, если продолжительность суток на ней равна $T=8$ ч.

5. С какой горизонтальной силой надо действовать на брусок массой $m=2$ кг, находящийся на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=30°$, чтобы он двигался вверх по плоскости равномерно (рис. 2)? Коэффициент трения $\mu=0{,}3$.

10 класс

6. Определите отношение плотностей влажного воздуха с относительной влажностью $\varphi=90$ % и сухого воздуха. В обоих случаях давление $p=100$ кПа, температура $t=27$ °С.

7. Одинаковое ли количество теплоты необходимо для нагревания газа до одной и той же температуры в сосуде, закрытом поршнем, если поршень а) закрепленный, б) легко подвижный?

8. Стакан горячей воды нужно как можно сильнее охладить за 10 минут. Как выгоднее поступить: сначала положить в воду кусок льда, а потом поставить ее на 10 минут остывать или дать ей остыть в течение 10 минут, а затем положить тот же кусок льда?

9. В цилиндре под невесомым поршнем площадью $S=100$ см^2 находится $m=1$ кг воды при температуре $t=0$ °С. В цилиндре включают нагреватель мощностью $N=500$ Вт. На сколько поднимется поршень за $\tau=15$ мин работы нагревателя, если атмосферное давление $p=760$ мм рт. ст.? Считайте, что все джоулево тепло идет на нагревание воды.

10. В закрытый сосуд, содержащий $V=1$ м^3 сухого воздуха при температуре $t_1=0$ °С, положили $m=0{,}058$ кг льда, температура которого также 0 °С. Какова будет относительная влажность воздуха в сосуде после нагревания содержимого до $t_2=100$ °С?

11 класс

11. Найдите действующее значение напряжения генератора, вырабатывающего прямоугольные импульсы с периодом T, длительностью τ и амплитудой U_0.

12. Батарея с ЭДС $\mathcal{E}=1$ В и внутренним сопротивлением $r=2$ Ом подключена к колебательному контуру с индуктивностью $L=1$ Гн и емкостью $C=1000$ пФ (рис. 3). Определите максимальное напряжение на контуре после отключения батареи. Активным сопротивлением проводов катушки можно пренебречь.

13. По катушке, не имеющей омического сопротивления, протекает переменный синусоидальный ток. Начертите график изменения со временем мгновенной мощности катушки. Чему равна средняя за период мощность, потребляемая катушкой?

14. На железный сердечник намотаны две катушки (рис. 4). Магнитный поток, создаваемый каждой катушкой, не выходит из сердечника и делится поровну в разветвлениях. При включении катушки 1 в цепь переменного тока напряжением 40 В напряжение на катушке 2 равно 10 В. Какое напряжение будет на разомкнутых зажимах катушки 1, если катушку 2 включить в цепь переменного тока напряжением 10 В?

15. Определите частоту собственных колебаний электрического контура, изображенного на рисунке 5, а также длину волны, излучаемой контуром. Контур содержит катушку индуктивностью $L=10$ мГн, конденсатор емкостью $C_1=880$ пФ и подстроечный конденсатор емкостью $C_2=20$ пФ.

Публикацию подготовила В. Тихомирова

Нам пишут

В глубь Земли

Таблица

Расстояние от центра Земли, км	Ускорение свободного падения, м/с^2		
	Реальное	Для модели однородной Земли	Для модели линейного убывания плотности Земли
0	0	0	0
371	1,70	0,57	1,25
871	4,10	1,34	2,81
1371	6,00	2,11	4,21
1871	6,90	2,88	5,46
2371	8,02	3,65	6,55
2871	9,15	4,42	7,50
3371	10,20	5,19	8,29
3471	10,40	5,34	8,43
3871	10,05	5,96	8,93
4371	9,86	6,73	9,41
4871	9,85	7,50	9,74
5371	9,90	8,27	9,92
5571	9,84	8,58	9,94
5771	9,95	8,89	9,95
5971	9,94	9,19	9,93
6071	9,92	9,35	9,91
6171	9,89	9,50	9,88
6271	9,86	9,66	9,85
6338	9,83	9,76	9,83
6361	9,82	9,79	9,82
6371	9,81	9,81	9,81

Как вы знаете, однородный сферический слой не создает внутри себя гравитационного поля. Тогда получается, что ускорение свободного падения g должно убывать как при поднятии над поверхностью сферической планеты, так и при погружении вглубь, достигая наибольшего значения на поверхности планеты. Однако реальные данные для Земли, например взятые из справочной литературы *) и приведенные здесь в таблице, свидетельствуют об ином: наибольшего значения g достигает внутри Земли, на глубине примерно 2900 км.

Как объяснить это расхождение? Очевидно, неоднородностью Земли — увеличением ее плотности от поверхности к центру. По мере увеличения глубины погружения плотность, вообще говоря, возрастает монотонно, но на отдельных участках, например на границе земной коры и мантии, а также мантии и ядра, плотность меняется резко, скачком.

Для оценочного расчета выберем простейший линейный закон изменения плотности: на расстоянии r от центра Земли плотность $\rho(r)=\rho_0-\alpha r$, где $\rho_0=12500$ кг/м^3 — плотность в центре Земли, $\alpha>0$ — постоянная величина. Чтобы ее определить, запишем

$$\int_0^{R_З}\rho(r)dV=M_З,$$

где $R_З=6371$ км и $M_З=5{,}976\cdot10^{24}$ кг — радиус и масса Земли соответственно, а $dV=d\,(4/3\pi r^3)=4\pi r^2dr$ — объем, заключенный между двумя концентрическими сферами радиусами r и $r+dr$, причем $dr\ll r$. Массу Земли можно связать с ее радиусом и средней плотностью $\rho=5518$ кг/м^3 соотношением

$$M_З=\frac{4}{3}\pi R_З^3\rho.$$

Отсюда получаем

$$\alpha=\frac{4}{3R_З}(\rho_0-\rho).$$

Масса, сосредоточенная внутри сферы радиусом r, равна

$$m(r)=\int_0^r\rho(r)dV=\frac{4\pi}{3}\left(\rho_0r^3-\frac{(\rho_0-\rho)r^4}{R_З}\right).$$

Поскольку неоднородный сферический слой, плотность в котором зависит только от расстояния от центра сферы, также не создает внутри себя гравитационного поля, ускорение свободного падения на расстоянии r от центра Земли можно записать в виде

$$g(r)=\frac{Gm(r)}{r^2}=\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_0r-\frac{(\rho_0-\rho)r^2}{R_З}\right),$$

где G — гравитационная постоянная. Запишем это выражение в более удобной для расчетов на калькуляторе форме, заменив $4\pi G$ на $3g_0/(R_З\rho)$, где $g_0=9{,}81$ м/с^2 — ускорение свободного падения на поверхности Земли:

(Окончание см. на с. 69)

---

*) Енохович А. С. Справочник по физике. (М.: Просвещение, 1990)

Калейдоскоп „Кванта"

Изогонально сопряженные точки

С каждым треугольником ABC связано весьма интересное преобразование плоскости. Это преобразование устроено следующим образом.

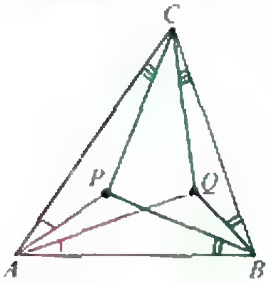


Рис. 1.

Пусть P — некоторая точка. Отразим прямые AP, BP и CP относительно биссектрис углов A, B и C. Полученные прямые пересекаются в одной точке Q (рис. 1). Мы не будем доказывать это утверждение, ограничимся лишь перечислением различных свойств преобразования $P \to Q$. Почти все доказательства несложные; заинтересованный читатель сможет найти их самостоятельно.

Это преобразование, примененное к точке Q, снова дает точку P. Точки P и Q называют изогонально сопряженными (относительно треугольника ABC), а преобразование, переводящее P в Q (а Q в P), называют изогональным сопряжением.

При изогональном сопряжении описанная окружность переходит в бесконечно удаленную прямую. Точнее говоря, если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC, то три прямые, симметричные прямым AP, BP и CP относительно биссектрис углов A, B и C, параллельны.

Изображенные на рисунке 2 красные области переходят друг в друга, синие и зеленые области тоже переходят друг в друга. Каждая незакрашенная область переходит сама в себя. Неподвижными остаются центр вписанной окружности и центры вневписанных окружностей. Других неподвижных точек нет.

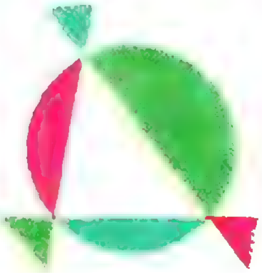


Рис. 2.

Изогонально сопряжены следующие пары точек:

а) точка пересечения высот и центр описанной окружности (рис. 3);

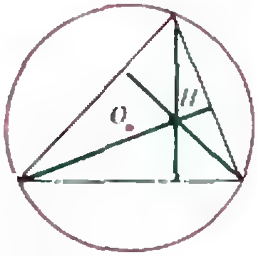


Рис. 3.

б) точка пересечения медиан (т. е. точка, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до вершин) и точка, для которой минимальна сумма квадратов расстояний до сторон (*точка Лемуана*) (рис. 4):

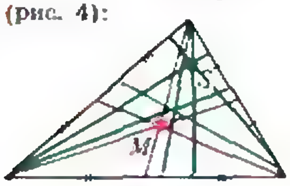


Рис. 4.

в) точка, из которой стороны треугольника ABC видны под углом 120° (*точка Торричелли*) и точка, проекции которой на стороны треугольника ABC, образуют равносторонний треугольник (рис. 5);

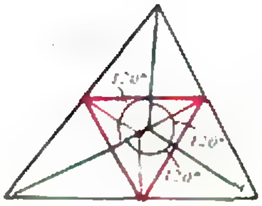


Рис. 5.

г) первая и вторая точки Брокара (рис. 6) (см. «Квант» № 1, 1992).

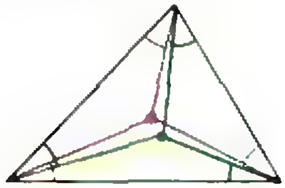
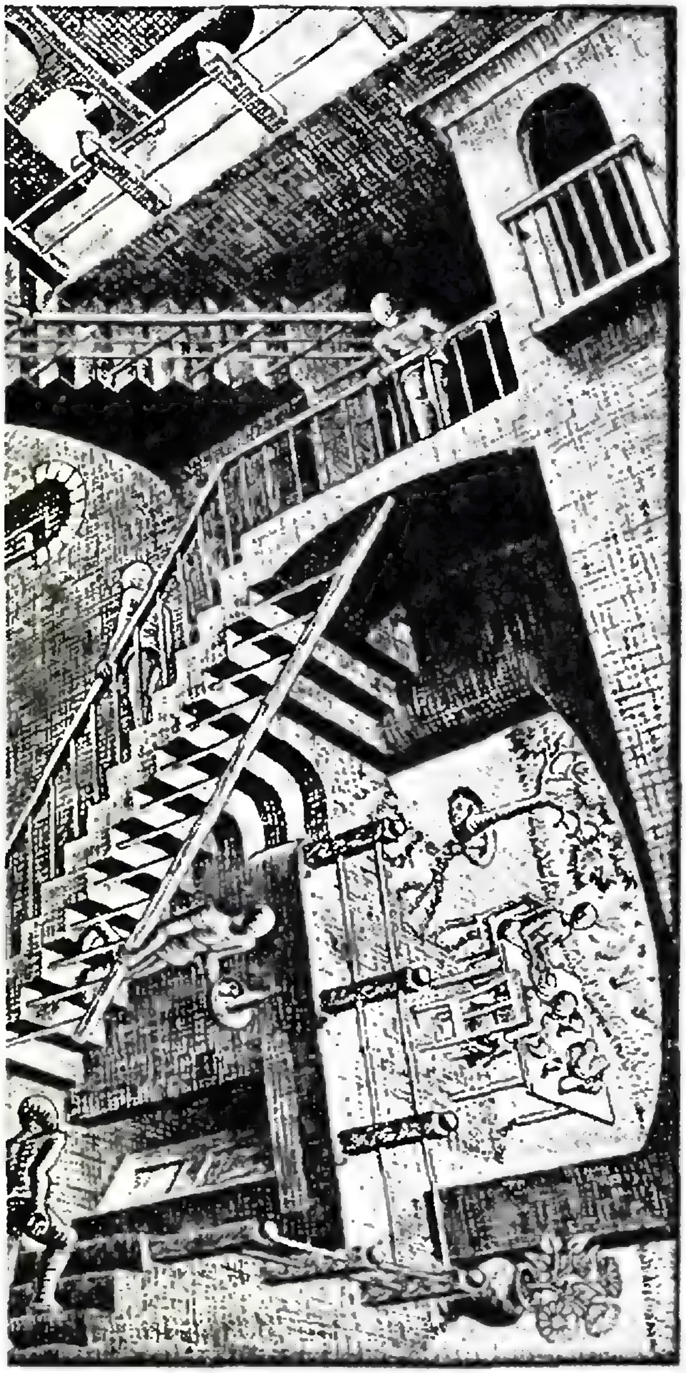


Рис. 6.

В некоторых системах координат связь между изогонально сопряженными точками выглядит довольно просто. Пусть, например, вершины треугольника ABC расположены в комплексной плоскости на единичной окружности $|z|=1$; a, b, c — комплексные координаты этих вершин. Тогда точки u и v, изогонально сопряженные относительно треугольника ABC, связаны соотношением

$$u+v+abcuv = a+b+c.$$



Числа $(x; y; z)$ называют *барицентрическими координатами* точки P относительно треугольника ABC, если $x\overrightarrow{PA} + y\overrightarrow{PB} + z\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Эти числа определены однозначно с точностью до пропорциональности; если наложить условие $x+y+z=1$, то они будут определены однозначно. Пусть (x, y, z) — барицентрические координаты некоторой точки. Тогда барицентрические координаты изогонально сопряженной с ней точки имеют вид $(a^2/x, b^2/y, c^2/z)$, где a, b, c — длины сторон треугольника ABC.

Пусть точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC. Опустим из точки P перпендикуляры на стороны треугольника (или их продолжения) и рассмотрим окружность, проходящую через основания перпендикуляров. Такую же окружность можно рассмотреть для точки Q. Оказывается, что эти окружности совпадают.

В том случае, когда P и Q — точка пересечения высот и центр описанной окружности, совпадение окружностей означает, что основания высот треугольника и середины его сторон лежат на одной окружности (*окружность Эйлера*).

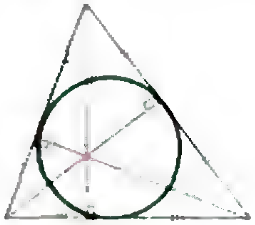


Рис. 7.

Более интересное утверждение получается для точки P, лежащей на описанной окружности. Изогонально сопряженная ей точка бесконечно удаленная. Поэтому основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны треугольника (или их продолжения), лежат на окружности бесконечного радиуса, т. е. они лежат на одной прямой (*прямая Симсона*).

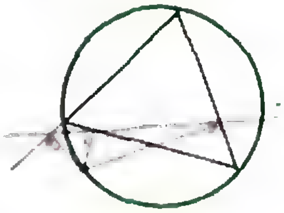


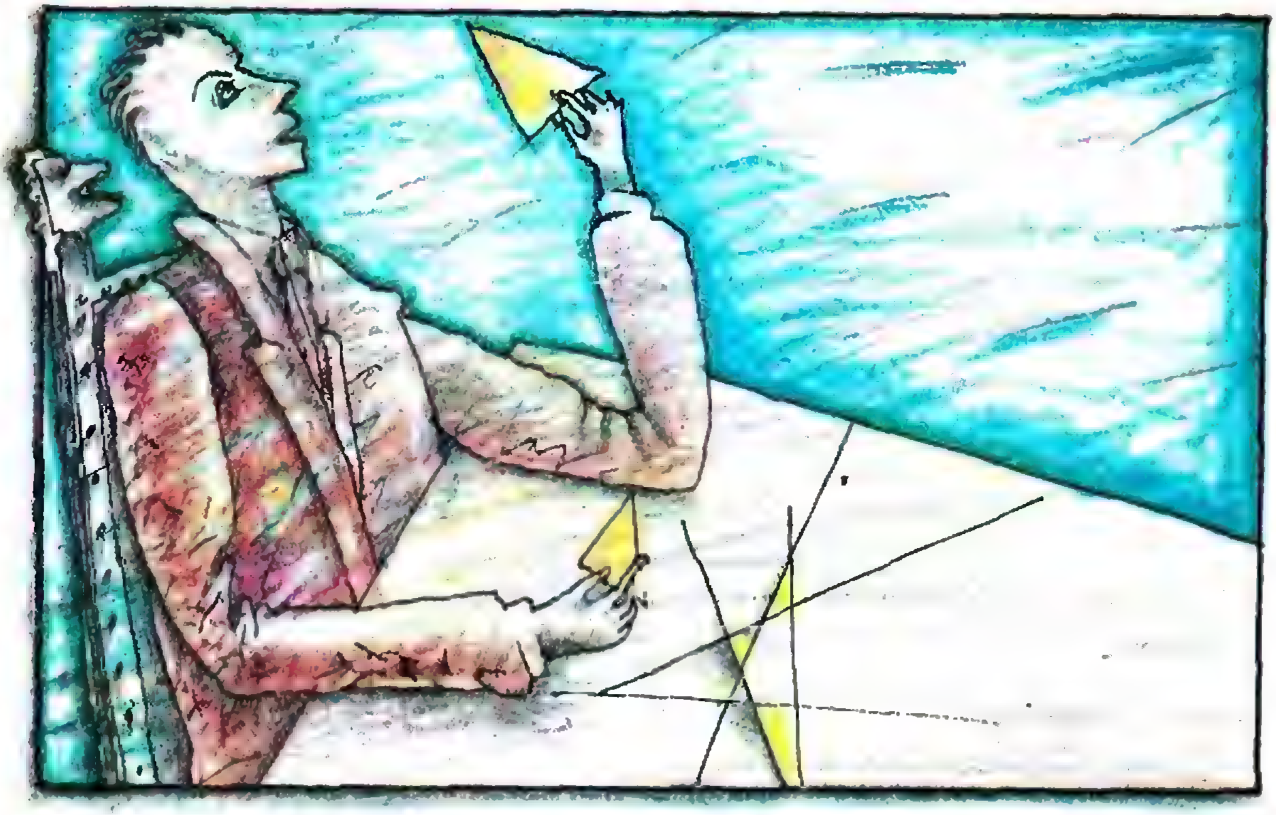
Рис. 8.

Прямая Симсона для точки P перпендикулярна прямым, полученным из прямых AP, BP и CP с помощью симметрии относительно биссектрис углов A, B и C. Перечисление свойств изогонально сопряженных точек мы завершим упоминанием об одной кривой, связанной с треугольником. Эту кривую называют *кубика Томсона*: в барицентрических координатах ее можно задать уравнением третьей степени

$$a^2y^2z + b^2z^2x + c^2x^2y = a^2z^2y + b^2x^2z + c^2y^2x,$$

где a, b и c — длины сторон треугольника. Кубика Томсона проходит через многие замечательные точки треугольника: вершины, основания биссектрис, точку Лемуана, центр вписанной окружности. Не менее замечательно, что при изогональном сопряжении кубика Томсона переходит сама в себя.

Материал подготовил
В. Прасолов



Математический кружок

Треугольники и катастрофы

Кандидат физико-математических наук
А. КАНЕЛЬ,
А. КОВАЛЬДЖИ

Во втором номере нашего журнала за этот год по предложению Д. Фомина была опубликована задача М1330:

На плоскости проведено n прямых общего положения (никакие три не проходят через одну точку и никакие две не параллельны). Докажите, что среди частей, на которые они делят плоскость, не меньше а) $n/3$; б) $(n-1)/2$; в) $n-2$ треугольников.*

Нас будет интересовать точная оценка числа треугольников. Эта задача, простая и увлекательная по формулировке, была поставлена еще в 1870 году и стала проблемой на сто с лишним лет. Она затягивает, и кажется — решение вот-вот получится. Но почему-то каждая «Эврика!» лишь пополняла нашу коллекцию тонких ошибок.

Первое решение получили в 1979 г. известные геометры Грюнбаум и Шеппард. Здесь мы излагаем более короткое элементарное решение, найденное А. Канелем. По существу его можно выразить тремя предложениями, однако формальный текст мало что даст для понимания. Мы постараемся проследить путь, на котором получено решение, и выявить ключевые идеи, поэтому вначале наши рассуждения будут проводиться на интуитивном уровне.

Ослабленная формулировка

На Московской городской математической олимпиаде в 1972 году была предложена следующая

Задача 1. *На плоскости проведено 3000 прямых, причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. По этим прямым плоскость разрезали на куски. Докажите, что среди кусков найдется не менее а) 1000 треугольников, б) 2000 треугольников.*

Решение. Прежде всего ясно, что $n=3000$. Пункт а) совпадает с пунктом а) задачи М1330, а пункт б) является усилением ее пункта б), поскольку $2000>(3000-1)/2$.

Начнем с ключевой идеи. К каждой прямой примыкает хотя бы один треугольник (треугольный кусок с основанием на прямой). Если это доказать, то получится решение пункта а), ибо каждый треугольник примыкает к трем прямым, и может оказаться ближайшим для всех трех.

Попробуем найти для каждой прямой примыкающий к ней треугольник, не пересеченный другими прямыми. Здесь красивая идея: выберем ближайшую к этой прямой точку пересечения других прямых (рис. 1). Покажите, что эта точка — вершина искомого треугольника.

Чтобы доказать пункт б), достаточно для каждой прямой найти еще один, примыкающий к ней, треугольник. Это кажется просто: ведь у прямой две стороны. Беда лишь в том, что все точки пересечения могут лежать по одну сторону от прямой... Но... не является ли плохой случай редкостью? Давайте посмотрим, сколько «плохих» прямых может быть.

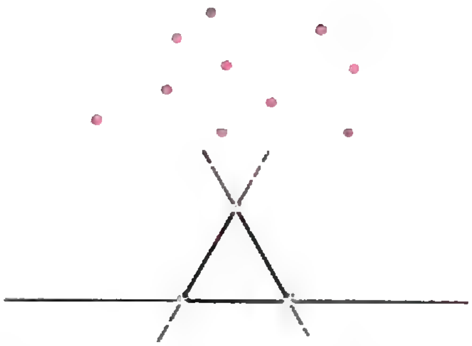


Рис. 1. Ближайшая точка пересечения.

Очевидно, что бывает три плохих прямых. К счастью, это самый плохой случай (когда их всего три). Если же прямых $n>3$, то плохих среди них не больше двух. Докажем это.

Допустим, что есть тройка плохих прямых. Нарисуем только их и еще одну прямую. В любом случае появятся точки пересечения по обе стороны от одной из плохих прямых (поскольку на четвертой прямой есть точка пересечения между двумя другими). Противоречие.

Итак, при $n>3$ найдутся не более двух прямых, к которым примыкает ровно один треугольник, а к остальным примыкает не меньше двух. Оценим число треугольников. Их, конечно, будет по крайней мере $(2n-2)/3$. В нашем случае это $1999\frac{1}{3}$. Но число треугольников целое, значит, их не меньше 2000.

Попутно доказано усиление пункта б) задачи М1330, поскольку $2(n-1)/3>(n-1)/2$.

Предлагаем вам несколько упражнений, идейно близких к только что решенной задаче.

Упражнения

1. В пространстве провели n плоскостей общего положения (любые четыре образуют тетраэдр). Докажите, что среди частей разбиения пространства найдется не меньше а) $n/4$ тетраэдров ($n\geqslant4$), б) $(2n-3)/4$ тетраэдров ($n\geqslant5$).

2 (на идею ближайшей точки). На плоскости отмечено n прямых ($n\geqslant3$). Любые две из них пересекаются, и через каждую точку пересечения проходит не меньше трех прямых. Докажите, что все прямые пересекаются в одной точке.

3. В пространстве отмечено n плоскостей. Любые три из них имеют общую точку, и через каждую такую точку проходит не меньше четырех плоскостей. Докажите, что все плоскости проходят через одну точку.

Точная оценка — тонкие ошибки

Теперь приступим к нашей главной задаче:

На плоскости провели n прямых общего положения (любые три образуют треугольник). Докажите, что сре-

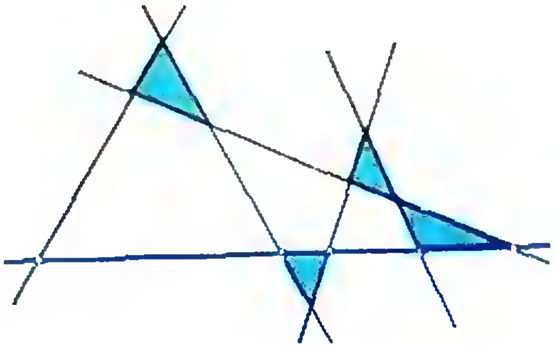


Рис. 2. От каждого треугольника остался треугольник.

ди частей разбиения плоскости найдутся $n-2$ треугольника, причем эта оценка точная.

Упражнение 4. Расположите n прямых общего положения так, чтобы треугольных кусков было ровно $n-2$.

В основе всех первоначальных попыток доказательства точной оценки лежало наблюдение, что *треугольник «неуничтожим»*, т. е. секущая прямая делит его на две части, одна из которых — треугольник. (Кстати, верно ли аналогичное утверждение для тетраэдра и секущей плоскости?)

Вот одно из красивых «решений». Если найти любые $n-2$ треугольника, то, после пересечений, от них останется $n-2$ треугольных кусочка, и задача решена. Для этого выделим одну прямую. Остальные пересекают ее в $n-1$ точке. Эти точки высекают $n-2$ отрезка. Прямые, проходящие через концы отрезков,образуют с ними $n-2$ треугольника (рис. 2). Вот и все!

Упражнение 5*. Найдите ошибку в этом «решении».

Попытка применить индукцию

Поскольку треугольник неуничтожим, естественно попытаться применить индукцию: например доказать, что добавление прямой увеличит число треугольников.

Именно на этом пути получено большинство ошибок. А дело в том, что само утверждение неверно: добавление прямой может не прибавить треугольников!

Упражнение 6. Нарисуйте несколько прямых общего положения так, чтобы при удалении некоторой из них число треугольников не уменьшилось.

Были попытки доказать, что всегда найдется прямая, удаление которой уменьшит число треугольников (тогда бы прошла индукция), но решение было получено из других соображений. При этом остался открытым вопрос: верно ли, что такая прямая найдется?

Итак, добавление и удаление прямых нам не помогло,— поищем другой путь.

Избегать крайностей — тоже крайность

В понятии общего положения заметно стремление уйти от вырожденных случаев. Уже само слово «вырожденный» создает ощущение патологии, чего-то такого, чего не должно быть. И школа приучает к этому, запрещая, например, параллелограмм считать трапецией. Однако именно идея вырождения оказалась краеугольным камнем решения задачи о треугольниках. Начнем с примера.

Задача 2. *В выпуклом пятиугольнике каждая диагональ отсекает треугольник. Докажите, что сумма площадей этих треугольников больше площади пятиугольника.*

Решение. Иметь дело с произвольным пятиугольником довольно трудно. А нельзя ли его «упростить»? Но не ради разбора частного случая (хотя и это полезно), а для того, чтобы свести общее решение к частному.

Давайте двигать вершину одного из треугольников параллельно его основанию (рис. 3). Тогда площади треугольника и пятиугольника не будут меняться, но будут меняться площади соседних треугольников.

Ключевая идея: если двигать вершину треугольника вдоль прямой, то его площадь будет либо возрастать, либо убывать, либо не меняться. (Поскольку основание одно и то же, а высота либо растет, либо убывает, либо не меняется). Иными словами:

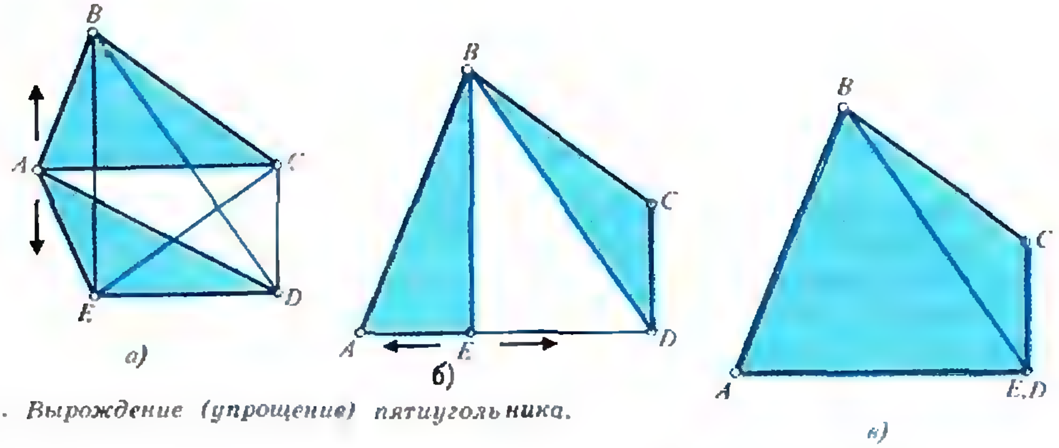


Рис. 3. Вырождение (упрощение) пятиугольника.

если вершина двигается вдоль прямой с постоянной скоростью, то площадь треугольника тоже меняется с постоянной скоростью.

Значит, сумма площадей всех треугольников тоже меняется с постоянной скоростью. Хорошо, если она не растет, потому что мы надеемся доказать неравенство для нового пятиугольника, а тогда для старого оно будет верно и подавно.

Но если площадь треугольников растет, то что делать? Очень просто: надо *двигать вершину в противоположную сторону*, и площадь будет убывать.

До каких же пор двигать вершину? Очевидно, пока пятиугольник остается выпуклым. Но в этом предельном положении один из углов пятиугольника равен 180 градусов... Ну и пусть, ведь пятиугольник стал проще! (Стал похож на четырехугольник.)

Теперь повторим это рассуждение для вершины с развернутым углом. Что получится? Она совпадает с одной из соседних вершин.

Можно двигать вершины и дальше, до предела, когда пятиугольник превратится в треугольник (с двумя двойными вершинами или одной тройной), но можно остановиться и раньше, поскольку треугольники *EAB* и *BCD* уже покрывают пятиугольник.

Итак, доказательство для исходного пятиугольника свелось к одному частному (вырожденному!) случаю, который очевиден.

Замечание. Можно двигать вершины пятиугольника вдоль произвольной прямой, тогда все площади будут меняться *линейно* (с постоянной скоростью), и нам достаточно следить за тем, чтобы разность площадей треугольников и пятиугольника (которая тоже меняется линейно) убывала.

Таким же средствами решается и ряд других задач.

Упражнения

7. В выпуклом шестиугольнике каждые три соседние вершины образуют треугольник. Всегда ли сумма площадей этих треугольников больше площади шестиугольника?

8. Из бумажного параллелограмма вырезали треугольник. Докажите, что площадь треугольника не превосходит половины площади параллелограмма.

9. Докажите, что у выпуклого многоугольника найдутся три вершины, которые образуют треугольник максимальной площади среди треугольников, вписанных в него.

10. В кубе «сидит» выпуклое тело, чья проекция на любую грань куба полностью ее покрывает. Докажите, что объем тела не меньше трети объема куба.

11. На отрезке отмечено n точек. Какова максимально возможная сумма попарных расстояний между ними?

12. Покажите, что максимум линейной функции от координат точек $f(x, y, z)=ax+by+cz+d$ внутри выпуклого многогранника достигается в одной из его вершин.

13. Али-Баба пришел в пещеру, где есть золото, алмазы и сундук. Полный сундук золота весит 200 кг, а полный алмазов — 40 кг. Пустой сундук ничего не весит. Килограмм золота стоит 20 динариев, а килограмм алмазов — 60. Сколько денег может выручить Али-Баба за сокровища, если он может унести не более 100 кг?

Во всех этих задачах хорошо работают три идеи: 1) сведение общей ситуации к частному случаю посредством движения, 2) выбор линейного движения, которое в одном из направлений улучшает ситуацию, 3) рассмотрение граничных (краеугольных) случаев, которые часто бывают вырожденными.

Сама возможность не вникать в процесс движения, а сразу смотреть во главу угла принципиально важна: мы встретим ситуацию, когда варианты движения необозримы, но можно воспользоваться информацией о финальном состоянии.

Поэтому в дальнейшем мы будем: 1) двигать прямые, приводя их расположение к удобному виду, 2) использовать линейное движение, т. е. параллельный перенос с постоянной скоростью, 3) изучать предельные положения прямых.

План действий

Ближайшие рассуждения не войдут в окончательное решение, однако их стоит рассмотреть, поскольку, во-первых, они привели к решению, во-вторых, похожими средствами решаются многие известные задачи и, в-третьих, полезно проследить «чистку» решения. В результате мы получим решение на интуитивном уровне. Затем сделаем рассуждения строгими и, наконец, приведем короткое формальное доказательство.

Где живут треугольники?

> *Еще, быть может, каждый атом —*
> *Вселенная, где сто планет;*
> *Там все, что здесь, в объеме сжатом,*
> *А также то, чего здесь нет.*
>
> В. Брюсов

Из-за обилия случаев расположения прямых все попытки в них разобраться потерпели неудачу. Попробуем двигать прямые. Ради линейности будем двигать их параллельно самим себе. Что может произойти?

Пока прямые не проходят через точки пересечения других прямых, картина в принципе не меняется. Но если несколько точек пересечения совпадут — произойдет «катастрофа»,— исчезнет один или несколько треугольников. После катастрофы произойдет «перестройка», результат которой , непредсказуем (рис. 4).

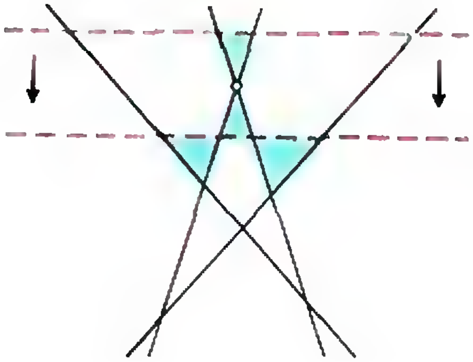


Рис. 4. Гибель и рождение треугольника при движении пунктирной прямой.

Поэтому доводить дело до катастрофы мы не будем, а остановимся за одно мгновение до нее, тогда треугольники не исчезнут и не появятся, а лишь уменьшатся. То, что получится, назовем фокусом прямых. Фокус, таким образом, это несколько прямых, все точки взаимного пересечения которых лежат в малой области, почти точке, причем эта область не пересекается с другими прямыми (рис. 5).

Для нас особенно важно, что в фокусе наблюдается разбиение плоскости в миниатюре, но с меньшим числом прямых. Иначе говоря, фокусы — это обособленные «миры», в которых

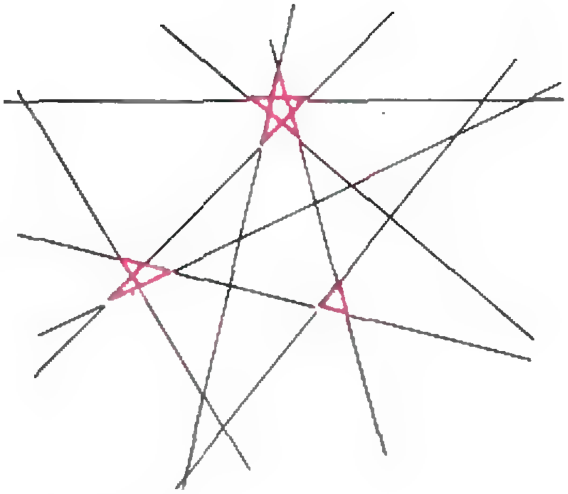


Рис. 5. Фокусы.

живут свои собственные крошечные треугольники. Поэтому, если удастся «развалить» картинку на фокусы, то треугольники станет легче считать (поскольку для меньшего числа прямых задачу можно считать решенной по предположению индукции).

Вернемся к индукции

Итак, предположение индукции состоит в том, что любые k прямых при $k<n$ разбивают плоскость на части, среди которых не меньше, чем $k-2$ треугольника. Значит, в фокусе из $k<n$ прямых найдутся $k-2$ треугольника.

Пусть, к примеру, двигая прямые, нам удалось их все собрать в два фокуса: в один — с 1-й по k-ю, в другой — с k-й по n-ю, причем k-я прямая общая (рис. 6). Тогда в фокусах наберется $(k-2)+(n-k+1-2)=n-3$ треугольника, и для индукционного перехода надо найти еще один треугольник вне фокусов. Это можно сделать (достаточно найти пересеченный треугольник), однако удастся ли нам все прямые собрать ровно в два фокуса? К сожалению, нет. А когда фокусов много, возникает разнообразие случаев. Что делать?

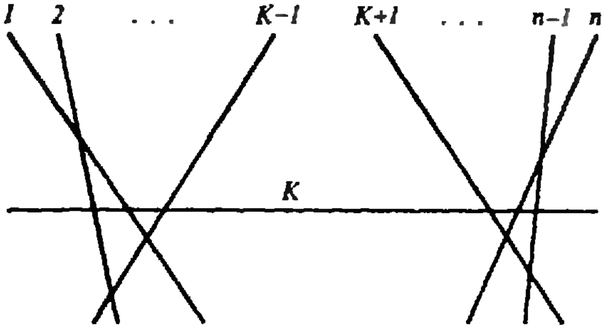


Рис. 6. Два фокуса.

Где границы возможного?

Исследуем процесс образования фокусов. Вначале прямые могут двигаться независимо, но если образовался фокус, то его надо сохранять, т. е. прямые фокуса двигать, как одно целое в виде «ежа» (мы запрещаем прямым фокуса двигаться относительно друг друга для того, чтобы, во-первых, предотвратить катастрофу, а во-вторых, сохранить разбиение плоскости в миниатюре). Фокусы (почти точки) могут дополняться новыми прямыми или объединяться (в одну почти точку), а их сохранение будет все сильнее ограничивать свободу движения и, наконец, все возможности двигать прямые будут исчерпаны.

При этом надо избежать стягивания всей картинки в один фокус (чтобы применить индукцию по числу прямых). Достаточно, например, зафиксировать две точки пересечения (чтобы они не попали в один фокус).

Теперь поймем, как связаны скорости прямых в одном фокусе. Две прямые можно двигать произвольно, а остальные должны под них подстраиваться (рассмотрите случай трех прямых). Иначе говоря, сохранение фокуса из k прямых требует $k-2$ соотношений между их скоростями. Но в этом же фокусе, по нашему предположению, найдутся $k-2$ треугольника,— *столько, сколько соотношений.* Не здесь ли ключ к решению?

Попробуем оценить число треугольников через число соотношений в конечном состоянии (когда прямые потеряют подвижность). Вначале мы закрепили одну прямую и две точки пересечения на ней, т. е., фактически, три прямые. У нас остались $n-3$ свободные прямые. Будем фокусировать их до упора. Для сохранения фокусов потребуется $n-3$ соотношения. По предположению индукции число треугольников в каждом фокусе не меньше числа соотношений, значит всего треугольников не меньше, чем $n-3$.

Заключительный аккорд

Осталось найти еще один треугольник. Всего один, где-то между фокусами. Но как его искать — неясно...

Подумаем: если нам нужен еще один треугольник, то зачем его искать? Нельзя ли сделать так, чтобы он *был с самого начала?* Нам-то ведь все равно, какие три прямые зафиксировать вначале. Давайте *зафиксируем те, которые уже образуют треугольник!* Задача решена!

Изготовление решения

Наша работа еще далеко не кончена: чтобы записать решение, надо наши рассуждения очистить, усовершенствовать и сделать строгими. Важно понять связь между треугольниками и фокусами, в частности, почему число треугольников в фокусе не меньше числа соотношений, нужных для его сохранения.

Упражнение 14 (на идею фокуса). Докажите с помощью движения одной прямой, что к ней примыкает треугольник.

Итак, мы решили сначала закрепить один, произвольно выбранный, треугольник — это спасло нас от общего «коллапса» и дало треугольник вне фокусов. А не сохранить ли нам, ради равноправия, *сразу все треугольники?* Тогда при движении прямых фокусы вообще не появятся (поскольку в фокусе существует треугольник, который до этого сжимался, т. е. не сохранялся).

Но если картинка окажется нежесткой, то при некотором движении фокус все же появится. Это будет противоречием. Значит, сохранение всех треугольников гарантирует жесткость картинки, и нам достаточно показать, что, сохраняя меньше, чем $n-2$ треугольника, нельзя добиться жесткости.

Вспомним, как мы сохраняли фокус: разрешали ему двигаться как целому. Простейший фокус — это треугольник. Поступим с обычным треугольником так же: разрешим перемещаться, но сохраним размер. (Проверьте, что полное фиксирование $n/3$ треугольников может привести к потере подвижности прямых.)

Но теперь мы не зафиксировали и начальный треугольник, поэтому, чтобы избавиться от неинтересных параллельных переносов всей картинки, *закрепим две прямые.* (Кстати, положение фокуса тоже определялось двумя прямыми.)

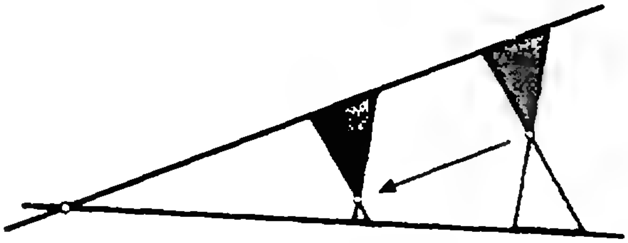


Рис. 7. Сохраняя синий треугольник, можно сжимать красный.

Каждый треугольник, как и простейший фокус, дает одно соотношение для скоростей прямых. Следовательно, сколько мы сохраним треугольников — столько получим соотношений.

Итак, надо выбрать $n-2$ скорости, которые мы назовем параметрами. Если треугольников мало (меньше числа параметров), то сохранение их размеров не обеспечит жесткости (рис. 7).

Но почему, если нет жесткости, можно получить фокус? У нас, как и в задаче про пятиугольник, есть возможность *двигать прямые в обратную сторону,* т. е. менять знаки всех скоростей на противоположные, поэтому можно направить одну из прямых к точке пересечения закрепленных прямых,— и тогда фокус неминуем. (Забавно, что при изготовлении решения индукция исчезла, как исчезают строительные леса при возведении зданий.)

Суммируем...

Сначала мы закрепили две прямые, а остальным разрешили двигаться с постоянными скоростями так, чтобы *размеры всех треугольников сохранялись.* Тогда, если треугольников окажется меньше, чем $n-2$, то скорости прямых можно выбрать ненулевыми (будет доказано). Меняя, если надо, направления всех скоростей, можно создать фокус, где и обнаружится неучтенный треугольник. Противоречие.

Уточним рассуждения

Чтобы получить строгое доказательство, необходимо уточнить наши интуитивные рассуждения, и прежде всего о жесткости. Переведем их на язык алгебры, где скорости — неизвестные, а соотношения — уравнения для них. Подвижность прямых означает, что существует ненулевое решение системы уравнений.

Каждый, кто возился с системами, знает, что, как правило, если число уравнений равно числу неизвестных, то система имеет конечное множество решений; если уравнений больше, чем неизвестных (переопределенная система), то решений нет; если уравнений меньше, чем неизвестных (недоопределенная система), то решений бесконечно много. Последним соображением мы и воспользовались.

К сожалению, эти соображения верны только «как правило». Например, система

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

решений не имеет, хотя число уравнений в ней меньше числа неизвестных. Однако в частном случае, когда все уравнения линейные и однородные, справедлива следующая

Теорема. *Недоопределенная система m линейных однородных уравнений с n неизвестными ($m<n$)*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Докажите эту теорему по индукции, последовательно избавляясь от неизвестных методом подстановки. (Доказательство можно найти в любом курсе линейной алгебры.)

Переведем разговоры о соотношениях для скоростей прямых на язык линейных уравнений (скорость прямой — это скорость ее удаления от начального положения).

Можно убедиться (выражая координаты или векторы), что точка пересечения двух прямых, движущихся с постоянными скоростями, тоже движется с постоянной скоростью, и стороны треугольника меняются с постоянной скоростью, откуда вывести, что *условие сохранения размера треугольника выражается линейным однородным уравнением для скоростей прямых.*

Докажем последнее утверждение геометрически. При параллельном переносе треугольника образуются три параллелограмма (рис. 8), причем площадь одного из них равна сумме площадей остальных. Площадь параллелограмма есть произведение стороны треугольника на величину сдвига прямой.

Будем считать направление сдвига прямой положительным, если треугольник растет. Тогда условие равенства площадей параллелограммов запишется в виде линейного однородного уравнения

$$a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3=0,$$

где a_1, a_2, a_3 — стороны треугольника, h_1, h_2, h_3 — сдвиги прямых. Таким же точно уравнением связаны и скорости прямых.

Итак, условие сохранения всех треугольников — это система линейных однородных уравнений. Как видите, линейность принесла плоды.

Упражнение 15. Покажите, что в системе координат (x, y) в момент времени t уравнение прямой, движущейся со скоростью v, можно записать в виде:

$$x\sin\alpha-y\cos\alpha=c+vt,$$

где α — угол наклона прямой к оси абсцисс.

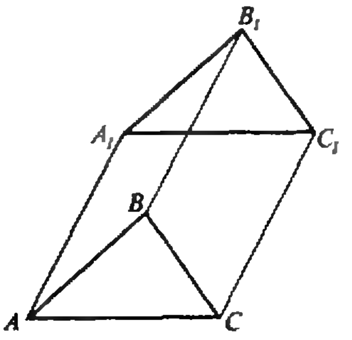


Рис. 8. Три параллелограмма. $S_{AA_1B_1B}+S_{BB_1C_1C}=S_{AA_1C_1C}$.

Строгое доказательство

В заключение приведем строгое доказательство, в котором, как это и принято в серьезной литературе, скрыты все повороты мысли. Такие тексты напоминают ребусы или компьютерные программы без комментариев. Их смысл, по выражению академика В. И. Арнольда, подобно притчам, разъясняют лишь ученикам наедине.

Допустим, что число k треугольников разбиения меньше, чем $n-2$. Пусть d — минимальная из сторон треугольников; $v_1, \ldots, v_n$ — скорости прямых в перпендикулярных направлениях, причем $v_1=v_2=0$.

Условие сохранения размеров всех треугольников равносильно системе k линейных однородных уравнений для скоростей v_i ($i=3,\ldots, n$), которая (согласно теореме) имеет ненулевое решение.

Можно считать (поменяв, если надо, направление времени), что некоторая прямая l_i движется в сторону точки пересечения прямых l_1 и l_2.

Существует момент («катастрофа»), когда три или больше прямых проходят через одну точку. Пусть t — первый такой момент, тогда в момент

$$t_1=t-d/(2\max v_i)$$

найдутся три прямые, которые образуют непересеченный треугольник со стороной меньше d. Это противоречит сохранению размеров всех треугольников. Утверждение доказано.

Замечания

1. Условие задачи о треугольниках обобщается *для пространств* любого числа измерений, в частности: если в трехмерном пространстве провели n плоскостей общего положения, то среди частей разбиения пространства найдутся не меньше, чем $n-3$ тетраэдра. (Почему треугольников $n-2$, а тетраэдров $n-3$? Что будет в одномерном случае?)

2. Просматривая решение, можно убедиться, что требование общего положения прямых можно ослабить: если среди n прямых на плоскости любые две пересекаются, и *не все прямые проходят через одну точку*, то среди частей разбиения плоскости найдутся $n-2$ треугольника.

Главное отличие состоит в том, что в процессе движения могут разрушаться точки многократного пересечения, и тогда возникнут новые треугольники. Но эти треугольники будут расти с постоянной скоростью, и их легко отличить от искомого треугольника, который сжимается в точку.

Проведите соответствующие рассуждения самостоятельно.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 26)

В. Кругляк (Ясиноватая) 39; *А. Кудряшов* (Канаш) 29, 30, 32, 34, 35, 39, 41, 42; *В. Кулагин* (Харьков) 30; *Ю. Кулик* (Канев) 30; *Д. Кюрчев* (Бердянск) 34, 36; *Р. Лазаускас* (Вильнюс) 29, 30, 33, 35; *П. Левин* (Москва) 28—31, 33—36, 38—41; *В. Леонов* (Старый Оскол) 30; *К. Лепесов* (Алма-Ата) 30; *В. Лобас* (Киев) 29—32, 34; *Е. Лонская* (Москва) 32; *Р. Лукша* (Брест) 29, 30, 32; *С. Лысенко* (Старый Оскол) 30, 32; *К. Мазюкевич* (Киев) 30; *С. Макаров* (Усинск) 33, 36; *С. Малашицкая* (Кузнецовск) 34, 35; *В. Манукян* (Ереван) 39, 40; *Д. Марьенко* (Киев) 30; *О. Матысик* (Брест) 32; *М. Махмудов* (Исфара) 30; *П. Мелентьев* (Старый Оскол) 29, 30, 32—34, 36, 37, 39—41; *В. Мушик* (Кузнецовск) 30, 32, 34—36; *А. Мясоед* (Старый Оскол) 29, 30; *А. Наводкин* (Комсомольск) 30; *Т. Назарова* (Желтые Воды) 30, 36, 37, 41; *А. Наливайко* (Старый Оскол) 29, 30, 33—36, 39—41; *А. Насонов* (с. Кензово Липецкой обл.) 28—33, 36, 37, 42; *И. Нестеренко* (Старый Оскол) 34; *С. Нечаев* (Борисов) 30, 35; *Г. Новичков* (Троицк) 29—31; *С. Носенко* (п. Черноголовка Московской обл.) 30, 32, 34, 39; *К. Нурматов* (Наманган) 28, 30, 38; *О. Омонов* (Наманган) 30; *С. Осипян* (Ереван) 39, 40; *Р. Остроумов* (Троицк) 29—31; *Х. Отоженов* (Ургенч) 29, 30, 40; *А. Павлик* (Новая Ушица) 29, 30, 32—37, 39—41; *А. Пагнуев* (Ставрополь) 30; *Д. Пастухов* (Витебск) 28—30, 32—34, 36, 38—42; *О. Педоренко* (Виниица) 30; *А. Пикалов* (Канаш) 29, 30, 32, 34, 39, 41, 42; *Е. Подгорная* (Винница) 30; *В. Подольский* (Черновцы) 30; *А. Полетов* (Череповец) 30; *В. Понкратов* (Старый Оскол) 30, 33—35,

(Окончание см. на с. 56)

Практикум абитуриента

Тригонометрические задачи

1. Выясните, какое из двух чисел больше:

а) $\sin 5$ или $\sin 6$,
б) $\cos 7$ или $\cos 8$;
в) $\operatorname{tg} 8$ или $\operatorname{tg} 3^\circ$;
г) $\sin 3$ или $\sin 3^\circ$,
д) $\arcsin\frac{2}{3}+\arcsin\frac{3}{4}$ или $\frac{\pi}{2}$;
е) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ или $\frac{\pi}{5}$; ж) $\operatorname{arctg}\frac{2}{8}$ или $\frac{\pi}{5}$;
з) $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$ или $\frac{\pi}{5}$.

2. Вычислите:

а) $\arcsin\sin 10$; б) $\arccos\cos 10$;
в) $\operatorname{arctg}\operatorname{tg} 10$; г) $\operatorname{arcctg}\operatorname{ctg} 10$;
д) $\sin\left(2\arccos\frac{1}{3}\right)$; е) $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$;
ж) $\cos(\operatorname{arctg} 5)$;
з) $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x$, если $\sin x+\cos x=a$.

8. Докажите тождество:

а) $1+\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^3 x=\dfrac{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)}{\cos^3 x}$;

б) $\sin\alpha+2\sin 3\alpha+\sin 5\alpha=4\sin 3\alpha\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}=\sin 2x$;

г) $\dfrac{\sin 2x-\sin 3x+\sin 4x}{\cos 2x-\cos 3x+\cos 4x}=\operatorname{tg} 3x$;

д) $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$;

е) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$;

ж) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$.

4. Решите тригонометрическое уравнение:

а) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$;
б) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\operatorname{tg}\left(5x+\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;
г) $\cos x+\cos 5x=2$; д) $\sin x\sin 5x=1$;
е) $\sin\cos x=\cos\sin x$; ж) $\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 7x=1$;
з) $\operatorname{tg}(4\sin x)=\sqrt{3}$; и) $\operatorname{ctg}(3\cos x)=1$;
к) $\sin 5x=\sin x+\sin 2x$;
л) $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=0$;
м) $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x=2$;
н) $3\sin 2x+8\cos^2 x=1$;
о) $\cos x\cos 3x=\cos 2x$;
п) $3\sin x+4\cos x=5$;
р) $\sin x\sin 3x+\sin 4x\sin 8x=0$;
с) $2\sin^2 x+\sin^2 2x=\frac{5}{4}-2\cos 2x$;
т) $2\sin^2 x=4\sin^2 2x+7\cos 2x-6$;
у) $\cos^6 x+\sin^6 x=\frac{15}{8}\cos 2x-\frac{1}{2}$;
ф) $3(\cos x-\sin x)=1+\cos 2x-\sin 2x$;
х) $1+\sin 2x=\cos x-\sin x$;
ц) $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\sin 2x}=\dfrac{1}{\sin 3x}$;
ч) $4\operatorname{tg} 4x-4\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 2x=$
$=\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 3x\operatorname{tg} 4x$;

5. Решите «комбинированное» уравнение:

а) $4|\sin x|+2\cos 2x=3$;
б) $\sqrt{10}\cos x=\sqrt{4\cos x-\cos 2x}$;
в) $\left|\operatorname{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right|=1-\dfrac{1}{\cos^2 2x}$;
г) $\sqrt{\cos x}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$;
д) $\sqrt{-\cos x}=\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$;
е) $\cos x-2\sin 2x-\cos 3x=$
$=|1-2\sin x-\cos 2x|$;
ж) $\sqrt{12-5\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2\sin x}=$
$=\frac{3\sqrt{2}}{2}-2\cos x$;
з) $(4\sin x+1+\sqrt{3+5\cos 2x-16\sin x})\times$
$\times(1+3\cos 2x)=0$.

5. Решите уравнение с обратными тригонометрическими функциями:

а) $2\arcsin x=\arccos 3x$;
б) $\arcsin^2 x+\arccos^2 x=\frac{5}{4}\pi^2$;
в) $\arcsin x\cdot\arccos x=-1$;
г) $\operatorname{arctg}(x-1)=3\operatorname{arctg}(x+1)$;
д) $2\arcsin x+\arccos 2x=\pi/2$;
е) $\arcsin x=2\operatorname{arctg} x$;
ж) $2\arcsin x=\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$;
з) $2\arccos x=\arccos(2x^2-1)$;
и) $\arccos\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)=\arcsin\left(\frac{2}{\pi}\arcsin x\right)$.

Публикацию подготовил А. Егоров

Информатика

Новости кубологии

Кандидат физико-математических наук

В. ДУБРОВСКИЙ,
А. КАЛИНИН

Лучшая головоломка XX века, придуманная 13 лет назад венгерским преподавателем дизайна Эрне Рубиком, упорно сопротивляется попыткам разгадать все ее тайны. Сразу после изобретения кубика Рубика начался поиск самого короткого пути к ее решению. Первые разработанные алгоритмы требовали 200—300 ходов (поворотов граней) для того, чтобы вернуть кубик в исходное состояние.

Постепенно длина алгоритмов (т. е. минимальное число ходов, гарантирующее решение) сокращалась. Это происходило за счет изменения последовательности сборки разных частей головоломки (улучшения стратегии) и применения более коротких операций для перестановки и правильной ориентации маленьких кубиков (улучшения тактики). Ставший самым популярным «послойный» алгоритм кубика Рубика («Квант», 1983, № 9) осуществляет сборку не более чем за 108 ходов). Совершенствуя его, удается уменьшить это число до 86 ходов. Дальнейшие улучшения требуют резкого увеличения количества формул, которые необходимо держать в голове или на бумаге в процессе сборки. В период всеобщего увлечения кубиком (1981—1983 гг.) редакция «Кванта» получила не менее десятка объемистых разработок, авторы которых, проделав гигантскую работу по поиску новых операций, получили алгоритмы, позволяющие решать «головоломку века» в среднем за 50—60 ходов*). Наиболее основательную работу проделал московский инженер А. Карасев, разработавший таблицы для сборки кубика из 5412 операций, разбитых на 22 группы по 246 формул в каждой группе!

Одновременно с любителями решать головоломку, держа ее в руках, неприступный кубик штурмовали и программисты. Сначала успеха добились менее «безумные» из них — те, кто взялись за Малый кубик размером 2×2×2 кубичка. Задачу они решали с конца: исходя из правильного состояния кубика, программа начинает «разрушать» его, получая и запоминая результаты всевозможных поворотов граней. Если какая-либо расцветка кубика появляется повторно, то соответствующая операция игнорируется, так что в памяти компьютера остаются только самые короткие формулы. В результате был получен список всех возможных состояний Малого кубика с указанием, после каких поворотов граней они впервые появились. Этот список никогда не был ни опубликован, ни напечатан хотя бы в одном экземпляре. Причина не столько в его громадных размерах, сколько в том, что из-за таких размеров слишком трудно найти в списке нужную вам в данный момент операцию.

Если подсчитать количество состояний Малого кубика после определенного числа поворотов граней, то получится следующая таблица:

1 расцветка — после 0 поворотов граней,
9 расцветок — после 1 поворота граней,
54 расцветки — после 2 поворотов граней,
321 расцветка — после 3 поворотов граней,
1 847 расцветок — после 4 поворотов граней,
9 992 расцветок — после 5 поворотов граней,
50 136 расцветок — после 6 поворотов граней,
227 536 расцветок — после 7 поворотов граней,
870 072 расцветки — после 8 поворотов граней,

---

*) Подчеркнем, что здесь речь идет именно о среднем числе ходов, а точнее, о числе ходов, которое обычно требовалось самим авторам алгоритмов для сборки кубика их методом.

1 887 748 расцветок —
после 9 поворотов граней,
623 800 расцветок —
после 9 поворотов граней,
2 664 расцветки —
после 11 поворотов граней.

Поворачивая грани 12 раз, компьютер не нашел ни одного нового состояния Малого кубика. Следовательно, чтобы решить головоломку из 8 маленьких кубичков, всегда достаточно сделать не более 11 ходов. Чаще всего хватит и 10 ходов.

Малый кубик есть не что иное, как 8 угловых кубичков классического кубика Рубика. Но в последнем — 26 кубичков, а это уже колоссально усложняет задачу перебора. Кубик Рубика может иметь $N \approx 4{,}3 \times 10^{19}$ различных расцветок. Если ваша программа будет тратить всего 1 микросекунду на получение и анализ одной расцветки, то понадобится 1,4 миллиона лет, чтобы закончить всю работу. Вот почему в начале статьи мы назвали «безумными» тех программистов, что взялись за решение этой задачи.

Из этих программистов первого впечатляющего успеха добился английский математик М. Тистлетуэйт, который разработал совершенно новый алгоритм, позволявший всегда упорядочить кубик Рубика не более чем за 52 хода («Математика волшебного кубика», «Квант», 1982, № 8). Хотя в принципе с помощью этого алгоритма можно собрать кубик и вручную, реально его может выполнить только компьютер. В дальнейшем этот алгоритм удалось несколько улучшить — сначала этого добился сам англичанин, а пару лет назад Х. Клоостерман из Голландии довел длину алгоритма до 42 ходов. Важно отметить, что эта граница обоснована строго (а не эмпирически), т. е. доказано, что из любого состояния кубика Рубика можно вернуться в правильное не более чем за 42 хода, причем данный рекордный алгоритм не может гарантировать лучшего результата. (Это не означает, что другой алгоритм не может оказаться короче.) Конечно, это доказательство существенно использует компьютер (как, например, и относительно недавнее решение знаменитой «проблемы четырех красок»): для каждого из этапов сборки был осуществлен полный перебор вариантов, число ходов, понадобившееся в худшем случае, и принимается за «длину» данного этапа.

Совсем недавно нового достижения добился немецкий математик Герберт Коцемба. Он был среди тех «менее безумных», кто 10 лет назад победили Малый кубик, но затем примкнул к «самым самым» и, возможно, уже остался единственным, кто до наших дней продолжал штурм головоломки века. Теперь к нему пришел заслуженный успех. Он разработал алгоритм и написал программу, которая решает головоломку Рубика менее чем за 21 ход! Сразу скажем, что эта оценка длины, в отличие от предыдущей, эмпирическая: все состояния кубика, которые предлагались программе Коцембы, были упорядочены не более чем за 21 ход. В частности, программа нашла более короткие решения для многих задач на составление узоров на кубике (или пасьянсов), весьма популярных в «золотую эру» кубика. Нет никакой гарантии, однако, что состояний, требующих больше 21 поворота по программе Коцембы, не существует вовсе. Более того, такую гарантию мог бы дать только полный перебор вариантов для каждого этапа программы (их два), а он пока не под силу даже программе Коцембы и его более мощному, чем у предшественников, компьютеру.

Идея алгоритма Герберта Коцембы

Собственно говоря, то, что придумал Коцемба, не является «алгоритмом сборки кубика» в том смысле, как его обычно понимают в «кубологии».

Обычные алгоритмы сборки представляют собой наборы правил, позволяющих для любого заданного состояния кубика поставить некую ближайшую цель и достичь ее, выполнив последовательность поворо-

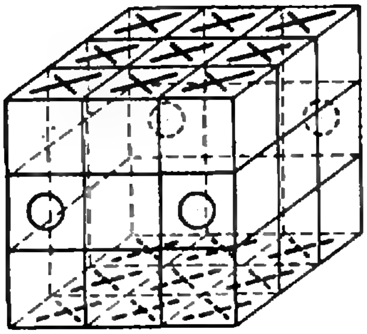


Рис. 1. Промежуточное состояние кубика Рубика.

тов граней, предписываемую правилами в данной ситуации. Тем самым кубик переводится в новое состояние, более близкое к правильному (по крайней мере, с точки зрения данного алгоритма). Например, цель может состоять в том, чтобы найти неправильно стоящий угловой кубичек и переместить его в свой угол, не трогая остальные угловые кубички. И таких маленьких шажков приходится делать очень много.

В алгоритме Коцембы ставится только одна промежуточная цель — кубик надо перевести в одно из состояний, которые так и названы — промежуточными. Они характеризуются тем, что любое промежуточное состояние можно получить из правильного (а значит, и наоборот — превратить его в правильное), поворачивая четыре боковые грани только на 180°, а верхнюю и нижнюю — на произвольный угол (естественно, кратный 90°). Более наглядное описание семейства промежуточных состояний дает специальная расцветка кубика, изображенная на рисунке 1: верхняя и нижняя грани красятся одним цветом, а на каждом из реберных кубичков горизонтального среднего слоя один из двух квадратиков красится вторым цветом; остальную поверхность кубика вообще можно не закрашивать. Первая цель (задача первого этапа) алгоритма Коцембы — восстановить такую раскраску из хаотического исходного состояния. При этом, конечно, можно пользоваться любыми поворотами. На втором этапе применяются только повороты, перечисленные выше. Легко понять, что они автоматически сохраняют нашу вспомогательную раскраску. По существу, на втором этапе происходит только установка каждого кубичка на его место. А благодаря сохранению вспомогательной раскраски правильная ориентация кубичков на своих местах будет обеспечена автоматически. Таким образом, число промежуточных состояний равно числу допустимых перестановок кубичков (т. е. перестановок, получаемых из правильной поворотами граней), при которых реберные кубички среднего слоя остаются в этом слое. Его нетрудно вычислить: четыре кубичка среднего слоя переставляются 4! способами, остальные реберные кубички — 8! способами, угловые — тоже 8! способами. Общее число всевозможных перестановок — $(8!)^2\times\times 4!$ — нужно еще поделить пополам, чтобы выделить допустимые перестановки (см. статью «Математика волшебного кубика»). Итак, получается $N_2=(8!)^2\cdot 4!/2\approx 19{,}5\cdot 10^9$ промежуточных состояний. Эта величина дает представление о порядке числа вариантов, которое должна держать в своей памяти машина, подыскивая достаточно короткую операцию для упорядочивания промежуточного состояния.

На первом же этапе программу интересует не полное описание заданного состояния кубика (т. е. не все $4{,}3\cdot 10^{19}$ возможных вариантов), а только исходное расположение цветов вспомогательной раскраски, которое нужно привести к стандартному виду (рис. 1). Другими словами, здесь важны ориентации всех кубичков и места, занимаемые четырьмя кубичками среднего слоя. Таким образом, число N_1 вариантов, рассматриваемых на первом этапе, равно

(число допустимых ориентаций 8 угловых кубичков)×(число допустимых ориентаций 12 реберных кубичков)×(число расположений кубичков горизонтального слоя)$=3^7\cdot 2^{11}\cdot C_{12}^4\approx 2{,}217\cdot 10^9$

(почему 3^7 и 2^{11}, а не 3^8 и 2^{12}, объясняется в упомянутой выше «Математике волшебного кубика»).

Естественно, $N_1 N_2$ — это общее число допустимых состояний кубика, и оно на 9 порядков больше числа N_1+N_2 вариантов, охватываемых программой. Тем не менее, даже это уменьшенное число все еще слишком велико, чтобы можно было произвести исчерпывающий перебор случаев и запомнить его результаты. Поэтому машина не знает заранее, какое решение она выдаст для введенного в нее исходного состояния кубика. Она ищет решение «в присутствии заказчика» и выдает, возможно, не кратчайший, но достаточно короткий вариант.

Отметим, что метод Коцембы также восходит к алгоритму Тистлетуэйта. Однако в последнем используются не один, а три вложенных друг в друга класса промежуточных состояний, отвечающих поэтапному сужению набора разрешенных поворотов; второй из этих трех классов и составляют промежуточные состояния Коцембы. Понятно, что если вам нужно добраться из пункта *A* (исходное состояние) в пункт *B* (правильное состояние) и по дороге обязательно посетить пункт *C* (промежуточное состояние), то такой путь *ACB* может оказаться длиннее прямого пути *AB*, даже если его отрезки *AC* и *CB* проходятся оптимально. А если еще и на пути из *A* в *C* надо завернуть в *D*, а из *C* в *B* — в дополнительное промежуточное состояние *E*, то получится еще более длинный путь *ADCEB*. Зато каждый из отрезков этого пути уже настолько сокращается, что полный перебор случаев становится возможным. Так и появились рекордные результаты Тистлетуэйта и Клоостермана.

Как работает программа Коцембы

Грубо говоря, Коцемба заставляет машину просматривать всевозможные цепочки поворотов, разрешенных на соответствующем этапе, и ловить момент, когда цель этого этапа будет достигнута. Однако при таком лобовом подходе объем просматриваемых вариантов был бы слишком велик. Так, первый ход можно сделать $6\times3=18$ способами (любую из шести граней можно повернуть на один из трех углов — 180°, ±90°), на втором и каждом из следующих ходов число способов равно 15, так как нет смысла дважды подряд поворачивать одну грань. Таким образом, возникает «дерево вариантов», от каждой ветви которого отходят пять следующих ветвей. (На самом деле, начиная с определенного момента некоторые ветви будут срастаться, потому что разные цепочки ходов могут порождать одинаковые преобразования кубика.) Число цепочек ходов длины, не превосходящей *n*, равно сумме геометрической прогрессии $18(1+15+...+15^{n-1})$.

Между прочим, только при $n=18$ это число превысит общее число *N* состояний кубика, а значит, заведомо найдутся состояния, которые нельзя упорядочить меньше чем за 18 ходов. В действительности, из-за сращивания ветвей дерева вариантов число 18 можно еще увеличить. (В свое время промелькнуло сообщение о том, что доказано существование состояний, не решаемых быстрее чем за 21 ход; впрочем, оно могло быть не вполне достоверным.) Как видим, результаты, показываемые программой Коцембы, близки к наилучшим.

Сокращения перебора Герберт Коцемба добился с помощью специальной фильтрующей программы. Она хранит определенную информацию о всех цепочках из, скажем, не более чем 8 ходов, и позволяет отсеивать состояния, которые заведомо не упорядочиваются (в смысле 1-го или 2-го этапов алгоритма) такими цепочками. Начав «сборку», компьютер настраивается выполнить первый этап за 10 ходов. Он порождает первые два хода и включает фильтр на 8 ходов; если возникшее состояние не отсеется, производится третий ход и включается фильтр на 7 ходов, и т. д. Если на каком-то шагу произойдет отсев, надо поменять предыдущий сделанный ход. Пока что для всех позиций, предлагавшихся программе,

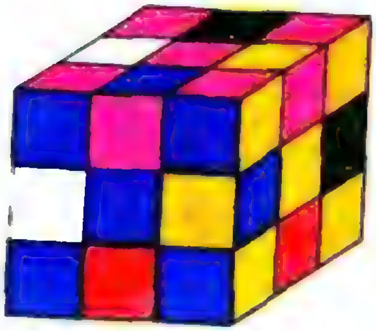


Рис. 2. Пасьянс «реверс» — все реберные кубички перевернуты на своих местах.

удавалось осуществить первый этап не более чем за 10, а второй — не более чем за 14 ходов.

Для реализации своего алгоритма Коцемба использовал персональный компьютер Atari ST с памятью 1 Мбайт и частотой 8 Мгц. Ядро программы — генератор операций с блоком проверки, написанные на Ассемблере. Размеры этого ядра — менее 500 байт! Остальные части программы, которые не оказывают существенного влияния на быстродействие, выполнены на Бейсике. В результате среднее время нахождения одного решения — 1,5 минуты (10 секунд на первый этап и 85 секунд на второй). Работа построена так: в компьютер вводят описание конкретного кубика (расположение и ориентацию всех кубичков). После этого машина ищет и запоминает лучшие (не более 13 ходов) пути для достижения промежуточного состояния, а затем для самого короткого из них включается второй этап. Если суммарная длина полученной после этого операции больше 21 хода, компьютер возвращается к этапу 1 и пытается найти более короткое решение на базе другого промежуточного состояния, возможно, увеличив длину первого этапа. Предъявляя компьютеру различные варианты запутанного кубика, Герберту всегда удавалось обнаружить операцию не длиннее 21 хода, хотя бы на это и уходило много часов работы программы.

Герберт Коцемба обратился ко всем любителям кубика с предложением присылать ему варианты запутанного кубика, к которым не удается вручную найти операции короче 21 хода. А мы в 1982—83 гг. проводили конкурс среди читателей популярного еженедельника «Собеседник» по лучшим узорам (пасьянсам) на гранях кубика Рубика. Тогда победители нашли операции короче 21 хода ко всем узорам, кроме одного (см. рис. 2), и теперь мы послали эту задачу в Дармштадт, где живет автор рекордного алгоритма.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 26)

39; *Е. Постников* (Курск) 34; *В. Регельман* (Баку) 30, 32, 39, 40; *Н. Рогачев* (Алма-Ата) 29, 30, 32—36, 39, 40; *И. Рыбаков* (Октябрьский) 30; *В. Рыбачук* (Винница) 29, 30, 32; *А. Рыскин* (Ташкент) 33, 34, 36; *Д. Савин* (Москва) 30; *С. Самсонов* (Старый Оскол) 30, 34; *В. Свириденко* (Троицк) 29—31; *А. Серафимович* (Борисов) 29, 30, 32, 33, 35, 39; *С. Симакин* (Нижний Тагил) 29; *А. Слюсаренко* (Киев) 29, 30, 32, 34, 35; *Д. Смирнов* (Кузнецовск) 32; *Д. Соколов* (Космодемьянск) 30; *А. Солодушкин* (Степногорск) 30; *А. Сорокин* (Москва) 29, 30; *Л. Стенюкин* (Мичуринск) 30; *А. Стехнович* (Львов) 29, 30; *А. Тарасов* (Пятигорск) 36; *О. Тейтельбойм* (п. Черноголовка Московской обл.) 29, 30, 32; *С. Тимощук* (с. Черница Ровенской обл.) 30, 31; *А. Тимченко* (Алма-Ата) 30; *Б. Ткаченко* (Запорожье) 30, 35, 36, 39; *В. Толпекин* (Одесса) 30, 32, 36; *С. Тумаха* (Киев) 28—32, 34—37, 39—41; *Д. Федорец* (Харьков) 28, 30, 40, 42; *Д. Федотов* (Алма-Ата) 34, 36, 39, 40; *С. Филин* (Воронеж) 30, 32; *А. Хамхидько* (Старый Оскол) 30; *Р. Хапков* (Старый Оскол) 29, 30, 33—35, 39, 42; *М. Химич* (Кузнецовск) 30, 32; *А. Хренов* (Москва) 29, 30; *П. Хрущ* (Брест) 30, 32; *Е. Цыпин* (Северодвинск) 30; *А. Черный* (Москва) 29, 30; *А. Чесноков* (Вольск) 30; *А. Чиж* (Брест) 30, 32; *С. Шаев* (с. Кулясово Атяшевского р-на) 30; *И. Ширяев* (Кузнецовск) 30, 32, 34—36, 38, 39, 42; *А. Шкуренко* (Днепропетровск) 29, 30, 32, 35, 37, 39; *С. Шолдан* (Фалешты) 30; *В. Шорин* (Обнинск) 30, 32, 34, 35; *О. Шпырко* (Киев) 30, 34—37, 39—42; *И. Шумович* (Николаев) 28—31; *Д. Шумский* (Брест) 30, 32; *Д. Юдин* (Самара) 28—30, 32; *Р. Якупов* (Кузнецовск) 39, 41, 42; *Р. Янченко* (Кузнецовск) 29, 30, 32, 34—37, 39, 41, 42; *Д. Яроцкий* (Борисов) 29, 30, 32, 34, 35.

Новый прием в ВЗМШ на отделение «Биология»

Всероссийская заочная многопредметная школа Российской Академии образования при МГУ им. М. В. Ломоносова объявляет 20-й набор на биологическое отделение. Зачисление проводится по результатам вступительной работы. В конкурсе могут принять участие школьники, которые в этом учебном году занимаются в 8 или 9 классе (одиннадцатилетней школы), независимо от того, в каком государстве они проживают.

Работу следует выполнить в тетради; на обложке укажите свою фамилию, имя, отчество, класс и номер школы, полный адрес с индексом. Вместе с работой пришлите стандартный конверт с маркой и заполненным адресом (для отправки вам решения приемной комиссии).

В конкурсе могут участвовать также кружки, которым нужно выслать коллективно выполненную работу и заверенный печатью список членов кружка с указанием фамилии, имени, отчества руководителя и названия организации, при которой работает кружок.

Вступительное задание должно быть отправлено не позднее 31 марта 1993 года.

ВЗМШ высылает своим учащимся пособия и задания по различным разделам биологии и проверяет их работы. Обучение проводится на русском языке и длится для восьмиклассников — 3 года, для девятиклассников — 2 года.

Наш адрес: *119823, Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ — биология.* Обязательно укажите на конверте: «Конкурс. Вступительное задание».

Школьники Москвы без выполнения конкурсной работы принимаются в вечерний биологический лекторий (справки по телефону: 433-76-29).

Вступительное задание

1. Перечислите как можно больше случаев, когда (одновременно или на разных стадиях развития) у растения: а) один и тот же орган выполняет несколько функций; б) одна и та же функция выполняется несколькими органами (структурами).

2. У многих животных отдельные особи или пары имеют индивидуальные территории. При каких условиях и из-за чего они имеют преимущества по сравнению с теми животными, у которых индивидуальных территорий нет? Приведите примеры.

3. Предложите как можно больше гипотез о том, что могло бы являться сигналом к началу осенних и весенних перелетов птиц.

Для каждой из версий предложите способы экспериментальной проверки, описав ход опытов. Какие выводы могут быть сделаны в зависимости от полученных в них результатов?

4. Профессор Выбегалло считает, что вылечить любую болезнь можно очень просто. «Каждое заболевание,— говорит он,— заключается в нехватке в организме тех или иных веществ. Вот и надо выявить дефицит с помощью анализов и прописать больному пить раствор соответствующего вещества.» Укажите случаи, когда таким приемом нельзя вылечить болезнь, и объясните причины этих случаев.

5. Возрастной состав популяций можно характеризовать графиком, по оси абсцисс которого — возраст, а по оси ординат — процент особей этого возраста в популяции. Какую форму может иметь такой график? Для каждого типа кривых приведите примеры организмов, характеризующихся этим графиком, и объясните, почему для этих организмов кривая идет именно так.

Примечание. В ответах можно использовать и факты, найденные в литературе, и ваши собственные идеи. Просим для сведений, почерпнутых из книг, приводить ссылки на источники.

XXVI Межреспубликанская олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
С. РЕЗНИЧЕНКО

С 16 по 23 апреля в Алма-Ате, столице Казахстана, состоялся заключительный этап XXVI Межреспубликанской математической олимпиады школьников — так по взаимной договоренности республик бывшего СССР решено было в этом году назвать традиционную Всесоюзную олимпиаду школьников по математике. В очень непростое время проходил заключительный этап олимпиады, множество политических, экономических, организационных, да и просто технических проблем пришлось решать и организаторам олимпиады, и ее участникам. Так, финансовые трудности стали причиной неучастия в олимпиаде государств Балтии, сложная внутриполитическая обстановка не позволила прибыть на олимпиаду командам Грузии и Таджикистана. Тем не менее, олимпиада получилась достаточно представительной. В заключительном этапе приняли участие команды Азербайджана, Армении, Беларуси, Казахстана, Кыргызстана, Молдовы, России, Туркменистана, Узбекистана, Украины, команды Москвы и Санкт-Петербурга, учебно-научных центров и физико-математических школ при университетах Алма-Аты, Еревана, Киева, Москвы, Новосибирска, Санкт-Петербурга — всего 173 школьника (48 девятиклассников, 60 десятиклассников и 65 одиннадцатиклассников).

Как обычно, участникам олимпиады было предложено в каждом из двух туров по четыре задачи, на решение которых отводилось по пять часов. Каждая задача оценивалась в баллах с таким расчетом, чтобы суммарное число баллов в туре по каждому классу было равно тридцати (см. таблицу 1).

В целом, задания каждого тура оказались достаточно сбалансированными по трудности. Оценку творческой стороне предложеных заданий (в рамках ставшего традиционным конкурса задач) дали сами участники олимпиады, назвав в большинстве случаев задания «интересными» и «хорошими». При этом лучшими были признаны в девятом классе — задачи № 8 (I место), № 7 (II место) и № 4 (III место); в десятом — задачи № 3 (I место), № 8 (II место) и № 6 (III место); в одиннадцатом — задачи № 6 (I место), № 7 (II место), № 4 и № 5 (III—IV места).

Первая премия присуждалась в девятом классе за решение 7—8 задач, в десятом и одиннадцатом классах за решение 8 задач. Вторая премия — за решение 5—6 задач (9 класс), 5—7 задач (10 класс) и 6—7 задач (11 класс). Третья премия присуждалась девятиклассникам, набравшим по итогам обоих туров от 26 до 35 баллов, десятиклассникам, набравшим от 25 до 29 баллов, и одиннадцатиклассникам, набравшим от 35 до 42 баллов. Дипломами оргкомитета и жюри награждались школьники девятого и одиннадцатого классов, набравшие не менее 24 баллов, десятого класса — не менее 22 баллов. В таблице 2 приведены данные о количестве премий и дипломов, присужденных в каждом классе. Наиболее удачно на олимпиаде выступили среди девятиклассников — *Михаил Матвеев* (СУМЦ С.-Петербург, 60 баллов), среди десятиклассников — *Вадим Бринюк* (Украина, 58 баллов), среди одиннадцатиклассников — *Павел Кожевников* (Россия, 58 баллов).

Работа со школьниками требует много душевных сил и терпения. Только истин-

Таблица 1

Задача / Класс	1	2	3(а/б)	4	5	6	7	8
9	6	6	8	10	5	6	9	10
10	5	6	10 (6/4)	9	5	7	8	10
11	6	6	10	8	6	8	7	10

Таблица 2

Премия / Класс	9	10	11
I	5	1	2
II	8	17	14
III	12	9	17
Диплом оргкомитета и жюри	8	13	13

ным энтузиастам по плечу такая ноша. За многолетнюю работу на олимпиаде оргкомитет наградил специальным призом ветерана олимпиадного движения члена жюри с 1973 года ведущего научного сотрудника Института математики АН Молдовы Бориса Ивановича Чиника.

Олимпиада — это не только решение задач, но и разнообразная культурная программа, включающая знакомство с Алма-Атой, ее историческими и архитектурными памятниками, экскурсию на Медео, посещение театра и музеев, спортивные соревнования. Олимпиада — это еще и возможность общения с близкими по интересам людьми, встреча со старыми друзьями, новые знакомства. Много сил отдали организаторы, искренне желая провести олимпиаду так, чтобы она оставила о себе добрую память. Не их вина, что не все, что было ими задумано и запланировано, удалось выполнить. По разным причинам не состоялись встреча участников олимпиады с редколлегией журнала «Квант» и ставший традицией математический бой между командой участников и командой жюри. Но в целом олимпиада получилась, и хочется сказать спасибо всем, кто на разных этапах подготовки и проведения олимпиады делал для этого все возможное.

Ниже приведены условия задач, предлагавшихся на XXVI Межреспубликанской олимпиаде по математике. Звездочкой отмечены задачи, вошедшие в «Задачник «Кванта».

Задачи

Первый день

9 класс

1. Докажите, что для положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$a^4+b^4+c^2\geqslant 2\sqrt{2}\,abc.$$

В. Радченко

2. На диагонали BD квадрата $ABCD$ выбрана точка E. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, описанных около треугольников ABE и ADE соответственно. Докажите, что четырехугольник AO_1EO_2 — квадрат.

С. Анисов, С. Рушкин

3. Города одной империи с k столицами соединены дорогами так, что из любого города в любой другой можно проехать по этим дорогам. Докажите, что империю можно разделить на k республик так, чтобы каждая республика имела столицу и вместе с любым городом в ней содержался бы кратчайший путь из этого города до столицы (кратчайшим считается путь, состоящий из минимального числа дорог).

А. Перлин

4. На клетчатой доске лежит несколько фишек. За один ход разрешается (если это возможно) «перепрыгнуть» какой-нибудь фишкой через фишку, стоящую на соседней клетке (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону), и встать на следующую свободную клетку. При этом фишка, через которую «перепрыгнули», снимается с доски. Какое наименьшее число фишек может остаться на доске, если вначале фишки были расставлены в виде прямоугольника $m\times n$ ($m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$), окруженного свободными клетками?

И. Соловьев

10 класс

1. Докажите, что для любых чисел $a>1$, $b>1$ справедливо неравенство

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geqslant 8.$$

В. Радченко

2. Докажите, что среди любых пятнадцати различных попарно взаимно простых натуральных чисел, отличных от единицы и не превосходящих 1992, найдется хотя бы одно простое число.

Д. Терешин

3*. В кинотеатре m рядов по n мест в каждом. Рассеянный кассир продал mn билетов, не следя за тем, чтобы они были проданы на разные места. Оказалось, что зрителей можно рассадить в зале так, чтобы у каждого в билете был правильно указан хотя бы один из номеров — ряда или места.

а) Докажите, что зрителей можно рассадить так, чтобы хотя бы у одного из них были правильно указаны оба номера, а для остальных выполнялось прежнее условие.

б) Какое наибольшее количество зрителей можно заведомо посадить на свои места с сохранением прежнего условия для остальных?

Е. Малинникова

4. Даны три окружности: S_1, S_2 и S. Окружности S_1 и S_2 проходят через центр O окружности S, пересекаются второй раз в точке M и пересекают окружность S: окружность S_1 — в точках C и D, окружность S_2 — в точках A и E. Прямые AD и CE пересекаются в точке B, причем $B\neq M$ (рис. 1). Докажите, что угол BMO прямой.

Л. Купцов

11 класс

1. Найдите все нули функции

$$f(x)=a\cos(x+1)+b\cos(x+2)+c\cos(x+3),$$

если коэффициенты a, b, c подобраны так, что на интервале $(0;\pi)$ этих нулей имеется по крайней мере два.

Н. Воронович

2*. Дана плоскость, пересекающая сферу с центром O по окружности. На сфере по разные стороны от плоскости взяты точки A и B, при-

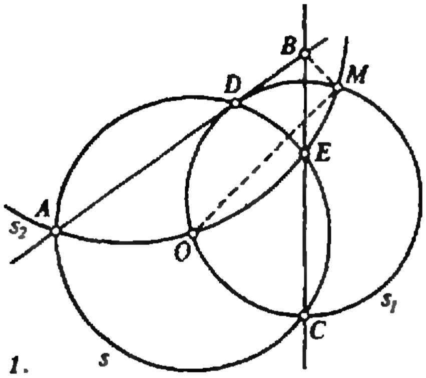


Рис. 1.

чем радиус OA перпендикулярен данной плоскости. Через прямую AB проведена произвольная плоскость, пересекающая окружность в точках X и Y. Докажите, что произведение $BX \cdot BY$ не зависит от выбора такой плоскости.

Б. Чиник

3*. Имеется прибор, позволяющий находить все действительные корни любого кубического многочлена $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $a=0$. Придумайте, как с помощью этого прибора решить систему

$$\begin{cases} x=P(y), \\ y=P(x). \end{cases}$$

Д. Туляков

4*. Найдите все натуральные числа $k>1$, удовлетворяющие условию: для некоторых натуральных m и n, $m\neq n$, числа k^m+1 и k^n+1 получаются друг из друга перестановкой в обратном порядке цифр десятичной записи этих чисел.

А. Скопенков

Второй день

9 класс

5. Существует ли четырехзначное число такое, что ни при какой замене любых трех его цифр на любые три не получится числа, делящегося на 1992?

И. Селищев, С. Конягин

6*. На окружности с центром O расположены точки A и B. Точка P находится на меньшей из дуг AB, точки Q и R симметричны точке P относительно прямых OA и OB соответственно, P' — точка пересечения отрезков AR и BQ. Докажите, что точки P и P' симметричны относительно прямой AB.

В. Произволов, Б. Кукушкин

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)=1+y^7, \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4)=1+x^7. \end{cases}$$

Д. Митькин

8. Существуют ли натуральные числа m и n такие, что прямоугольник $m\times n$ клеток на клетчатой бумаге можно без пересечений замостить «уголками», изображенными на рисунке 2, с выполнением следующих условий:

1) никакие два «уголка» не образуют прямоугольник 3×2 клеток;

2) ни в какой точке не смыкается более трех «уголков».

Б. Кукушкин

10 класс

5. На доске выписываются числа по следующему правилу: первое число равно 1, каждое следующее число равно количеству уже написанных чисел плюс сумма квадратов этих чисел. Докажите, что на доске не может появиться полный квадрат, кроме 1.

А. Перлин

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Окружность с центром P касается его стороны BC и продолжений стороны AB и диагонали AC. Окружность с центром Q касается его стороны CD и продолжений стороны AD и диагонали AC. Пусть K — точка касания первой окружности и прямой AB, L — точка касания второй окружности и прямой AD, M — точка пересечения прямых AB и QC, N — точка пересечения прямых AD и PC. Докажите, что $KM=NL$.

Д. Терешин

7. Каждая клетка прямоугольника $2m\times n$ покрашена в один из двух цветов (синий или зеленый) так, что имеется поровну клеток каждого цвета и при этом левая нижняя клетка — синяя, а правая верхняя — зеленая. Центры всех синих клеток соединены между собой отрезками, также отрезками соединены между собой центры всех зеленых клеток. Докажите, что можно так расставить стрелки на всех отрезках, чтобы сумма получившихся векторов равнялась нулю.

Н. Агаханов

8. Докажите, что в компании из 17 человек, в которой каждый знаком ровно с 4 другими, найдутся двое, не знакомые друг с другом и не имеющие общих знакомых.

С. Дужин

11 класс

5. Правильный треугольник со стороной 10 разбит прямыми, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Имеется m треугольных плиток (рис. 3, *а*) и $25-m$ четырехугольных (рис. 3, *б*).

а) Можно ли замостить ими весь исходный треугольник, если $m=10$?

б) Найдите все значения m, при которых это возможно.

Е. Малинникова

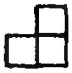
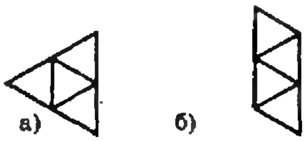


Рис. 2.



а) б)

Рис. 3.

6. На плоскости нарисованы 1992 вектора. Два игрока по очереди выбирают по одному вектору до тех пор, пока они не кончатся. Проигрывает тот, у кого сумма выбранных им векторов имеет меньшую длину. Может ли начинающий построить свою игру так, чтобы не проиграть?

И. Воронович

7. Докажите, что если натуральные числа k, l, m, n удовлетворяют условиям

$$k<l<m<n, \quad kn=lm,$$

то справедливо неравенство

$$\left(\frac{n-k}{2}\right)^2 \geqslant k+2.$$

Е. Малинникова

8. См. задачу 8 для 10 класса.

XXVI Межреспубликанская олимпиада по физике

А. Зильберман

С 15 по 21 апреля в г. Долгопрудном под Москвой прошла очередная физическая олимпиада — в этом году она изменила название и стала называться Межреспубликанской. Олимпиада прошла по традиционным правилам, и участвовали в ней команды большинства государств, входивших ранее в СССР. Представители этих государств собрались осенью прошлого года в Москве и решили, что при надлежащем изменении «правил игры» такие олимпиады целесообразно сохранить — польза от них очевидна, а трудности их проведения в нынешних условиях хотя и велики, но преодолимы. Был избран новый Оргкомитет, в который вошли представители всех участвующих государств, договорились о порядке финансирования соревнований — теперь в расходах уравнены все участники (раньше эти расходы покрывали хозяева олимпиады — по нынешним временам это практически невозможно), а решение всех вопросов «на будущее» оставили на потом.

Итак, большие хлопоты по проведению Межреспубликанской физической олимпиады добровольно взял на себя в этом году Московский физико-технический институт. 16 апреля состоялось торжественное открытие олимпиады, а 17 апреля прошел теоретический тур. Девятиклассникам, как обычно, было предложено 4 задачи (на 4 часа), а десятиклассникам и одиннадцатиклассникам — по 5 задач (на 5 часов). Ниже приводятся условия этих задач (часть из них традиционно попала в «Задачник «Кванта»).

Задачи теоретического тура

9 класс

1. Тяжелая цепочка, состоящая из большого числа одинаковых гладких звеньев, свободно подвешена за концы (рис. 1). Масса всей цепочки $M=0{,}2$ кг. Определите силы натяжения в нижней точке цепочки, а также в точке A, лежащей на половине высоты «провиса» цепочки.

2. Миниатюрный тигель (печка) для плавки металла имеет электронагреватель с постоянной мощностью $P=20$ Вт. Нагреватель включают, и после того, как температура практически перестает увеличиваться, в тигель бросают несколько кусочков олова общей массой $M=50$ г, которые начинают плавиться. На рисунке 2 приведен график зависимости температуры в тигле от времени. Определите по этим данным удельную теплоту плавления олова.

3. Электронагреватель H (рис. 3) подключают к источнику питания последовательно с амперметром и реостатом и устанавливают реостатом ток 0,1 А. Еще один резистор (его величина неизвестна) подключили между точками A и $Б$ — при этом показания амперметра уменьшились до 0,05 А. После того как этот резистор отключили и подключили между точками A и B, амперметр стал показывать 0,3 А. Найдите КПД схемы во всех трех случаях (коэффициент полезного действия схемы равен отношению мощности нагревателя к полной мощности, развиваемой источником). Источник и амперметр считайте идеальными, сопротивление нагревателя остается постоянным во всех трех случаях.

4. На гладком горизонтальном столе лежат, касаясь друг друга, две шайбы радиусов R. Тонкая и легкая нить длиной $L=2R$ прикреплена концами к бокам шайб (рис. 4). Нить потянули за середину постоянной горизонтальной силой F. С какими силами шайбы будут давить друг на друга после того, как их движе-

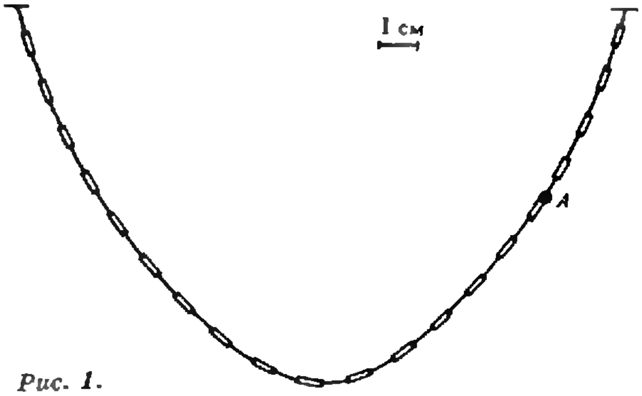


Рис. 1.

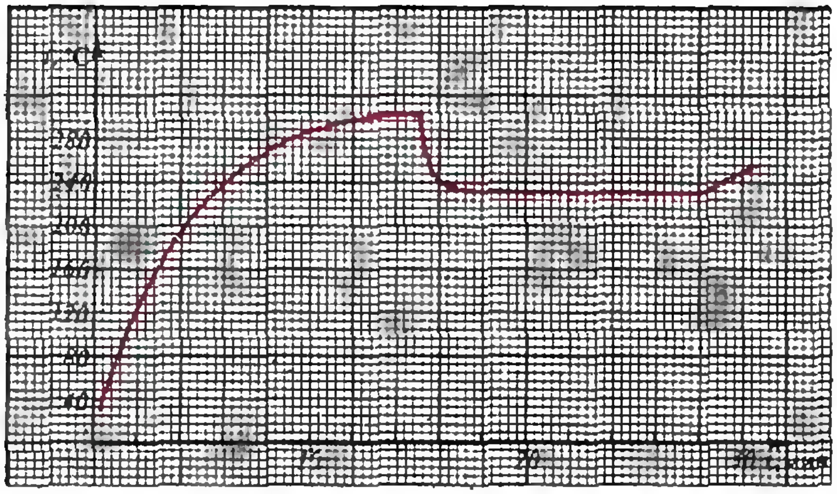


Рис. 2.

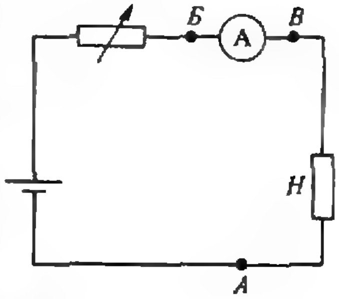


Рис. 3

кие установится? Трение считайте малым. Рассмотрите два случая: а) массы шайб одинаковы, б) массы отличаются в два раза.

10 класс

1. См. задачу 4 для 9 класса.

2. На гладком горизонтальном столе находится массивный куб, прикрепленный к концу легкой упругой горизонтальной пружины длиной $L=1$ м. Если закрепить второй конец пружины и дать грузу колебаться вдоль пружины, то из-за наличия вязкого трения колебания будут слабо затухать — за 10 полных периодов амплитуда упадет в два раза. Для поддержания неизменной амплитуды колебаний свободный конец пружины быстро сдвигают на $l=1$ мм навстречу грузу каждый раз, когда длина пружины становится минимальной, и быстро возвращают в прежнее положение каждый раз, когда длина максимальна. Найдите амплитуду установившихся колебаний. Потерями энергии в пружине пренебречь. Примечание: при затухании колебаний из-за вязкого трения энергия колебаний уменьшается за каждый период в одно и то же число раз.

3. В вертикальном сосуде под тяжелым поршнем находится воздух при температуре окружающей среды. Поршень медленно поднимают на высоту H относительно положения равновесия и дожидаются, пока температура газа снова станет равной температуре окружающей среды. После этого сосуд теплоизолируют и поршень отпускают. На сколько он опустится к тому времени, когда его колебания прекратятся? Теплоемкостью сосуда и поршня можно пренебречь. Давление снаружи считайте малым.

4. Три маленьких шарика, массы которых m, $2m$ и $5m$, имеют заряды q, q и $2q$ соответственно и расположены вдоль одной прямой. Расстояние между соседними шариками равно a; вначале они неподвижны. Шарики отпускают. Найдите суммарную кинетическую энергию шариков после их разлета на большие расстояния. Найдите скорости шариков на большом удалении друг от друга. Считайте, что при движении шарики все время остаются на одной прямой.

5. В «черном ящике» находятся постоянный резистор и нелинейный элемент, которые могут быть включены последовательно или параллельно. Вольт-амперные характеристики для обоих этих включений приведены на рисунке 5. Найдите по этим данным сопротивление резистора, находящегося в ящике. Какой нелинейный элемент может находиться внутри?

11 класс

1. Масса Харона, недавно открытого спутника Плутона, в 8 раз меньше массы самой планеты. Плутон и Харон обращаются по круговым траекториям вокруг общего центра масс, причем они все время «смотрят друг на друга», т. е. система вращается как единое твердое тело. Расстояние между центрами тел $R=19640$ км, радиус Харона $r=593$ км. Определите относительное различие в ускорениях свободного падения для наиболее близкой к Плутону и наиболее удаленной от него точек Харона.

2. Один из спаев термопары находится в комнате при температуре $t_1=27$ °C, а второй — в теплоизолированном сосуде со льдом, имеющим температуру $t_2=0$ °C (рис. 6). Мощность, развиваемая термопарой, выделяется на сопротивлении нагревателя, который помещен в другой теплоизолированный сосуд, содержащий воду. Оцените повышение температуры воды к моменту окончания плавления льда. Считайте, что все сопротивление цепи сосредо-

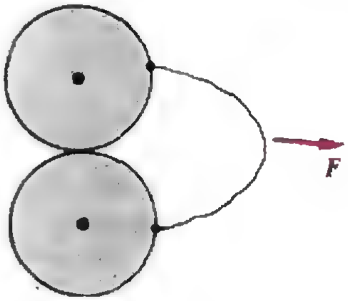


Рис. 4.

точено в нагревателе. Массы воды и льда одинаковы, теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=335$ кДж/кг.

3. Заряженная частица с кинетической энергией W пролетает мимо длинного равномерно заряженного провода. Частица движется в плоскости, перпендикулярной проводу, и в результате отклоняется на небольшой угол α от первоначального направления полета (рис. 7). Найдите этот угол, если заряд частицы e, а заряд единицы длины провода q. Поле на расстоянии R от длинного провода $E=q/(2\pi\varepsilon_0 R)$.

4. Виток в форме квадрата из тонкого провода имеет индуктивность L_1 (рис. 8, *а*). Виток из того же провода, идущий по ребрам куба, как это показано на рисунке 8, *б*, имеет индуктивность L_2. Найдите индуктивность витка из того же провода, показанного на рисунке 8, *в*. Все витки на рисунках изображены красными линиями.

5. Полуцилиндр изготовлен из оптически прозрачных цилиндрических слоев с разными показателями преломления n. Полученная зависимость n от радиуса r изображена на рисунке 9 в координатах $\ln n$ и $\ln r$ (r измеряется в см). Используя данную зависимость, найдите радиусы полуокружностей, по которым сможет распространяться тонкий пучок света при нормальном падении на плоскую поверхность полуцилиндра.

18 апреля состоялся экспериментальный тур. В каждом из классов было предложено по одной задаче. Расскажем коротко о них.

В 9 классе участникам нужно было определить отношение сопротивлений двух резисторов, исследуя тепловое действие тока. Для этого использовались низковольтный источник постоянного (можно переменного) напряжения, небольшой стеклянный стаканчик для воды, вода, термометр, часы. Трудность состояла в том, что для получения хорошего результата нужно было аккуратно учитывать теплообмен с окружающей средой (при малых разностях температур теплообменом можно пренебрегать, однако измерить эти разности простым термометром можно только с большими погрешностями).

В 10 классе была задача посложнее — необходимо было измерить емкости двух конденсаторов при помощи плоской батарейки, микроамперметра, конденсатора известной емкости (2 мкФ), точного резистора (300 Ом, 1 %), специально изготовленного «реостата» — куска оголенного провода длиной около 1 м из сплава с вы-

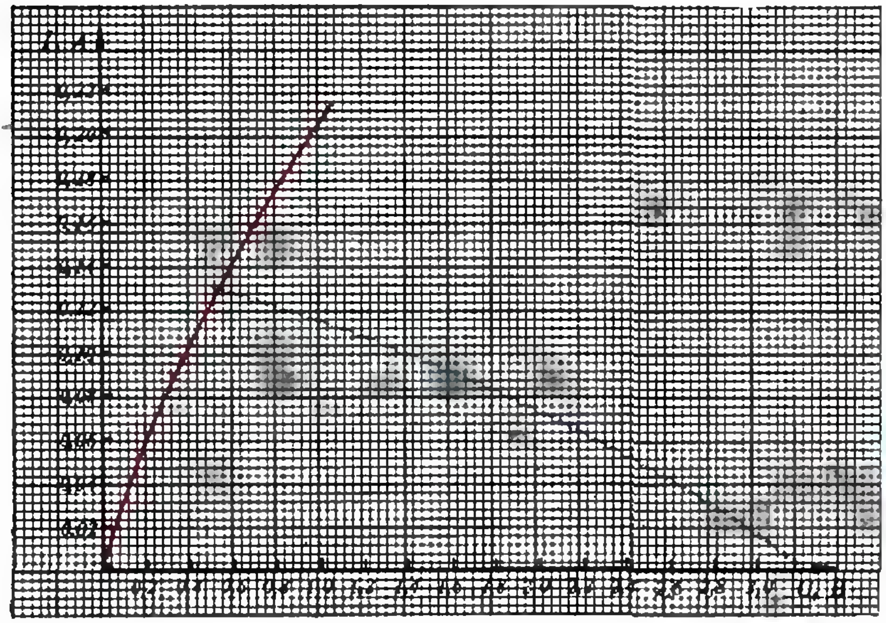


Рис. 5.

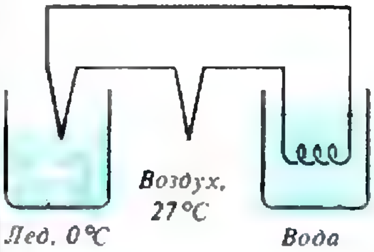


Рис. 6.

Ж контур

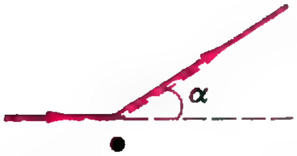


Рис. 7.

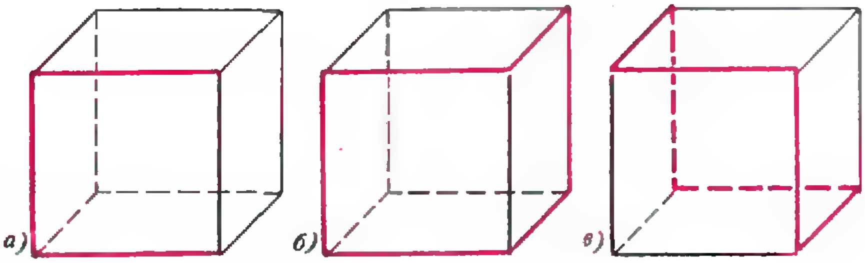


Рис. 8.

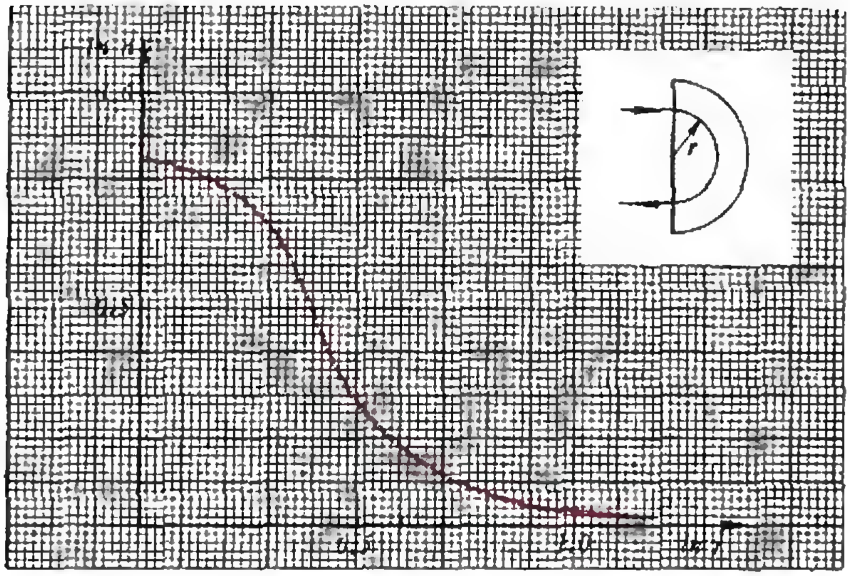


Рис. 9.

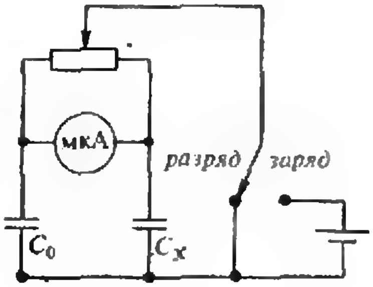


Рис. 10.

соким удельным сопротивлением (нихром), закрепленного на деревянной линейке (общее сопротивление этого куска составляло примерно 30 Ом), миллиметровой бумаги и проводов. Сложность была в том, что один из неизвестных конденсаторов имел большую емкость (~200 — 300 мкФ) и простым баллистическим методом точного результата получить не удавалось. Можно было многократно заряжать (или разряжать) этот конденсатор при помощи известного, но точность получалась довольно плохой — из-за саморазряда электролитического конденсатора большой емкости.

Наиболее точный результат можно было получить, собрав схему, в которой конденсаторы известной и неизвестной емкостей одновременно заряжаются и разряжаются через различные резисторы. В том случае, когда токи заряда и разряда будут пропорциональны величинам емкостей, напряжения на конденсаторах окажутся одинаковыми в любой момент, и этот факт можно легко зафиксировать. Одна из возможных схем такого эксперимента показана на рисунке 10. В качестве потенциометра тут используется проволочный резистор (проволока из нихрома), а провод от батарейки присоединяется к части этого потенциометра руками. Этот метод имеет хорошую чувствительность, точность измерений при больших отношениях C_x/C_0 (как в этом случае) можно существенно увеличить, добавив в одно из плеч потенциометра выданный точный резистор. Предварительно нужно измерить отношение его сопротивления к полному сопротивлению проволочного резистора — такой вопрос в задаче тоже был. Это можно сделать тоже различными способами, но самый точный из доступных в этом случае — мостиковый, проволочный резистор тут будет выступать в качестве трех резисторов этого мостика, для чего экспериментатору понадобятся обе руки (и голова, разумеется).

В одиннадцатом классе экспериментаторы изучали колебания двух тел различной формы, подвешенных на пружине. Тела эти могли колебаться в воздухе и в большой банке с водой. Пружина и тела были специально изготовлены с таким расчетом, чтобы колебания в воздухе долго не затухали (можно было наблюдать несколько сотен периодов) и было возможно измерить зависимость времени затухания от амплитуды. В случае погружения тел в воду колебания также затухали не очень сильно, и участники могли измерить изменение периода колебаний за счет вовлечения в движение некоторой массы воды (так называемая присоединенная масса). В целом эта задача требовала очень аккуратных измерений и грамотной обработки их результатов.

Большое участие в подготовке экспериментального тура приняли студенты МФТИ и МГУ — победители Всесоюзных и Международных олимпиад последних лет. Ребята собрали и проверили все комплекты оборудования и провели измерения для каждого рабочего места участников экспериментального тура. Были составлены таблицы результатов, что позволило жюри при проверке работ учитывать точность полученных участником результатов, а не только описание тех прекрасных методов, которыми он смог бы воспользоваться, если бы сумел подключить конденсатор к батарейке.

Участники олимпиады не только решали задачи. Были созданы условия для спортивных развлечений (бассейн, спортплощадки), интересным оказался студенческий концерт, состоялись посещения кафедр института и экскурсии — в общем, организаторы постарались сделать интересным и содержательным досуг участников.

На торжественном закрытии олимпиады перед участниками выступил ректор МФТИ, член-корреспондент РАН Н. В. Карлов. О своем факультете рассказал декан ФОПФ (факультета общей и прикладной физики) Ф. Ф. Каменец. Победителям были вручены дипломы и призы (в том числе и специальные — за успехи в теоретическом и экспериментальном турах, самому молодому из участников и т. д.). К сожалению, мы не сумели вовремя вручить приз имени академика И. К. Кикоина — первого главного редактора журнала «Квант». Московский девятиклассник Сергей Гуков получил его за успехи в экспериментальном туре уже после окончания олимпиады. Присутствующим на закрытии участникам раздали книги и брошюры о ФОПФ, где о прелестях этого факультета рассказано частью в эпическом, частью в юмористическом стиле.

Действующие правила приема в вузы разрешают (только разрешают!) принимать без вступительных экзаменов победителей заключительного тура олимпиады. Мы рады сообщить читателям «Кванта», что МФТИ этим разрешением воспользовался и намерен пользоваться впредь.

Перспективы Межреспубликанских физических олимпиад выглядят в настоящее время довольно туманными. Мы очень надеемся, что это хорошее дело не угаснет и у нас будет о чем рассказать читателям журнала через год.

Призеры XXVI Межреспубликанской олимпиады по математике и физике

Математика

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Бондарко М.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Лычак А.— Санкт-Петербург, с. ш. 30,
Матвеев М.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Тарасов А.— Россия, Ухта, лицей,
Хазанов А.— Санкт-Петербург, СУМЦ;

по 10 классам —

Бринюк В.— Украина, Донецк, с. ш. 35;

по 11 классам —

Кожевников П.— Россия, Калуга, с. ш. 24,
Никулин М.— Москва, СУНЦ МГУ.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Богданов И.— Россия, Пермь, с. ш. 17,
Дюбина А.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Ковтун И.— Киев, ФМШ при КГУ,
Крупенин С.— Москва, с. ш. 43,
Мальков К.— Россия, Киров, с. ш. 35,
Поладян В.— Ереван, ФМШ,
Соболевский С.— Беларусь, Гродно, с. ш. 1,
Шувалов В.— Москва, с. ш. 57;

по 10 классам —

Артельных И.— Россия, Челябинск, с. ш. 31,
Бендерский А.— Москва, с. ш. 57,
Бирюк А.— Россия, Краснодар, с. ш. 4,
Брюхов Е.— Россия, Челябинск, с. ш. 31,
Дудко Д.— Украина, Киев, с. ш. 61,
Замятин В.— Россия, Киров, с. ш. 35,
Казанцева В.— Россия, Ижевск, с. ш. 30,
Кожанов И.— Россия, Новосибирск, с. ш. 162,
Кочерова А.— Россия, Долгопрудный, с. ш. 5,
Перлин В.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Поздняков А.— Санкт-Петербург, с. ш. 202,
Порошенко Е.— Алма-Ата, РФМШ,
Розенблюм Е.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Сапрыкин С.— Украина, Одесса, с. ш. 36,
Сосыка Е.— Россия, Краснодар, с. ш. 5,
Степанов А.— Москва, СУНЦ МГУ,
Федоров Р.— Москва, с. ш. 57;

по 11 классам —

Аринкин Д.— Украина, Харьков, с. ш. 132,
Бородин А.— Украина, Донецк, с. ш. 17,
Изместьев И.— Россия, п. Суны Кировской обл., с. ш. 2,
Карпов Д.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Кириллов М.— Россия, Новосибирск, с. ш. 20,
Климов С.— Россия, Ижевск, с. ш. 30,
Малютин А.— СПбГУ,
Некрашевич В.— Украина, Киевская обл., Ковшеватская с. ш.,
Ногин А.— Москва, с. ш. 57,
Певцова Ю.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Рабинович М.— Москва, с. ш. 57,
Фаткин С.— Москва, с. ш. 2,
Фельдман К.— Россия, п. Черноголовка Московской обл., с. ш. 82,
Чиликов А.— Россия, Киров, с. ш. 35.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Байдельдинов Ж.— Алма-Ата, РФМШ,
Венгеровский В.— Украина, Харьков, физико-математический лицей,
Дьяченко А.— Россия, Армавир, с. ш. 1,
Карабаш И.— Украина, Донецк, с. ш. 17,
Кострыкин С.— Россия, Ангарск, с. ш. 10.

Лапунов А.— Россия, Киров, с. ш. 35,
Лебедев А.— Туркменистан, Ашгабад, с. ш. 6,
Ниукканен П.— Россия, Тула, с. ш. 73,
Норин С.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Поташник А.— Украина, Киев, с. ш. 206,
Сенцов Ю.— Россия, Калуга, с. ш. 5,
Чубаров Д.— Россия, Новосибирск, с. ш. 180;

по 10 классам —

Кептя Д.— Молдова, Бельцы, гимназия Елинеску,
Костин В.— Россия, Саратов, физико-технический лицей 1,
Кухта А.— Россия, Комсомольск-на-Амуре, с. ш. 9,
Мокляк М.— Киев, ФМШ при КГУ,
Павловский И.— Россия, Омск, с. ш. 64,
Пламеневская О.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Семенов К.— Россия, Саратов, физико-технический лицей 1,
Черухин Д.— Украина, Керчь, с. ш. 1,
Яковлев Е.— Алма-Ата, РФМШ;

по 11 классам —

Аманов М.— Туркменистан, Ташауз, школа-интернат,
Бобков А.— Россия, Балаково, с. ш. 24,
Елсуфьев А.— Санкт-Петербург, с. ш. 30,
Зайцев С.— Россия, Тула, с. ш. 73,
Исмаилов Р.— Санкт-Петербург, СУМЦ,
Казанцева Е.— Россия, Екатеринбург, с. ш. 110,
Карнаух Т.— Украина, с. ш. 61,
Козлов К.— Москва, СУНЦ МГУ,
Корниенко А.— Украина, Днепропетровск, с. ш. 36,
Кузьмич С.— Беларусь, Минск, специализированная школа при БГУ,
Лавренюк Я.— Украина, Киев, с. ш. 179,
Локтев С.— Москва, ДНТТМ,
Мищенко В.— Россия, Омск, с. ш. 88,
Рымов А.— Алма-Ата, РФМШ,
Теплинский А.— Украина, Каменец-Подольский, с. ш. 7,
Хайкис Д.— Россия, Ижевск, с. ш. 30,
Хвенкин К.— Беларусь, Минск, специализированная школа при БГУ.

Физика

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Гуков С.— Москва, с. ш. 54,
Кныш С.— Украина, Каменец-Подольский, с. ш. 5,
Слюсаренко А.— Украина, Киев, с. ш. 145;

по 10 классам —

Андреенко С.— Москва, с. ш. 57,
Бочкарев О.— Россия, Саратов, лицей 1,
Ольховец А.— Украина, Киев, с. ш. 206,
Цейтлин В.— Москва, с. ш. 57,
Шпырко О.— Украина, Киев, с. ш. 206;

по 11 классам —

Безруков Ф.— Москва, с. ш. 1232,
Ивченко Н.— Украина, Киев, с. ш. 145,
Мотрунич А.— Украина, Ужгород, с. ш. 1,
Ордабаев А.— Алма-Ата, РФМШ.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Ковальский А.— Россия, Казань, с. ш. 131,
Конаков М.— Россия, Алатырь, с. ш. 2,
Короткий А.— Беларусь, Минская обл., Фанипольская с. ш.,
Кроковный П.— Россия, Новосибирск, с. ш. 327,
Рулева Д.— Россия, Рыбинск, с. ш. 2,
Тумаха С.— Украина, Киев, с. ш. 206;

по 10 классам —

Анисимовас Э.— Литва, Вильнюс, с. ш. 45,
Веленов Р.— Россия, Нижний Новгород, физмат. лицей,
Быков С.— Москва, с. ш. 57,
Гвоздев П.— Россия, Киров, с. ш. 35,
Головатный А.— Россия, Ступино, с. ш.,
Кисловский Д.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Крицун О.— Украина, Богородчаны, с. ш. 1,
Рыбачук В.— Украина, Винница, с. ш. 27,
Таглыбаев Т.— Тула, с. ш. 73,
Чигирев Д.— Санкт-Петербург, с. ш. 556,
Якупов Р.— Украина, Кузнецовск, с. ш. 1;

по 11 классам —

Белиловский О.— Алма-Ата, РФМШ,
Горгадзе В.— Россия, Нальчик, с. ш. 19,
Гуляев Н.— Россия, Нижний Новгород, с. ш. 82,
Ковалевский Д.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Панков С.— Тула, с. ш. 73,
Чистый А.— Беларусь, Брест, с. ш. 1,
Шутенко Т.— Украина, Мариуполь, с. ш. 41.

Дипломы III степени

по 9 классам получили —

Горяйнов А.— Россия, Липецк, с. ш. 64,
Козлов И.— Украина, Харьков, с. ш. 21,
Мозюкевич К.— Киев, ФМШ при КГУ,
Соколов Д.— Россия, Космодемьянск, с. ш. 4,
Солодов А.— Россия, Воронеж, с. ш. 15,
Стесев Д.— Тула, с. ш. 73,
Стратонников А.— Россия, Ленинградская обл., Сясьстройская с. ш.,
Табанин Д.— Россия, Архангельск, с. ш. 6,
Цыганок В.— Россия, Первоуральск, с. ш. 7;

по 10 классам —

Красновид А.— Беларусь, Гродно, с. ш. 19,
Ларькин В.— Россия, Правдинск, с. ш. 14,
Погорелов О.— Россия, Брянск, с. ш. 52,
Рукавицин В.— Молдова, Кишинев, лицей 2,
Типясев А.— Россия, Новокузнецк, с. ш. 59,
Худяков В.— Москва, СУНЦ при МГУ;

по 11 классам —

Арбатский Д.— Санкт-Петербург, с. ш. 239,
Булавенко С.— Киев, ФМШ при КГУ,
Ганноха А.— Украина, Киев, с. ш. 61,
Егоров Ю.— Киев, ФМШ при КГУ,
Гращенко А.— Беларусь, Могилев, с. ш. 18,
Залюбовский С.— Украина, Винница, с. ш. 17,
Иютин Б.— Тула, с. ш. 73,
Маравин Ю.— Украина, Евпатория, с. ш. 6,
Ращюс А.— Литва, Каунас, с. ш. «Саулес»,
Фролов А.— Москва, с. ш. 303,
Чиркин Д.— Россия, Грозный, с. ш. 3,
Юдин Д.— Россия, Самара, с. ш. 63.

Межгосударственная олимпиада по информатике

Кандидат технических наук
В. КИРЮХИН

С 11 по 15 мая этого года в республике Беларусь, в г. Могилеве, впервые прошла Межгосударственная олимпиада по информатике. Она была организована в соответствии с международными правилами, основу которых составляет равное представительство участвующих в ней государств. Но учитывая переходный период, некоторым государствам, в том числе и Российской Федерации, разрешалось увеличить число участников до ранее установленного предела.

Практически все государства, образовавшиеся из бывшего Советского Союза, кроме Азербайджана, Таджикистана и Эстонии, прислали своих представителей на эту олимпиаду. Из двенадцати участвовавших команд наиболее многочисленными были команды Беларуси (11 человек) и России (9 человек). В составы остальных команд входили не более четырех школьников.

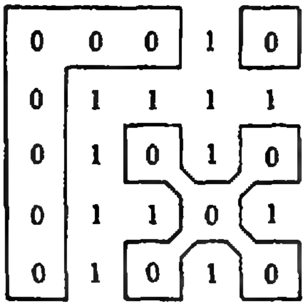
Как и на всех международных олимпиадах, в жюри вошли все руководители участвовавших в соревновании команд. Возглавлял жюри заведующий кафедрой Белорусского Государственного университета М. Ковалев. Олимпиадные задачи готовились научным комитетом, который представлял Ю. Корженевич. Поскольку сроки подготовки к олимпиаде были очень сжатыми, то никто из государств-участников не смог прислать своих задач. В создавшейся ситуации председателю научного комитета пришлось самому сформировать пакет задач.

Перед каждым туром олимпиады жюри осуществляло выбор одной задачи из двух предложенных на его рассмотрение. Но практически членам жюри выбирать было не из чего. Во-первых, задач всего было две, а во-вторых, задачи явно не соответствовали уровню проводимой олимпиады. В результате небольших уточнений формулировок (внесение содержательных изменений не допускалось) были выбраны следующие две задачи.

Задача первого тура

(автор Ю. Корженевич)

В прямоугольной (0, 1)-матрице размером $N \times M$ (N — число строк, M — число столбцов; $N=1, 2, ..., 15$; $M=1, 2, ..., 15$) подсчитайте число изолированных 0-областей, т. е. областей, состоящих из одних нулей, имеющих соседние нули по горизонтали, вертикали или диагонали (0-область может состоять только из одного нулевого элемента). Например, для такой (0, 1)-матрицы, как на рисунке



число изолированных 0-областей равно 3.

Задача второго тура

(автор Ю. Корженевич)

На острове Новой Демократии каждый из его жителей организовал партию, которую сам и возглавил. Ко всеобщему удивлению, даже в самой малочисленной партии оказалось не менее двух человек. К сожалению, финансовые трудности не позволили создать парламент, куда вошли бы, как предполагалось по Конституции острова, президенты всех партий.

Посовещавшись, островитяне решили, что будет достаточно, если в парламенте будет хотя бы один член каждой партии.

Помогите островитянам организовать такой как можно более малочисленный парламент, в котором будут представлены члены всех партий.

Исходные данные: каждая партия и ее президент имеют один и тот же порядковый номер от 1 до N ($4 \leqslant N \leqslant 150$). Вам даны списки всех N партий острова Новой Демократии. Выведите предлагаемый Вами парламент в виде списка номеров его членов. Например, для четырех партий:

Президенты	Члены партий
1	2, 3, 4
2	3
3	1, 4, 2
4	2

Список членов парламента: 2 (состоит из одного члена).

Примечание. Получите список одного, как можно более малочисленного, на ваш взгляд, парламента.

На решение задачи в обоих турах участникам олимпиады отводилось по четыре часа. Каждому школьнику предоставлялся персональный компьютер IBM PC и соответствующая система программирования. Большинство участников писали программы в рамках систем Turbo Pascal и Basic.

Оценка результатов решения задач на этой олимпиаде существенно отличалась от предыдущих всесоюзных олимпиад. Во-первых, тестирование программ происходило в присутствии самих школьников. Во-вторых, интересы участников в дальнейших обсуждениях их результатов защищал руководитель команды. В-третьих, проверка заданий велась параллельно руководителями команд и координаторами.

В целом, такой порядок проверки давно уже принят на международных олимпиадах по информатике. Применение его на наших олимпиадах оказалось вполне оправданным, и если в дальнейшем устранить некоторые привнесенные «свои» особенности, то его можно будет успешно использовать и в дальнейшем.

Задача каждого тура оценивалась исходя из 100 баллов. Результаты тестирования первого тура показали, что уровень подготовки участников олимпиады оказался существенно выше сложности предложенной задачи. Достаточно сказать, что максимально возможное число баллов — 90 (из оставшихся десяти баллов 5 баллов было в распоряжении жюри и 5 баллов — у координаторов) набрали 45 человек из 56 участвовавших школьников, причем среди них были даже учащиеся 8 и 9 классов. Более того, многие участники сдали свои работы гораздо ранее времени окончания тура.

В создавшейся ситуации жюри олимпиады оказалось в трудном положении. Фактически, победителей можно было определить только по результатам второго тура. Однако и здесь семь человек получили одинаковые баллы. Пришлось принимать во внимание субъективные факторы, и если члены жюри отнеслись к этому ответственно, то оценки некоторых координаторов вызывали, мягко говоря, удивление. Были даже случаи, когда жюри в результате голосования выставляло максимально возможный балл, в то время как координатор — минимально возможный, и наоборот.

В итоге дипломами I степени было награждено 7 участников, набравших 185—193 балла. Дипломы II степени получили 9 школьников с 170—180 баллами. Восемь участников, набравшие 151—165 баллов, получили дипломы III степени.

Организаторы олимпиады сделали все возможное, чтобы это событие надолго осталось в памяти ребят. И им это удалось. Отрадно, что в числе призеров олимпиады оказалось большое количество учащихся 9—10 классов, а девятиклассник из Беларуси *Максим Кузьмин* набрал наилучшую сумму баллов и получил первый приз — радиоприемник фирмы «Филлипс». Наилучшим среди учащихся одиннадцатых классов был *Евгений Кузнецов* из команды России. Приз лучшей участнице олимпиады вручен школьнице из Казахстана *Айман Мукановой*.

Призеры Межгосударственной олимпиады по информатике

Дипломы I степени

по 8—10 классам получили

Белый В.— Беларусь,
Кузьмин М.— Беларусь,
Тин Л.— Узбекистан;

по 11 классам —

Амбайнис А.— Латвия,
Вашкевич М.— Беларусь,
Иоффе С.— Россия,
Кузнецов Е.— Россия.

Дипломы II степени

по 8—10 классам получили

Аширов Ш.— Узбекистан,
Гафуров С.— Беларусь;

по 11 классам —

Буртылев М.— Беларусь,
Давыдок Д.— Россия,
Жуков Д.— Россия,
Журов Д.— Беларусь,
Куджма Д.— Литва,
Муканова А.— Казахстан,
Россиев А.— Россия.

Дипломы III степени

по 8—10 классам получили

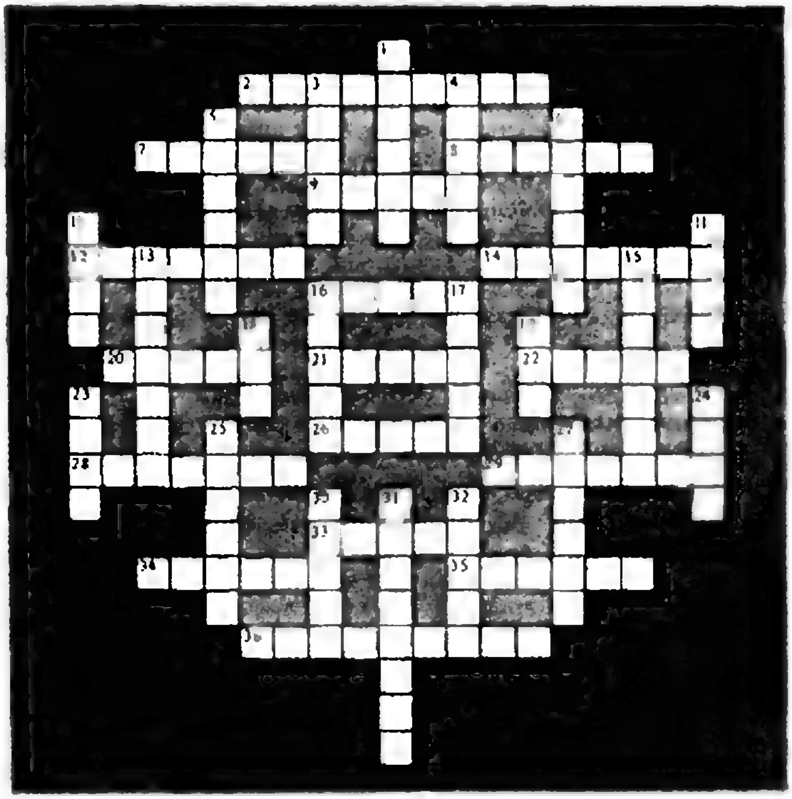
Глошвили Г.— Грузия,
Луценко А.— Туркменистан;

по 11 классам —

Врабие В.— Молдова,
Галванс А.— Латвия,
Зверович А.— Беларусь,
Лапин П.— Россия,
Шафиров М.— Казахстан,
Школьник В.— Беларусь.

Игры и головоломки

Кроссворд



По горизонтали:

2. Переход вещества из жидкого состояния в газообразное. **7.** Немецкий физик, экспериментально определивший удельный заряд катодных лучей. **8.** Единица электрической проводимости. **9.** Металл, используемый для пайки, лужения. **12.** Число оборотов в единицу времени. **14.** Прибор для регулирования тока в цепи. **16.** Единица электрического напряжения. **20.** Единица кинематической вязкости. **21.** Двучлен. **22.** Единица магнитной индукции. **26.** Система однотипных элементов, служащая для структурного преобразования направленного светового пучка. **28.** Положение, в котором отражена некоторая закономерность. **29.** График зависимости объема газа от температуры. **33.** Химический элемент, не имеющий долгоживущих изотопов. **34.** Геометрическая фигура. **35.** Поверхность, описываемая в пространстве мгновенной осью вращения. **36.** Соотношение величин.

По вертикали:

1. Частица, входящая в состав атомного ядра. **3.** Движущаяся масса жидкости, газа. **4.** Устройство для перекачивания жидкостей, газов. **5.** Гидроакустический прибор. **6.** Направленный отрезок. **10.** Оптический прибор. **11.** Мельчайшая частица химического элемента. **13.** Раздел механики. **15.** Устаревшее название энергетической характеристики процесса теплообмена. **16.** Единица магнитного потока. **17.** Окраска звука. **18.** Деталь машин и механизмов. **19.** Буква греческого алфавита. **23.** Оптический прибор. **24.** Планета Солнечной системы. **25.** Ферромагнитный металл. **27.** Английский физик. **30.** Советский физик, один из создателей квантового генератора. **31.** Химический элемент, имеющий радиоактивные изотопы. **32.** Начало полета ракеты.

Составил Е. Кривощёков

(Начало см. на с. 39)

$$g(r)=g_0\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\,\frac{r}{R_\text{З}}-\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}-1\right)\left(\frac{r}{R_\text{З}}\right)^2\right).$$

Исследуя эту функцию с помощью производной, получим, что $g=g(r)$ возрастает при $0<r<\frac{\varrho_0 R_\text{З}}{2(\varrho_0-\varrho)}=0{,}88R_\text{З}$, убывает при $\frac{\varrho_0 R_\text{З}}{2(\varrho_0-\varrho)}<r<R_\text{З}$, имеет наибольшее значение $\frac{g_0\varrho_0^2}{4\varrho(\varrho_0-\varrho)}=1{,}015g_0=9{,}957$ м/с² при $r=\frac{\varrho_0 R_\text{З}}{2(\varrho_0-\varrho)}\approx 0{,}88R_\text{З}=5606$ км.

Посмотрите еще раз в таблицу, и вы увидите, что модель линейного убывания плотности Земли дает значительно лучшее согласие с опытом, чем модель однородной Земли.

В. Дроздов

Ответы, указания, решения

Избранные школьные задачи по физике

1. Скорость каждой точки обода складывается из скорости поступательного движения v и линейной скорости вращательного движения. Из того, что скорость точки C (мгновенной оси вращения) равна нулю, следует, что линейная скорость тоже равна v. Тогда (рис. 1) для точки A суммарная скорость будет равна $2v$, а скорости точек B и D одинаковы по модулю и равны $\sqrt{2}\,v$.

2. Вращательное движение обруча можно заменить поступательным движением точек его обода. Поэтому можно записать:

$$v=\omega_0R=at,\ l=v^2/(2a)=(\omega_0R)^2/(2a),$$

где $a=\mu g$. Отсюда для времени движения и для числа оборотов получаем

$$t=\frac{\omega_0R}{\mu g},\ N=\frac{l}{2\pi R}=\frac{\omega_0^2R}{4\pi\mu g}.$$

3. В нашем случае сила трения скольжения не может превышать

$$F_{\text{тр}\,\max}=\mu N=\mu mg=1\ \text{Н}.$$

Это означает, что в первом случае тело покоится и на него действует сила трения покоя, равная внешней силе:

$$F_{\text{тр}\,1}=F_1=0{,}5\ \text{Н}.$$

Во втором случае тело движется ускоренно, а сила трения равна максимальной силе трения скольжения:

$$F_{\text{тр}\,2}=F_{\text{тр}\,\max}=1\ \text{Н}.$$

4. Сила тяжести, действующая на тело массой m, находящееся на сферической планете радиусом R и плотностью ρ, равна

$$F_{\text{т}}=G\frac{(4/3\,\pi R^3\rho)m}{R^2}=\frac{4}{3}\pi\rho GRm,$$

где G — гравитационная постоянная. На полюсе вес тела по модулю равен силе тяжести, а на экваторе он меньше на величину $\omega^2Rm=4\pi^2Rm/T^2$. Таким образом, получаем

$$\frac{4\pi^2Rm}{T^2}=0{,}1\cdot\frac{4}{3}\pi\rho GRm,$$

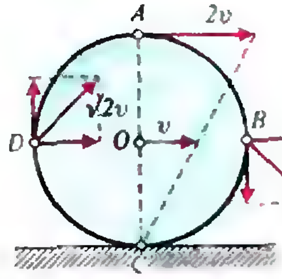


Рис. 1.

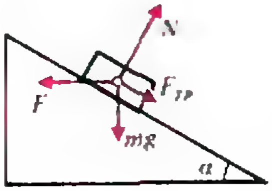


Рис. 2.

откуда

$$\rho=\frac{30}{GT^2}\overset{\pi}{=}1{,}7\cdot10^3\ \text{кг/м}^3.$$

5. Изобразим силы, действующие на брусок, и запишем условие равномерного движения бруска вверх по плоскости в проекциях на направления вдоль плоскости и перпендикулярно ей (рис. 2):

$$F\cos\alpha-mg\sin\alpha-F_{\text{тр}}=0,$$

$$N-F\sin\alpha-mg\cos\alpha=0,$$

$$\text{где } F_{\text{тр}}=\mu N.$$

Отсюда находим

$$F=mg\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\approx21\ \text{Н}.$$

6. Плотность сухого воздуха равна

$$\rho_1=\frac{\text{M}_\text{в}p}{RT},$$

где $\text{M}_\text{в}=29$ г/моль — молярная масса воздуха. Плотность влажного воздуха складывается из плотности водяных паров и сухого воздуха:

$$\rho_2=\rho_\text{п}+\rho_\text{в}=\frac{\text{M}_\text{п}p_\text{п}}{RT}+\frac{\text{M}_\text{в}p_\text{в}}{RT},$$

где $\text{M}_\text{п}=18$ г/моль — молярная масса водяного пара, $p_\text{п}$ и $p_\text{в}$ — парциальные давления пара и воздуха соответственно. При влажности φ давление $p_\text{п}$ связано с давлением насыщенных паров $p_\text{н}$ ($p_\text{н}=5{,}6$ кПа) соотношением

$$\varphi=\frac{p_\text{п}}{p_\text{н}}\,100\,\%,$$

а давление влажного воздуха равно сумме парциальных давлений пара и воздуха:

$$p=p_\text{п}+p_\text{в}.$$

Тогда окончательно

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=1-\frac{p_\text{н}(\text{M}_\text{в}-\text{M}_\text{п})\varphi/100\,\%}{\text{M}_\text{в}p}\approx0{,}98.$$

7. Во втором случае больше, так как при расширении газа совершается работа. Заметим кстати, что теплоемкость газа в первом случае называют теплоемкостью при постоянном объеме, а во втором — теплоемкостью при постоянном давлении. Легко показать, что для одного моля газа

$$C_p-C_V=R.$$

8. Отвод тепла от нагретого тела происходит тем быстрее, чем больше разность температур между телом и окружающей средой. Поэтому выгоднее сначала остудить воду, а потом положить лед.

9. Энергия, выделяемая нагревателем, идет на нагревание всей воды до температуры кипения $t_\text{к}=100\ ^\circ\text{C}$ и на превращение части воды массой Δm в пар:

$$N\tau=cm(t_\text{к}-t)+\Delta m\lambda,$$

где c — удельная теплоемкость воды, λ — удельная теплота парообразования. Оставший-

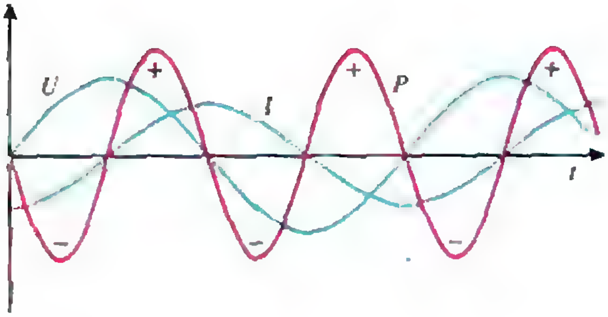


Рис. 3.

ся пар займет объем, равный

$$V=hS=\frac{\Delta mRT_\text{к}}{pM},$$

где h — высота поднятия поршня, M — молярная масса воды. В результате получаем

$$h=\frac{(N\tau-cm(t_\text{к}-t))RT_\text{к}}{\lambda pMS}\approx 1{,}4\ \text{м}.$$

10. Предположим, что при нагревании весь лед превратился сначала в воду, а затем в пар. Тогда относительная влажность будет равна

$$\varphi=\frac{p}{p_\text{н}}100\ \%=\frac{mRT}{MVp_\text{н}}100\ \%=10\ \%,$$

где $p_\text{н}=10^5$ Па — давление насыщенного пара при 100 °C. Полученный результат не противоречит здравому смыслу, следовательно, наше предположение правильное.

11. Действующее значение переменного напряжения — это значение такого постоянного напряжения, при котором на некотором сопротивлении выделяется то же количество теплоты, что и при переменном напряжении, за то же время:

$$\frac{U^2}{R}T=\frac{U_0^2}{R}\tau,$$

откуда

$$U=U_0\sqrt{\tau/T}.$$

12. При работе батареи по катушке идет ток $I=\mathscr{E}/r$ и в ней запасается энергия

$$W=\frac{LI^2}{2}=\frac{L\mathscr{E}^2}{2r^2}.$$

После отключения батареи в контуре возникают колебания. Напряжение на конденсаторе будет максимальным, когда вся энергия колебаний сосредоточена в конденсаторе:

$$W=\frac{CU_{\max}^2}{2}.$$

Отсюда

$$U_{\max}=\frac{\mathscr{E}}{r}\sqrt{\frac{L}{C}}=1{,}6\cdot10^4\ \text{В}.$$

13. Мгновенная мощность равна произведению тока на напряжение (рис. 3). Средняя за период мощность равна нулю.

14. С одной стороны, ЭДС индукции, возникающая во вторичной катушке, пропорциональна магнитному потоку, который, в свою очередь, пропорционален напряжению первичной катушки. С другой стороны, в силу симметричности сердечника, через вторичную катушку проходит лишь половина потока, возбуждаемого первичной катушкой. Следовательно, на зажимах катушки I во втором случае будет напряжение, равное 10 В.

15. Поскольку конденсаторы соединены параллельно, частота колебаний в контуре равна

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}=3{,}3\cdot10^5\ \text{с}^{-1}.$$

Это соответствует излучаемой длине волны

$$\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}=5650\ \text{м},$$

где c — скорость света.

Треугольники и катастрофы

4. *См. рисунок 4.*

5. См. рисунок 5. Можно провести прямые в таком порядке, что синий треугольник будет соответствовать трем большим треугольникам, т. е. от каждого большого треугольника останется один и тот же треугольный кусочек. Все попытки найти в общем виде взаимно-однозначное соответствие между большими треугольниками и треугольными кусочками не увенчались успехом.

6. См. рисунок 6. Удаление синей прямой не уменьшает числа треугольников.

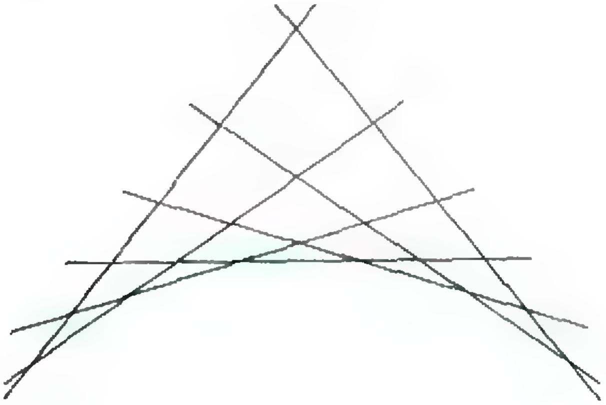


Рис. 4.

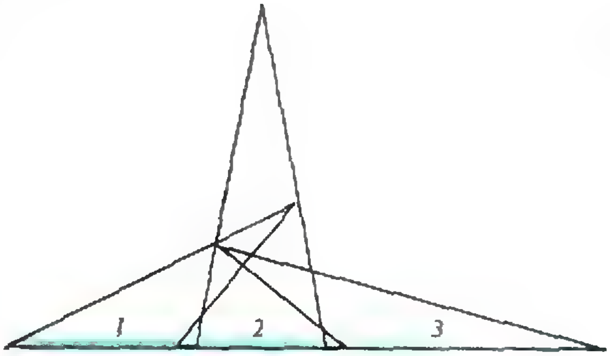


Рис. 5.

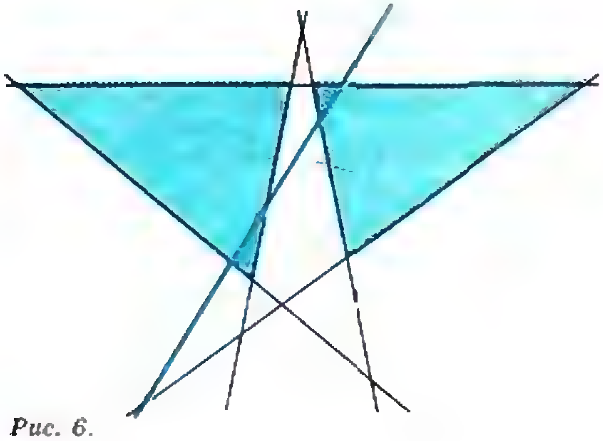


Рис. 6.

Кроссворд

По горизонтали: 2. Испарение. 7. Вихерт. 8. Сименс. 9. Олово. 12. Частота. 14. Реостат. 16. Вольт. 20. Стокс. 21. Бином. 22. Тесла. 26. Растр. 28. Правило. 29. Изобара. 33. Астат. 34. Эллипс. 35. Аксоид. 36. Равенство.

По вертикали: 1. Протон. 3. Поток. 4. Насос. 5. Эхолот. 6. Вектор. 10. Очки. 11. Атом. 13. Статика. 15. Теплота. 16. Вебер. 17. Тембр. 18. Ось. 19. Эта. 23. Лупа. 24. Уран. 25. Никель. 27. Томсон. 30. Басов. 31. Стронций. 32. Старт.

XXVI Межреспубликанская олимпиада по математике

9 класс

1. Дважды применяя неравенство $x^2+y^2\geqslant 2xy$, получаем требуемое: $(a^4+b^4)+c^2\geqslant 2a^2b^2+c^2=(\sqrt{2}ab)^2+c^2\geqslant 2\sqrt{2}abc$.

2. **Первое решение.** По теореме синусов из $\triangle ABE$ находим $AE=2O_1A\sin\angle ABE=\sqrt{2}O_1A$ (см. рис. 7). Аналогично, из треугольника ADE имеем $AE=\sqrt{2}O_2A$. Отсюда $O_1A=O_1E=O_2A=O_2E$, следовательно, AO_1EO_2 — ромб. Осталось заметить, что $\angle AO_1E=2\angle ABE=90^\circ$.

Второе решение. Так как $O_1A=O_1E$, $O_2A=O_2E$, то треугольники AO_1O_2 и EO_1O_2 равны (по трем сторонам). Следовательно, $\angle O_1AO_2=\angle O_1EO_2$. Из равенств $\angle AO_1E=2\angle ABE=90^\circ$ и $\angle AO_2E=2\angle ADE=90^\circ$ получаем, что $\angle O_1AO_2=\angle O_1EO_2=90^\circ$. Таким образом, AO_1EO_2 — прямоугольник, симметричный относительно диагонали O_1O_2, т. е. квадрат.

3. Объявим каждую из k столиц столицей республики. Затем рассмотрим все города, соединенные со столицей одной дорогой и присоединим их к тем республикам, со столицами которых они соединены (если таких столиц несколько, выберем любую из них). Далее, берем города, еще не вошедшие ни в одну из республик и соединенные одной дорогой с каким-либо городом какой-нибудь республики, и распределяем их между республиками, с которыми они соединены (все равно как).

Так как из любого города в любой можно проехать, то за конечное число шагов все города будут распределены по республикам. Заметим, что если город был приписан к республике на n-м шаге, то путь от него до любой из столиц составляет не менее n дорог, причем один из путей в n дорог содержится в той республике, к которой присоединен город. Таким образом, построенное разбиение городов на республики удовлетворяет требуемым условиям.

4. **Ответ:** 2, если mn делится на 3; 1 — в противном случае.

Покажем сначала, как можно добиться того, чтобы на доске осталось указанное число фишек. Если на доске имеется фрагмент, приведенный на рисунке 8 (или полученный из него поворотом, симметрией), то можно удалить из него горизонтальный ряд из трех фишек (убедитесь в этом).

С помощью описанного приема прямоугольник из фишек $m\times n$, где $m\geqslant 4$, $n\geqslant 2$, можно свести к прямоугольнику $(m-3)\times n$. Действительно, если $n\geqslant 3$, то можно удалить фишки в отмеченных прямоугольниках 3×1 в порядке, указанном стрелкой на рисунке 9. Если же $n=2$, то требуемое удаление фишек достигается с помощью ходов (см. рис. 10) $a1:b1$, $a2:b2$, $c1:c2$, $a4:a3$, $c3:b3$, $a2:a3$.

Таким образом, любой прямоугольник $m\times n$ $(m\geqslant 2,\ n\geqslant 2)$ можно свести к одному из шести прямоугольников: 1×2, 2×2, 4×4, 1×3, 2×3, 3×3. Нетрудно указать способ, приводящий к одной фишке для первых трех

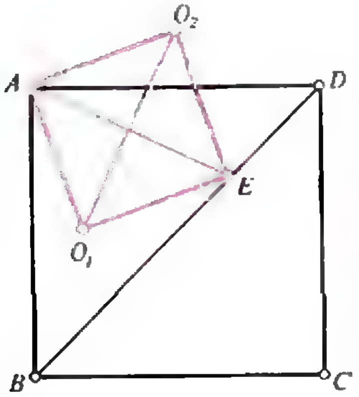


Рис. 7.

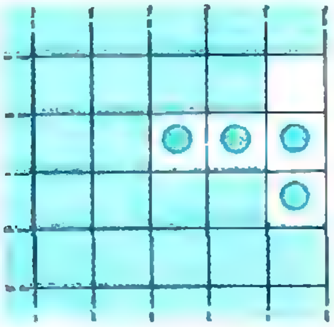


Рис. 8.

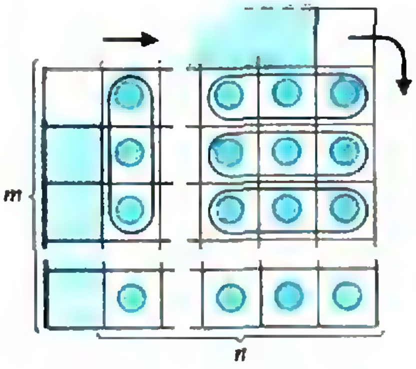


Рис. 9.

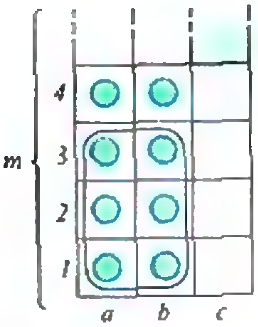


Рис. 10.

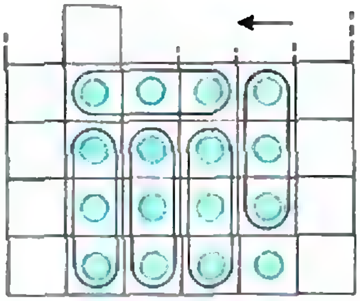


Рис. 11.

A	B	C	A
B	C	A	B
C	A	B	C

Рис. 12.

прямоугольников и к двум — для последних трех. Например, для прямоугольника 4×4 это достигается путем последовательного удаления фишек в отмеченных на рисунке 11 прямоугольниках 3×1.

Покажем теперь, что меньшее число фишек оставить нельзя. Действительно, в любом случае на доске останется не менее одной фишки. Пусть mn делится на 3. Докажем, что в этом случае останется по крайней мере две фишки. Раскрасим клетки доски в три цвета: A, B, C (рис. 12). Любой прямоугольник 3×1 содержит по одной клетке каждого цвета, и в начальный момент на клетках каждого цвета стоит поровну фишек. За один ход на клетках какого-то одного цвета добавляется одна фишка, а с клеток двух других цветов снимается по фишке. Поэтому после любого хода количества фишек на клетках каждого цвета имеют одинаковую четность. Если же на доске останется одна фишка, то это условие нарушится.

5. **Ответ:** существует. Имеется всего 6 четырехзначных чисел (включая 0), делящихся на 1992: 0000, 1992, 3984, 5976, 7968, 9960. Достаточно поэтому взять число, у которого ни одна из цифр не совпадает ни с одной из цифр выписанных чисел, стоящих на соответствующих местах (например, 2111).

6. Решение этой задачи (задача М1371) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

7. **Ответ:** $x=y=0$, $x=y=-1$.

Указание. Докажите, что при $x \neq y$ система решений не имеет.

8. **Ответ:** не существуют. Предположим противное. Если в замощении прямоугольника $m \times n$ какой-либо уголок примыкает к краю прямоугольника стороной одной клетки, то он неизбежно должен быть дополнен другим «уголком» до прямоугольника 3×2. Следовательно, каждый «уголок» примыкает к краю прямоугольника по сторонам двух клеток, а прямоугольник имеет четные размеры $2n \times 2k$. Так как каждый «уголок» имеет 6 вершин, то всего у «уголков», покрывающих прямоугольник, будет $\frac{2n2k}{3}\cdot 6 = 8nk$ вершин. Подсчитаем теперь количество вершин всех уголков другим способом. В каждом узле клетчатой бумаги внутри прямоугольника, как следует из условия задачи, смыкается не более 2 вершин, на стороне длины $2n$ — не более $2(n-1)$ вершин, в углах прямоугольника — по 1 вершине. Всего — не более

$$2(2n-1)(2k-1)+2\cdot 2(n-1)+2\cdot 2(k-1)+4 = 8nk-2 < 8nk$$

вершин. Противоречие. Значит, натуральные числа m и n, удовлетворяющие условию задачи, не существуют.

10 класс

1. В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим имеем

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1} \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{b-1}\cdot\frac{b^2}{a-1}} = 2\frac{a}{\sqrt{a-1}}\cdot\frac{b}{\sqrt{b-1}}.$$

Остается заметить, что при $x \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\frac{x}{\sqrt{x-1}} \geqslant 2.$$

2. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_{15}$ — числа, удовлетворяющие условию задачи. Предположим, что все они являются составными. Обозначим через p_i наименьший простой делитель числа n_i, через p — наибольшее из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$. В силу попарной взаимной простоты чисел $n_1, n_2, \ldots, n_{15}$ числа $p_1, p_2, \ldots, p_{15}$ все различны. Поэтому справедливо неравенство $p \geqslant 47$ (47 — пятнадцатое по счету простое число). Но тогда для того числа n, для которого число p — наименьший простой делитель, имеем

$$n \geqslant p^2 \geqslant 47^2 > 1992.$$

Противоречие.

3. Решение этой задачи (задача М1375) будет

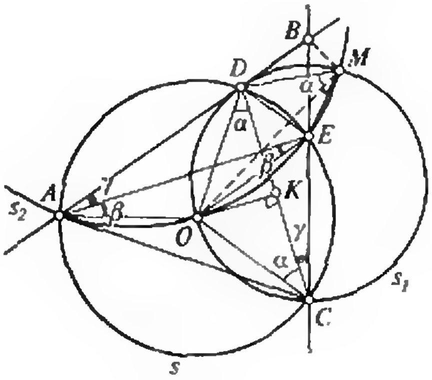


Рис. 13.

опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

4. Пусть OK — высота треугольника COD (рис. 13). Так как $\angle BMO=\angle BMD+\angle DMO$, то утверждение задачи будет доказано, если мы установим, что

$$\angle DMO=\angle KCO, \qquad (1)$$

$$\angle BED=\angle COK, \qquad (2)$$

$$\angle BMD=\angle BED. \qquad (3)$$

Первое равенство следует из того, что углы DMO и DCO — вписанные, опирающиеся на дугу DO окружности S_1. Так как четырехугольник $DECA$ вписанный, то $\angle BED=\pi-\angle DEC=$ $=\angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC=\angle COK$, что доказывает равенство (2).

Докажем равенство (3). Для этого достаточно доказать, что точки B, M, E и D лежат на одной окружности, или, что равносильно, что $\angle DME=\angle DBE$. Покажем, что оба эти угла равны $\alpha+\beta$, где $\alpha=\angle DCO$, $\beta=\angle OAE$. По свойству вписанных углов $\angle DME=\angle DMO+$ $+\angle OME=\angle DCO+\angle OAE=\alpha+\beta$. Угол ADC — внешний для треугольника CDB, поэтому $\angle ADC=\angle DBC+\angle BCD=\angle DBE+\gamma$, где $\gamma=\angle BCD=\angle ECD=\angle EAD$. С другой стороны, $\angle ADC=\angle ADO+\angle ODC=\angle OAD+\angle DCO=$ $=\angle OAE+\angle DAE+\angle DCO=\beta+\gamma+\alpha$. Таким образом, $\angle DBE+\gamma=\angle ADC=\beta+\gamma+\alpha$, откуда $\angle DBE=\alpha+\beta$. Значит, $\angle DBE=\alpha+\beta=\angle DME$. Отсюда, как отмечалось, следует равенство (3).

5. Пусть x_n — число, выписываемое на n-м шаге. Тогда $x_1=1$, $x_{n+1}=n+x_1^2+\ldots+x_n^2$ при $n\geqslant 1$. Отсюда следует, что $x_2=2$ и $x_{n+1}=$ $=x_n^2+x_n+1$ при $n\geqslant 2$. Таким образом, при $n\geqslant 1$ справедливы неравенства

$$x_n^2<x_{n+1}<(x_n+1)^2,$$

показывающие, что при $n\geqslant 1$ число x_{n+1} не может быть полным квадратом.

6. Покажем, что обе окружности касаются прямой AC в одной и той же точке S (рис. 14). Действительно, из теорем о равенстве отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что первая окружность касается прямой AC в точке S_1 такой, что $AS_1=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$, а вторая окружность — в точке S_2 такой, что $AS_2=$ $=\frac{1}{2}(AD+CD+AC)$. Но $AD=BC$ и $AB=CD$, поэтому $S_1=S_2=S$.

Так как биссектрисы смежных углов SCD и ACD взаимно перпендикулярны, а биссектрисы углов ACD и BAC параллельны, то биссектрисы CQ и AP углов SCD и BAC взаимно перпендикулярны. Следовательно, треугольник AMC равнобедренный: $AM=AC$. Аналогично доказывается, что $AN=AC$, и, значит, $AM=AN$. По теореме об отрезках касательных $AK=$ $=AS=AL$, поэтому $KM=AK-AM=AL-$ $-AN=NL$, что и требовалось доказать.

7. Пусть $N=mn$. Рассмотрим два случая: а) N — нечетно и б) N — четно.

а) Покажем, что в этом случае можно добиться того, чтобы сумма всех «синих» векторов была равна нулю. Занумеруем произвольно центры синих клеток: $A_1, \ldots, A_N$ и расставим стрелки следующим образом: $A_n\to A_{n+k}$, если k нечетно, и $A_{n+k}\to A_n$, если k четно. Тогда множество всех «синих» векторов распадается на циклы (замкнутые ломаные): $A_1\to A_2\to$ $\to A_3\to\ldots\to A_N\to A_1$, $A_1\leftarrow A_3\leftarrow A_5\leftarrow\ldots\leftarrow A_N\leftarrow$ $\leftarrow A_2\leftarrow A_4\leftarrow\ldots\leftarrow A_{N-1}\leftarrow A_1$, $A_1\to A_4\to\ldots$, $A_2\to$ $\to A_5\to\ldots$ (если эта цепочка не встретится ранее) и т. д. Сумма векторов по каждому циклу равна нулю, следовательно, равна нулю сумма всех «синих» векторов. Так же сделаем равной нулю сумму всех «зеленых» векторов, и тогда сумма всех векторов будет равна нулю.

б) Обозначим через A и B центры левой нижней и правой верхней клеток прямоугольника, через $A_1, \ldots, A_{N-1}$ и $B_1, \ldots, B_{N-1}$ — центры остальных соответственно синих и зеленых клеток. Расставим стрелки на отрезках, соединяющих между собой точки $A_1, \ldots, A_{N-1}$, так как описано в пункте а). Так же поступим с точками $B_1, \ldots, B_{N-1}$. Кроме того, введем векторы $\overrightarrow{AA_i}$ и $\overrightarrow{BB_i}$, где $i=1, \ldots, N-1$.

Пусть C и D — центры любых двух симметричных относительно центра прямоугольника клеток. Если эти клетки разного цвета, например C — центр синей клетки, D — центр зеленой клетки, то $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$, поскольку $ACBD$ — параллелограмм (рис. 15). Если же эти клетки одного цвета, например обе синие, то $\overrightarrow{AC}+$

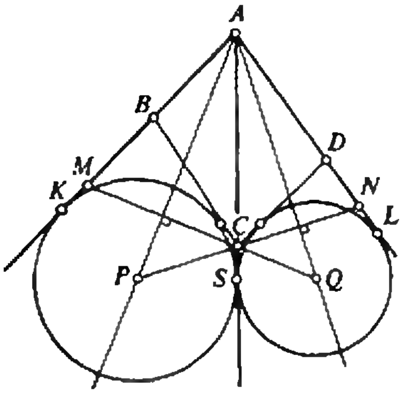


Рис. 14.

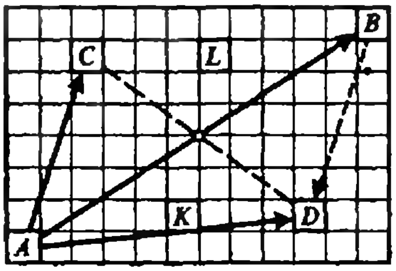


Рис. 15.

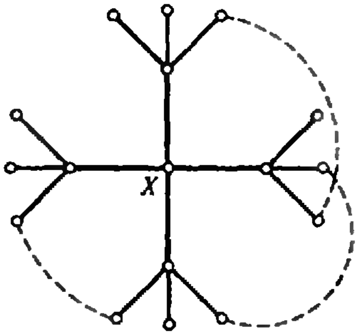


Рис. 16.

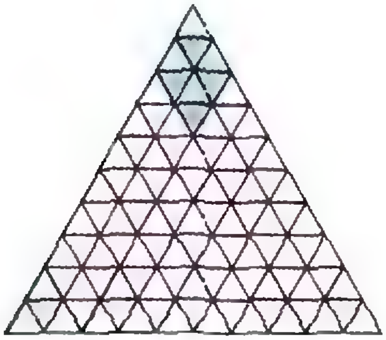


Рис. 17.

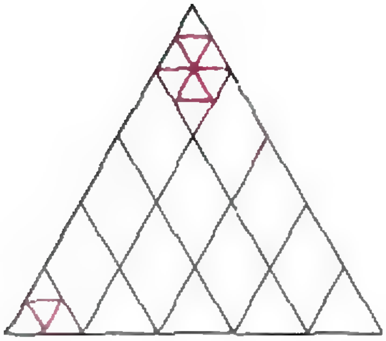


Рис. 18.

$+\vec{AD}=\vec{AB}$. В силу равенства числа синих и зеленых клеток каждой паре симметричных синих клеток C и D соответствует некоторая пара симметричных зеленых клеток K и L. Для них $\vec{BK}+\vec{BL}=\vec{BA}$, и, значит, $\vec{AC}+\vec{AD}+\vec{BK}+\vec{BL}=\vec{0}$. Таким образом, сумма всех векторов равна нулю.

8. Поставим в соответствие каждому человеку из компании точку на плоскости и соединим каждые две такие точки дугой, если соответствующие им люди знакомы. Получим граф, вершины которого — люди из компании, а ребра — знакомства между ними.

Предположим, что, вопреки утверждению задачи, любая вершина X соединена с любой из 16 остальных вершин либо ребром, либо через какую-нибудь третью вершину. Так как вершина X соединена ребрами ровно с четырьмя вершинами, каждая из которых соединена ребрами еще ровно с тремя вершинами, то больше в графе никаких вершин нет, и все упомянутые 17 вершин различны (рис. 16). При этом все остальные ребра графа (их количество равно $\frac{17\cdot 4}{2}-16=18$), могут соединять только крайние вершины (пунктирные ребра на рисунке 10). Каждое из этих 18 ребер задает цикл, состоящий из 5 ребер и проходящий через вершину X. В силу произвольности выбора вершины X графа через каждую из 16 остальных его вершин также проходит ровно по 18 таких циклов. Каждый цикл проходит через 5 вершин, поэтому общее число равно $\frac{18\cdot 17}{5}$, что невозможно. Таким образом, утверждение задачи доказано.

11 класс

1. Применяя формулу

$$\cos(x+d)=\cos d\cos x-\sin d\sin x$$

при $d=1, 2, 3$, получаем равенства

$$f(x)=A\cos x+B\sin x=C\cos(x+\varphi)$$

для некоторых констант A, B, C и φ. Поскольку расстояние между соседними нулями функции $\cos(x+\varphi)$ равно π, условие задачи может выполняться только в случае $C=0$. Таким образом, нули функции $f(x)$ заполняют всю прямую, т. е. $f(x)=0$.

2. Решение этой задачи (задача М1373) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

3. *Решение этой задачи (задача М1372) будет* опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

4. Решение этой задачи (задача М1374) будет опубликовано позже в «Задачнике «Кванта».

5. б) Это возможно при любом нечетном m, удовлетворяющем неравенствам $5\leqslant m\leqslant 25$ (стало быть, в пункте а) ответ отрицательный). Действительно, если треугольник замощен плитками, раскрасим его в два цвета в шахматном порядке (рис. 17) и обозначим через x число плиток первого вида, покрывающих по 3 белых треугольничка. Тогда число белых треугольничков равно

$$3x+1\cdot(m-x)+2\cdot(25-m)=55,$$

поэтому $2m\geqslant 2x=5+m$, откуда и следуют необходимые ограничения на m.

При любом из указанных значений m устроим замощение следующим образом: сначала разобьем исходный треугольник на 5 плиток первого вида и 10 ромбов со стороной 2 (например, как показано на рисунке 18), затем любые $\frac{m-5}{2}$ ромбов разобьем на плитки первого вида, а остальные ромбы — на плитки второго вида.

6. Пусть сумма всех 1992-х векторов равна $\vec{a}$. Введем на плоскости декартову систему координат так, чтобы ось Ox была сонаправлена с вектором $\vec{a}$ (если $\vec{a}=\vec{0}$, то ось Ox выбираем произвольным образом). Начинающий каждым своим ходом может выбирать из оставшихся к этому моменту векторов тот вектор, который имеет наибольшую абсциссу. Тогда в конце у него сумма векторов будет иметь не меньшую абсциссу, чем у противника, причем и по абсолютной величине у него абсцисса будет не меньше, а ордината — такая же, как у противника (ибо сумма всех абсцисс неотрицательна, а сумма всех ординат равна 0). Следовательно, начинающий при такой игре заведомо не проиграет.

7. Из условий задачи следуют соотношения

$$(n+k)^2-(m+l)^2=(n-k)^2-(m-l)^2=$$
$$=((n-k)+(m-l))((n-m)+(l-k))>0,$$

откуда получаем

$$(n-k)^2>(n+k)^2-(m+l)^2=$$
$$=((n+k)-(m+l))(k+l+m+n)\geqslant$$
$$\geqslant(k+(k+1)+(k+2)+(k+3))=4k+6.$$

Но квадрат целого числа не может при делении на 4 давать остаток 3, поэтому

$$(n-k)^2\geqslant 4k+8,$$

что и требовалось доказать.

8. См. решение задачи 8 для 10 класса.

государственная олимпиада нформатике

I тур. Основная идея алгоритма заключается в последовательном анализе элементов (0, 1)-матрицы и раскрашивании изолированных 0-областей. В случае появления элемента, общего для нескольких ранее найденных изолированных 0-областей, происходит их слияние.

Наилучший порядок обхода заданной (0, 1)-матрицы — по строкам, начиная с первой, и слева направо внутри каждой строки. Если рассматриваемый элемент матрицы равен 1, то осуществляется сразу переход к следующему элементу. В противном случае происходит анализ на принадлежность рассматриваемого элемента какой-либо уже существующей изолированной 0-области, элементы каждой из которых помечены порядковым номером этой области. При этом возможны следующие варианты. Если все соседи (на рисунке 19 они не заштрихованы) равны 1, то образуется новая изолированная 0-область, и рассматриваемому элементу присваивается новый порядковый номер этой области. Если среди соседей оказываются элементы различных 0-областей, то происходит их слияние. Если рассматриваемый элемент является соседним только для одной существующей изолированной 0-области, то он принимает значение, соответствующее элементам этой области.

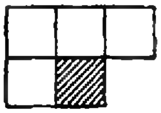


Рис. 19.

При решении данной задачи полезно доопределить исходную (0, 1)-матрицу граничными элементами слева, сверху и справа, присвоив им значение 1. Более того, возможна рекурсивная и нерекурсивная реализация предложенного алгоритма.

II тур. Предложенная задача относится к классу NP-полных задач, из чего следует, что оптимальное решение можно найти только полным перебором всех вариантов. В формальной постановке данная задача может быть определена следующим образом. Рассмотрим направленный граф, вершинам которого соответствуют номера жителей острова или президентов партий, а дуги в нем определяют связь президента со своими членами партии. Необходимо определить минимальное число вершин, объединение которых со связанными с ним вершинами образует множество вершин графа. На начальном этапе всегда полезно выделить в исходном графе несвязанные подграфы, а затем, если число вершин в каждом подграфе невелико, например не более 10, применить полный перебор. Наряду с полным перебором для решения такого рода задач могут быть использованы эвристические методы, во многих случаях дающие искомое решение. Среди них можно выделить так называемый «жадный» алгоритм, суть которого заключается в следующем:

— выбирается вершина с максимальной степенью и формируется список партий, которые с ней связаны;

— из графа вычеркиваются дуги, входящие в эту вершину, и дуги, выходящие из нее;

— процесс повторяется до тех пор, пока в списке не окажутся представители всех партий.

Легко видеть, что описанный алгоритм не всегда дает оптимальное решение. Его можно улучшить, если на каждом шаге выбирать не по одному представителю, а по два, учитывая сразу все партии, которые они представляют. Можно также делать неполный перебор, выбирая на текущем шаге одну из двух или трех вершин с наибольшими степенями входа.

Следует отметить, что какой бы алгоритм ни предлагался для решения данной задачи, выполнение его на компьютере должно быть закончено в течение отведенного для тестирования времени. Искусственное введение в программу ограничения по времени не является корректным, так как выбор требуемой эвристики в программе должен осуществляться алгоритмически, без вмешательства пользователя. В этом и должно заключаться умение участников анализировать размерность задачи и ставить ей в соответствие алгоритм, дающий оптимальное решение.

В заключение приведем один из тестов, который использовался для проверки этой задачи на олимпиаде.

Входные данные: 1—8,9; 2—10,11; 3—12,13; 4—8,9,10; 5—11,12,13; 6—8,9,10,11; 7—9,10, 11,12,13; 8—1,4,6; 9—1,4,6,7; 10—2,4,6,7; 11—2,5,6,7; 12—3,5,7; 13—3,5,7; 14—8; 15—9; 16—10; 17—11; 18—12; 19—13; 20—21,22, 23; 21—20; 22—20; 23—20.

Оптимальное решение: 8,9,10,11,12,13,20.

нт» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. Ответ: 8. Самый левый конь отстоит от самого правого на два хода, как и самый верхний от самого нижнего. Отсюда следует, что все кони находятся в квадрате 5×5 клеток, и их не больше восьми (см. рис. 20).

2. $425^2=180625$.

3. Проведем прямую параллельно одной из заданных прямых на расстоянии вдвое меньшем расстояния от этой прямой до точки M. Через точку ее пересечения со второй из заданных прямых и точку M проведем еще одну прямую. Точка ее пересечения с первой из заданных прямых и будет, очевидно, искомой. Вторая точка получается, если поменять ролями первую и вторую прямые (см. рис. 21).

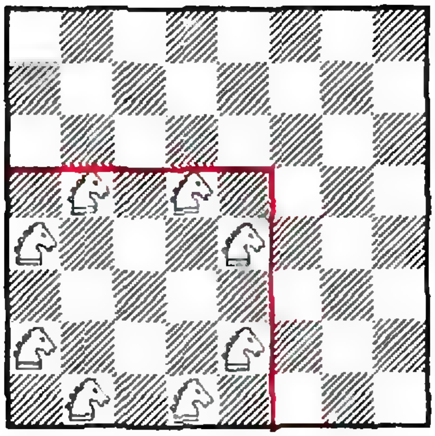


Рис. 20.

4. В комнате 6 честных людей.

5. Последовательность строится по следующему принципу: каждое число, начиная со второго, сообщает, сколько каких цифр находится в предыдущем числе. Так, второе число — 11 — следует читать так: «одна единица», следующее число — 21 — «две единицы», идущее далее число 1112 читается как «одна единица и одна двойка» и т. д.

[illegible]йдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 10)

Вопросы и задачи

1. Нет, поскольку в присутствии других проводников их емкости могут изменяться.

2. Нельзя, так как на изолированной обкладке вследствие индукции возникнут заряды обоих знаков, и банка не будет конденсатором.

3. По порядку величины электрическая емкость тела человека такая же, как емкость шара диаметром 1 м. Она составляет примерно 50 пФ.

4. Не изменится.

5. $C_{общ}=C$. Конденсатор емкостью C_0 подсоединен к точкам, разность потенциалов между которыми равна нулю.

6. Каждая из пластин обладает определенной, обычно небольшой, емкостью относительно земли. При заземлении пластины нейтрализуется часть находящегося на ней заряда. Поэтому конденсатор будет разряжаться. Но разряжаться он будет тем медленнее, чем больше его емкость по сравнению с емкостью пластин относительно земли.

7. В первом случае на большой сфере заряды будут располагаться только с внутренней стороны. Во втором случае они будут находиться с обеих сторон, и емкость всего конденсатора будет равна емкости системы двух параллельно соединенных конденсаторов с обкладками *AB* и *BC* (рис. 22).

8. Нужно сближать или разводить пластины конденсатора.

9. Ток самоиндукции, возникающий при размыкании цепи, заряжает конденсатор и не проходит в виде искры через рубильник.

10. Если катушка включена в замкнутую цепь, то в ней возникнет постоянный ток, время установления которого определяется индуктивностью катушки и ее сопротивлением.

11. После того как на первую катушку намотали вторую, активное сопротивление стало вдвое меньше, а индуктивное осталось прежним. Следовательно, общее сопротивление уменьшится менее чем в два раза, т. е. будет больше 10 Ом.

12. Обмотка трансформатора сгорит, так как у нее велико только индуктивное сопротивление, активное же — ничтожно мало.

13. При удалении верхней части сердечника индуктивности первичной и вторичной катушек уменьшатся. Это приведет к уменьшению ЭДС самоиндукции в первичной обмотке и ЭДС индукции во вторичной. Следовательно, ток в первичной катушке увеличится, а во вторичной *уменьшится.*

14. а) В медном сердечнике возникнут индукционные токи Фуко, магнитное поле которых будет ослаблять магнитное поле катушки. Это приведет к уменьшению ее индуктивности и, следовательно, к увеличению частоты колебаний. б) Сердечник из феррита увеличит магнитное поле катушки, соответственно возрастет индуктивность катушки, а частота — уменьшится.

15. Изменятся амплитуды колебаний силы тока, напряжения, магнитной индукции; сохранится период колебаний.

16. В системе возникнут незатухающие (если пренебречь излучением электромагнитных волн) колебания. При этом в момент, когда заряд распределен поровну между конденсаторами, энергия электростатического поля минимальна, а энергия магнитного поля максимальна.

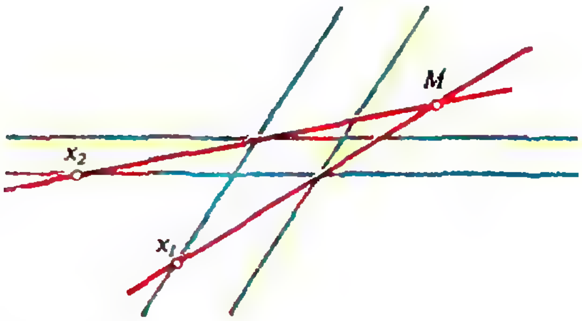


Рис. 21.

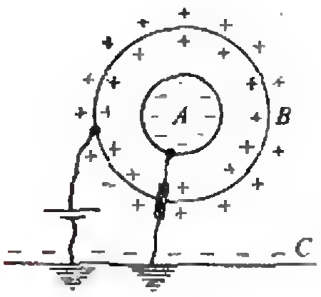


Рис. 22.

17. Когда заряд на пластинах конденсатора достигнет своего максимального значения, пластины следует раздвинуть, при этом совершенная работа пойдет на увеличение энергии контура. Когда заряд будет равен нулю, пластины следует сдвинуть до прежнего положения — энергия в контуре не изменится.

18. Да, может.

19. В ветвь A нужно включить катушку индуктивности, а в ветвь B — конденсатор.

20. Если пренебречь активным сопротивлением, то $U=I(\omega L-1/(\omega C))$. Напряжение не зависит от тока только тогда, когда $\omega L=1/(\omega C)$; в таком случае $U=0$ при любом I.

Микроопыт

Следует увеличивать либо емкость, либо индуктивность.

Предел последовательности

(см. «Квант» № 10)

1. 1. **2.** 0. **3.** -1. **4.** $-1/2$. **5.** -1. **6.** $a^2+a+1/3$.

Указание.

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\left(a+\frac{n-1}{n}\right)^2=na^2+2a\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1+2^2+\ldots+(n-1)^2}{n^2}=$$

$$=na^2+2a(n-1)+\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}.$$

Мы воспользовались формулой для суммы квадратов:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

7. 1/3. Указание. Пусть $a_k=k(k+1)$, $b_k=k(k+1)(k+2)/3$. Заметим, что $b_k-b_{k-1}=a_k$. Это дает возможность вычислить сумму $a_1+a_2+\ldots+a_n=b_1-b_0+b_2-b_1+\ldots+b_n-b_{n-1}=b_n=n(n+1)(n+2)/3$.

8. 0. Указание. $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=2/(\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1})$.

9. 1. **10.** 1/2. **11.** 0. Указание. Пусть $u=n^2$. Имеем

$$u^{2/3}-(u-1)^{2/3}=(u^{1/3}-(u-1)^{1/3})(u^{1/3}+(u-1)^{1/3})=(u^{1/3}+(u-1)^{1/3})/(u^{2/3}+u^{1/3}(u-1)^{1/3}+(u-1)^{2/3}).$$

В знаменателе — более высокая степень u, чем в числителе, а $u\to\infty$.

Вычисления в тригонометрии

(см. «Квант» № 10)

1. 2. **2.** 4. **3.** $2\sqrt{3}$. **4.** $2\sqrt{3}$. **5.** -1. **6.** 1. **7.** -1. **8.** 1. **9.** 1/64. **10.** $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$. **11.** 1/4. **12.** $\sqrt{3}$. **13.** 3. **14.** 1/16. **15.** 1/2. **16.** 1. **17.** 8. **18.** 4. **19.** 1/2. **20.** 3/2. **21.** 3/16. **22.** 1/4. **23.** 1. **24.** 1. **25.** 0. **26.** 1. **27.** 1/32. **28.** 1/32. **29.** 48. **30.** 3/356. **31.** 1/27. **32.** 1. **33.** $\sqrt{3}$. **34.** $\sqrt{2}-\sqrt{2}/2$. **35.** $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$. **36.** 2. **37.** 42. **38.** $\sqrt{3}$. **39.** $(3-\sqrt{3})/3$. **40.** 0. **41.** 9. **42.** $\sqrt{2/8}$. **43.** -1. **44.** $4\sqrt{3/3}$. **45.** 1/8. **46.** $\sqrt{3}(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1)/8$. **47.** $\sqrt{7}$.

Решения XXXII Всеукраинской математической олимпиады

(см. «Квант» № 10)

8 класс

1. Из равенства $2m=n^2+1$ следует, что n нечетно. Пусть $n=2k+1$, тогда $2m=2(k^2+(k+1)^2)$.

2. Пусть OH_1 — высота треугольника AOB, OH_2 — высота треугольника COD. Поскольку OH_1 и OH_2 также являются биссектрисами, из условия $\angle AOB+\angle COD=180^\circ$ получаем равенства $\angle BOH_1=\angle OCH_2$, $\angle COH_2=\angle OBH_2$. Отсюда следует, что треугольники OCH_2 и OBH_1 равны, и $OH_1=1/2\,CD$, $OH_2=1/2\,AB$. Остальное ясно.

3. Одновременно можно увидеть или только одну грань (6 способов), или две смежные грани с общим ребром (12 способов), или 3 грани с общей вершиной (8 способов). Всего получим 26 сумм. Числа на гранях можно взять так, чтобы все эти суммы были различными (например, 1, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5).

4. а) $c=p(0)$ — целое число. б) Нет. Например, многочлен $p(x)=x(x+1)/2$ принимает целые значения для любых целых x.

5. Если отрезки AB и CD пересекаются, то четырехугольник $ABCD$ — выпуклый. Хотя бы один из его углов не меньше 90° (возможно, равен 180°). Пусть это угол C, но тогда в треугольнике $AB>CB$, что противоречит условию.

6. Поскольку $(a+b)/c\geqslant 2$, $(c+b)/a\leqslant 2$, $(a+c)/b\geqslant 1$, $a-b\geqslant 0$, $c-b\leqslant 0$, $a-c\geqslant 0$, получаем $(a^2-b^2)/c\geqslant 2(a-b)$, $(c^2-b^2)/a\geqslant 2(c-b)$, $(a^2-c^2)/b\geqslant(a-c)$. Осталось сложить эти три неравенства.

9 класс

1. Пусть разность прогрессии равна d, а сумма $a_{19}+a_{92}=b$. Нужно выяснить, при каких b система

$$\frac{a_1+a_1+(k-1)d}{2}\,k=1992,$$

$$a_1+18d+a_1+91d=b$$

относительно неизвестных a_1 и d имеет решение. Исключая a_1, получим $(110-k)d=b-(1992\cdot 2)/k$. При $k\neq 110$ система имеет решение при любых b. При $k=110$ получаем $b=1992\cdot 2/110$.

2. Поставим на двух противоположных гранях числа 1 и 2. Обходя оставшиеся 4 грани, поставим по очереди числа 3, 9, 6, 18. Легко проверить, что тогда все 26 возможных сумм (см. задачу 3 для 8 класса) будут различны. При этом наибольшая из них равна 26 — это и есть искомое значение.

3. Пусть m — целый корень многочлена $f(x)$, а k — остаток от деления m на 1992.

Поскольку k^l-m^l делится на $k-m$, $f(k)-f(m)=$ $=f(k)$ будет делиться на $k-m$, а значит, и на 1992.

4. Опустим перпендикуляр из центра круга O на сторону BC. Его основанием будет точка M — середина BC. Геометрическим местом точек M будет круг с диаметром OD. Искомое геометрическое место получаем из этого круга гомотетией с центром A и коэффициентом $2/3$.

5. Выиграет начинающий. Разобьем всю доску на прямоугольники 1×2, оставив при этом одну отдельную клетку. Первый ход необходимо сделать в эту отдельную клетку. Когда второй ставит шашку в какой-то из прямоугольников 1×2, первый своим следующим ходом должен поставить шашку во вторую клетку этого прямоугольника.

6. Если $2p+1=m^n$, то m — нечетно, т. е. $m=2k+1$. Отсюда $2p=2k\cdot A$, где $A>1$. Поскольку p — простое, $k=1$ и $m=3$. Перебирая все n, для которых $3^n<2001$, находим единственное решение: $p=13$.

7. Докажем, что *любой* центрально-симметричный выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_{2n}$ можно разрезать на параллелограммы. От каждой из точек $A_3, A_4, \ldots, A_n$ отложим вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ (равный $\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}$) и «отрежем» от многоугольника образованные таким образом $(n-1)$ параллелограммов. Мы получим $(2n-2)$-угольник. Если центр симметрии $A_1A_2\ldots A_{2n}$ лежал в точке O, то полученный многоугольник будет центрально-симметричным с центром в точке O_1, такой, что $\overrightarrow{OO_1}=$ $=1/2\ \overrightarrow{A_1A_2}$. Продолжаем такую операцию, пока не придем к центрально-симметричному четырехугольнику, т. е. параллелограмму.

8. Пусть k — рациональное число. Прямая $y-12=k(x-42)$ проходит через точку A и пересекает окружность в точке $B(x_0;\ y_0)$, причем $x_0^2+2x_0+(k(x_0-42)+12)^2=1992$. Это квадратное уравнение, один из корней которого $x_0=42$ — рационален, рациональным будет и второй корень. Число $y_0=k(x_0-42)+12$ при этом также будет рациональным. Остается заметить, что через точку A можно провести бесконечно много прямых с рациональным k.

10 класс

2. Пусть a, b, c — длины сторон BC, CA, AB. Используя то, что биссектриса делит противоположную сторону в отношении, равном отношению длин прилегающих сторон, выразим $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ и из равенства $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$ получим, что $\vec{0}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{BC}\,(c/(c+b)$ $-b/(b+a))+\overrightarrow{CA}\,(a/(a+c)-b/(b+a))$.

Векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ не коллинеарны, поэтому $c/(c+b)-b/(b+a)=0$, $a/(a+c)-b/(b+a)=0$. Отсюда $a=b=c$.

3. Поскольку $y^2+y+1>0$, из третьего уравнения получим $xz<0$. Поэтому x и z имеют разные знаки. Но из первого уравнения следует $0>4yz+2z=2z(2y+1)$, а из второго — $0>2xy+x=x(2y+1)$. Поэтому x и y должны быть одного знака. Противоречие.

4. Заметим, что все положительные числа отмечены. Пусть a_k — отмеченное число с наименьшим номером k и $a_k+a_{k+1}+\ldots+a_m>0$. Тогда положительной будет и сумма всех отмеченных чисел между a_k и a_m (из левой части неравенства мы убираем некоторые отрицательные числа). Далее рассматриваем отмеченное число с наименьшим номером после a_m, и т. д.

5. **Ответ:** $n=3$.

6. Легко видеть, что в многоугольнике F найдутся вершины C и D такие, что отрезки A_1C и A_1D будут сторонами F_1. При этом треугольники A_1BC и A_1BD будут содержать часть F_1, лежащую вне F. Из $AB=BA_1$ следуют равенства площадей $S_{ABC}=S_{A_1BC}$, $S_{ABD}=$ $=S_{A_1BD}$. Осталось использовать то, что $S_{ABC}+S_{ABD}$ меньше площади F.

7. Достаточно доказать, что каждое слагаемое в левой части не больше $2\dfrac{a+c}{b+d}$. Например, $\dfrac{a+b}{b+c}\leqslant 2\dfrac{a+c}{b+d}$ приводим к виду $(a+b)(b+d)\leqslant$ $\leqslant 2(a+c)(b+d)$, и после преобразований приходим к неравенству

$$a(2c-d)+b(2c-d)+(2c^2-b(b-a))\geqslant 0. \quad (*)$$

Поскольку a, b, c, d лежат в промежутке $[1,\ 2]$, $2c\geqslant d$, $2c^2\geqslant 2\geqslant b(b-a)$, так что неравенство $(*)$ выполняется.

8. Для положенной фигурки отметим все клетки доски, имеющие с клетками фигурки общую сторону (их будет 8). Тогда если центральная клетка другой фигурки не падает на отмеченную клетку, эта фигурка наверняка не будет перекрываться с первой. Таким образом, каждая положенная четырехклеточная фигурка «запрещает» $8+4=12$ клеток. Центральная клетка фигурки не может находиться в 4 угловых клетках доски. Поскольку $100^2-4-12\cdot 800>0$, к нашим 800 фигуркам можно добавить еще хотя бы одну (даже 32) фигурки.

11 класс

1. **Ответ:** существует. Возьмем в плоскости 995 пар перпендикулярных векторов и еще один вектор, перпендикулярный этой плоскости.

2. Если $AK=x\cdot AB$, то $S_{KLM}=(S_{ABC}-S_{AKM}-$ $-S_{BKL})/2=S(1-x^2-(1-x)^2)=S(x-x^2)$. Максимум достигается при $x=1/2$ и равен $S/4$.

3. Пусть a — наименьшее число среди записанных, а b и c — числа, соседние с ним ($b\geqslant a$, $c\geqslant a$). Если $a=\sqrt{bc}$ или $a=(b+c)/2$, то $a=b$ и $a=c$. Продолжая эти рассуждения для чисел, соседних с b и c, и т. д., получим, что все числа равны между собой и равны 26.

4. Обозначим $\alpha=\operatorname{arctg}4/3$. Если $\alpha/\pi=m/n$, то αn будет кратно π, и среди чисел вида $\operatorname{tg}k\alpha$, $k\in N$, будет конечное число различных. Отметим теперь, что $\operatorname{tg}\alpha=4/3$, и если $\operatorname{tg}\beta=p/q$ — несократимая дробь с четным

числителем, то $\operatorname{tg} 2\beta = 2pq/(q-p)(q+p)$ — также несократимая дробь с четным (но уже бо́льшим) числителем. Поэтому в последовательности $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg} 4\alpha$, $\operatorname{tg} 8\alpha$, ... все члены будут различны. Противоречие.

5. Сложите очевидные неравенства $\frac{a^2}{a-b} \geqslant a+b$, $\frac{b^2}{b-c} \geqslant b+c$ и учтите, что хотя бы одно из них — строгое.

6. Используя то, что высота делит противоположную сторону в отношении, равном отношению котангенсов двух прилежащих углов треугольника выразим $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$. Из $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$ получим $\vec{0} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} =$

$$=\overrightarrow{BC}\left(\frac{\operatorname{ctg}\angle C}{\operatorname{ctg}\angle C+\operatorname{ctg}\angle B}-\frac{\operatorname{ctg}\angle B}{\operatorname{ctg}\angle B+\operatorname{ctg}\angle A}\right)+$$

$$+\overrightarrow{CA}\left(\frac{\operatorname{ctg}\angle A}{\operatorname{ctg}\angle A+\operatorname{ctg}\angle C}-\frac{\operatorname{ctg}\angle B}{\operatorname{ctg}\angle B+\operatorname{ctg}\angle A}\right).$$

Из того, что $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ не коллинеарны, следует, что коэффициенты при каждом из векторов равны нулю. Отсюда $\operatorname{ctg}\angle B = \operatorname{ctg}\angle A = \operatorname{ctg}\angle C$, и углы треугольника равны.

7. Легко видеть, что CB перпендикулярен плоскости (SAB), и поэтому $(SBC)\perp(SAB)$. По условию $SC\perp(AB_1C_1D_1)$, и поэтому $(SBC)\perp(AB_1C_1D_1)$. Если две плоскости перпендикулярны третьей, то их линия пересечения также перпендикулярна этой плоскости. Поэтому $(AB_1)\perp(SBC)$, и $\angle C_1B_1A = 90°$. Аналогично, $\angle C_1D_1A = 90°$. Значит O_1 (середина AC_1) — центр окружности, описанной вокруг $AB_1C_1D_1$. Пусть O — точка пересечения диагоналей $ABCD$. Тогда O — середина AC, и $OO_1 \parallel SC$. Отсюда $OO_1\perp(AB_1C_1D_1)$, и $OA = OB_1 = OC_1 = OD_1$. Поэтому O — центр сферы, описанной вокруг нашего многогранника.

Внимание!

По просьбе наших читателей сообщаем,

что «КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК

ПО ФИЗИКЕ» карманного формата,

авторы
А. К. Цатурян и А. И. Черноуцан,

продается в Москве

в магазинах «Московский дом книги»
(Новый Арбат, 8)

и «Дом педагогической книги»
(Пушкинская, 7/5).

КВАНТ

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Егоров, А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Сосинский, А. Стасенко,
С. Табачников, В. Тихомирова, В. Уроев,
А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
Я. Смородинский, И. Сурин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, А. Калинин,
Л. Кардасевич, С. Коновалов, А. Котова,
А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
А. Астрин, Н. Кузьмина, Т. Макарова,
В. Назаров, А. Хоменко, П. Чернуский

Редактор отдела художественного оформления
П. Чернуский

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор Т. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»,
тел. 250-33-54, факс 251-55-57

Сдано в набор 31.08.92. Подписано к печати 20.10.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт 27,09. Уч.-изд. л. 7,99.
Тираж 80834 экз. Заказ 1105. Цена 1 р. 10 к.

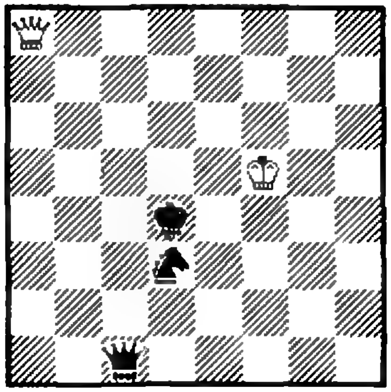
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

[illegible]

Шахматная страничка

ФИЛИГРАННЫЙ АНАЛИЗ КОМПЬЮТЕРА

Двадцать лет назад, на международном турнире на Кубе, состоялась одна довольно любопытная партия. Белыми в ней играл венгерский гроссмейстер Л. Лендьел, а черными — международный мастер из Англии Д. Леви, один из крупнейших в мире специалистов в области компьютерных шахмат. Игра свелась к редкому эндшпилю, в котором ферзь с конем Леви боролись против ферзя Лендьела. Хотя Леви удалось взять верх в этом теоретически ничейном эндшпиле (впрочем, исключений сколько угодно), осталось еще много загадок и вопросов: закономерен ли результат партии, наилучшим ли образом действовали соперники и т. д. И только в 1991 году программа К. Томпсона, специально разработанная для эндшпиля «король, ферзь и конь против короля и ферзя», расставила все точки над «i».



Вот этот редкий в шахматной практике эндшпиль. Спустя 15 ходов черным удалось заматовать неприятельского короля. Посмотрите финал этого поединка.

66...Фf4+ 67. Крe6 Фh6+ 68. Крd7 Фg7+ 69. Крc8 Фf8+ 70. Крb7 Кc5+ 71. Крa7 Фe7+ 72. Крb6 Кd7+ 73. Крc7 Кe5+ 74. Крb8 Фd8+ 75. Крb7 Фd7+ 76. Крb6 Кc4+ 77. Крa6 Фd6+ 78. Крb7 Фd7+ 79. Крb8 Фd8+ 80. Крb7 Кd6+ 81. Крa7 Фa5+ 82. Крb8 Фb6+. Белые сдались (83. Фb7 Ф:b7×).

Насколько точно действовали соперники? Этот эндшпиль был проверен на компьютере, и программа Томпсона установила, что игра обоих партнеров была слишком далека от идеальной, причем Леви пару раз упустил победу, а Лендьел в свою очередь — ничью. Всезнающая машина установила, что в позиции на диаграмме при наилучшей игре обеих сторон черные выигрывают в 14 ходов — дают мат или берут ферзя. Приведем теперь это же окончание, но как бы прокомментированное компьютером.

66...Фf4+ (13). В скобках мы указываем, сколько ходов остается до мата или выигрыша ферзя. Первый ход черных — правильный.

67. Крe6 (12) **Фh6+??** Упускает победу, к цели вело 67...Кc5+.

68. Крd7?? (8) А теперь белые теряют дорогу к ничьей — 68. Крe7 — и вместо этого переходят к позиции, выигрышной для черных в восемь ходов.

68...Фg7+?? Опять упускают победу, и опять решало 68...Кc5+.

69. Крc8?? (5) Вместо ничьей 69. Крe6 белые переходят к позиции, где черные могли выиграть всего в пять ходов.

69...Фf8+? (11) Большая потеря времени, правильно было 69...Фg8+.

70. Крb7 (10) **Кc5+** (10) **71. Крa7** (9) **Фe7+?** (16). Как видим, этот шах «отбрасывает» черных на семь ходов, следовало продолжать 71...Фf7+.

72. Крb6 (15) **Кd7+** (15) **73. Крc7?** (13). На ход упорнее 73. Крb7.

73...Кe5+ (13) **74. Крb8** (12) **Фd8+?** (13). Еще одна неточность, правильно 74...Фe8+.

75. Крb7 (12) **Фd7+** (12) **76. Крb6?** (8). Вместо 76. Крa6 белый король отступает не на то поле, «возвращая» противнику три хода.

76...Кc4+ (8) **77. Крa6** (7) **Фd6+** (7) **78. Крb7** (6) **Фd7+?** (8). На два хода быстрее решал шах с b4 или b6.

79. Крb8? (4). На три хода упорнее 79. Крa6.

79...Фd8+ (4) **80. Крb7** (3) **Кd6+** (3) **81. Крa7** (2) **Фa5+** (2) **82. Крb8** (1) **Фb6+** (1) **83. Фb7** (0) **Ф:b7×** (0). Выигрыш в 0 ходов, поскольку белый король заматован.

Итак, из 17 ходов черных и 16 белых только 11 были оптимальными, причем дважды черные упустили выигрыш, а белые не воспользовались этим. Да, разница между машиной и человеком в разыгрывании этого эндшпиля довольно велика...

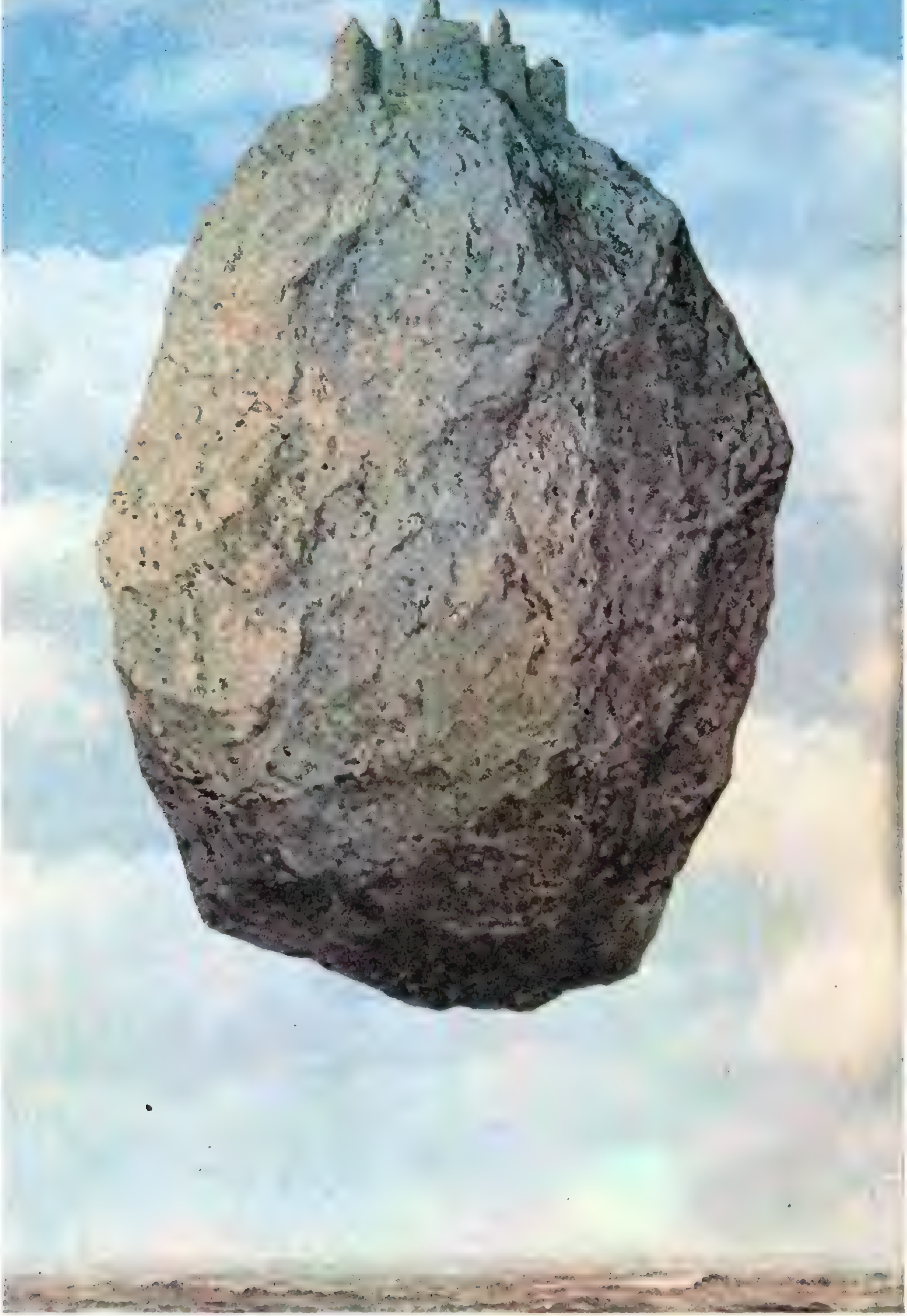
А как должны были развиваться события, если бы обе стороны действовали оптимальным обрвзом? Вот цепочка ходов, указанная компьютером.

66...Фf4+ 67. Крe6 Кc5+ 68. Крe7 Фh4+ 69. Крf7 Фh7+ 70. Крf6 Кe4+ 71. Крe6 Фg6+ 72. Крe7 Фf6+ 73. Крd7 Фf7+ 74. Крc8 Фg8+ 75. Крb7 Кc5+ 76. Крa7 Фa2+ 77. Крb8 Фh2+ 78. Крa7 (78. Крc8 Фh8+ 79. Крc7 Ф:a8) **78...Фc7+ 79. Фb7 Ф:b7×.**

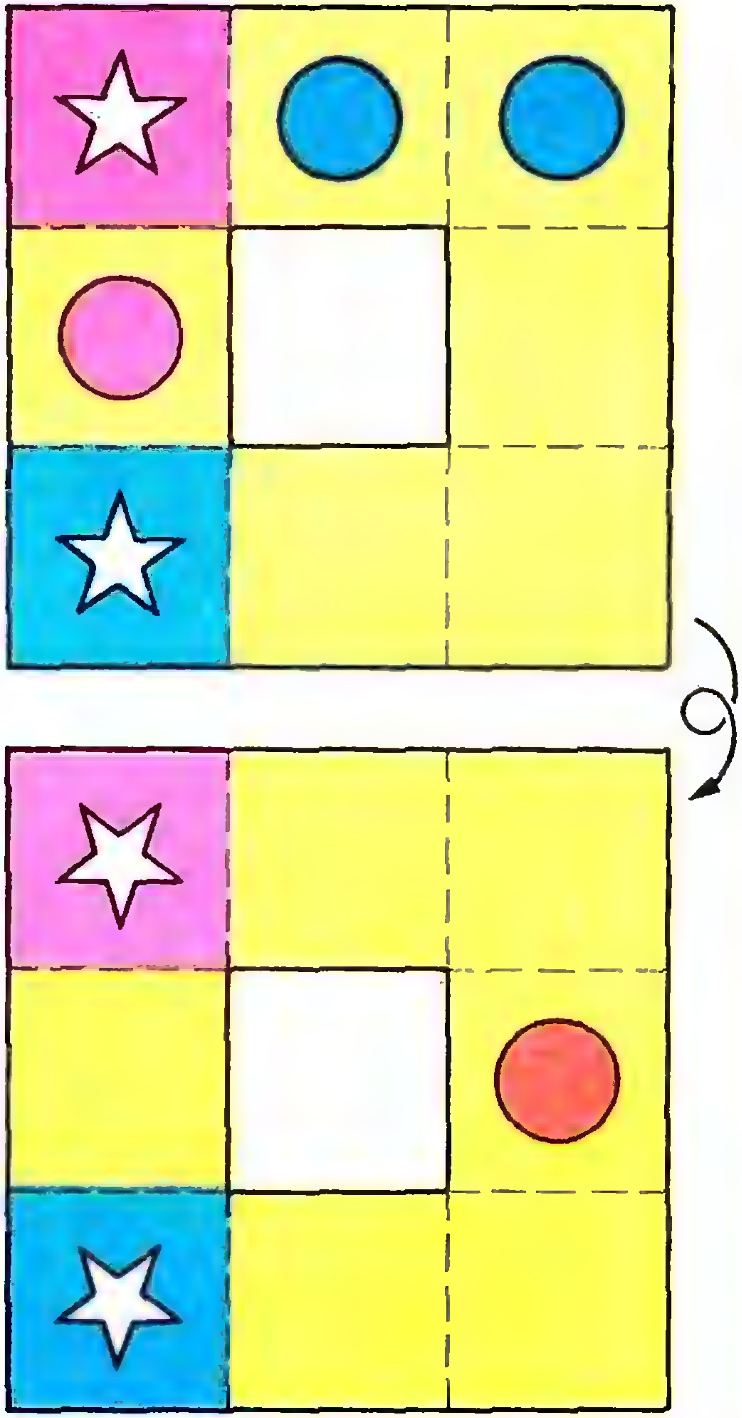
Понятно, что за доской, тем более при недостатке времени, ошибиться нетрудно, так что игру Лендьела и Леви не стоит сильно критиковать. Но интересно, что в фундаментальной «Энциклопедии шахматных окончаний», недавно изданной в Югославии, этот эндшпиль также приведен с несколькими неточностями:

66...Фf4+ 67. Крe6 (после 67. Крg6 Кe5+ 68. Крg7 Фf7+ белые мгновенно получают мат) **67...Кc5+ 68. Крe7 Фh4+ 69. Крf7 Фh7+ 70. Крf6 Кe4+ 71. Крe6 Фg6+ 72. Крd7?** (точнее 72. Крe7, затягивая сопротивление на один ход) **Фf7+ 73. Крc8 Кd6+?** (правильно 73...Фg8+, выигрывая не в 8 ходов, а в 6) **74. Крb8 Фe8+ 75. Крa7 Кb5+ 76. Крb7 Фe4+?** (точнее 76...Фe7+, выигрывая не в 7 ходов, а в 5) **77. Крb8 Фe5+ 78. Крb7 Фd5+?** (точнее 78...Фe7+, также экономя ход — выигрыш не в 6 ходов, а в 5) **79. Крb8 Фd8+ 80. Крb7 Кd6+ 81. Крa7 Фa5+ 82. Крb8 Фb6+ 83. Фb7 Ф:b7×.**

Е. Гик



1 р. 10 к.
Индекс 70465



ФЛЕКСО—КВАДРАТ

Если к головоломкам примени́м эпитет «остроумная», то показанный на рисунке «флексо-квадрат» вполне его заслуживает.

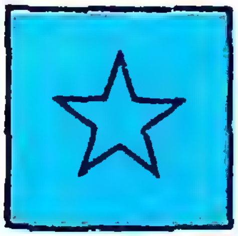
Знатоки, посмотрев на эту головоломку (но не беря ее в руки), говорят, что она, наверное, очень простая. Попытавшись же решить ее, они через несколько минут заявляют, что она неразрешима. И только когда заверишь их, что головоломка имеет решение, они берутся за дело всерьез и довольно быстро справляются с задачей.

На рисунке показаны лицевая и оборотная стороны флексо-квадрата, а справа внизу — два варианта решения головоломки (в сложенном виде флексо-квадрат с обеих сторон должен быть или красным, или синим). Перерисуйте квадрат на бумагу, раскрасьте его с двух сторон в точном соответствии с рисунком, вырежьте сквозные отверстия (ни рисунке они белые) и попробуйте решить.

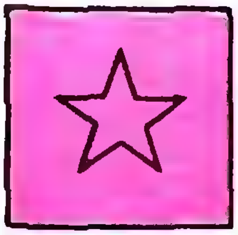
Присылайте нам ваши варианты подобных флексо-головоломок.

А. К.

А



Б



НОМЕР
12

Квант

1992
12

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Российской Академии наук, Президиум Российской Академии образования и коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *Н. Лобачевский.* Геометрические исследования по теории параллельных линий
11 *Ю. Носов.* Микроэлектроника обретает зрение
14 *П. Блиох.* Космический мираж

Задачник «Кванта»

22 Задачи М1376—М1380, Ф1383—Ф1387
23 Решения задач М1310, М1346—М1354, Ф1363—Ф1367

«Квант» для младших школьников

36 Задачи
37 *Л. Генденштейн.* Алиса, кошка и задумчивый осел
51 Конкурс «Математика 6—8»

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

Математический кружок

43 *И. Кушнир.* О двух формулах Эйлера

Практикум абитуриента

47 *Б. Корсунский.* Смотри в корень! И в дискриминант...

Информатика

49 Вокруг «Тетриса»

Олимпиады

52 XXIII Международная физическая олимпиада
56 IV Международная олимпиада по информатике

Информация

61 Заочная физико-техническая школа при МФТИ
64 Заочная аэрокосмическая школа
66 Новый прием в СУНЦ МГУ и НГУ

Игры и головоломки

68 In vino veritas

Фантастика

70 *Б. Круна.* Все наверх!

74 **Ответы, указания, решения**

76 **Напечатано в 1992 году**

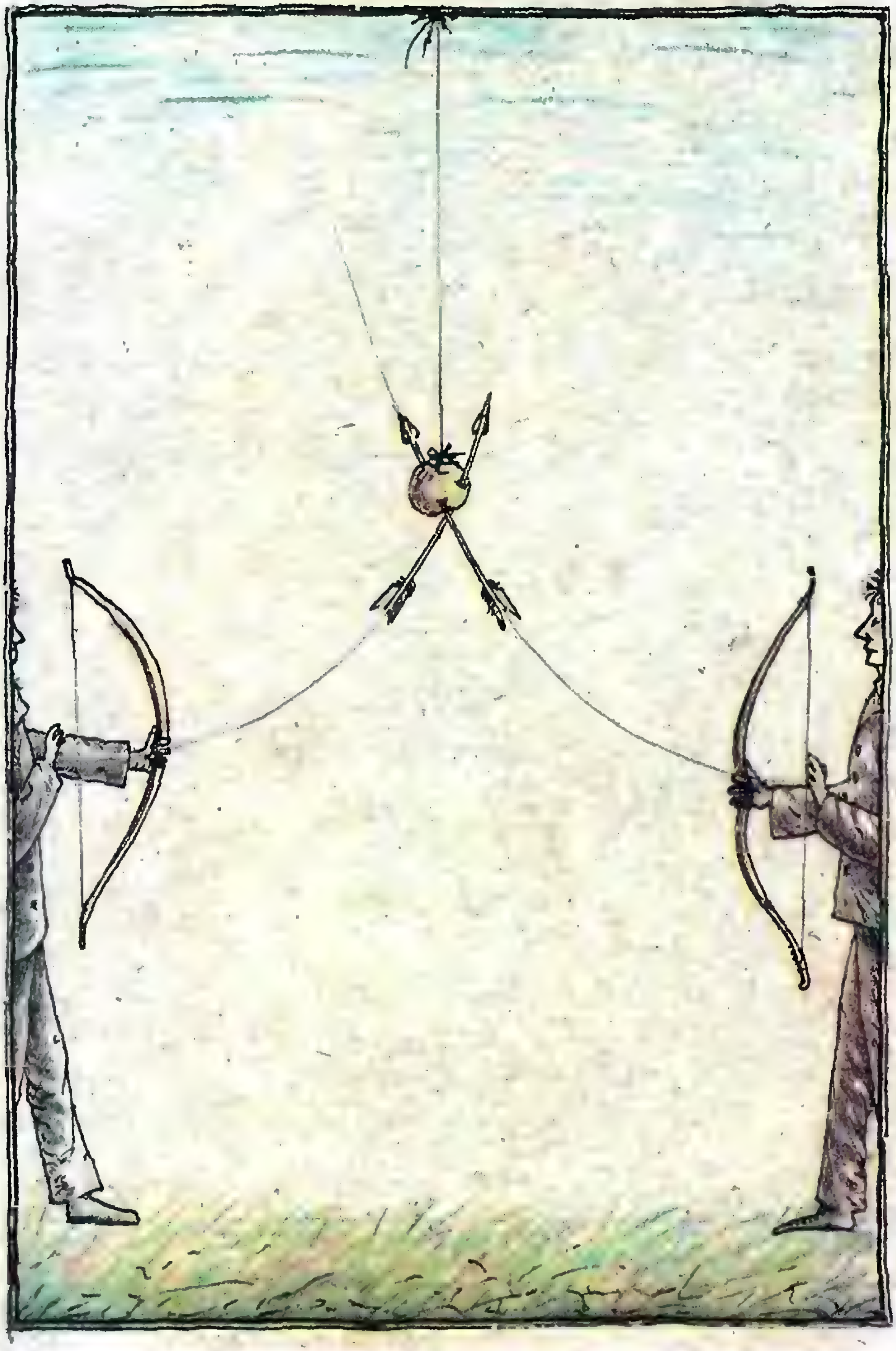
79 **Анкета 12—92**

Реклама *(67)*

Наша обложка

1 *Фейерверк парабол?*
2 *Картина В. Ермолаевой «Лукреций, указующий на Солнце» (1934), подсказанная поэмой Тита Лукреция Кара «О природе вещей».*
3 *Шахматная страничка.*
4 *«С Новым годом!» — решение единственное.*

© «Квант». 1992



2

В этом номере журнала мы публикуем первую часть знаменитого сочинения Н. И. Лобачевского «Геометрические исследования по теории параллельных линий», содержащего элементарное изложение начал неевклидовой геометрии. Оно было издано Лобачевским в 1840 году на немецком языке и вышло в свет в Берлине в виде небольшой книжки. По этой книжке с идеями Лобачевского познакомились многие европейские математики; достаточно сказать, что в библиотеке великого немецкого математика К. Ф. Гаусса находилось два экземпляра этой книги, один из которых, по всей вероятности, был прислан самим Лобачевским. Позже с этого немецкого издания были сделаны французский и английский переводы.

По содержанию «Геометрические исследования» Лобачевского естественно разбиваются на три части. Первая часть начинается с краткого перечня предложений, не зависящих от постулата о параллельных линиях. Этот перечень, конечно, не охватывает всех таких предложений — Лобачевский ограничивается теми, которые необходимы ему в дальнейшем изложении.

Основное содержание первой части составляют десять теорем, в которых излагается теория параллельных Лобачевского. Здесь устанавливаются две гипотезы, одна из которых ведет к евклидовой (по Лобачевскому — к «употребительной») геометрии, другая — к созданной им новой геометрии, называемой в книге «воображаемой». Устанавливается понятие об угле параллельности и связанной с ним функцией $\Pi(x)$; изучается зависимость между суммой углов треугольника и постулатом о параллельных линиях.

Во второй части вводятся понятия о предельной линии и предельной поверхности и доказывается теорема, что геометрия предельной поверхности совпадает с евклидовой планиметрией. Третья часть содержит неевклидову тригонометрию и вывод основного соотношения

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{-x/k}.$$

Предлагаем вашему вниманию первую часть «Геометрических исследований» Лобачевского. Мы сохранили стиль и обозначения автора, сделав лишь следующие изменения. Для удобства мы разделили текст на параграфы, опустили некоторые из упомянутых выше предложений, не использующиеся в этой части книги, а основу ее — предложения 16—25 — перенумеровали как теоремы 1—10.

Весь остальной текст оставлен без изменений.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ

Н. ЛОБАЧЕВСКИЙ

Введение

В геометрии я нашел некоторые несовершенства, которые я считаю причиной того, что эта наука, поскольку она не переходит в анализ, до настоящего времени не вышла ни на один шаг за пределы того состояния, в каком она к нам перешла от Евклида. К этим несовершенствам я отношу неясность в первых понятиях о геометрических величинах, способы, которыми мы себе представляем измерение этих величин, и, наконец, важный пробел в теории параллельных линий, к восполнению которого все усилия математиков до настоящего времени были тщетными.

Чтобы не утомлять читателей множеством предложений, коих доказательства не представляют затруднений, я привожу здесь наперед только те из них, знание которых необходимо для последующего.

1) *Прямая линия покрывает себя самое во всех положениях.* Под этим я разумею, что при вращении поверхности прямая линия не меняет своего места, если она проходит через две неподвижные точки поверхности.

2) Две прямые не могут пересекаться в двух точках.

3) Прямая линия, будучи достаточ-

но продолжена в обе стороны, должна уходить за всякие пределы и таким образом делит ограниченную плоскость на две части.

4) Две прямые, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, никогда не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали.

5) Прямая линия всегда пересекает другую прямую, если переходит с одной ее стороны на другую.

6) Вертикальные углы, у которых стороны одного составляют продолжения сторон другого, равны. Это справедливо как в применении к плоским прямолинейным углам, так и в применении к плоскостным двугранным углам.

7) Две прямые не могут пересечься, если какая-либо третья прямая пересекает их под равными углами.

8) В прямолинейном треугольнике равным углам противолежат равные стороны, и обратно.

9) В прямолинейном треугольнике большей стороне противолежит также большой угол. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого из катетов, и прилежащие к ней углы острые.

10) Прямолинейные треугольники конгруэнтны, если у них равны сторона и два угла или две стороны и заключенный между ними угол, или две стороны и угол, противолежащий большей стороне, или три стороны.

11) Прямая линия, перпендикулярная к двум другим прямым, не лежащим с нею в одной плоскости, перпендикулярна ко всем прямым, проведенным через точку их общего пересечения в плоскости двух последних прямых.

Параллельные линии

Начиная отсюда, дальнейшие предложения уже сопровождаются пояснениями и доказательствами.

Теорема 1. *Все прямые линии, выходящие в некоторой плоскости из одной точки, могут быть по отношению к некоторой заданной прямой той же плоскости разделены на два класса, именно на* ***пересекающие*** *ее и* ***непересекающие. Граничная линия*** *одного и другого класса этих прямых линий называется* ***параллельной заданной линии.***

Из точки A (рис. 1) опустим на заданную линию BC перпендикуляр AD, к которому, в свою очередь, восставим перпендикуляр AE. В прямом угле EAD прямые, выходящие из точки A, либо все встречают линию DC, как, например, AF, либо же некоторые, подобно перпендикуляру AE, не встречают линии DC. Не зная, есть ли перпендикуляр AE единственная линия, которая не встречается с DC, будем считать возможным, что существуют и другие линии, например AG, которые не встречают DC, сколько бы мы их ни продолжали. При переходе от пересекающих линий AF к непересекающим AG мы должны встретить линию AH, параллельную DC,— граничную линию,— по одну сторону которой ни одна линия AG не встречает DC, между тем как по другую сторону каждая линия AF пересекает линию DC. Угол HAD между параллелью AH и перпендикуляром AD называется *углом параллели* (углом параллельности); мы будем здесь обозначать его через $\Pi(p)$ при $AD=p$.

Если $\Pi(p)$ есть прямой угол, то продолжение AE' перпендикуляра AE также будет параллельно продолжению DB линии DC; к этому еще

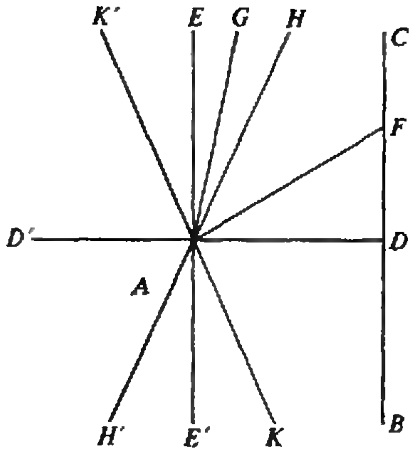


Рис. 1.

заметим, что в отношении четырех прямых углов, которые при точке A образуют перпендикуляры AE и AD и их продолжения AE' и AD', каждая прямая линия, выходящая из точки A, либо сама, либо по крайней мере своим продолжением расположена в одном из тех двух прямых углов, которые обращены к линии BC, так что, кроме параллели EE', все другие прямые по достаточном продолжении в обе стороны должны пересекать линию BC.

Если $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, то по другую сторону перпендикуляра AD, под тем же углом $DAK = \Pi(p)$, будет проходить еще одна линия AK, параллельная продолжению DB линии DC; таким образом, при этом допущении мы должны отличать еще *сторону параллельности*. Все остальные линии или их продолжения внутри двух прямых углов, обращенных к BC, принадлежат к пересекающим, если они лежат внутри угла $HAK = 2\Pi(p)$ между параллелями; напротив того, они принадлежат к непересекающим AG, если они расположены по другую сторону параллелей AH и AK в отверстии двух углов $EAH = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$, $E'AK = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$ между параллелями и перпендикуляром EE' к AD. Подобным же образом по другую сторону перпендикуляра EE' продолжения AH' и AK' параллелей AH и AK также будут параллельны BC; остальные линии принадлежат в угле $K'AH'$ к пересекающим, а в углах $K'AE$ и $H'AE'$ — к непересекающим.

Сообразно этому при предположении $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ линии могут быть только пересекающими или параллельными; если же принять, что $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, то нужно допустить две параллели, одну по одну сторону перпендикуляра, другую по другую его сторону; кроме того, между остальными линиями нужно различать пересекающие и непересекающие. Как при одном, так и при другом предположении признаком параллелизма служит то, что линия становится пересекающей при малейшем отклонении в ту сторону, где лежит параллель; таким образом, если AH параллельна DC, то каждая линия AF, сколь бы мал ни был угол HAF, пересекает DC.

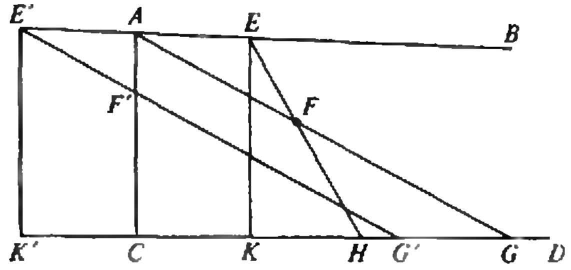


Рис. 2.

Теорема 2. *Прямая линия сохраняет признак параллельности во всех своих точках.*

Пусть прямая AB (рис. 2) будет параллельна CD и пусть AC будет перпендикуляр к последней. Мы рассмотрим две точки, которые расположены произвольно; одна на линии AB и другая на ее продолжении по другую сторону перпендикуляра. Положим, что точка E лежит по ту сторону перпендикуляра, с которой AB рассматривается как параллельная CD. Из точки E опустим перпендикуляр EK на CD, затем проведем EF так, чтобы она проходила внутри угла BEK. Точки A и F соединим прямой линией, продолжение которой должно встретить CD где-либо в G (теорема 1). Вместе с тем мы получим треугольник ACG, внутрь которого входит линия EF; так как эта последняя не может пересечь AC в силу самого построения, а также не может вторично встретить ни AG, ни EK (предложение 2), то она должна встретить CD в какой-либо точке H (предложение 3).

Пусть теперь E' будет точка на продолжении линии AB и пусть $E'K'$ будет перпендикуляр на продолжении линии CD; проведем линию $E'F'$ под столь малым углом $AE'F'$, чтобы она пересекла AC где-либо в F'; затем

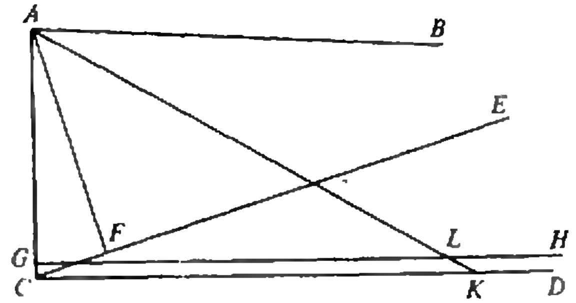


Рис. 3.

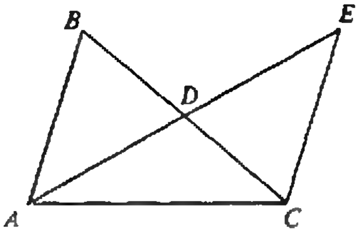


Рис. 4.

из A проведем под тем же углом с AB линию AF, продолжение которой встретит CD в G (теорема 1). Таким образом мы получаем треугольник AGC, в который входит продолжение линии $E'F'$; так как эта линия не может вторично пересечь AE, а также не может пересечь AG, ибо угол $BAG = BE'G'$ (предложение 7), то она должна встретить CD где-либо в G'.

Таким образом, из каких бы точек E и E' прямой AB ни выходили линии EF и $E'F'$ и как бы мало они ни отклонялись от линии AB, они всегда пересекут линию CD, которой AB параллельна.

Теорема 3. *Две линии всегда взаимно параллельны.*

Пусть AC будет перпендикуляр к линии CD (рис. 3), которой AB параллельна; из C проведем линию CE под каким угодно острым углом ECD к CD и из A опустим перпендикуляр AF на CE; получим прямоугольный треугольник ACF, в котором гипотенуза AC больше катета AF (предложение 9). Отложим $AG = AF$ и наложим AF на AG; тогда AB и FE займут положение AK и GH, причем угол $BAK = FAC$; следовательно, AK должна пересечь линию DC где-либо в точке K (теорема 1); таким образом получится треугольник AKC, внутрь которого входит перпендикуляр GH; он встречает линию AK в L (предложение 3) и тем определяет на линии AB расстояние AL точки пересечения линий AB и CE от точки A.

Отсюда следует, что CE всегда встретит AB, сколь бы мал ни был угол ECD; поэтому CD параллельна AB (теорема 1).

Сумма углов прямолинейного треугольника

Теорема 4. *В прямолинейном треугольнике сумма трех углов не может превышать двух прямых.*

Допустим, что в треугольнике ABC (рис. 4) сумма трех углов равна $\pi+\alpha$; если его стороны не равны, возьмем наименьшую из них BC, разделим ее пополам в D, проведем из A через D линию AD и на ее продолжении сделаем DE равным AD; затем соединим точку E с точкой C прямой EC. В равных треугольниках ADB и CDE угол $ABD = DCE$ и $BAD = DEC$ (предложения 6 и 10); отсюда следует, что в треугольнике ACE сумма углов также должна быть равна $\pi+\alpha$; кроме того, наименьший угол BAC треугольника ABC (пред-

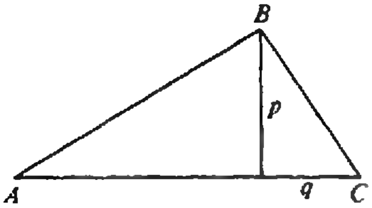


Рис. 5.

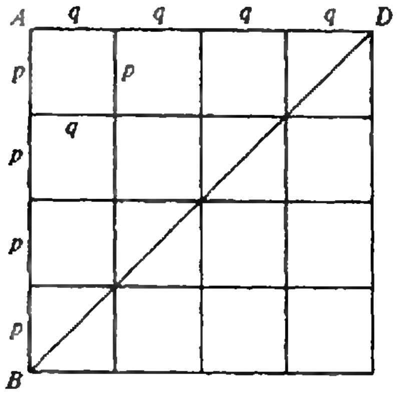


Рис. 6.

ложение 9) перешел в новый треугольник ACE, причем он разбился на две части EAC и AEC. Продолжая таким же образом, разделяя при этом пополам каждый раз ту сторону, которая противолежит наименьшему углу, мы необходимо придем к треугольнику, сумма трех углов которого равна $\pi+\alpha$, но в котором окажутся два угла, каждый из которых по абсолютной величине меньше $\frac{1}{2}\alpha$; так как, однако, третий угол не может быть больше π, то α должно быть либо нулем, либо отрицательным.

Теорема 5. *Если в каком-либо прямолинейном треугольнике сумма трех углов равна двум прямым, то это имеет место и во всяком другом треугольнике.*

Положим, что в прямолинейном треугольнике ABC (рис. 5) сумма трех углов $=\pi$; в таком случае по крайней мере два его угла должны быть острые. Из вершины B третьего угла опустим на противоположную сторону перпендикуляр p; тогда треугольник ABC разобьется на два прямоугольных треугольника, в каждом из которых сумма трех углов также должна быть равна π, ибо ни в одном из них она не может превышать π, а в составленном из них треугольнике она не должна быть меньше π. Таким образом мы получаем прямоугольный треугольник с катетами p и q, а из него получаем четырехугольник, в котором противоположные стороны равны, а прилежащие друг к другу стороны p и q взаимно перпендикулярны (рис. 6). Повторно прикладывая тот же четырехугольник, можно получить подобный же четырехугольник со сторонами np и q и, наконец, четырехугольник $ABCD$ со взаимно перпендикулярными сторонами, в котором $AB=np$, $AD=mq$, $DC=np$, $BC=mq$, где m и n суть произвольные целые числа. Такой четырехугольник делится диагональю BD на два равных прямоугольных треугольника BAD и BCD, в каждом из которых сумма трех углов равна π. Числа m и n могут быть выбраны так, чтобы прямоугольный треугольник ABC (рис. 7), катеты которого $AB=np$, $BC=mq$, охватил другой заданный прямоугольный треугольник DBE, коль скоро их прямые углы будут приведены в совмещение. Если проведем линию DC, то получим еще прямоугольные треугольники, из которых каждые два последовательно имеют общую сторону. Треугольник ABC получается путем соединения двух треугольников ACD и DCB, ни в одном из которых сумма трех углов не может быть больше π; она должна быть поэтому равна π, поскольку в составленном треугольнике эта сумма должна быть равна π. Таким же образом треугольник BDC состоит из двух треугольников DEC и BDE; поэтому и в треугольнике DBE сумма трех углов должна быть равна π; и вообще это должно иметь место во всяком треугольнике, так как всякий треугольник разбивается на два прямоугольных треугольника.

Отсюда следует, что возможны только два допущения: либо сумма трех углов во всех прямолинейных треугольниках равна π, либо же она во всех треугольниках меньше π.

Теорема 6. *Из данной точки всегда можно провести прямую линию таким образом, чтобы она образовала с данной прямой сколь угодно малый угол.*

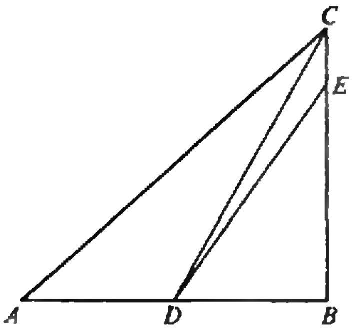


Рис. 7.

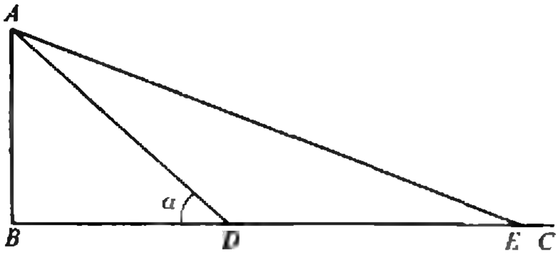


Рис. 8

Из данной точки A (рис. 8) опустим на данную прямую BC перпендикуляр AB; на BC возьмем произвольную точку D и проведем линию AD; далее, сделаем $DE=AD$ и проведем AE. Пусть в прямоугольном треугольнике ABD угол $ADB=\alpha$. В таком случае в равнобедренном треугольнике ADE угол AED должен быть либо равен $\frac{1}{2}\alpha$, либо меньше (предложение 8 и теорема 5). Продолжая таким образом, мы, наконец, придем к такому углу AEB, который меньше любого заданного угла.

Теорема 7. *Если два перпендикуляра к одной и той же прямой линии параллельны между собой, то в прямолинейных треугольниках сумма трех углов равна* π.

Положим, что линии AB и CD (рис. 9) параллельны между собой и перпендикулярны к AC. Из A проведем линии AE и AF к точкам E и F, взятым на линии CD на любых расстояниях $FC>EC$ от точки C. Допустим, что в прямоугольном треугольнике ACE сумма трех углов равна $\pi-\alpha$, а в треугольнике AEF она равна $\pi-\beta$; в таком случае в треугольнике ACF сумма углов будет равна $\pi-\alpha-\beta$, причем ни α, ни β не могут быть отрицательными. Пусть, далее, угол $BAF=a$, $AFC=b$; в таком случае $\alpha+\beta=a-b$; теперь, удаляя линию AF от перпендикуляра AC, можно сделать угол a между AF и параллелью AB сколь угодно малым; так же можно уменьшать и угол b; следовательно, два угла α и β не могут иметь никакой другой величины, кроме $\alpha=0$ и $\beta=0$.

Отсюда следует, что во всех прямолинейных треугольниках сумма трех углов либо равна π, и тогда угол параллельности $\Pi(p)=\frac{1}{2}\pi$ для любой линии p, либо во всех треугольниках эта сумма $<\pi$, и тогда также $\Pi(p)<\frac{1}{2}\pi$.

Первое предположение служит основой *обыкновенной геометрии и плоской тригонометрии*. Второе предположение также может быть допущено, не приводя ни к какому противоречию в результатах; оно обосновывает новое геометрическое учение, которому я дал название *«воображаемая геометрия»* и которое я здесь намерен изложить вплоть до вывода уравнений между сторонами и углами прямолинейных и сферических треугольников.

Исследование угла параллельности

Теорема 8. *Для любого заданного угла α можно найти такую линию p, что $\Pi(p)=\alpha$.*

Пусть AB и AC (рис. 10) — две прямые линии, образующие при пересечении острый угол α; на AB возьмем произвольно точку B' и из этой точки опустим на AC перпендикуляр $B'A'$, сделаем $A'A''=AA'$, восставим в A'' перпендикуляр $A''B''$ и так будем продолжать до тех пор, пока придем к перпендикуляру CD, который уже не встречает AB. Это необходимо должно иметь место, ибо если в треугольнике $AA'B'$ сумма всех трех углов равна $\pi-a$, то в треугольнике $AB'A''$ она равна $\pi-2a$, в треугольнике $AA''B''$ она меньше

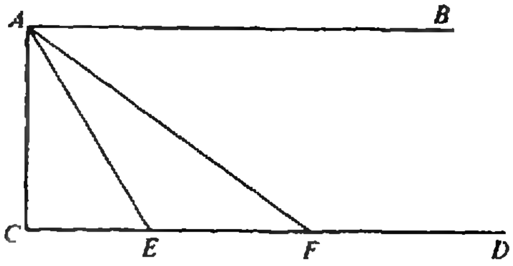


Рис. 9.

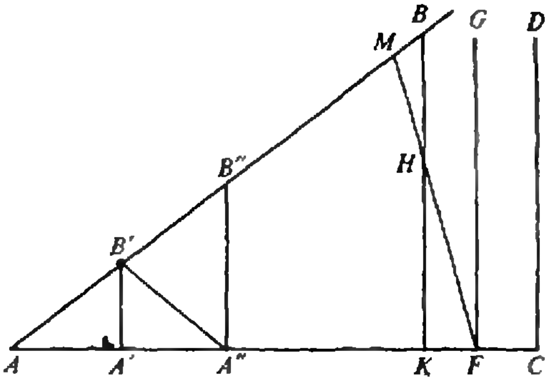


Рис. 10.

$\pi-2a$ (теорема 5) и т. п., пока она, наконец, не станет отрицательной и при этом обнаружит невозможность образования треугольника. Перпендикуляр CD может оказаться именно тем, до которого все перпендикуляры из точек, лежащих ближе к A, пересекают AB; во всяком случае при переходе от пересекающих к непересекающим такой перпендикуляр должен существовать. Теперь из точки F проведем линию FH, образующую с FG острый угол HFG и именно с той стороны, с которой лежит точка A. Из какой-либо точки H линии FH опустим на AC перпендикуляр HK, продолжение которого, следовательно, должно пересечь AB где-либо в B; он образует, таким образом, треугольник AKB, внутрь которого входит продолжение линии FH, и потому оно должно встретить гипотенузу AB где-либо в M. Так как GFH есть произвольный угол и может быть взят сколь угодно малым, то линия FG параллельна AB и $AF=p$ (теоремы 1 и 3).

Легко усмотреть, что с уменьшением p угол α возрастает, приближаясь при $p=0$ к $\frac{1}{2}\pi$; с возрастанием p угол α уменьшается, все более приближаясь к нулю при $p=\infty$. Так как совершенно произвольно, какой угол разуметь под символом $\Pi(p)$, когда линия p выражается отрицательным числом, то мы примем

$$\Pi(p)+\Pi(-p)=\pi,$$

каковое равенство должно иметь место для всех значений p, как положительных, так и отрицательных, а также для $p=0$.

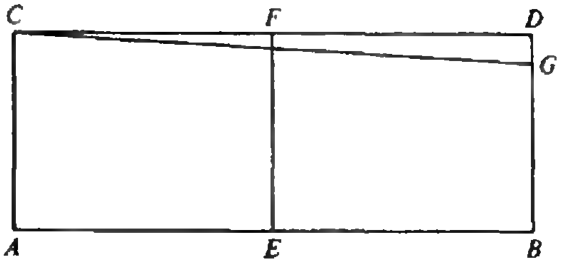


Рис. 11.

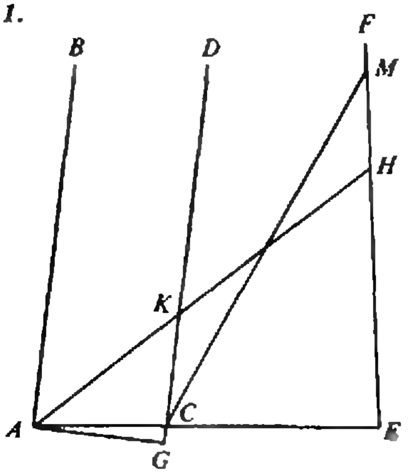


Рис. 12.

Взаимное расположение параллельных линий

Теорема 9. *Чем далее параллельные линии продолжаются в сторону параллельности, тем более они друг к другу приближаются.*

К прямой AB (рис. 11) восставим два перпендикуляра $AC=BD$ и конечные их точки соединим прямой линией CD. Тогда четырехугольник $CABD$ будет иметь два прямых угла при A и B, а при C и D — два острых угла (теорема 7), которые равны между собой, как в этом легко убедиться, налагая этот четырехугольник на самого себя так, чтобы линия BD упала на AC, а AC — на BD. Разделим AB пополам и в точке деления E восставим перпендикуляр EF к AB. Он должен быть также перпендикулярен к CD, потому что четырехугольники $CAEF$ и $FEBD$ покрывают друг друга, если наложим их друг на друга так, чтобы линия FE осталась в том же положении. Вследствие этого линия CD не может быть параллельна AB, параллель же к последней в точке C, именно CG, должна быть наклонена в сторону AB (теорема 1) и отсечет от перпендикуляра BD часть $BG<CA$. Так как точка C выбрана на линии CG произвольно, то отсюда следует, что CG тем более приближается к AB, чем далее мы ее продолжаем.

Теорема 10. *Две прямые линии, параллельные третьей, параллельны между собой.*

Примем сначала, что три линии AB, CD и EF (рис. 12) лежат в одной

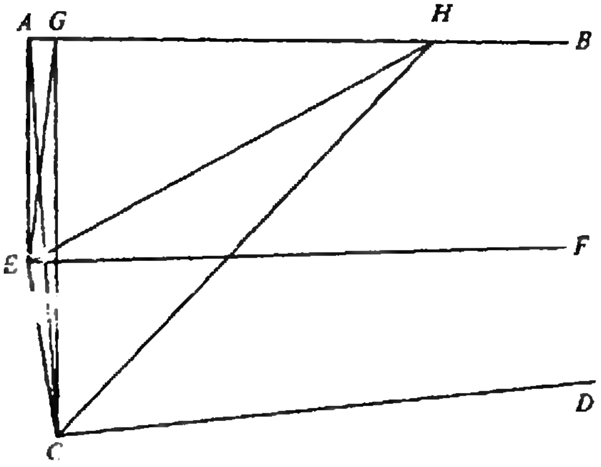


Рис. 13.

плоскости. Если две из них по порядку AB и CD параллельны крайней линии EF, то AB и CD также параллельны между собой. Чтобы это обнаружить, опустим из произвольной точки A крайней линии AB на другую крайнюю FE перпендикуляр AE, который пересечет среднюю линию CD в некоторой точке C (предложение 3) под углом $DCE < \frac{1}{2}\pi$ со стороны параллели CD к EF (теорема 7). Перпендикуляр AG, опущенный из той же точки A на CD, должен упасть внутри отверстия острого угла ACG (предложение 9); всякая другая линия AH, проведенная из A внутри угла BAC, должна пересечь линию EF, параллельную AB, где-либо в H, сколь бы мал ни был угол BAH; следовательно, CD пересечет в треугольнике AEH линию AH где-либо в K, так как она не может встретиться с EF. Если бы AH проходила из точки A внутри угла CAG, то она должна была бы в треугольнике CAG пересечь продолжение CD где-либо между точками C и G. Отсюда следует, что AB и CD параллельны (теоремы 1 и 3).

Если примем, что обе внешние линии AB и EF параллельны средней CD, то каждая линия AK, проведенная из точки A внутри угла BAE, пересечет линию CD где-либо в точке K, сколь бы мал ни был угол BAK. На продолжении AK возьмем произвольно точку L и соединим ее с C линией CL, которая пересечет EF где-либо в M, вследствие чего образуется треугольник MCE. Продолжение линии AL внутрь треугольника MCE не может вторично пересечь ни AC, ни CM; следовательно, оно должно встретить EF где-либо в H; поэтому AB и EF взаимно параллельны.

Пусть теперь параллели AB и CD (рис. 13) лежат в двух плоскостях, пересечение которых есть линия EF. Из произвольной точки E последней опустим перпендикуляр EA на одну из двух параллелей, например на AB; затем из основания A перпендикуляра EA опустим вновь перпендикуляр AC на вторую параллель CD и соединим концы E и C обоих перпендикуляров линией EC. Угол BAC должен быть острым (теорема 7); следовательно, перпендикуляр CG, опущенный из C на AB, падает в точку G по ту сторону от CA, в которой считаем линии AB и CD параллельными. Каждая линия EH, сколь бы мало она ни отклонялась от EF, лежит с EC в плоскости, которая должна пересечь плоскость двух параллелей AB и CD вдоль некоторой линии CH. Эта последняя линия пересекает где-либо AB и именно в той же точке H, которая принадлежит всем трем плоскостям и через которую необходимо проходит также линия EH; следовательно, EF параллельна AB. Подобным же образом можно обнаружить параллельность линий EF и CD.

Сообразно этому предположение, что линия EF параллельна одной из двух других параллельных между собой линий AB и CD, означает не что иное, как то, что EF рассматривается как пересечение двух плоскостей, в которых лежат параллели AB и CD. Поэтому две линии параллельны между собой, если они параллельны одной и той же третьей линии, хотя бы они лежали и в различных плоскостях. Последнее предложение можно выразить также следующим образом: *три плоскости пересекаются по линиям, которые все между собой параллельны, поскольку предполагается параллельность двух из них.*

МИКРОЭЛЕКТРОНИКА ОБРЕТАЕТ ЗРЕНИЕ

Доктор физико-математических наук
Ю. НОСОВ

Тому, кто умеет,— дело найдется

Неудивительно, что с таким «джентльменским набором» превосходных качеств ПЗС уверенно шагнули в непростой мир видеоинформации. Первые же образцы линеек и матриц стали использоваться в фототелеграфии, для счета деталей на конвейере, в ряде технологических установок — там, где было яркое освещение и не требовалась высокая разрешающая способность. А в 1974 году появились уже ПЗС-камеры телевизионного типа, пока еще «черно-белые» (вернее, монохромные) и малоформатные. Объемом чуть больше пары спичечных коробков, эти камеры по мере удешевления приобретали все больше профессий: входное читающее устройство ЭВМ; электронный глаз промышленных роботов; электронная «сиделка», наблюдающая больного или ребенка; электронный дверной глазок, демонстрирующий хозяину квартиры его посетителей на экране телевизора; электронное зеркало заднего вида громоздких автомобилей, перевозящих особо ответственные грузы, и многое другое в том же роде.

Вот, например, одна из ПЗС-систем идентификации личности по отпечаткам пальцев: при расшифровке папиллярных линий она способна различить до 256 градаций яркости, тогда как оператору под силу лишь 30. Достоверность, быстрота, исключение ошибок, обусловленных утомляемостью. Еще конкретный пример. При оценке состояния и сохранности старинных архивных документов исследуют контраст чернил и пергамента, степень покоробленности страниц, наличие следов бактериального или химического воздействия. Во избежание гибели исследуемый документ должен находиться под колпаком в среде гелия. Много ли найдется желающих заниматься этой рутинной, монотонной деятельностью? Использование «ПЗС-архивиста» раз в 10 повышает скорость анализа материалов, причем он не требует отпуска за вредность, не ввязывается в забастовки.

Но все это пока еще не телевидение — для этого ПЗС-камеры первого поколения (конец 70-х — начало 80-х годов) имеют слишком низкую разрешающую способность, а полноформатные матрицы чересчур дороги.

Однако кое-кто мог позволить себе роскошь не считаться с затратами, первая среди них — космонавтика. Для этой «капризной дамы» изготовили уникальные матрицы — с числом элементов разложения около миллиона, разработали охлаждаемые устройства с исключительно низким уровнем шумов и фоновой засветки. Но потрудились не зря. В 1986 году ПЗС-камеры позволили получить снимки ядра кометы Галлея, а чуть позже — передать на Землю из трагически оборвавшейся космической экспедиции рельефные фотографии Фобоса (крошечного спутника Марса) — фотографии, обошедшие журналы всего мира. Способность ПЗС к длительному накоплению светового потока (в некоторых охлаждаемых образцах генерируемые электроны способны «прожить» десятки минут) позволяет им почувствовать почти невидимые объекты с блеском в 24 звездные величины (24^m). За-

---

Окончание. Начало см. в «Кванте» № 11.

метим, что лучшие из гигантских наземных телескопов имеют проницающую способность 25^m, а космические — 29^m. Астронавигация, ориентация по звездам стала надежным «куском хлеба» ПЗС.

Спустимся, однако, с небес на землю. Широчайшей сферой применения ПЗС становится измерительная техника. Благодаря жесткой геометрии растра, о чем уже говорилось (в первой части статьи), эти приборы не только видят предмет, но одновременно измеряют его. Надо лишь выудить результаты этих измерений, и провести их математическую обработку. В одной из систем при испытании самолета в аэродинамической трубе удается фиксировать смещение реперных меток на 0,1 мкм. ПЗС-контролер на станках с ЧПУ позволяет измерять обрабатываемые детали с точностью до 0,01 мкм — это всего лишь 15 моноатомных слоев металла! «Эка невидаль,— укоротит наш восклицательный знак кто-нибудь из любознательных читателей,— туннельный микроскоп (Нобелевская премия 1986 г.), скользя тончайшим зондом вдоль поверхности, чувствует ее шероховатости в полатома». Верно, но эти устройства очень дороги, сложны в эксплуатации, работают с образцами, помещенными в вакуум. Так что стоит ли сопоставлять экзотику с «ПЗС-штангенциркулем», который имеет все основания не сегодня-завтра появиться в цехах и на участках.

Особый раздел послужного списка ПЗС — медицина. В эндоскопии уже давно развиваются телевизионные методы исследования, для чего окуляр фиброскопа стыкуется с видиконом. Удобно вывести увеличенное цветное изображение внутренностей пациента на экран монитора — и консилиум становится достоверней, и лекции для студентов содержательнее. Можно записывать увиденное на магнитную ленту и создавать банки изображений — это позволяет следить за динамикой болезни и компьютеризировать обработку снимков, что особенно существенно при массовой диспансеризации. Все это обеспечивает и ПЗС-техника (в чем-то лучше видиконов), но она открывает и принципиально новые возможности. Миниатюрность и низковольтовое возбуждение ПЗС-кристалла позволяют монтировать его на дистальном конце фиброскопа, при этом световод заменяется тонкими проводниками. Увеличивается угол обзора (при использовании световодов он мал), повышается надежность эндоскопа (световоды ломаются), заглатываемая пациентом трубка становится тоньше. Специальные ПЗС-структуры, восприимчивые к рентгеновским лучам, позволят рентгенологам просматривать наши легкие на телеэкране, избавят их от вредного облучения и неудобств затемненных комнат.

Проекты искусственного зрения — не робота или компьютера, а человека — обсуждаются давно, но лишь с появлением ПЗС они обрели реальный технический базис. Похоже, что тема «ПЗС-медицина» не скоро будет исчерпана.

И все-таки самый невероятный бум ожидается (в ряде стран он уже начался) при внедрении ПЗС в телевидение, видео, кино, фотографию. Если подтвердятся прогнозы резкого снижения цен (а они подтвердятся), волна этого бума окажется под стать той, которую вызвало распространение персональных компьютеров, а может быть еще выше и продолжительнее. Типичная ПЗС-видеокамера массой 1—1,5 кг кроме электронного глаза содержит видеокассету на 1—1,5 часа работы и маленький жидкокристаллический экран для оперативного просмотра отснятого. Качество съемок таких любительских камер, выпускаемых миллионными тиражами (конечно же, японцами), не уступает кинокамерам с 8-миллиметровой пленкой. Профессиональные ТВ-камеры с ПЗС-матрицами пока еще очень сложны, громоздки, дороги; твердотельные передатчики для ТВЧ (телевидение высокой четкости) находятся в стадии разработки. Для этого потребуются фоточувствительные матрицы нового поколения, которые при трехцветности растра будут содержать не менее 1100—1400 строк (таковы ТВЧ-стандарты) и обеспечивать сканирование с тактовой частотой 40—100 МГц. Технологические трудности огромны (это несомненно), но, когда их удается преодолеть (и это несомненно), качество ПЗС-съемок сравняется с тем, которое обеспечивает 36-миллиметровая пленка,— последний бастион «киношников» будет взят электроникой. Три музы — телевидение, кино, видео — станут близнецами.

И все-таки опять не точка, за этой далью уже явственно проступает следующая — восприятие объемных изображений.

Если электронное кино пока еще в перспективе, то фотография становится объемной на наших глазах. ПЗС-фотоаппарат внешне ничем не отличается от обычного «Зенита» или «Кодака», но начинка иная: сразу за объективом расположена кремниевая матрица с сервисными интегральными схемами, в боковинах — миниатюрные аккумуляторы, в остальном объеме — магнитное дисковое запоминающее устройство. Точь-в-точь старинный особняк, перепланированный внутри под современные квартиры. На миниатюрном диске диаметром 48 мм записывается до 50 слайдов, которые можно и просмотреть на экране телевизора, и отпечатать на лазерном принтере. По-видимому, вскоре диск заменит полупроводниковая память, и из конструкции будут окончательно исключены механически подвижные элементы (электронные жидкокристаллические затворы известны уже давно). Сегодня пока микросхемы запоминают лишь 4—8 снимков, но лиха беда начало — ведь бурный прогресс полупроводниковой памяти одна из самых характерных черт развития микроэлектроники. Если все это будет, если удастся исключить из обращения фотоматериалы, мы получим колоссальную экономию серебра, а многомиллионная армия фотографов избавится от унижающей человека необходимости «химичить» в потемках фотолабораторий и ванных комнат.

Кто-то заметил, что в истории цивилизации можно выделить три равновеликих вехи: изобретение письменности, книгопечатания, персональных компьютеров — с каждым из них люди обретали новый язык общения. Похоже, что изобретение и развитие ПЗС-видеотехники приблизило нас к четвертой ступени той лестницы, по которой человечество поднимается к вершинам покорения многообразного мира информации.

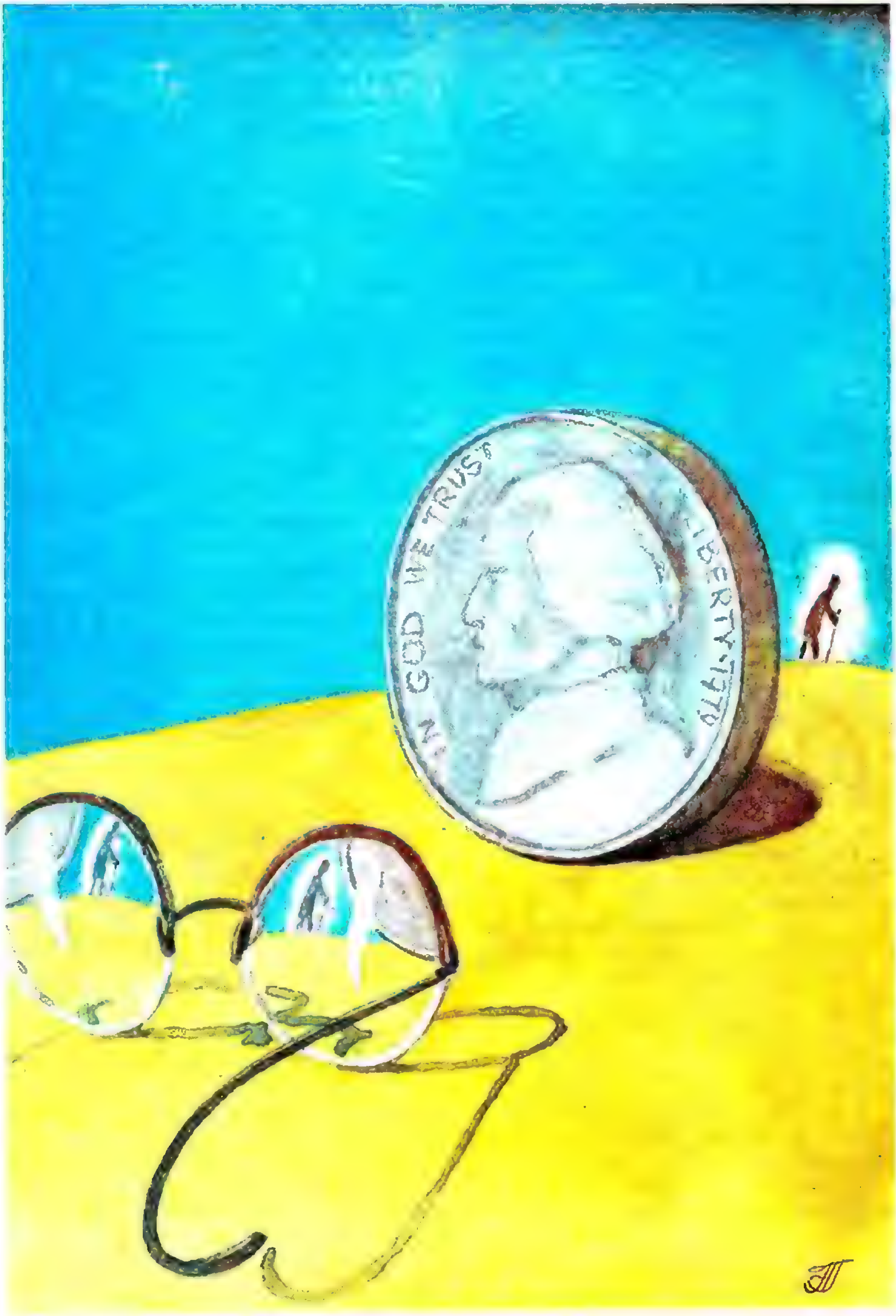
Вместо заключения

Если вам доводилось видеть камкордеры (так частенько называют портативные видеокамеры), то несомненно запомнились и их визитные карточки: Sharp, Panasonic, Philips... А где же наши? Глумиться над отечественной электроникой стало модой, этим пробавляются многие — не станем уподобляться.

Приборы с зарядовой связью относятся к сверхбольшим интегральным схемам, массовый выпуск которых требует создания фактически новой подотрасли со сверхчистыми производственными помещениями, уникальным оборудованием, специальными материалами. А это огромные, многомиллиардные инвестиции.

Заметим, что накопленный отечественными специалистами потенциал вполне в состоянии разрядиться созданием цветных ПЗС-видеокамер, однако вакханалия последних лет, разлагающая наукоемкую промышленность, по-видимому, притормозит этот процесс.

Не хотелось бы заканчивать на минорной ноте — поэтому еще два слова. Все, что сделано — сделано людьми. В этом повествовании явно или неявно они сопоставлялись с великими мира сего — правомерно ли? Возможно и нет, в большинстве своем это обычные, простые люди — автор знаком со многими из создателей ПЗС. Но дело, сработанное ими, переживет их.


IN GOD WE TRUST
LIBERTY 1979

КОСМИЧЕСКИЙ МИРАЖ

(рассказ о гравитационных линзах)

Доктор физико-математических наук
П. БЛИОХ

«Ни одного QSO*) — я плачу Дереку 25 центов. Один QSO — он платит мне 25 центов. Два QSO — он платит мне доллар.»

Такое пари заключили между собой весной 1979 года два астронома: Деннис Уолш и Дерек Уилс в г. Остине (США). Один из них (Д. Уилс) длительное время проводил систематический поиск двойных (расположенных близко друг к другу) квазаров. К моменту заключения пари он исследовал уже около 100 пар и не нашел ни одного QSO — все «двойники» оказались звездами. Поэтому, когда Д. Уолш сообщил ему, что обнаружил два близких звездообразных объекта, он был уверен, что это звезды, а не квазары.

Речь идет о двух слабых (невооруженным глазом они не видны) «звездочках» в созвездии Большой Медведицы, почти сливающихся друг с другом (угол между ними равен $6''$). Их сфотографировали еще в 1950 году, но спектры были получены только весной 1979 года Уолшем с коллегами. Именно по спектрам отличают квазары от звезд, и, заключая пари, Уолш уже знал, что он обнаружил двойной квазар. Уилс сам проверил тщательным образом спектры двойников на 107-дюймовом телескопе, убедился, что проиграл и уплатил доллар.

Как оказалось, доллар можно было и не платить, потому что эта пара представляет собой всего лишь космический мираж — двойное изображение одного квазара.

Близнецы родились 29 марта 1979 года

«Очевидно, мы допустили ошибку и сняли дважды спектр одного и того же источника»,— подумал Д. Уолш, когда, определив спектр одного из квазаров, перешел через несколько минут к его соседу. Астрономы вернулись назад, потом еще раз повторили всю процедуру. Сомнений не было: оба спектра походили друг на друга, как близнецы (в дальнейшем их так и стали называть). Такого совпадения спектров у двух объектов ранее никто не наблюдал (рис. 1). Невозможно было представить, чтобы два разных квазара имели столь одинаковые спектры. Тут-то и появилась мысль о *гравитационной линзе* (ГЛ), которая расщепила изображение источника на два близких компонента. Как это происходит, мы объясним чуть позже, а сначала расскажем немного о предыстории открытия ГЛ.

Свет и радиоволны тоже подчиняются закону всемирного тяготения

Термин «гравитационная линза» появился впервые в работе английского астронома О. Лоджа (1919 г.), хотя об отклонении лучей света в гравитационных полях небесных тел (из-за этого и возникает эффект ГЛ) речь шла значительно раньше. Почти 200 лет назад, в 1801 году, немец-

---

*) QSO — Quasy Stellar Object (Quasar). Так называют звездообразные космические источники, излучающие огромные мощности. Квазары были открыты в 1961 году. Они находятся так далеко, что видны с Земли как звезды, что и отражает их название. Расстояние до квазаров в миллионы раз превышает расстояние до самых далеких звезд нашей Галактики.

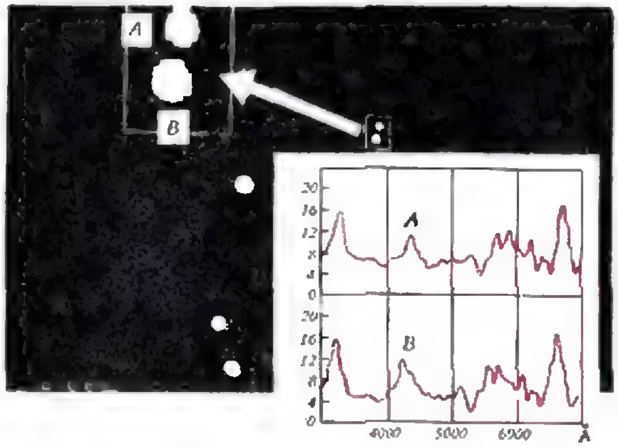


Рис. 1. «Двойной» квазар в созвездии Большой Медведицы и спектры его компонентов A и B. Остальные объекты на снимке — звезды.

кий астроном И. Зольднер рассчитал угол преломления световых лучей в поле тяготения Солнца. Его расчет основывался на теории Ньютона, и результат свелся к следующей простой формуле:

$$\theta_g^{(N)} = r_g/p. \tag{1}$$

Здесь введены следующие обозначения (рис. 2): θ_g — угол преломления светового луча (индекс «N» указывает на расчет по теории Ньютона); r_g — так называемый гравитационный радиус притягивающего тела, пропорциональный его массе M: $r_g[\text{км}] = 1{,}5 \cdot 10^{-27}$ M [кг]; p — прицельный параметр луча, т. е. наименьшее расстояние до центра притяжения, на котором прошел бы луч, если бы он шел по прямой линии.

В 1915 году расчет угла преломления выполнил, основываясь на общей теории относительности (ОТО), ее создатель А. Эйнштейн. Предположив, что в поле тяжести меняются законы геометрии и ход времени (искривление пространства-времени), А. Эйнштейн пришел к выводу, что правильная формула отличается от формулы (1) коэффициентом 2:

$$\theta_g^{(E)} = 2r_g/p. \tag{2}$$

Масса Солнца $M_\odot \approx 2 \cdot 10^{30}$ кг, поэтому его гравитационный радиус $r_g \approx 3$ км. Если луч света проходит вблизи диска Солнца, почти касаясь его, то p в формулах (1) и (2) будет равен радиусу Солнца $R_\odot \approx 7 \times 10^5$ км. При этом получаются следующие значения угла преломления, которые были известны к 1915 году: $\theta_g^{(N)} \approx 0{,}87''$ — по Ньютону; $\theta_g^{(E)} \approx 1{,}75''$ — по Эйнштейну. Понятно, насколько важно было измерить эту величину, которая должна была подтвердить (или опровергнуть) выводы ОТО об искривлении пространства-времени.

Первые измерения удалось осуществить во время полного солнечного затмения 29 мая 1919 года английским астрономам А. Эддингтону и Ф. Дайсону, которые организовали экспедиции в Бразилию и к берегам Африки. Сфотографировав звезды вблизи закрытого Луной Солнца, они измерили их смещения и рассчитали угол преломления лучей. Он оказался равным $1{,}98'' \pm 0{,}18''$ в полном согласии с выводами А. Эйнштейна. С тех пор ОТО стала такой знаменитой не только среди физиков. В наше время угол θ_g измерен намного точнее путем радиоастрономических наблюдений (свет и радиоволны распространяются по тем же законам), не связанных с солнечными затмениями. Результаты измерений еще надежней подтверждают формулу (2).

Как появляются «близнецы», или Что видно сквозь ГЛ

Итак, луч света, проходя вблизи массивного небесного тела, немного искривляется, но... причем тут двойной квазар? Для того чтобы понять, как рождаются «близнецы», взгляните на рисунок 3. На нем показан

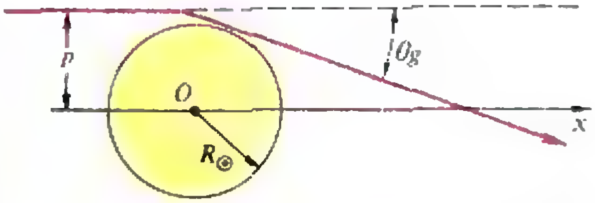


Рис. 2. Преломление светового луча в гравитационном поле Солнца.

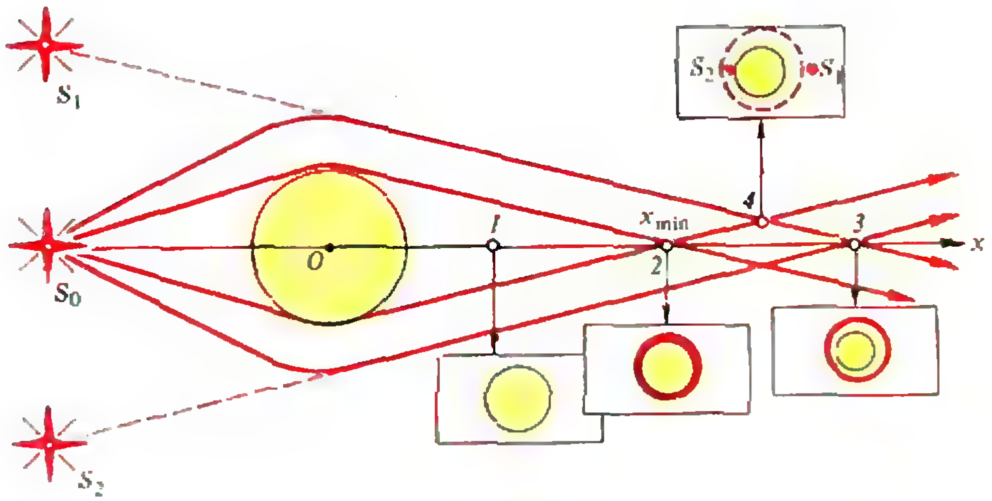


Рис. 3. Так виден точечный источник, наблюдаемый сквозь гравитационную линзу.

источник излучения S_0 и ход лучей в гравитационном поле. Лучи огибают массу M со всех сторон и пересекаются на оси x, проходящей от источника через центр ГЛ. В обычной линзе все преломленные лучи, на каком бы расстоянии от центра они ни проходили, собираются в одной точке — фокусе линзы. В ГЛ дело обстоит не так: чем ближе к притягивающему телу проходит луч, тем сильнее он преломляется и тем меньше расстояние от центра до точки пересечения лучей. Вместо одного фокуса в ГЛ возникает *фокальная ось*.

Если ядро ГЛ не пропускает свет, пересечение лучей возможно только начиная с некоторого минимального расстояния $x_{\min}$, которое легко рассчитать (сделайте это сами):

$$x_{\min}\approx R^2/(2r_g),$$

где R — радиус непрозрачного ядра ГЛ, а r_g — гравитационный радиус. В этой точке начинается фокальная ось, которая простирается в область $x>x_{\min}$.

Если взять для оценок данные, относящиеся к Солнцу ($R_\odot\approx7\cdot10^5$ км, $r_g\approx3$ км), получим $x_{\min}\approx8{,}3\cdot10^{10}$ км. Напомним, что расстояние от Земли до Солнца равно $1{,}5\cdot10^8$ км, т. е. в несколько сот раз меньше $x_{\min}$. Это означает, что наблюдать с Земли линзовый эффект в поле тяготения Солнца нельзя. С другой стороны, ближайшая к нам звезда (Проксима в созвездии Центавра) удалена на расстояние $\sim4\cdot10^{13}$ км, что в сотни раз превышает $x_{\min}$. Поэтому любая из звезд может стать ГЛ, необходимо только, чтобы источник, звезда-линза и наблюдатель расположились примерно на одной прямой.

Попробуем представить себе, как выглядит «точечный» источник-квазар, если смотреть на него сквозь ГЛ (см. рис. 3). Допустим сначала, что наблюдатель находится на оси x в точке *1*, где $x<x_{\min}$. Отсюда источник совсем не виден, так как он закрыт непрозрачным ядром ГЛ. В точке *2*, где $x=x_{\min}$, изображение источника появляется со всех сторон от ядра. Поэтому здесь источник виден как светящееся кольцо, примыкающее к ядру. При увеличении расстояния (точка *3*) кольцо отрывается от ядра, между ними возникает зазор, который постепенно возрастает по мере удаления наблюдателя. Кольцевое изображение источника иногда называют кольцом Эйнштейна, который в 1936 году указал на возможность его возникновения.*)

Теперь представим себе, что достаточно удаленный наблюдатель ($x>x_{\min}$) сместится на некоторое расстояние от оси (точка 4). Картина становится совсем иной. Симметрия лучей нарушается, светящееся кольцо разрывается на две дуги, которые по мере удаления от оси стягиваются в маленькие кружки. Наблюдатель увидит вместо одной звезды S_0 два источника S_1 и S_2 — те самые «близнецы», о которых мы говорили.

---

*) О кольцевом изображении еще раньше, в 1924 году, писал русский физик О. Хвольсон, но его работа оказалась не столь известной.

Гравитационная линза усиливает блеск далеких источников

На фокальной оси и вблизи нее наблюдается еще один эффект — возрастание интенсивности (блеска) источника. Так же, как и в обычной линзе, искривление лучей приводит к перераспределению и концентрации потока энергии. Максимальное усиление соответствует случаю, когда угловые размеры источника $\Delta\psi_S$ малы по сравнению с дифракционным размывом лучей $\Delta\psi_d$. Максимально возможный коэффициент усиления ГЛ равен

$$q_{\max} \approx 4r_g/\lambda.$$

Чем меньше длина волны излучения λ, тем больше коэффициент усиления на фокальной оси.

Для звезды, подобной Солнцу ($r_g \approx$ ≈ 3 км), в видимом свете ($\lambda \approx 0{,}5$ мкм) получим $q_{\max} \approx 10^{11}$. Колоссальное усиление, которое на самом деле никогда не реализуется, так как в природе не существует идеально сферических ГЛ и точечных источников. Как правило, $\Delta\psi_S \gg \Delta\psi_d$ и $q \ll q_{\max}$. Тем не менее даже с учетом всех реальных факторов q может быть все же достаточно большим, и если Земля при своем движении пересечет ось источник — линза, наблюдатель зафиксирует вспышку излучения (рис. 4).

Звезды — это всего лишь «микролинзы», а «настоящие линзы» — это галактики

Вероятность наблюдения фокусировки в гравитационном поле звезды очень мала, так как необходимо, чтобы три точки (источник, звезда-линза, наблюдатель) выстроились точно вдоль одной прямой. В 1937 году швейцарский астроном Ф. Цвикки обратил внимание на то, что роль ГЛ могут играть целые галактики. В этом случае возникает сравнительно широкая область фокусировки, где можно обнаружить действие ГЛ.

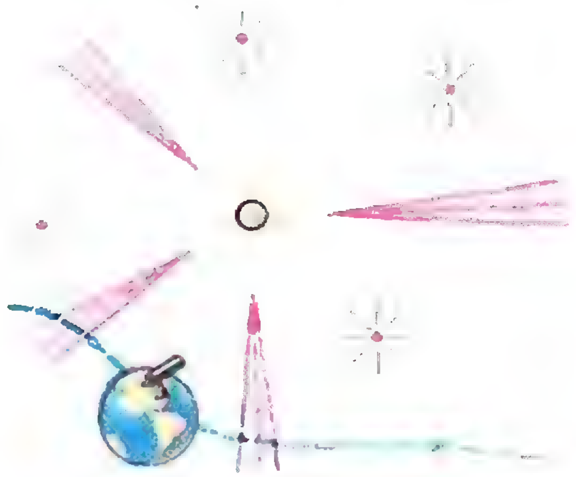


Рис. 4. Когда Земля, двигаясь вместе с Солнцем, пересекает область фокусировки какой-нибудь гравитационной линзы, блеск источника возрастает.

Нередко бывает, что галактика-линза является прозрачной для электромагнитных волн. В этом случае лучи света и радиоволны пройдут сквозь галактику, и наблюдатель увидит дополнительное (по сравнению со звездой-линзой) изображение источника. Ход лучей в сферически симметричной линзе-галактике показан на рисунке 5. Гравитационное поле вне галактики совпадает с полем сосредоточенной в центре массы. Поэтому закон преломления внешних лучей (у них прицельный параметр p больше радиуса галактики R_G) не отличается от рассмотренного ранее. Иначе ведут себя внутренние (сквозные) лучи. Центральный луч вообще не преломляется, а лучи, проходящие на расстоянии $p \lesssim R_G$, преломляются тем сильнее, чем больше p. Поэтому центральная часть ГЛ действует подобно обычной собирающей линзе с фокусом в некоторой точке x_F. Из этой точки начинается и простирается в область $x > x_F$ фокальная полуось. Кроме того, внутренние лучи пересекаются, точнее соприкасаются, друг с другом на некоторой конической поверхности, называемой каустикой. Вершина каустики также совпадает с фокусом x_F. На рисунке 5 жирными линиями показана каустика, имеющая вид криволинейного конуса. Вследствие слияния лучей на каустике интенсивность излучения здесь сильно возрастает. Внутри каустического конуса расположена область фокусировки. Находящийся здесь наблюдатель видит три изображения: одно внутри линзы и два других — снаружи (точка *1*). На фокальной оси при $x > x_F$ внешние изображения сливаются в кольцо (точка *2*). Вне области фокусировки видно только одно изображение (точка *3*).

ГЛ превращаются в космические телескопы

История развития науки и техники показывает, что вновь открытое явление по мере его изучения само постепенно превращается в «инструмент», позволяющий делать новые открытия. Так происходит и с ГЛ, которые уже начали работать как гигантские космические телескопы с «объективами» в виде целых галактик. С их помощью можно обнаружить очень слабые источники, но не меньший интерес представляет изучение и самих ГЛ. На этом пути открываются заманчивые возможности решения фундаментальных астрофизических проблем, связанных с определением масс и расстояний до небесных объектов.

Поясним сначала, почему столь важен вопрос о массе. Определяя общую массу звезд и газопылевых облаков в галактиках или в более крупных масштабах — массу множества галактик, мы учитываем только видимую часть всей материи. Однако некоторые наблюдения указывают на присутствие какого-то невидимого вещества во Вселенной. Оно обнаруживает себя только косвенным образом, в частности, как источник гравитационного поля, предотвращающего разлет галактик из их скоплений. Кроме того, замечено, что звезды вращаются по мере удаления от центра галактик быстрее, чем это следует из оценки массы по видимому веществу, т. е. внутри галактики что-то создаст дополнительную силу тяжести.

Поэтому астрономы говорят о скрытой массе, на долю которой приходится по современным представлениям более половины, а может быть

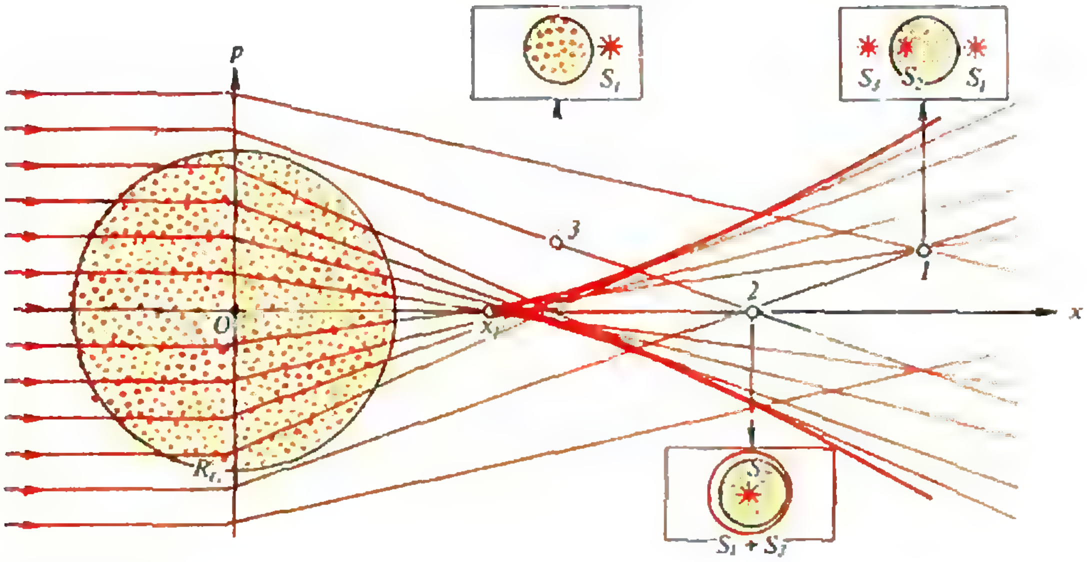


Рис. 5. Ход лучей и вид источника, наблюдаемого сквозь прозрачную линзу-галактику.

и более 90 % всей массы вещества во Вселенной. Вопрос о скрытой массе имеет первостепенное значение для космологии. Дело в том, что если средняя плотность вещества во Вселенной в нашу эпоху меньше или равна некоторому критическому значению $\rho_{кр} \approx 10^{-29}$ г · см$^{-3}$, то Вселенная будет расширяться неограниченно долго (открытая Вселенная). Плотность видимого вещества оценивается астрономами как $\rho_{вид} \approx 3 \cdot 10^{-31}$ г$\times$ $\times$см$^{-3}$, т. е. примерно в 30 раз меньше $\rho_{кр}$. Казалось бы, наблюдения говорят в пользу открытой Вселенной. Но что если скрытая масса доводит среднюю плотность до $\rho_{кр}$ или даже превышает ее? В этом случае расширение Вселенной через некоторое время прекратится и сменится сжатием. Конечно, наши повседневные планы не обязательно согласовывать с будущим Вселенной, но разве можно смириться с тем, что финал грандиозной драмы рождения и смерти всего сущего нам не известен!

ГЛ представляет собой в каком-то смысле идеальный инструмент для обнаружения скрытой массы. Ведь гравитационные поля создаются всеми видами материи. Линза может быть и светящейся, и темной, может даже состоять из неизвестного нам вещества, все равно лучи света будут отклоняться в ее поле тяжести на угол, пропорциональный полной массе ГЛ. Поэтому, наблюдая сквозь ГЛ изображения далеких источников, удается смоделировать распределение массы в линзе-галактике. Такая работа уже успешно выполнена для некоторых ГЛ.

Совершенно иную методику предполагается использовать для выяснения природы скрытой массы во внешней части нашей Галактики. Проблема здесь формулируется так: WIMP или MACHO? Первая аббревиатура означает Weakly Interacting Massive Particles, т. е. рассматривается возможность существования скрытой массы в виде слабо взаимодействующих элементарных частиц, включая нейтрино. Второе название расшифровывается как Massive Compact Halo Objects. Речь идет, например, о нейтронных звездах, черных дырах, коричневых карликах.*) Эти невидимые с Земли компактные небесные тела могут сыграть роль микролинз, если точно за ними расположатся светящиеся звезды нашей Галактики или ее ближайших соседей.

При прохождении Земли через фокальную ось микролинзы должно наблюдаться возрастание блеска более далекой звезды. Длительность «вспышек» оценивается в несколько недель, а для особенно малых и быстро движущихся микролинз (ими могут быть даже массивные, подобные Юпитеру, планеты иных звезд) это время сокращается до нескольких часов.

Начиная с октября 1991 года американские и австралийские ученые начали совместные наблюдения, рассчитанные на 4 года, по проекту MACHO. С этой целью используется 1,3-метровый телескоп на горе Маунт Стромбо (Австралия). Предполагается, что автоматическое измерение блеска миллионов звезд позволит выявить 10—20 микролинзовых «вспышек» в течение года. Отрицательный результат будет рассматриваться как свидетельство в пользу WIMP.

Второй вопрос — об определении расстояний — не менее важен, чем проблема скрытой массы. В астрономии нет единого способа определения расстояний. С тем, что находится в нашем собственном «доме» (Луна, планеты, Солнце, ближайшие звезды),— все в порядке. Здесь успешно реализуются прямые (геометрические) методы. Удаления ближайших галактик уже определяют косвенными методами, например по блеску их ярчайших звезд (чем дальше звезда, тем меньше ее блеск, наблюдаемый с Земли). Если же речь идет о самых далеких объектах, то пока единственным способом определения расстояний является измерение так называемого *красного смещения*.

---

*) Нейтронные звезды состоят в основном из нейтронов. Они были обнаружены в 1967 году в виде импульсных источников радиоизлучения — пульсаров. Черные дыры возникают в результате катастрофического сжатия звезды под действием собственной силы тяжести (гравитационный коллапс). Гравитационное поле непосредственно вблизи черной дыры столь сильное, что даже свет не выходит наружу из этой области. Коричневые карлики представляют собой звезды с массой около 20 % от массы Солнца, в недрах которых температура не столь велика, чтобы возбудить термоядерные реакции. Они излучают в основном в инфракрасном диапазоне и почти невидимы.

Его обнаружил американский астроном Э. Хаббл, который в результате многолетних наблюдений заметил, что спектры звезд в удаленных галактиках отличаются от спектров звезд нашего Млечного Пути: они сдвинуты в сторону более длинных волн (в «красную» сторону). Природа красного смещения (оно обозначается буквой z и равно относительному изменению длины волны в спектре: $z=(\lambda_{набл}-\lambda_{ист}/\lambda_{ист})$ в настоящее время надежно установлена — она связана с расширением Вселенной. При удалении источника излучения наблюдаемая частота колебаний уменьшается, а длина волны соответственно увеличивается (эффект Доплера). Простая формула связывает красное смещение со скоростью удаления v : $z=v/c$ (c — скорость света). Хаббл установил, что z возрастает пропорционально расстоянию до галактик D, и, следовательно, $v=HD$. Это и есть знаменитый закон Хаббла, открытый им в 1929 году. В приведенной формуле коэффициент H носит название постоянной Хаббла. Первоначально ее величина считалась равной 500 км · с$^{-1}$ · Мпк$^{-1}$, а затем она много раз пересматривалась. В настоящее время наиболее вероятное значение H лежит в пределах 50—100 км · с$^{-1}$· Мпк$^{-1}$. Спрашивается, почему возникает такая большая неопределенность? Казалось бы определить постоянную Хаббла очень просто. Достаточно измерить красное смещение (а оно определяется по спектру очень точно) и, зная расстояние D, легко рассчитать H. Действительно, из формулы $z=v/c$ и закона Хаббла следует, что $z=HD/c$, откуда $H=zc/D$.

Формула в самом деле получилась совсем простой, но как определить расстояние до источника? Когда речь идет об очень удаленных объектах, то D оценивается только по красному смещению в их спектрах, т. е. величина H считается известной. Ясно, что чрезвычайно важно определить D каким-нибудь независимым способом.

Гравитационные линзы, по-видимому, дают такую возможность. Представим себе, что интенсивность источника, наблюдаемого сквозь ГЛ, резко изменилась — например, возросла на короткое время. Если, наблюдая квазар сквозь линзу, мы видим два его изображения, то изменения их интенсивностей будут происходить неодновременно. Сначала увеличится блеск того изображения, к которому ведет более короткий путь, а потом, спустя некоторое время Δt, изменение блеска повторится во втором изображении. Величина Δt зависит от того, на каком расстоянии расположены источник и линза. Поэтому, определив запаздывание путем длительных наблюдений, можно рассчитать D и найти H. Для первой ГЛ Δt оказалось близким к полутора годам, и найденное значение $H\approx75$ км · с$^{-1}$· Мпк$^{-1}$ с точностью до 20 %.

Нам хотелось бы закончить рассказ о гравитационных линзах, создающих космические миражи, словами известного физика-теоретика Т. Редже: «Мы находимся в преддверии новой эпохи в астрофизике, когда сведения о далеких галактиках будут получены путем исследования влияния их гравитации на свет, идущий от еще более далеких объектов». Эти слова были сказаны в 1981 году в связи с открытием первой ГЛ. Последующие события показали, что «новая эпоха» уже началась.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1376—М1380, Ф1383—Ф1387

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 февраля 1993 г. по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите» «Задачник «Кванта» № 12 — 92» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1376» или «Ф1383». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1376 — М1379 предлагались на XXXIII Международной олимпиаде по математике, задача М1380 взята из материалов ее жюри.

М1376. В пространстве даны 9 точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Все эти точки попарно соединены отрезками. Отрезок может быть закрашен в синий или красный цвет, или остаться незакрашенным. Найдите наименьшее значение n такое, что при любом закрашивании любых n отрезков найдется треугольник, все стороны которого будут закрашены в один цвет.

М1377. На плоскости даны окружность C, прямая l, касающаяся C, и точка M на l. Найдите множество всех точек P, удовлетворяющих следующему условию: существуют две точки Q, R, лежащие на l, такие, что M — середина QR, и окружность C вписана в треугольник PQR.

М1378*. Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат в пространстве, S — конечное множество точек пространства и S_x, S_y, S_z — множество ортогональных проекций точек S на плоскости Oyz, Ozx, Oxy соответственно. Докажите, что

$$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|.$$

(Через $|A|$ обозначается количество элементов конечного множества A. Ортогональная проекция точки на плоскость есть основание перпендикуляра, проведенного из этой точки на плоскость.)

М1379. Для любого положительного целого числа n через $S(n)$ обозначим наибольшее целое число такое, что при любом целом k, $1 \leqslant k \leqslant S(n)$, число n^2 может быть представлено в виде суммы k квадратов целых положительных чисел.

а) Докажите, что $S(n) \leqslant n^2-14$ при любом $n \geqslant 4$.

б)* Найдите целое число n такое, что $S(n)=n^2-14$.

в) Докажите, что существует бесконечно много целых чисел n таких, что $S(n)=n^2-14$.

М1380*. Докажите, что число $\frac{5^{125}-1}{5^{25}-1}$ является составным.

Ф1383. Самолеты летят навстречу друг другу вдоль одной прямой с одинаковыми скоростями v_0. Завидев друг друга на расстоянии L, пилоты начинают разворот по окружностям, оставаясь в горизонтальной плоскости и не меняя величины скоростей. Найдите минимальное расстояние между самолетами, если повороты выполняются с одинаковыми ускорениями a.

А. Ершов

Задачник „Кванта"

Ф1384. В насыщенные пары воды при температуре $t=100\ ^\circ\text{C}$ поместили металлическую пластину, охлажденную до температуры жидкого азота. Оцените начальную скорость роста толщины слоя намерзающего льда.

А. Киприянов

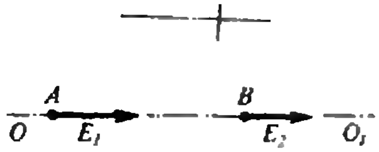


Рис. 1.

Ф1385. Система неподвижных зарядов симметрична относительно некоторой оси OO_1 (рис. 1). На большом расстоянии от зарядов в точке A на этой оси напряженность поля составляет $E_1=100$ В/м, а в точке B, находящейся на расстоянии $L=1$ м от точки A, напряженность поля равна $E_2=99$ В/м. Отойдем от точки A на $l=1$ см в направлении от оси. Чему будет равна перпендикулярная составляющая напряженности поля в этой точке?

А. Зильберман

Ф1386. Частица массой m несущая заряд Q и движущаяся со скоростью v, налетает на неподвижную стенку перпендикулярно ее поверхности. В этот момент включается однородное магнитное поле индукцией B, параллельное плоскости стенки. Стенка отражает частицу, увеличивая ее скорость при каждом отражении на величину u. Найдите расстояние между точками 1-го и k-го отражений.

В. Мирнов

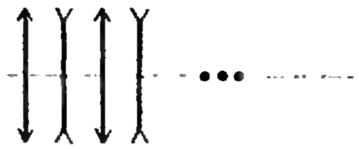


Рис. 2.

Ф1387. Имеется набор из N собирающих линз с фокусным расстоянием $2F$ и N рассеивающих линз с фокусным расстоянием $-F$. Линзы установили поочередно вдоль одной оси на расстоянии F друг от друга, как показано на рисунке 2. Вдоль оси в систему входит параллельный пучок света диаметром D. Найдите диаметр выходящего пучка.

А. Ершов

Решения задач

М1310, М1346 — М1354, Ф1363—Ф1367

Задачи по математике, решения которых публикуются ниже, предлагались в прошлые годы на международной математической олимпиаде «Турнир городов». Читатели, которые интересуются подробной информацией об этой олимпиаде и хотели бы получить сборник задач первых 13 турниров, могут написать в редакцию с пометкой «Турнир городов».

Решение задачи М1310 мы публикуем лишь в этом номере, поскольку срок присылки был продлен из-за неточностей в формулировке.

M1310. *В соревнованиях участвуют 2^k боксеров ($k>1$). Ежедневно встречаются 2^{k-1} пары боксеров (так что каждый проводит один бой). Все боксеры имеют разную силу, и в каждом бою побеждает сильнейший. Докажите, что за $k(k+1)/2$ дня можно определить место каждого боксера. (Расписания на каждый день составляются накануне вечером и в день соревнований не меняются.)*

Докажем сначала такую *лемму*.

Пусть $2N=2^n$ боксеров разбиты на две равные группы по $N=2^{n-1}$ боксеров, причем в каждой группе они уже упорядочены по силе; тогда упорядочить всех $2N$ боксеров можно за n дней.

Докажем это индукцией по n. Для $n=1$ это ясно. Пусть $n>1$. Предположим, что наше утверждение верно для $N=2^{n-1}$ боксеров, разбитых на две равные упорядоченные группы по $N/2$ в каждой, и докажем его для $2N$ боксеров, разбитых на две группы $X(1)<X(2)<\ldots<X(N)$ и $Y(1)<Y(2)<\ldots<Y(N)$ (знак $<$ означает здесь «слабее»). По предположению индукции, мы можем за $n-1$ дней упорядочить всех N боксеров, имеющих четные номера, а также — параллельно — всех N, имеющих нечетные номера в своих группах (см. рисунки 1 и 2). Теперь для каждого боксера — скажем, $X(i)$ — может существовать не более одного боксера, с которым его предстоит сравнить: если $Y(j-1)<X(i)<Y(j+1)$, то этот боксер — $Y(j)$, причем этот бой необходим лишь если $Y(j)$ попал в интервал между $X(i-1)$ и $X(i+1)$. Очевидно, такие пары $\{X(i), Y(j)\}$ не пересекаются. Тем самым, за один день можно все выяснить и упорядочить N боксеров.

Можно доказывать лемму и по-другому, без «фокуса с четностью». Чтобы найти место боксера $Y(j)$ среди группы $X(1)<X(2)<\ldots<X(N)$, можно действовать так: сравнить его с $X(j)$, а затем сдвигаться влево, если он слабее, и вправо, если — сильнее, в первый день на 2^{n-1} номеров, во второй — на 2^{n-2},..., в последний (n-й) — на 1 номер. Это можно делать одновременно для всех j, поскольку если окажется, что $Y(j)$ нужно двигать вправо, а $Y(j+1)$, встречавшегося со следующим за ним по номеру X — влево (см. рис. 3), то положение этих боксеров уже полностью определено (и тем самым все боксеры разбиты на два класса — более сильных и более слабых, так что бои между боксерами одного и другого уже не нужны).

Теперь докажем по индукции, что упорядочить 2^k боксеров можно за $k(k+1)/2$ дней. Для $k=1$

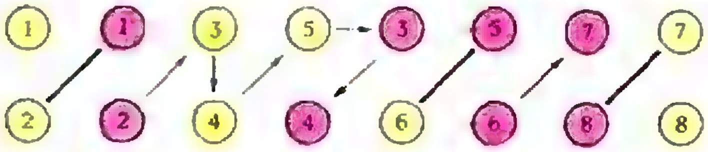


Рис. 1.

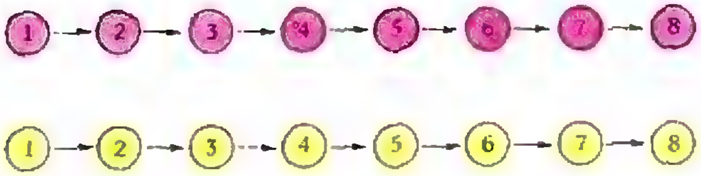


Рис. 2.

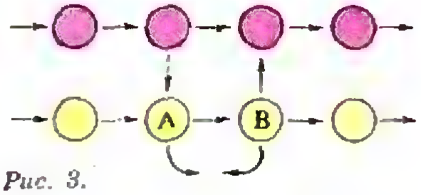


Рис. 3.

это очевидно. 2^k боксеров можно как угодно разбить на две равные группы и по предположению индукции упорядочить каждую за $k(k-1)/2$ дней. Затем по лемме можно слить эти группы в одну за k дней — всего будет затрачено $k(k-1)/2+k=k(k+1)/2$ дней.

Заметим, что такой алгоритм позволяет упорядочить массив из N чисел примерно за $c(\lg N)^2$ тактов параллельных сравнений (c — некоторая константа). Очевидная оценка снизу — лишь $c(\lg N)$ тактов. (Поскольку всего имеется $N!$ перестановок, нужно получить $\lg(N!)$, т. е. примерно $N \lg N$ бит информации, а за один такт мы получаем не больше N бит.) По-видимому, алгоритмы для упорядочивая N чисел при параллельном сравнении с числом шагов, меньшим $c(\lg N)^2$, существуют, но никем еще не найдены.

Д. Бугаенко, Н. Васильев

М1346. *Внутри окружности радиусом 1 расположена замкнутая (самопересекающаяся) ломаная, содержащая 51 звено, причем длина каждого звена равна $\sqrt{3}$. Для каждого угла этой ломаной рассмотрим треугольник, двумя сторонами которого служат стороны этого угла (таких треугольников всего 51). Докажите, что сумма площадей этих треугольников не меньше, чем утроенная площадь правильного треугольника, вписанного в окружность.*

Легко доказать, что угол между двумя последовательными отрезками ломаной не превышает $\pi/3$: равнобедренный треугольник с боковым ребром $a=\sqrt{3}$, расположенный в круге радиуса 1, можно передвинуть так, чтобы вершины основания лежали на окружности; если угол 2α при вершине больше $\pi/3$, то $a/2\cos\alpha>1$ (рис. 1).

Проделав полный обход ломаной в каком-нибудь направлении, расставим на ее звеньях стрелки (рис. 2): каждое звено с нечетным номером будем считать вектором с этим направлением, каждое звено с четным номером — вектором с противоположным направлением. Затем все векторы отложим от фиксированной точки O (рис. 3). Поворот нашей ломаной от i-го звена до $(i+1)$-го считается положительным, если происходит против часовой стрелки, и отрицательным, если — по часовой стрелке (если $i=51$, то считаем, что $i+1=1$). Вращением всей ломаной назовем сумму всех поворотов. Из того, что звеньев нечетное число, следует, что направления 1-го и 52-го векторов противоположны (это один и тот же отрезок, который в одном случае имеет четный, в другом — нечетный номер). А отсюда следует, что вращение всей ломаной равно $(2n+1)\cdot\pi$, где n — некоторое целое число. Отсюда следует, что сумма углов поворота, взятых по абсолютной величине, не меньше π.

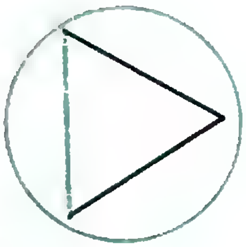


Рис. 1.

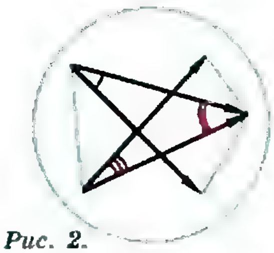


Рис. 2.

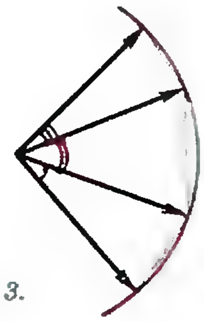


Рис. 3.

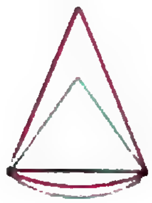


Рис. 4.

Сравним площадь $T(\varphi)$ равнобедренного треугольника с вершиной O, углом 2φ при вершине и боковой стороной $\sqrt{3}$ с площадью $S(\varphi)$, содержащего его сектора с центром O, тем же углом 2φ и радиусом $\sqrt{3}$: $T(\varphi)=(3/2)\sin 2\varphi$, $S(\varphi)=3\varphi$ (φ измеряем в радианах). Отношение этих величин $T(\varphi)/S(\varphi)=\sin 2\varphi/(2\varphi)$ на отрезке $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/6$ — убывающая функция (это можно доказать с помощью производной или пользуясь тем, что синус на этом интервале — выпуклая вверх функция, а можно и чисто геометрически: на рисунке 4 красный треугольник больше голубого, а сегмент — меньше). На отрезке $0\leqslant\varphi\leqslant\pi/6$ величина $K(\varphi)=S(\varphi)/T(\varphi)$ принимает максимальное значение при $\varphi=\pi/6$, то есть для равностороннего треугольника $K(\pi/6)=2\pi/(3\sqrt{3})$. Рассмотрим суммы величин $T(\varphi)$ и $S(\varphi)$ для всех треугольников, образованных соседними сторонами нашей ломаной. Из того, что сумма углов не меньше π, следует, что сумма всех величин $S(\varphi)$ не меньше $3\pi/2$. Если в этой сумме все $S(\varphi)$ заменить на соответствующие $T(\varphi)$, то сумма уменьшится не более чем в $K(\pi/6)$ раз, что дает оценку снизу $3a^2\sqrt{3}/4$ — как раз сумму площадей трех правильных треугольников со стороной $\sqrt{3}$.

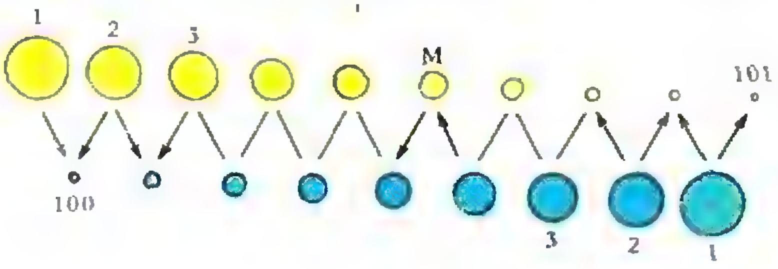
Н. Константинов

M1347. *Имеется 100 серебряных монет, упорядоченных по весу, и 101 золотая монета, также упорядоченная по весу. Известно, что все монеты различны по весу. В нашем распоряжении — двухчашечные весы, позволяющие про каждые две монеты установить, какая тяжелее. Как за наименьшее число взвешиваний найти монету, занимающую по весу 101-е место? Укажите это число и докажите, что меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя.*

Расположим золотые монеты в ряд по убыванию масс, серебряные под ними в другой ряд — по возрастанию, и соединим соседние монеты отрезками, как показано на рисунке (в первой строчке монеты золотые, во второй — серебряные).

Каждый отрезок соединяет две монеты. Придадим ему направление от тяжелой монеты к легкой, так чтобы каждый отрезок превратился в стрелочку. Эти стрелочки обладают тем свойством, что если какая-то направлена вниз, то и все слева от нее тоже направлены вниз, а если какая-то направлена вверх, то и все справа от нее тоже направлены вверх. Каждая монета в этой схеме обладает тем свойством, что число монет слева от нее в верхнем ряду плюс число монет справа от нее в нижнем ряду равно 100. Таким образом, 101-я «средняя» монета M характеризуется тем, что слева от нее все стрелки направлены вниз, а справа — вверх.

Найти это место можно с помощью 8 взвешиваний. Вначале перед нами 200 отрезков, на которых еще не расставлены стрелки. Испытываем какой-нибудь отрезок и ставим на нем стрелку. (Если она направ-



лена вниз, то дальше достаточно проверять отрезки справа от нее, а если вверх — то слева: по другую сторону стрелки расставляются автоматически.) Будем проверять каждый раз средний отрезок из непроверенного куска, а если средних два — то один из них. В результате первого испытания останется не больше 100 непроведенных стрелок, в результате 2-го — не более 50, в результате 3-го — не более 25, в результате 4-го — не более 12, в результате 5-го — не более 6, в результате 6-го — не более 3, в результате 7-го — не более 1. 8-е испытание устанавливает направление последней неизвестной стрелки.

Меньшим числом взвешиваний обойтись нельзя. Действительно, перед всеми взвешиваниями все монеты (201) были кандидатами на 101-е место. В результате одного взвешивания множество монет, которые были кандидатами перед этим взвешиванием, делится на два подмножества: те монеты, которые сохранили возможность занять 101-е место, и остальные. Результаты взвешиваний заранее не известны. Поэтому может случиться, что в результате первого взвешивания останется не менее чем 101 кандидат, в результате второго — 51, в результате 3-го — 26, в результате 4-го — 13, в результате 5-го — 7, в результате 6-го — 4, в результате 7-го — 2. Итак, нельзя гарантировать, что число кандидатов после 7 взвешиваний будет меньше 2, что означает, что 7 взвешиваний недостаточно.

Г. Кондаков, Н. Константинов

М1348. ***Точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC. Построим треугольник $A_1B_1C_1$, стороны B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 которого параллельны отрезкам PA, PB, PC соответственно. Через точки A_1, B_1, C_1 проведены прямые, параллельные соответственно BC, CA и AB. Докажите, что эти прямые пересекаются в точке, лежащей на описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$.***

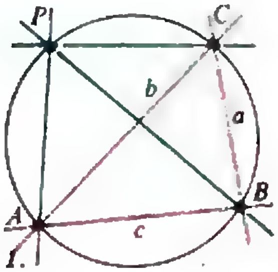


Рис. 1.

Нам будет удобно использовать понятие ориентированного (направленного) угла между прямыми a и b — мы будем обозначать его $\angle(a, b)$: это — угол, на который нужно повернуть прямую a вокруг точки пересечения с b против часовой стрелки, чтобы она совпала с b (если прямые совпадают или параллельны, то угол считается равным 0). Вращению по часовой стрелке соответствуют отрицательные величины углов.

Заметим, что при движении точки P по окружности, проходящей через две фиксированные точки A, B (рис. 1), величина угла $\angle(PA, PB)$ не меняется — даже когда точка P проходит сквозь одну из точек A или B и попадает на другую дугу AB той же окружности (в отличие от угла $\angle APB$, который превращается в дополнительный до π) — в этом одно из преимуществ направленных углов.

Будем обозначать через a, b, c прямые BC, CA, AB в условиях задачи, а через a_1, b_1, c_1 — прямые PA, PB, PC, или любые тройки соответственно параллельных им прямых. Тогда (если точка P лежит на описанной окружности треугольника ABC)

$$\angle(PA, PB) = \angle(CA, CB) = \angle(b, a) = -\angle(a, b), \qquad (*)$$

и аналогично $\angle(PB, PC) = -\angle(b, c)$, $\angle(PC, PA) = -\angle(c, a)$. Верно и обратное: если через вершины

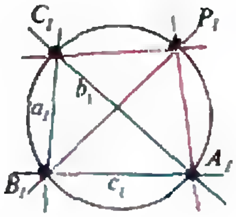


Рис. 2.

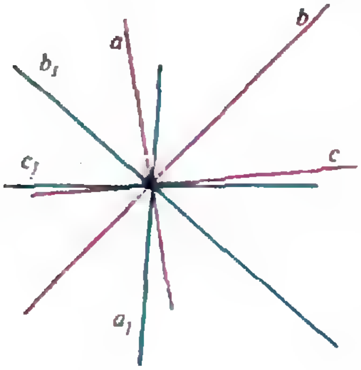


Рис. 3.

треугольника A, B, C проведены соответственно прямые a_1, b_1, c_1 так, что выполнены условия

$$\angle(a_1, b_1) = -\angle(a, b),\ \angle(b_1, c_1) = -(b, c),$$
$$\angle(c_1, a_1) = -\angle(c, a), \qquad (**)$$

то они пересекаются в одной точке, лежащей на описанной окружности этого треугольника. В самом деле, из условия (*) следует, что точка P лежит на описанной окружности ABC; таким образом, каждые две из прямых a_1, b_1, c_1 пересекают эту окружность в одной и той же точке (не считая вершин, через которые они проводятся), а значит, все они проходят через одну и ту же точку окружности.

Осталось заметить, что тройки (a, b, c) и (a_1, b_1, c_1) входят в условие (**) совершенно равноправным образом. Поэтому все сказанное о треугольнике ABC, стороны которого параллельны a, b, c, и через вершины проведены прямые, параллельные a_1, b_1, c_1, будет точно так же справедливо и для треугольника $A_1B_1C_1$, стороны которого параллельны a_1, b_1, c_1, и через вершины проведены прямые, параллельные a, b, c (рис. 2). (Две тройки голубых и красных прямых на наших рисунках можно назвать симметричными; они и правда будут симметричны друг другу, если провести все прямые через одну точку, как на рисунке 3.)

Н. Васильев

М1349. *Круг разбит на n секторов. В некоторых из них стоят фишки; всего фишек $n+1$. Затем позиция подвергается следующим преобразованиям: берутся какие-нибудь две фишки, стоящие в одном секторе, и переставляются в разные стороны в соседние секторы. Докажите, что после некоторого числа таких преобразований не менее половины секторов будет занято фишками.*

Всегда найдется сектор, содержащий больше одной фишки, следовательно, процесс преобразований никогда не закончится.

Докажем более сильное утверждение, а именно, что на некотором шагу не найдется пары соседних свободных секторов (из этого утверждения сразу следует, что занятых секторов не меньше половины); заметим, что если пара свободна, то она и на предыдущем шагу была свободна — следовательно, свободные пары не могут появиться.

Допустим противное, пусть при каждом n в результате n-го шага имеется пара (хотя бы одна) соседних свободных секторов, тем самым, одна из соседних свободных пар никогда не исчезает.

Разорвем окружность по радиусу, разделяющему секторы этой пары, и рассмотрим задачу для прямой — пусть роль секторов играют отрезки длины 1, расположенные на оси, а фишки будем располагать в центре отрезков. Рассмотрим сумму расстояний между всеми фишками. При каждом преобразовании она увеличивается по крайней мере на 2. Действительно, пусть перемещаются две фишки — A и $Б$, A — влево, $Б$ — вправо. Расстояния от A до всех фишек, стоящих слева от нее, уменьшаются, а расстояния от $Б$ до тех же фишек увеличиваются на ту же величину. Расстояния от A и $Б$ до тех фишек, которые остались в секторе, где находились A и $Б$ до преобразования, увеличиваются (или не изменяются, если там ничего не осталось). А расстояние между A и $Б$ увеличивается на 2. Так как шагов бесконечно много, то сумма расстояний будет увеличиваться до бесконечности, но она не может быть больше, чем длина всего отрезка, на котором расположились бывшие сектора, умноженная на число пар фишек. Полученное противоречие показывает, что пары свободных секторов должны исчезнуть.

Н. Константинов, Н. Васильев

M1350. *Пусть n и b — натуральные числа. Через $V(n, b)$ обозначим число разложений n в произведение одного или нескольких сомножителей, каждый из которых больше b (например: $36=6\cdot 6=4\times 9=3\cdot 3\cdot 4=3\cdot 12$, так что $V(36,2)=5$). Докажите, что $V(n, b)<n/b$.*

При $n=1$ утверждение верно: $b\geqslant 1$, $V(1, b)=0<1/b$. При произвольном n утверждение верно для любого $b\geqslant n$: $V(n, b)=0<n/b$.

Докажем наше утверждение для произвольного $n=k$ и произвольного $b=i$, предполагая, что оно справедливо при всех $n<k$ (при любых b), а при $n=k$ оно справедливо при всех $b>i$. Это — вариант доказательства методом математической индукции (по n — как обычно, начиная с $n=1$ и двигаясь «вверх», по b — при каждом n, начиная с $b=n$ и двигаясь «вниз»).

Среди разложений k на сомножители, каждый из которых больше i, рассмотрим разложения на сомножители, каждый из которых больше $i+1$; таких разложений, по предположению индукции, меньше, чем $k/(i+1)$. Если n не делится на $i+1$, то этим все и ограничивается: $V(k, i)=V(k, i+1)<k/(i+1)<k/i$.

Если же k делится на $i+1$, то появляются разложения, в которых присутствует число $i+1$. Если в таком разложении зачеркнуть число $i+1$, то получится разложение числа $k/(i+1)$ на множители, каждый из которых больше i, причем так получаются все разложения числа $k/(i+1)$ на множители, каждый из которых больше i. Следовательно, их число равно $V(k/(i+1), i)$ и по предположению индукции меньше $k/((i+1)\cdot i)$, а общее число разложений оценивается так:

$$V(k, i)=V(k, i+1)+V(k/(i+1), i)<\frac{k}{i+1}+\frac{k}{(i+1)\cdot i}=\frac{k}{i}.$$

Н. Васильев

M1351. *Пусть в прямоугольном треугольнике AB и AC — катеты, $AC>AB$. На AC выбрана точка E, а на гипотенузе BC — точка D так, что $AB=AE=BD$. Докажите, что треугольник ADE будет прямоугольным в том и только в том случае, если стороны треугольника ABC относятся как $3:4:5$.*

Пусть стороны треугольника ABC относятся как $3:4:5$. Выберем единицу измерения длин так, что $AB=3$, $AC=4$, $BC=5$. Тогда $AE=3$, $EC=1$, $BD=3$, $DC=2$. Рассмотрим треугольники ADC и DEC. $AC=2DC$, $DC=2EC$, и кроме того, у этих треугольников общий угол C. Поэтому они подобны, и $\angle DAC=\angle EDC$. Из равнобедренности треугольника $ABD (AB=DB)$ следует, что $\angle BAD=\angle BDA$. $\angle BAC+\angle DAC=\pi/2$, значит, $\angle BDA+\angle EDC=\pi/2$, отсюда $\angle ADE=\pi/2$.

Докажем обратное утверждение: пусть угол ADE — прямой (прямым может быть только угол ADE, так как угол DAE является частью прямого, а если бы угол DEA был прямой, то BD должно было бы быть больше AE). Единицу измерения длины выберем так, чтобы было $AC=4$.

Треугольники ADC и EDC подобны (треугольник ABD равнобедренный, $\angle BDA+\angle EDC=\pi/2$, следовательно, $\angle EDC=\angle DAC$, а угол C у этих треугольников — общий). Обозначим EC через a $(a<EC=4)$. Тогда $\frac{AC}{DC}=\frac{DC}{a}$; отсюда $DC=\sqrt{AC}\cdot\sqrt{a}=2\sqrt{a}$, $AE=AB=BD=4-a$. По теореме Пифагора $AC^2+AB^2=BC^2$. Подставляя в это равенство длины сторон, выраженные через a, получаем равенство: $4^2+(4-a)^2=(4-a+2\sqrt{a})^2$. Отсюда $(16-4a)=\sqrt{a}\cdot(16-4a)$. Поскольку $a<4$, на скобку можно сократить, и мы получаем: $a=1$, $AB=3$, $AC=5$.

А. Паровян, Н. Константинов

***M1352.** Назовем n чисел близкими, если каждое из них меньше, чем сумма этих чисел, деленная на $n-1$. Пусть a, b, c, ... — n близких чисел, S — их сумма. Докажите, что:*

а) все они положительны;

б) всегда $a+b>c$;

в) всегда $a+b\leqslant S/(n-1)$.

Докажем а). Допустим, что найдется неположительное число (отрицательное или 0). Заменим его нулем и выбросим. От этого сумма не уменьшится, и по-прежнему каждое из чисел (невыброшенных) будет меньше $S^*/n-1$, где S^* — новая сумма. Но не может быть, чтобы все числа некоторого набора были меньше их среднего арифметического.

Докажем б). Допустим, что $a+b\leqslant c$. Заменим в наборе два числа a и b на одно c. Чисел стало $n-1$, для оставшихся чисел требующиеся неравенства верны, так как сумма не уменьшилась; получается противоречие, как в пункте а).

Докажем в). Допустим, что $a+b<S/(n-1)$. Заменим в нашем наборе числа a и b на $a+b$. Получаем противоречие, как в предыдущих пунктах.

Н. Константинов

***M1353.** Дана таблица $n\times n$, заполненная числами по следующему правилу: в клетке, стоящей в i-й строке и j-м столбце таблицы, записано число $1/(i+j-1)$. В таблице отметили n чисел таким образом, что никакие два отмеченных числа не находятся в одном столбце или в одной строке. Докажите, что сумма отмеченных чисел не меньше 1.*

Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним гармоническим n положительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}>\frac{n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+a_3^{-1}+\ldots+a_n^{-1}}.$$

Пусть в k-й строке отмечено число, стоящее на j_k месте, тогда для решения задачи достаточно показать, что для n различных чисел $j_1, j_2, \ldots, j_n$ таких, что $1\leqslant j_k\leqslant n$, выполнено неравенство:

$$S=\frac{1}{j_1}+\frac{1}{j_2+1}+\frac{1}{j_3+2}+\ldots+\frac{1}{j_n+n-1}\geqslant 1.$$

Из неравенства между средним гармоническим и средним арифметическим получаем:

$$S=\frac{1}{j_1}+\frac{1}{j_2+1}+\frac{1}{j_3+2}+\dots+\frac{1}{j_n+n-1}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{n^2}{j_1+j_2+1+j_3+2+\dots+j_n+n-1}=$$

$$=\frac{n^2}{j_1+j_2+j_3+\dots+j_n+(n-1)n/2}=\frac{n^2}{(n+1)n/2+(n-1)n/2}=1.$$

Г. Кондаков

M1354. *Даны три треугольника: $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$. Известно, что их центры тяжести (точки пересечения медиан) лежат на одной прямой, и никакие три из девяти вершин этих треугольников не лежат на одной прямой. Рассмотрим 27 треугольников вида $A_iB_jC_k$, где i, j, k независимо пробегают значения 1, 2, 3. Докажите, что эти 27 треугольников можно разбить на две группы так, что сумма площадей треугольников первой группы будет равна сумме площадей треугольников второй группы.*

Обозначим через M_A центр тяжести $\triangle A_1A_2A_3$, через M_B центр тяжести $\triangle B_1B_2B_3$, через M_C центр тяжести $\triangle C_1C_2C_3$. Покажем, что при некотором присвоении знаков сумма площадей треугольников окажется равной нулю — так что сумма «положительных» площадей будет равна по модулю сумме «отрицательных».

Для решения задачи удобно рассматривать ориентированные треугольники. Треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют одинаковую ориентацию, если обход их контуров в порядке обозначения вершин соответствует для обоих треугольников движению по часовой стрелке или для обоих — против часовой стрелки. Одну из ориентаций («против часовой стрелки») будем считать положительной, другую — отрицательной. Площадью ориентированного треугольника ABC, если S — площадь обычного треугольника ABC, будем считать S для положительно ориентированного треугольника ABC и $-S$ — для отрицательно ориентированного. Ориентированную площадь можно выразить так:

$$S(\triangle ABC)=[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]/2;$$

здесь $[\vec{x},\ \vec{y}]$ — псевдоскалярное произведение векторов,— т. е. произведение длин векторов на синус угла между ними (с учетом направления вращения от $\vec{x}$ к $\vec{y}$), другими словами, ориентированная площадь параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 1). Мы будем использовать основные свойства этого произведения (которое недавно встречалось в «Задачнике «Кванта»), главное из них — это дистрибутивность:

$$[\vec{x}+\vec{y},\ \vec{z}]=[\vec{x},\ \vec{y}]+[\vec{x},\ \vec{z}].$$

Пусть O — некоторая точка плоскости, и векторы, ведущие из O в вершины треугольников, обозначены соответствующими маленькими буквами: $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$, $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$, $\vec{c}_3$. Тогда ориентированная площадь треугольника $A_iB_jC_k$ выражается формулой

$$2S(\triangle A_iB_jC_k)=[\vec{a}_i\vec{b}_j]+[\vec{b}_j\vec{c}_k]+[\vec{c}_k\vec{a}_i],$$

— как легко проверить, выражение справа сохраняется, если ко всем векторам прибавить один и тот же вектор, а в случае когда один из векторов равен нулю, формула очевидна. Заметим, что алгебраическая сумма всех площадей 27 наших треугольников равна

$$3[(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3)(\vec{b}_1+\vec{b}_2+\vec{b}_3)]+3[(\vec{b}_1+\vec{b}_2+\vec{b}_3)\times$$
$$\times(\vec{c}_1+\vec{c}_2+\vec{c}_3)]+3[(\vec{c}_1+\vec{c}_2+\vec{c}_3)(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3)]=$$
$$=27([\overrightarrow{OM_A}\overrightarrow{OM_B}]+[\overrightarrow{OM_B}\overrightarrow{OM_C}]+[\overrightarrow{OM_C}\overrightarrow{OM_A}]),$$

а эта сумма равна нулю, так как по условию M_A, M_B, M_C лежат на одной прямой.

Теперь возвращаемся к обычным площадям. Сумма ориентированных площадей — это сумма обычных площадей, взятых с соответствующим знаком. Включая в одну группу треугольников треугольники с положительной ориентаций, в другую — с отрицательной, мы видим, что суммы площадей треугольников в каждой группе одинаковы.

Н. Васильев

Ф1363. *Масса Харона, недавно открытого спутника Плутона, в 8 раз меньше массы планеты. Плутон и Харон обращаются по круговым траекториям вокруг общего центра масс, причем они все время «смотрят друг на друга», т. е. система вращается как единое твердое тело. Расстояние между центрами тел $R=19640$ км, радиус Харона $r=593$ км. Определите относительное различие в ускорениях свободного падения для наиболее близкой к Плутону и наиболее удаленной от него точек Харона.*

Запишем условие стационарности орбиты Харона:

$$G\frac{Mm}{R^2}=m\omega^2x,$$

где M — масса Плутона, m — масса Харона, ω — угловая скорость вращения, x — радиус орбиты Харона. В наиболее близкой к Плутону точке Харона ускорение свободного падения равно

$$g_1=G\frac{m}{r^2}-G\frac{M}{(R-r)^2}+\omega^2(x-r),$$

а в наиболее отдаленной точке —

$$g_2=G\frac{m}{r^2}+G\frac{M}{(R+r)^2}-\omega^2(x+r).$$

Тогда абсолютное различие этих ускорений составляет

$$\Delta g=g_2-g_1\approx2G\frac{M}{R^3}\left(\frac{1+(r/R)}{(1-(r/R))^2}-1\right)\approx6G\frac{M}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^2,$$

а относительное различие —

$$\frac{\Delta g}{g}=\frac{\Delta g}{Gm/r^2}\approx6\frac{M}{m}\left(\frac{r}{R}\right)^4\approx4\cdot10^{-5}.$$

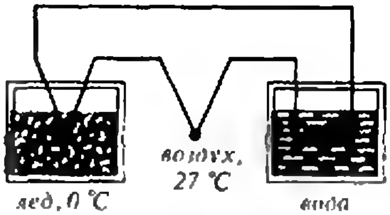
В. Белонучкин

Ф1364. *Один из спаев термопары находится в комнате при температуре $t_1=27$ °С, а второй — в теплоизолированном сосуде со льдом, имеющим температуру $t_2=0$ °С (см. рисунок). Мощность, развиваемая термопарой, выде-*

Можно сказать, что между T_1 и T_2 работает тепловая машина. Считая эту машину идеальной, запишем ее КПД:

$$\eta=\frac{T_1-T_2}{T_1}=\frac{A}{Q_1}=\frac{A}{Q_2+A}=\frac{cm\Delta t}{m\lambda+cm\Delta t}.$$

Отсюда искомая величина повышения температуры *ляется на сопротивлении нагревателя, который помещен в другой теплоизолированный сосуд, содержащий воду. Оцените, на сколько повысится температура воды к моменту окончания плавления льда. Считайте, что все сопротивление цепи сосредоточено в нагревателе. Массы воды и льда одинаковы. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=335$ кДж/кг.*



равна

$$\Delta t=\frac{\lambda}{c}\,\frac{T_1-T_2}{T_2}\approx 8K.$$

А. Шеронов

Ф1365. *Заряженная частица с кинетической энергией W пролетает мимо длинного равномерно заряженного провода. Частица движется в плоскости, перпендикулярной проводу, и в результате отклоняется на небольшой угол α от первоначального направления полета (рис. 1). Найдите этот угол, если заряд частицы e, а заряд единицы длины провода q. На расстоянии R от длинного провода напряженность поля $E=q/(2\pi\varepsilon_0 R)$.*

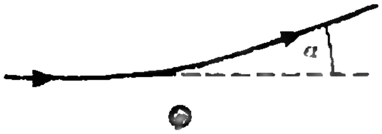


Рис. 1.

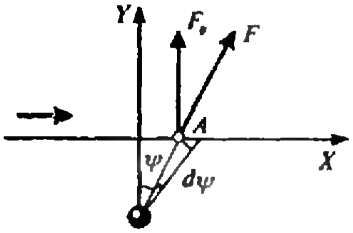


Рис. 2.

В произвольной точке A на расстоянии R от заряженного провода скорость частицы направлена под малым углом α к оси X, таким, что

$$\alpha=\frac{v_y}{v_x}.$$

Здесь v_y — вертикальная проекция скорости, а $v_x=\sqrt{2W/m}$ — ее горизонтальная проекция.

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на ось Y (рис. 2):

$$F_y dt=m dv_y,$$

где

$$F_y=eE\cos\psi=\frac{eq\cos\psi}{2\pi\varepsilon_0 R}.$$

Малый промежуток времени dt выразим из соотношения $v_x=dx/dt$:

$$dt=\frac{dx}{v_x}=\frac{R d\psi}{v_x\cos\psi}.$$

За это время вертикальная проекция скорости изменится на величину

$$dv_y=\frac{F}{m}dt=\frac{eq}{2\pi\varepsilon_0 m v}d\psi.$$

Полная проекция скорости вдоль оси Y складывается из приращений:

$$v_y=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}dv_y=\frac{eq}{2\varepsilon_0 m v_x}.$$

Итак, искомый угол α получается таким:

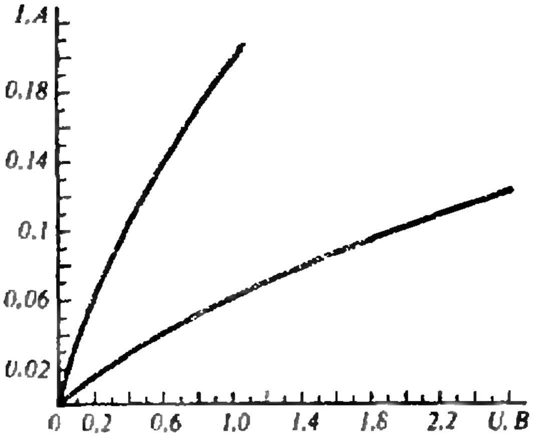
$$\alpha=\frac{v_y}{v_x}=\frac{eq}{2\varepsilon_0 m v_x^2}=\frac{eq}{4\varepsilon_0 W}.$$

В. Можаев

Задачник „Кванта"

Ф1366. В «черном ящике» находятся постоянный резистор и нелинейный элемент, которые могут быть включены последовательно или параллельно. Вольт-амперные характеристики для обоих включений приведены на рисунке. Найдите по этим данным сопротивление резистора. Какой нелинейный элемент может находиться в «ящике»?

Один из способов решения этой задачи совсем прост (хотя и очень трудоемок) — можно задать какую-нибудь произвольную величину R сопротивления резистора и при помощи одного из графиков (например, для последовательного соединения) построить отдельно вольт-амперную характеристику нелинейного элемента, вычитая из общей (последовательной) характеристики напряжения выбранного резистора при различных значениях тока. После этого можно построить характеристику для параллельного соединения и посмотреть, похожа ли она на приведенную в условии. Если похожа (или совпадает «один к одному») — задача решена, если нет — нужно изменить R и пробовать еще.



Ясно, что такой способ не очень хорош (даже если у вас есть много свободного времени, его можно употребить с большей пользой, чем перебирая различные R). Однако подбор можно сильно упростить. Характеристика нелинейного элемента проходит через ноль и является довольно гладкой, поэтому можно считать, что при малых токах через нелинейный элемент напряжение на нем оказывается приблизительно пропорциональным току, т. е. начальные участки кривых для параллельного и последовательного соединений соответствуют просто параллельному и последовательному соединениям обычных резисторов, один из которых — искомый, а другой — эквивалент нелинейного элемента при малых токах через него.

Итак, используем начальные участки заданных кривых, проведем касательные к ним и найдем сопротивления, которым они соответствуют:

$$r_{\text{пар}} \approx 2{,}5\ \text{Ом},\quad r_{\text{посл}} \approx 14\ \text{Ом}.$$

Обозначим сопротивление нелинейного элемента (при малых напряжениях) r. Тогда

$$R + r = 14,$$

$$\frac{Rr}{R+r} = 2{,}5.$$

Для R получаем квадратное уравнение

$$R^2-14R+35=0,$$

откуда

$$R_1=7+\sqrt{14}\text{ Ом}\approx 10{,}8\text{ Ом},$$
$$R_2=7-\sqrt{14}\text{ Ом}\approx 3{,}2\text{ Ом}.$$

Второе значение явно не подходит, поэтому окончательно

$$R\approx 11\text{ Ом}.$$

Теперь строим характеристику нелинейного элемента и получаем, что это — лампочка.

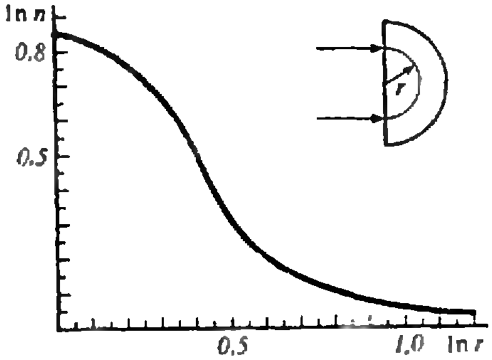
А. Зильберман

***Ф1367.** Полуцилиндр изготовлен из оптически прозрачных цилиндрических слоев с разными значениями показателя преломления n. Полученная зависимость n от радиуса слоя r изображена на рисунке в координатах ln n и ln r. Используя данную зависимость, найдите радиусы полуокружностей, по которым сможет распространяться тонкий пучок света при нормальном падении на плоскую поверхность полуцилиндра.*

Известно, что при распространении луча света между двумя точками в произвольной среде, в которой скорость света может быть различной в разных местах, он движется таким образом, что время его прохождения оказывается минимальным (принцип Ферма). Для случая движения луча по окружности радиусом R, где коэффициент преломления равен $n(R)$, время прохождения полуокружности равно

$$t=\pi R/v=\pi Rn(R)/c,$$

где v — скорость света в веществе, а c — в вакууме. Для радиуса R, при котором такое возможно, должно



выполняться условие минимальности времени:

$$(Rn)'=Rn'+R'n=0.$$

Вспоминая свойства функции $\ln x$, можно записать:

$$\ln R+\ln n=\text{const}.$$

Теперь можно найти возможные значения радиуса R, используя графический метод — находя на графике зависимости $\ln n$ от $\ln R$ точки с тем же углом наклона, что и у полученной нами прямой. Это две точки:

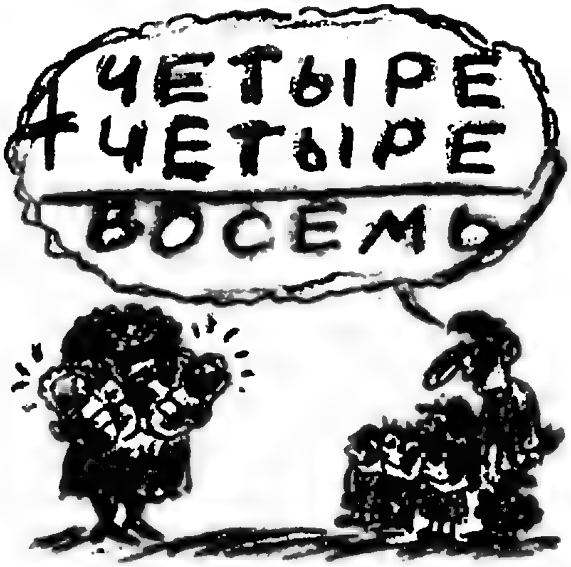
$$\ln R_1=0{,}27\pm0{,}02\Rightarrow R_1=1{,}31\pm0{,}03\text{ (см)},$$
$$\ln R_2=0{,}54\pm0{,}02\Rightarrow R_2=1{,}7\pm0{,}02\text{ (см)}.$$

В. Можаев

Задачи

1. В вагонах № 7, № 8, № 9 поезда Москва — Сухуми оказались свободные места. Ревизор (любитель математики) отметил, что если поменять местами цифры числа пассажиров вагона № 7, то получится число пассажиров вагона № 8, а сумма этих чисел равна квадрату числа пассажиров вагона № 9. Один из этих трех вагонов плацкартный, другой — купейный. Какой третий вагон?

2. Найдите два последовательных числа, каждое из которых равно сумме кубов своих цифр.



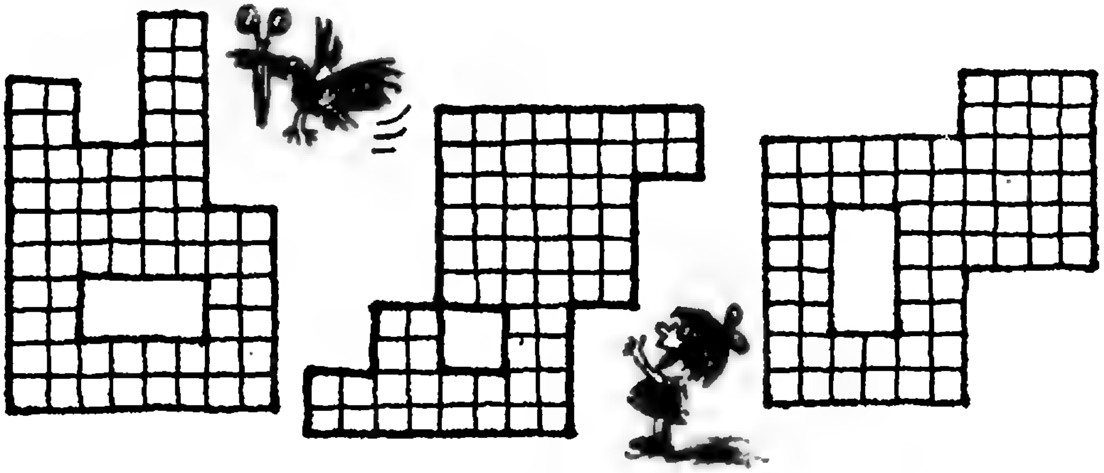
3. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

4. Если во всех клетках квадрата 4×4 расположить нули, то каждое записанное число будет равно сумме всех своих соседей по горизонтали и вертикали. Можно ли заменить часть нулей (или все) другими числами так, чтобы это свойство сохранилось?

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

5. Любую из трех фигур, изображенных на рисунке, можно разрезать на две части, из которых нетрудно сложить квадрат. Найдите такие разрезания.

Эти задачи нам предложили И. Акулич, П. Филевич, А. Циммерман, С. Токарев и Н. Антонович.



Алиса, кошка и задумчивый осел

Кандидат физико-математических наук
Л. ГЕНДЕНШТЕЙН

Когда Алиса обнаружила, что стоит на невидимой струне, а вокруг ничего нет, ее первой мыслью было:

— Долго я так не простою!

Однако посмотрев вверх, вниз и по сторонам, она немного успокоилась:

— Даже если я упаду, то не разобьюсь: здесь просто не обо что удариться!

И, балансируя на струне, Алиса пустилась в рассуждения о том, как она будет падать.

— Это будет *настоящее* падение,— с легким замиранием сердца думала Алиса,— по сравнению с этим падением в никуда мое падение в кроличью нору — все равно что прыжок с одной ступеньки!

— Может быть, я буду падать *бесконечно долго*? (Алиса была рада, что к месту вспомнила о бесконечности, и жалела, что ее сейчас никто не слышит.) И все-таки бесконечность — странная вещь! — продолжала Алиса.— Я, конечно, не против того, чтобы падать годик-другой, но падать бесконечно долго — это может, пожалуй, и надоесть!

— Стоять бесконечно долго не намного лучше,— возразила она самой себе и тут же ощутила удивительную легкость: она как бы парила в пространстве.

— Как легко стало! — обрадовалась Алиса.— Теперь я не упаду, даже если захочу! А, может быть, это я *уже* падаю?

Алиса расслабилась: она чувствовала себя так, будто лежит на мяг-

---

Начало этой удивительной истории о том, как Алиса попала в Математическую страну и что с ней там приключилось, вы могли прочесть в седьмом номере нашего журнала.

кой-мягкой (бесконечно мягкой!) перине.

— Все было бы совсем хорошо,— продолжала Алиса говорить сама с собою уже в полудреме,— если бы еще здесь кто-нибудь умел разговаривать... или хотя бы слушать...— глаза Алисы начинали слипаться,— вот если бы здесь была моя кошка Дина: она так хорошо слушает — склонит головку набок и слушает... а если бы она еще умела говорить...

Прямо перед Алисой возникла ее кошка Дина. Она сидела ни на чем вниз головой и преспокойно умывалась.

— Диночка, это ты? — воскликнула Алиса (у нее сразу пропал сон).— Но почему ты вниз головой?

— Ты задала сразу *два* вопроса,— сказала Кошка, оторвавшись от умывания.— С какого вопроса начнем?

— Мне все равно,— сказала Алиса.

— *Совсем* все равно? — уточнила почему-то Кошка.

— Совсем,— подтвердила Алиса.— Но почему ты так об этом спрашиваешь?

— Потому что мне тоже все равно,— вздохнула Кошка.— А у нас тут если уж равно, так это *действительно* равно...

— Ничего не понимаю! — сказала Алиса, начиная сердиться.— Если и тебе и мне все равно, начинай с любого вопроса!

— С *любого*? — воскликнула Кошка.— Но как же мы выберем этот «любой», если и тебе и мне *совершенно* все равно?

Алиса рассердилась по-настоящему:

— Если ты не хочешь отвечать на мои вопросы, так и скажи! И нечего придумывать всякую чепуху.

— Чепуху?! — вскричала Кошка, и зрачки ее расширились.— Сейчас я покажу тебе, что случается здесь из-за такой «чепухи».— Она протянула Алисе лапу.— Летим!

— Как же мы полетим? — удивилась Алиса, беря протянутую ей лапу.— Ведь у нас нет крыльев!

— Воображение лучше крыльев,— возразила Кошка.

Алиса посмотрела по сторонам и увидела, что они мчатся с безумной скоростью: мимо проносились неизвестно откуда взявшиеся египетские пирамиды, древнегреческие храмы с бесчисленными колоннами, города с островерхими башнями, толпы людей в самых разнообразных одеждах, причудливые звери, и всюду были какие-то фигуры, значки и буквы...

—... буквы тут тоже не складываются в слова,— успела заметить на лету Алиса.

Внезапно все остановилось и куда-то сразу исчезло. Впрочем, не совсем все: перед Алисой стоял невероятно худой осел. Несчастное животное еле держалось на ногах: казалось, оно вот-вот рухнет от истощения. Слева и справа от осла лежало по одной охапке сена; Алисе показалось, что она даже чувствует запах свежего сена. Осел косился левым глазом на одну охапку, а правым — на другую, но не трогался с места.

— Бедненький!— невольно вырвалось у Алисы.— Почему же ты не ешь? Разве ты не видишь, что рядом с тобой две охапки сена?

— В том-то и беда, что их *две*,— печально сказал Осел, с трудом переводя глаза на Алису.— Обе охапки *совершенно одинаковые*, и к тому же находятся на *совершенно одинаковых расстояниях* от меня! Вот я никак и не могу выбрать, с какой начать...

— Я помогу тебе выбрать! — воскликнула Алиса: она не в силах была выносить это душераздирающее зрелище.— *Совершенно* одинаковых охапок не бывает!

— Смотря каких,— возразил Осел, снова переводя глаза на охапки.— Настоящих, может быть, и не бывает, а *воображаемых* — сколько угодно! Эти охапки одинаковы *по определению*...

— Что это значит? — не поняла Алиса.

— Понимаешь,— грустно сказал Осел,— каждый воображает по-своему. Но иногда надо, чтобы разные люди вообразили *одно и то же*. И тогда приходится договариваться о том, что именно надо вообразить...

— Постой! — воскликнула Алиса, начиная кое о чем догадываться.

— Если охапки — воображаемые, то, может быть, этот осел — тоже воображаемый? — тихо спросила она у Кошки.

— Все равно его жалко по-настоящему! — всхлипнула Кошка.

— И давно он так стоит? — поинтересовалась Алиса.

— Больше шестисот лет, — ответила Кошка, — с тех пор, как его придумал французский ученый Жан Буридан. Этого осла так и зовут: «Буриданов осел»...

— Понятно, — сказала Алиса (у нее стало легче на душе). — Буридан *нарочно* придумал для своего осла такое дурацкое положение!

— Потому он и взял осла, — сказала Кошка.

— Ну да, — согласилась Алиса, — кошку в таком положении никто бы и представить не мог! Разве удержишь двух одинаковых мышей...

— Дело не в мышах, — перебила Кошка и почему-то обиделась. Алиса поспешила перевести разговор:

— Я выбрала, с какого вопроса начинать.

— С какого? — живо спросила Кошка, забыв про обиду.

— С первого, — сказал Алиса.

— Почему? — снова спросила Кошка.

— Потому что он *первый*! — решительно сказала Алиса. — Скажи: ты Дина или не Дина? Честно говоря, я ни за что бы вас с ней не различила, если бы... если бы Дина умела говорить!

— Ты и не могла бы нас различить! — воскликнула Кошка. — Ведь я — как раз та говорящая Дина, которую ты себе представила. — Кошка махнула лапой, и осел с двумя охапками куда-то провалился («Туда ему и дорога», — подумала Алиса: она уже не особенно жалела глупого осла). — Так что я — не совсем Дина, — заключила Кошка и снова удобно устроилась в пространстве вниз головой.

— «Не-совсем-Дина», — медленно повторила про себя Алиса, размышляя над ответом Кошки, а заодно и над всем тем, что она только что видела. — Куда же это я попала?

— В страну Математики, — сказала «Не-совсем-Дина», будто читая мысли Алисы. Заметив, что Алиса удивилась, Кошка добавила:

— Я просто представила себе, о чем ты сейчас подумала.

— Как много тут всего воображаемого! — снова попыталась подумать Алиса.

— Очень много, — сразу согласилась Кошка. — Ты даже не представляешь себе, *как* много!

— А что-нибудь настоящее тут есть? — спросила Алиса. — Или все только воображаемое?

— Разве ты умеешь отличать одно от другого? — удивилась «Не-совсем-Дина».

— Кто же этого не умеет? — в свою очередь удивилась Алиса. — Это умеет всякий, даже... даже тот, кто ничего больше не умеет!

— Гм, — усомнилась Кошка. — Сейчас мы это проверим. У нас тут довольно много разных чисел...

— Может быть, *бесконечно* много? — спросила Алиса, не упускавшая случая показать свои знания.

— Именно столько, — подтвердила «Не-совсем-Дина». — Так вот, скажи: числа — настоящие или воображаемые?

— Числа настоящие, — сразу ответила Алиса. — С помощью чисел можно считать настоящие предметы.

— А ты когда-нибудь видела хотя бы одно *число*? — прищурившись спросила Кошка.

— Я видела много чисел! — воскликнула Алиса. — Если бы здесь были карандаш и бумага...

— Давай их представим, — предложила «Не-совсем-Дина», и тут же появились большой белый лист бумаги и карандаш.

Алиса взяла карандаш и написала на листе бумаги большую цифру «5».

(Продолжение см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Взаимодействие атомов воздуха обусловлено только теплотою.

М. В. Ломоносов

...теплота является... некоторым состоянием притяжения и отталкивания весомых частиц...

Дж. Джоуль

...молекулы проявляют силы взаимодействия, лишь находясь в непосредственной близости друг от друга.

Р. Клаузиус

...каждая молекула идет своим собственным путем, несмотря на непрерывное взаимное влияние, ...каждая молекула существует некоторым образом как самостоятельно действующий индивидуум.

Л. Больцман

А так ли хорошо знакомо вам

взаимодействие молекул?

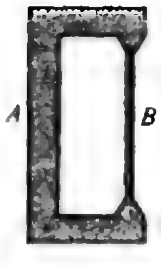
С высоты сегодняшнего уровня знаний многое в приведенных цитатах может показаться очевидным и даже наивным — неужели такие ясные вещи занимали умы выдающихся ученых? Увы, представления о молекулярном строении вещества еще в середине прошлого века разделялись отнюдь не всеми физиками, а молекулярно-кинетическая теория считалась бесперспективной. Приходилось с трудом пробивать дорогу новым воззрениям, порой возвращаясь к уже порядком забытым открытиям, создавать одну за другой теоретические модели, искать опытное их подтверждение.

Однако было бы опрометчиво полагать, что этот путь завершен и современная теория строения вещества классически совершенна. Да, на какое-то время в первой половине нашего столетия молекулярные изыскания оказались как бы на втором плане, но впоследствии практика вновь и вновь заставляла обращаться к ним, порождая новые вопросы и открывая неожиданные области исследований.

Мы же сегодня обсудим лишь несколько вопросов, в понимании которых так необходимы знания о взаимодействиях молекул,— в каких состояниях находятся вещества, как переходят из одного в другое, насколько и почему прочны тела, как ведут себя границы раздела сред и т. д. и т. п.

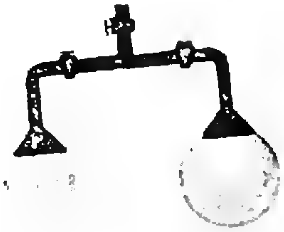
Вопросы и задачи

1. Известно, что кусок стекла можно разломить, прикладывая гораздо меньшее усилие, чем это необходимо для разрыва межмолекулярных связей. Как же удается «оторвать» молекулу от молекулы?
2. Почему проявление сил сцепления между двумя кусками металла демонстрируют со свинцом, а не со сталью?
3. Между выступами цинковой пластинки *A* вставлен железный стержень *B* такой длины, что он держится между выступами при очень малом трении. Что произойдет, если всю конструкцию опустить в горячую воду?



4. В колбу с узким горлышком налили керосин, уровень его в горлышке отметили резиновым колечком, а затем колбу опустили в горячую воду. Оказалось, что в первый момент уровень керосина опустился, а потом начал повышаться. Как это объяснить?
5. Поверхностный слой жидкости часто уподобляют растянутой резиновой пленке. В каком отношении эта аналогия не соответствует действительности?
6. Если на молекулу, находящуюся на поверхности жидкости, действует со стороны ее «соседей» направленная вниз сила, то почему эта молекула не движется с ускорением в глубь жидкости?

7. На концах трубки выдувают два мыльных пузыря разных диаметров. Постепенно меньший пузырь начинает сжиматься, а больший расширяться. Почему?



8. Можно ли, имея в своем распоряжении тонкие проволочки из различных химически чистых металлов, оценить температуру пламени в его различных местах?

9. Шарообразный стеклянный сосуд, на три четверти заполненный водой, привели в состояние невесомости. Что произойдет с водой? А если вместо воды взять ртуть?

10. Больному прописали принимать определенное количество капель лекарства. Как нужно изменить их число, если капли отсчитываются в жарко натопленном помещении?

11. Можно ли налить воду из стакана в узкогорлый флакон с помощью тонкой проволоки?

12. Из нескольких сортов фильтровальной бумаги нужно выбрать тот, в котором поры меньше. Как это сделать, не используя никаких приборов?

13. Почему при сушке дров на солнце на конце полена, обращенном в тень, выступают капельки воды?

14. Каким образом сок поднимается по стволам деревьев, особенно высоких?

Микроопыт

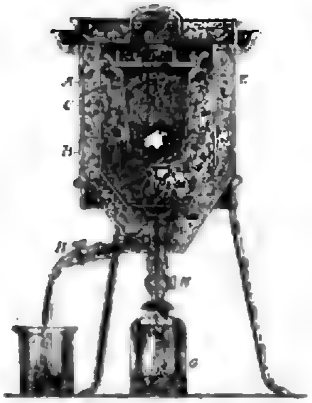
Налейте в хорошо вымытую тарелку чистую воду и набросайте на ее поверхность несколько спичек без головок. Коснитесь воды в промежутке между спичками кусочком сахара, а через некоторое время — кусочком мыла. Что произойдет? Почему?

Любопытно, что...

...физику процесса полировки пытался прояснить еще И. Ньютон, однако лишь недавние исследования пролили на него свет. Оказывается, при сильном нажиме удаляются целые кусочки материала с полируемой поверхности, при слабом — лишь отдельные молекулы.

...выведенное в 1873 году Ван-дер-Ваальсом уравнение состояния реального газа применимо и к не очень плотной жидкости, например к воде. Это подтверждал и заголовок статьи Ван-дер-Ваальса — «О непрерывности состояния жидкости и газа».

...водомерка, опираясь на воду кончиками лапок, не смачиваемых водой, способна не только скользить по воде, но и делать громадные прыжки, не прорывая поверхностного слоя.



...длинный цилиндрический слой жидкости неустойчив. Об этом словно известно пауку, формирующему нить паутины: липкая жидкость образует цилиндрическую оболочку вокруг сердцевины нити и вскоре распадается на крошечные шарики, к которым и прилипают насекомые.

...молекулярные силы быстро изменяются с расстоянием. Притяжение молекул при увеличении расстояния между ними в 2 раза ослабевает в 128 раз!

...«растащить» молекулы кислорода по затратам энергии раз в 50 легче, чем «разорвать» саму молекулу.

...представления, разработанные в одной области физики, часто удачно «кочуют» в другие. Так, рассматривая ядро урана как жидкую заряженную каплю, Я. И. Френкель показал в 1939 году, что она должна обнаружить колоссальное поверхностное натяжение. Такая, капельная, модель ядра позволила объяснить, например, как происходит деление ядер урана.

...абсолютно чистые и гладкие поверхности при соприкосновении могут сами собой слипнуться. Когда только начались полеты космических кораблей с экипажами на борту, существовала реальная опасность, что металлическая подошва ботинка космонавта может самопроизвольно «приклеиться» к металлической обшивке корабля.

Что читать в «Кванте» о взаимодействии молекул

(публикации последних лет)

1. «Силы молекулярного взаимодействия» — 1987, № 1, с. 31;
2. «Ван-дер-Ваальс и его уравнение» — 1987, № 7, с. 34;
3. «Поверхностное натяжение и капиллярные явления» — 1988, № 4, с. 56;
4. «История росинки» — 1988, № 7, с. 25;
5. «Коротко о тепловом расширении» — 1988, № 8, с. 44;
6. «Реальный газ и его уравнение состояния» — 1988, № 11—12, с. 52;
7. «Сколько бывает состояний у вещества?» — 1989, № 1, с. 47;
8. «Пузыри в луже» — 1989, № 6, с. 22;
9. «За какое время сливаются капли?» — 1990, № 11, с. 42;
10. «Пока вода испаряется...» — 1991, № 11, с. 31.

— Вот,— сказала Алиса,— смотри! Это число «пять».

— Я вижу только *цифру* «пять»,— возразила Кошка.

— А разве цифра — это не число? — удивилась Алиса.

— Ни в коем случае! — заявила «Не-совсем-Дина».— С помощью цифр только *обозначают* числа, и то в разные века разные народы делали это по-разному. Та цифра, которую ты написала, называется арабской, хотя арабы переняли такие цифры у индийцев, да они и выглядели тогда по-другому... А древние римляне...

— Знаю, знаю! — не совсем вежливо перебила Алиса Кошку.— Римские цифры мы проходили. Число «пять» записывается так.— И Алиса нарисовала значок «V».

— Вот видишь,— сказала «Не-совсем-Дина».— Цифры разные, а число одно и то же! Значит, цифра — это не число.— Кошка немного помолчала и добавила:

— Даже *здесь* я не знаю никого, кто видел бы *число* «пять» или какое-нибудь другое число.

Но Алиса не сдавалась:

— Пять девочек можно не только вообразить, они есть и *на самом деле*! У меня как раз пять подружек...

— Как их зовут? — тут же спросила Кошка.

— Ада, Мейбл, Бетси, Джейн и Молли,— ответила Алиса.— Но зачем тебе их имена?

— Ты можешь представить себе девочек отдельно, а имена — отдельно? — неожиданно спросила Кошка.

— Девочек без имен не бывает! — решительно возразила Алиса.

— Да...— разочарованно протянула «Не-совсем-Дина»,— с воображением у тебя слабовато.

Алиса сдвинула брови и изо всех сил попыталась вообразить девочек и имена порознь. Наконец, это ей удалось: она представила, что видит девочек очень издалека, настолько издалека, что не видно даже — знакомы ей эти девочки или незнакомы. Девочек Алиса разместила в своем мозгу слева, а имена своих подружек — справа. И в этот момент Кошка спросила:

— Готово?

— Готово,— сказала Алиса, с трудом удерживая имена: они прямо-таки рвались к девочкам, среди которых Алиса начинала невольно узнавать своих подружек.

— А теперь скажи,— спросила «Не-совсем-Дина»,— есть что-нибудь общее у девочек и имен?

Алиса честно попыталась рассмотреть в своем мозгу девочек и имена и, наконец, сказала:

— По-моему, нет: девочки и имена совсем разные! Девочки живые, а имена — нет, и вообще — девочки — это девочки, а имена — это только имена...

— Не торопись,— сказала Кошка,— присмотрись внимательнее.

И тут Алису осенило:

— Девочек и имен *поровну*!!!

Кошка стала такой довольной, что даже замурлыкала. Однако через минуту, вспомнив, наверное, что она умеет говорить, Кошка вкрадчиво спросила:

— А как это можно проверить?

Алиса задумалась, но недолго: как только она перестала удерживать имена, они устремились к девочкам, и каждая из них превратилась в одну из Алисиных подружек!

— Если каждой девочке дать по одному имени,— сказала Алиса,— то не останется ни девочек без имени, ни имен без девочек.

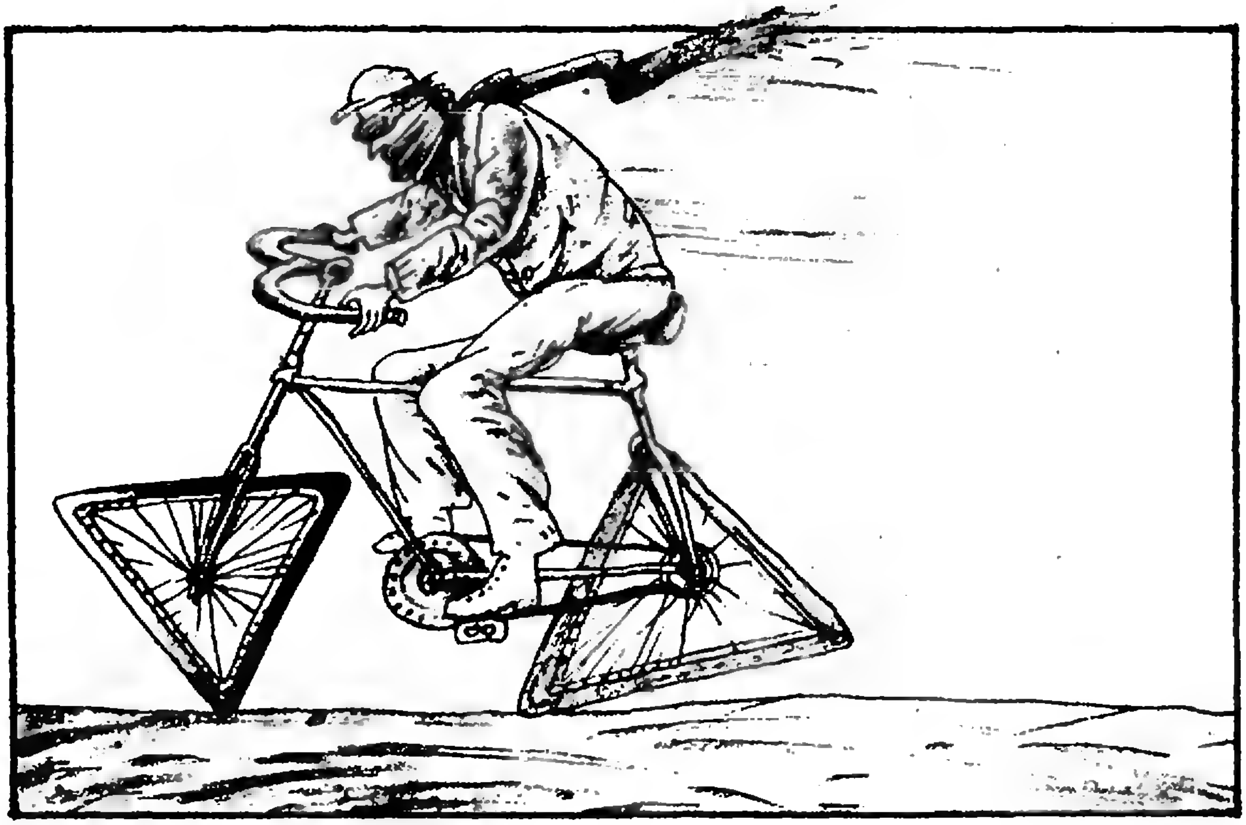
— Вот это и означает, что девочек и имен одинаковое число! — воскликнула «Не-совсем-Дина» и опять чуть не замурлыкала от удовольствия, но снова перешла на вкрадчивый тон:

— Как ты думаешь, то общее, что есть у имен и девочек,— настоящее или воображаемое?

— Да,— призналась Алиса,— про числа не так просто это сказать.

— А ведь те числа, которые получаются при счете, самые простые из

(Окончание см. на с. 46)



Математический кружок

О двух формулах Эйлера

И. КУШНИР

Меньше вершин, чем у треугольника, у многоугольников не бывает, так что в каком-то смысле он — простейший из многоугольников. Тем не менее треугольник, похоже, неисчерпаем: с какой стороны ни посмотришь, обязательно обнаружатся какие-нибудь полезные свойства. Формулы Эйлера, о которых здесь пойдет речь, описывают еще два факта из богатейшего набора свойств, связанных с этой геометрической фигурой.

Пусть X — произвольная точка плоскости, X_a, X_b, X_c — ее проекции на стороны BC, AC, AB треугольника ABC. Треугольник $X_aX_bX_c$ называется *педальным*.

Первая формула Эйлера устанавливает связь между площадью S треугольника ABC и площадью S_X педального треугольника:

$$S_X = \frac{1}{4} S \left| 1 - \frac{OX^2}{R^2} \right|$$

(здесь O и R — центр и радиус окружности, описанной около треугольника ABC).

Для доказательства этой формулы нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Если продолжить отрезки AX, BX и CX до пересечения с окружностью, описанной около треугольника ABC, полученный треугольник $A'B'C'$ будет подобен педальному.*

Упражнение 1. Пусть точка X движется параллельно одной из сторон треугольника ABC. Как меняется взаимное расположение педального треугольника и треугольников ABC и $A'B'C'$?

Доказательство. Пусть сначала X лежит внутри этого треугольника (рис. 1). Точки X, X_b, A и X_c лежат на одной окружности, по-

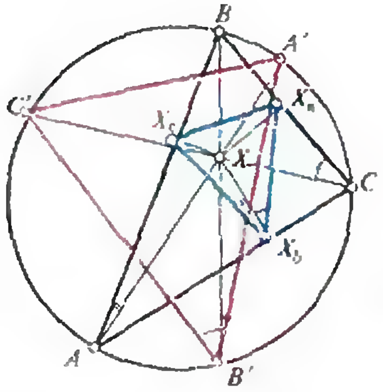


Рис. 1.

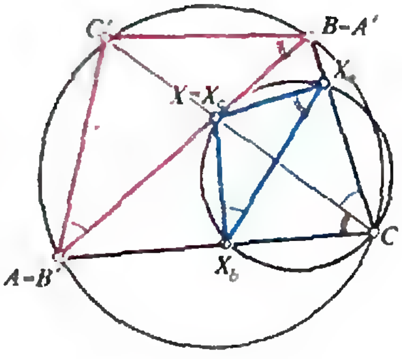


Рис. 2.

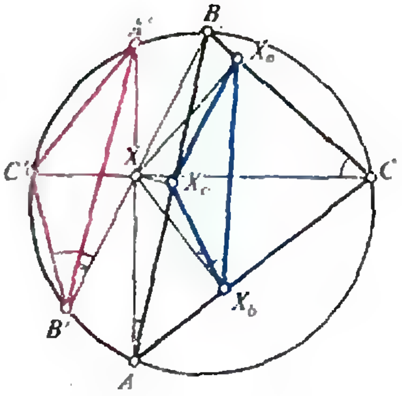


Рис. 3.

скольку образуют два прямоугольных треугольника с общей гипотенузой. Поэтому углы XX_bX_c и XAX_c равны, как вписанные, опирающиеся на одну дугу. Аналогично, точки X, X_b, C и X_a лежат на одной окружности, и углы X_aX_bX и X_aCX равны. Но угол $A'B'B$ равен углу $A'AB$, поскольку опирается на ту же дугу окружности, описанной около $\triangle ABC$, а угол $BB'C'$ по той же причине равен углу BCC'. Поэтому $\angle A'B'C' = \angle X_aX_bX_c$. Аналогично доказывается, что равны углы $X_bX_aX_c$ и $B'A'C'$. Тогда треугольники $X_aX_bX_c$ и $A'B'C'$ подобны по двум углам.

Те же соображения, что и в рассмотренном случае, позволяют убедиться в справедливости леммы 1, когда точка X лежит на стороне треугольника ABC (рис. 2) и когда точка X находится вне треугольника ABC, но внутри его описанной окружности (рис. 3).

Упражнение 2. Проведите доказательство для этих случаев самостоятельно.

Пусть теперь точка X лежит вне описанной окружности треугольника ABC (рис. 4). Точки X, X_a, C, X_b лежат на одной окружности; поэтому $\angle XX_bX_a = \angle XCX_a$. С другой стороны, точки X, X_c, X_b, A тоже лежат на одной окружности, поэтому $\angle XAB = \angle XX_bX_c$. Но $\angle XAB = \angle A'CB$, откуда $\angle A'B'C' = \angle A'CC' = \angle A'CB - \angle C'CB = \angle XX_bX_c - \angle XX_bX_a = \angle X_aX_bX_c$.

Осталось доказать равенство каких-нибудь других двух углов треугольника $A'B'C'$ и педального треугольника. Докажем, что $\angle X_bX_aX_c = \angle C'A'B'$.

Прямой угол XX_aC равен сумме трех углов — XX_aX_b, $X_bX_aX_c$ и X_cX_aC:

$$\pi/2 = \angle XX_aX_b + \angle X_bX_aX_c + \angle X_cX_aC. \qquad (*)$$

Из окружности, проходящей через точки X, X_a, C и X_b, видно, что $\angle XX_aX_b = \angle XCX_b$. С другой стороны, из окружности, проходящей через точки X, X_c, B и X_c, имеем $\angle X_cX_aB = \angle X_cXB$, а из прямоугольного треугольника XX_cB имеем $\angle X_cXB = \pi/2 - \angle B'BX_c$. Но $\angle B'BX_c = \angle B'BA = \angle B'CA = \angle B'CC' + \angle C'CA = \angle B'CC' + \angle XCX_b$. Подставляя в формулу (*), получаем

$$\pi/2 = \angle XCX_b + \angle X_bX_aX_c + \pi/2 - \angle B'CC' - \angle XCX_b,$$

откуда

$$\angle X_bX_aX_c = \angle B'CC',$$

но

$$\angle B'CC' = \angle C'A'B'.$$

Итак, и в этом случае лемма 1 верна.

Лемма 2. *Треугольники BXC и $B'XC'$ подобны.*

Доказательство. Пусть X лежит внутри треугольника ABC (рис. 1). Тогда углы $C'CB$ и $C'B'B$ равны, как вписанные, опирающиеся на одну дугу; аналогично равны углы $B'C'C$ и $B'BC$.

Если же X находится вне треугольника ABC, эти треугольники образованы двумя секущими и, следовательно, подобны (почему?).

Теперь можно доказать, наконец, первую формулу Эйлера.

Пусть R_X — радиус окружности, описанной около треугольника $X_aX_bX_c$. Выразив площади треугольника ABC и педального треугольника через их стороны и радиусы их описанных окружностей, получим:

$$\frac{S_X}{S}=\frac{R}{R_X}\cdot\frac{X_bX_c\cdot X_aX_c\cdot X_aX_b}{BC\cdot AC\cdot AB}.$$

По лемме 1 треугольники $A'B'C'$ и $X_aX_bX_c$ подобны, поэтому

$$R:R_X=B'C':X_bX_c$$

и

$$\frac{S_X}{S}=\frac{B'C'\cdot X_aX_b\cdot X_aX_c}{BC\cdot AC\cdot AB}.$$

Из окружности, проходящей через точки X_a, X, X_b, C, имеем

$$X_aX_b=CX\sin\angle X_bCX_a=CX\frac{AB}{2R}.$$

Аналогично

$$X_aX_c=BX\sin\angle X_aBX_c=BX\frac{AC}{2R}.$$

Подставляя в формулу для отношения площадей, получим

$$\frac{S_X}{S}=\frac{1}{4R^2}\cdot\frac{B'C'}{BC}\cdot BX\cdot CX.$$

По лемме 2 $B'C':BC=B'X:CX$, поэтому

$$\frac{S_X}{S}=\frac{1}{4R^2}B'X\cdot BX.$$

Но

$$B'X\cdot BX=|R-OX|\cdot(R+OX)=|R^2-OX^2|$$

(докажите это!). Следовательно,

$$S_X=\frac{S}{4}\left|1-\frac{OX^2}{R^2}\right|.$$

Итак, мы доказали первую формулу Эйлера.

Упражнение 3. Докажите, что если точка X лежит внутри описанной окружности треугольника ABC, *то справедливы неравенства*:

а) $S_X\leqslant S/4$,

б) $\frac{d_bd_c}{bc}+\frac{d_ad_c}{ac}+\frac{d_ad_b}{ab}\leqslant\frac{1}{4}$,

где a, b, c — длины сторон BC, AC, AB треугольника ABC, d_a, d_b, d_c — расстояния от X до этих сторон соответственно.

Из этой формулы следует также, что если точка X лежит на описанной окружности треугольника ABC, то точки X_a, X_b и X_c лежат на одной прямой (*прямая Симсона*). В самом деле, в этом случае $OX=R$, т. е. $S_X=0$.

Докажем теперь *вторую формулу Эйлера*, связывающую радиусы вписанной и описанной окружности треугольника. Пусть J — центр вписанной окружности треугольника ABC, r — ее радиус; O и R, как и раньше,— центр и радиус его описанной окружности. Тогда

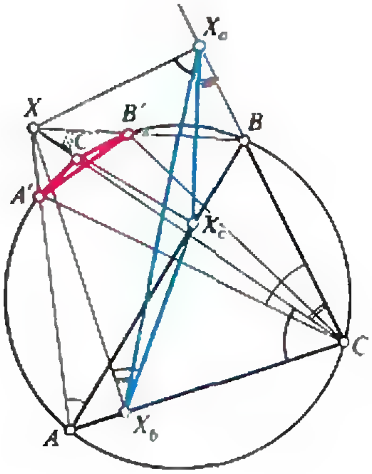


Рис. 4.

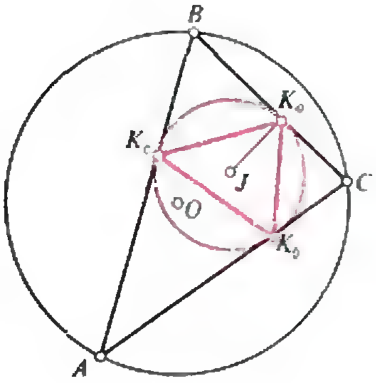


Рис. 5.

$$OJ^2=R^2-2Rr.$$

Лемма. *Пусть вписанная окружность касается сторон BC, AC и AB треугольника ABC в точках K_a, K_b, K_c соответственно (рис. 5). Тогда площадь треугольника $K_aK_bK_c$ относится к площади треугольника ABC как $r:2R$.*

В самом деле, для площади S_J треугольника $K_aK_bK_c$ имеем:

$$S_J=\frac{1}{2}r^2(\sin BAC+\sin ABC+$$
$$+\sin ACB)=\frac{r^2}{4R}(a+b+c).$$

Учитывая, что $S=r(a+b+c)/2$, получим искомое отношение:

$$\frac{S_J}{S}=\frac{2r^2(a+b+c)}{4Rr(a+b+c)}=\frac{r}{2R}.$$

Докажем теперь вторую формулу Эйлера. Запишем для этого первую формулу Эйлера для точки X, совпадающей с точкой J:

$$S_J=\frac{S}{4}\left(1-\frac{OJ^2}{R^2}\right).$$

Из только что доказанной леммы имеем

$$S_J=\frac{Sr}{2R},$$

поэтому

$$\frac{r}{R}=\frac{1}{2R^2}(R^2-OJ^2)$$

и

$$OJ^2=R^2-2Rr.$$

Упражнение 4. Докажите, что $R\geqslant 2r$.

Интересно, что для тетраэдра справедлива формула, аналогичная второй формуле Эйлера:

$$OJ_0^2=R^2-2R_0r_0,$$

где O — центр описанной сферы, R — ее радиус, J_0 — центр окружности, вписанной в одну из граней, r_0 — ее радиус, R_0 — радиус окружности, описанной около этой грани.

Упражнения

5. Докажите вторую формулу Эйлера для тетраэдра.

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его средней линии. Найдите угол BAC, если известно, что центр описанной окружности лежит на вписанной окружности.

7. Постройте треугольник по R, r, a.

8. Стороны треугольника составляют геометрическую прогрессию $b>a>c$. Докажите, что расстояние от вершины, противолежащей средней по величине стороне треугольника, есть среднее геометрическое между диаметром вписанной и радиусом описанной окружности.

9. Докажите, что если h и l — высота и биссектриса, проведенные из вершины A треугольника ABC, то $h/l\geqslant\sqrt{2r/R}$.

10. Докажите, что $S_X\leqslant(S_a+S_b+S_c)/3$, где S_a, S_b, S_c — площади треугольников AX_bX_c, BX_aX_c, CX_bX_a.

11. В прямоугольном треугольнике ABC точка X — центр тяжести треугольника $X_aX_bX_c$. Докажите, что $S_X=2S/9$.

(Начало см. на с. 37)

всех чисел,— сказала Кошка, снова принимаясь за умывание.— Они так и называются — «натуральные». Правда, среди них есть и по-настоящему *простые*...

Алиса собралась было спросить, какие же это «по-настоящему простые числа», но тут «Не-совсем-Дина» с неожиданной страстью заявила:

— Натуральные числа я просто обожаю! Каждое из них прекрасно по-своему!

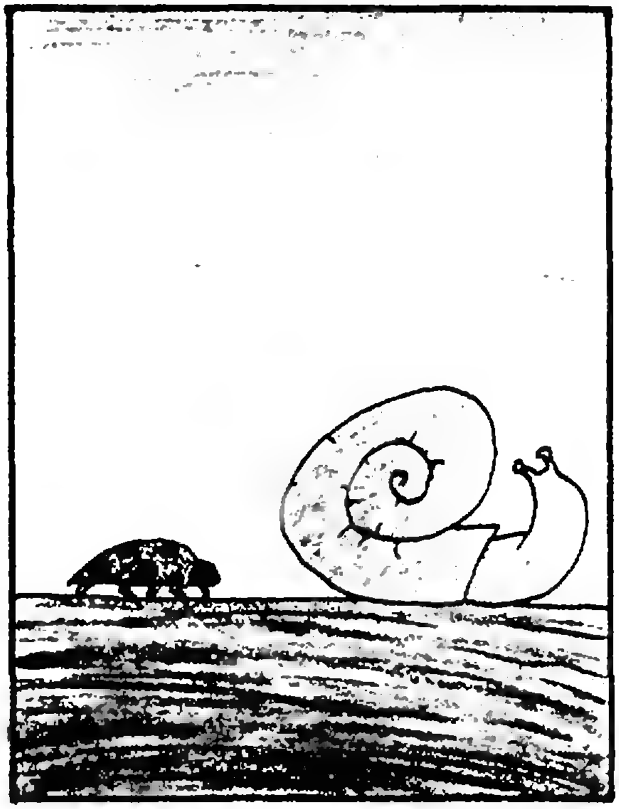
И медленно, в такт своим движениям при умывании, Кошка начала считать:

— Один, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, де...

— Хватит! — громко крикнула Алиса, догадавшись, что ей опять грозит бесконечность. И, поскольку «Не-совсем-Дина» по-прежнему сидела вниз головой, Алиса повторила свой второй вопрос:

— Почему ты вниз головой?

Алиса никогда не забывала, на какие вопросы она еще не получила ответа!..



Практикум абитуриента

Смотри в корень! И в дискриминант...

Б. КОРСУНСКИЙ

Как правило, решение физической задачи заканчивается составлением уравнения или системы уравнений. Когда это сделано, мы говорим себе: с физикой всё, начинается алгебра. Но всегда ли это так? Если, например, задача приводит к квадратному уравнению, то его анализ без физических соображений (или просто здравого смысла) невозможен.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Задача 1. *Два тела одновременно начинают двигаться вдоль одной прямой. Первое — равномерно со скоростью v, второе, отстававшее вначале на l, — равноускоренно с ускорением a. Через какое время второе тело догонит первое?*

Запишем уравнения движения тел:

$$x_1 = vt,$$

$$x_2 = -l + \frac{at^2}{2}.$$

В момент встречи координаты тел равны: $x_1 = x_2$, откуда для времени t получаем квадратное уравнение

$$\frac{at^2}{2} - vt - l = 0.$$

Решив его, имеем

$$t = \frac{v \pm \sqrt{v^2 + 2al}}{a}.$$

Ясно, что по смыслу задачи решение должно быть одно. Исключить один из корней здесь легко: в самом деле, меньший корень отрицателен, чего быть не может.

Итак, ответ:

$$t = \frac{v + \sqrt{v^2 + 2al}}{a}.$$

Задача 2. *Трубку длиной l наполовину погружают в ртуть, затем закрывают сверху и вынимают. Какой длины столбик ртути останется в трубке? Атмосферному давлению соответствует высота столбика ртути, равная H.*

Из закона Бойля—Мариотта, записанного в виде

$$H\frac{l}{2} = (H-h)(l-h),$$

для искомой длины столбика ртути h получаем

$$h^2 - (H+l)h + \frac{Hl}{2} = 0,$$

или

$$h = \frac{H+l}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{H^2 + l^2}.$$

Ну, а здесь как быть? Ответ явно единственный, но какой из двух? Нетрудно видеть, что оба корня больше нуля, но зато больший из корней *больше* l, что, конечно же, противоречит условию.

Таким образом, окончательно

$$h = \frac{H+l}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{H^2 + l^2}.$$

Задача 3. *Фокусное расстояние собирающей линзы равно F. Каково*

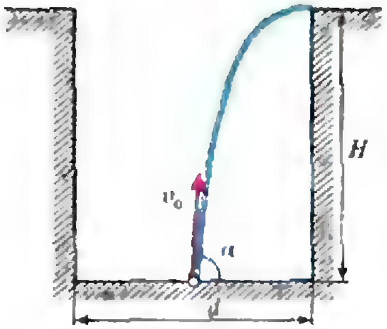


Рис. 1.

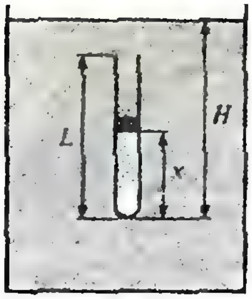


Рис. 2.

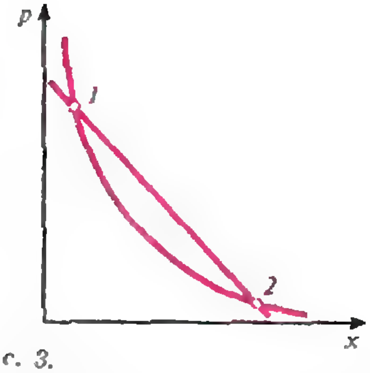


Рис. 3.

минимально возможное расстояние между предметом и его действительным изображением?

Обозначим расстояние от предмета до линзы d, расстояние между предметом и его изображением x и запишем формулу линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{x-d}=\frac{1}{F},$$

или

$$d^2-dx+Fx=0.$$

Решая уравнение относительно d, получим, что дискриминант равен

$$D=x(x-4F).$$

Так как $x>0$, решение возможно только в том случае, если $x\geqslant 4F$. Отсюда находим

$$x_{\min}=4F.$$

Задача 4. *Испытание гранаты проводится в центре дна цилиндрической ямы глубиной H. Каким должен быть минимальный диаметр этой ямы, чтобы осколки, скорость которых не превышает v_0, не вылетели из нее?*

Рассмотрим «критический» осколок (рис. 1) и запишем для него уравнение движения в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$v_0\cos\alpha\cdot t=\frac{d}{2},$$

$$v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{gt^2}{2}=H,$$

где d — диаметр ямы. Отсюда получаем уравнение

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{4v_0^2}{gd}\operatorname{tg}\alpha+\left(\frac{8Hv_0^2}{gd^2}+1\right)=0.$$

Условие задачи выполняется, если это уравнение не имеет решений, т. е. если дискриминант отрицательный:

$$\left(\frac{4v_0^2}{gd}\right)^2-4\left(\frac{8Hv_0^2}{gd^2}+1\right)\leqslant 0,$$

или

$$d^2\geqslant\frac{4v_0^2}{g^2}(v_0^2-2gH).$$

Это означает, что если $v_0^2\leqslant 2gH$, то диаметр d может быть любым (действительно, даже вертикально летящий осколок не долетит до поверхности земли), если же $v_0^2>2gH$, то

$$d\geqslant\frac{2v_0}{g}\sqrt{v_0^2-2gH},$$

и

$$d_{\min}=\frac{2v_0}{g}\sqrt{v_0^2-2gH}.$$

Задача 5. *Пробирку длиной L заполнили водородом при давлении p_0, закрыли легким подвижным поршнем и погрузили в сосуд с ртутью на глубину H (рис. 2). Какой будет высота (x) столба водорода в новых условиях? Плотность ртути ρ, атмосферное давление p_a.*

Записав условие равновесия поршня —

$$p_a+\rho g(H-x)=p$$

и закон Бойля—Мариотта —

$$p_0L=px,$$

где p — новое давление водорода,

(Окончание см. на с. 69)

Вокруг «Тетриса»

Кажется, нет сейчас человека, ничего не слышавшего об одной из самых популярных в мире компьютерных игр — «Тетрисе». Говорят, московский программист Алексей Пажитнов придумал ее, держа в руках довольно древнюю головоломку «Пентамино». В ней требуется из данного набора плоских деталек, представляющих собой всевозможные конфигурации из 5 одинаковых квадратиков, сложить различные фигуры. Эта головоломка, рассчитанная на неспешное вдумчивое решение, превратилась в весьма динамичную игру «на скорость соображения», сначала двумерную (собственно «Тетрис»), потом трехмерную (например, «Блокаут»); потом пошли разнообразные варианты — младшие братья, племянники и даже внуки «Тетриса».

Для тех, кому не посчастливилось ни разу сразиться с компьютером в эту игру, вкратце опишем ее.

В плоский «стакан» по одной падают фигурки (всевозможные конструкции из четырех единичных квадратиков; кстати, поэтому игра называется «Тетрис» — от слова «тетра» — «четыре» по-гречески). Игрок может поворачивать летящую фигурку и сдвигать ее влево или вправо. Когда одна фигурка упала, машина сбрасывает следующую. Ваша задача — уложить эти фигурки так, чтобы заполнить какой-нибудь горизонтальный ряд. Если вам удастся это сделать, не оставив в ряду пустых клеток, весь заполненный ряд с радостным хрюканьем исчезает. Игра закончится победой машины, если весь стакан окажется доверху засыпан фигурками так, что в каждом горизонтальном ряду останутся пустоты и ни один ряд уже не сможет исчезнуть. «Победа» игрока означает бесконечную игру. Реально всегда игра заканчивается, ибо человеку свойственно ошибаться, а коварный чертик где-то внутри компьютера изощряется, кидая все быстрее именно те фигурки, которые не желают укладываться так, как бы вам хотелось.

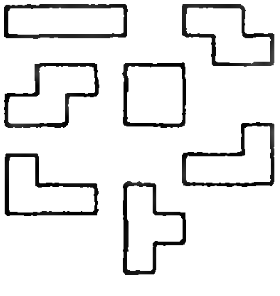


Рис. 1. Фигурки «Тетриса».

Поскольку «Тетрис» существует уже более 10 лет, он успел породить множество вопросов у самых дотошных из своих поклонников. Так, в газете МФТИ «За науку» мы нашли такую чисто математическую проблему, сформулированную Г. Геогджаевым:

«Играющие в «Тетрис» часто жалуются на невезение. А бывает ли в «Тетрисе» «фатальное» невезение? Конкретно:

а) Существует ли такая последовательность фигур «Тетриса», которую никакими действиями нельзя уложить по правилам?

б) Если ответ на пункт а) отрицательный, то, может быть, возможно «слабое» невезение? Представьте себе, что кто-то выбирает фигурки в зависимости от действий играющего с целью «засыпать» его. Всегда ли это удастся?»

Ответ на эти вопросы встретился нам... в английском журнале «Эврика». Вряд ли английские исследователи читали газету-многотиражку московского физтеха, поэтому напрашивается вывод: назрела необходимость изучить «Тетрис» всерьез!

Вот что пишет Ричард Такер в «Эврике»: «Мы демонстрируем здесь, что фактически чертик может объявлять заранее последовательность падающих фигурок, позволять игроку выбирать размеры доски («стакана»), и все же победить». Для этого чертик использует фигурки только двух типов, для удобства названные S и Z (в повернутом состоянии — S' и Z').

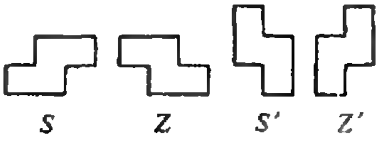


Рис. 2. Фигурки «S» и «Z».

«Назовем рядом 11 ряд, самые левые две клетки которого заполнены «кирпичиками», а дальше расположение «кирпичиков» и пустот произвольно. Аналогично, ряд 10 начинается с «кирпичика», затем идет дырка, а дальше — что угодно; 01-ряд начи-

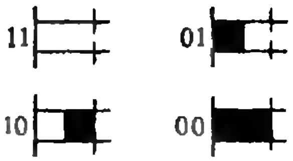


Рис. 3. Типы рядов по Р. Такеру.

нается с пустой клетки, затем стоит «кирпичик», затем — что угодно; в 00-ряду пусты обе первые слева клетки»,— пишет Р. Такер. Как видите, подход научный. И доказательство сформулированного выше утверждения — абсолютно строгое.

Допустим, в середине игры чертик начинает кидать только фигурки S и Z. Тогда количество 01-рядов не может уменьшиться, так как единственная возможность избавиться от такого ряда — поставить в левый край Z'; но тогда на месте прежнего возникает новый 01-ряд. Если предположить, что игрок знает выигрышную стратегию, т. е. может играть бесконечно, должен наступить такой момент, после которого количество 01-рядов останется постоянным.

Рассмотрим теперь следующий (выше этого) ряд, не являющийся 00-рядом. Если это 01-ряд, единственная фигурка, которую можно поставить в самую левую колонку, это Z'; поэтому придется выстраивать в двух левых столбцах «Z'-башню». Если это 11-ряд, в левые две колонки нельзя ставить ничего, чтобы не создать новый 01-ряд; если это 10-ряд, единственная возможность не создавать новых 01-рядов — поставить сюда фигурку S', тогда возникнет «S'-башня».

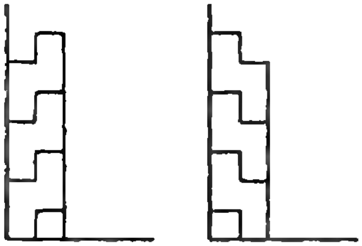


Рис. 4. S'-башня (слева) и Z'-башня (справа).

Выходит, две колонки у левой стенки стакана будут заполняться башней одного из этих двух типов. Рассмотрев следующие две колонки, видим, что и в них можно лишь строить S'- или Z'-башни. По индукции, всю ширину стакана придется застраивать такими башнями; причем удастся не проиграть, лишь если ширина стакана — четное число (в клетках) и если башни растут равномерно.

«Теперь я могу привести выигрышную для чертика стратегию»,— сообщает в заключении Р. Такер. Она такова.

Выбрав какое-нибудь иррациональное число от 0 до 1, чертик стремится кидать фигурки S и Z так, чтобы отношение количества фигурок S к количеству фигурок Z приближалось к этому иррациональному числу. Игрок ничего не может поделать, поскольку башни в таком случае растут неравномерно и горизонтальные ряды накапливаются...

Ответив на часть вопросов, Р. Такер немедленно поставил новые: 1) При заданной ширине стакана, для какого n чертик остановит игру, заполнив более n линий? 2) Для каких еще подмножеств множества фигурок «Тетриса» чертик может победить, используя лишь фигурки этого подмножества?

А вот еще одна проблема, по-видимому, никогда не возникавшая у западных «тетрисоведов», поголовно обеспеченных хорошими персональными компьютерами. Что делать человеку, который хочет играть в «Тетрис», но имеет доступ лишь к программируемому микрокалькулятору?

Очень упрощенный «Тетрис» реализовал на МК-85 Д. Демидов. Здесь подвижные элементы игры — палочки, т. е. знаки «—», которые движутся по экрану справа налево. После запуска программы она сначала спрашивает, какой сложности игру вы выберете: «Сколько линий?» В ответ нужно ввести число от 5 до 10. Затем на экране одна за другой начнут появляться и двигаться влево горизонтальные палочки. Их полетом можно управлять с помощью клавиш «1» (вверх) и «2» (вниз). Требуется построить из палочек вертикальную «стопку», при этом за каждую размещенную палочку начисляется одно очко. Когда вы построите у левого края индикатора полную стопку из семи палочек, она исчезнет, а все оставшееся справа от нее изображение сдвинется на одну позицию влево. Если же в горизонтальном ряду окажется столько палочек подряд, сколько вы выбрали линий в начале игры, вы проиграли.

Микрокалькулятор должен работать в режиме повышенного быстродействия.

Конечно, досадно, что палочки не поворачиваются, что нет каких-нибудь загогулин (вроде буквы «Г», например),— они усложнили бы игру, сделав ее интереснее. Следовательно, тут есть большой простор для воображения.

«Тетрис» Д. Демидова

```
10 VAC: PRINT «СКОЛЬКО ЛИНИИ?»;: «INPUT V:V=V—1
20 FOR Z=0 TO V: A$(2)=«0000000»: NEXT Z
30 S=INT(RAN#*7): X=7—S
40 FOR Z=V TO 0 STEP —1: $=KEY: P=$
50 IF $=«1»; IF X≠7; Q=X+1: GOSUB 160
60 IF $=«2»; IF X≠1; Q= X—1: GOSUB 160
70 FOR Y=Z*5+4 TO Z*5 STEP —1
80 DRAWC Y+5, P: DRAW Y,S: NEXT Y
90 IF Z≠0; IF GETC(A$(Z—1), X)=«V» THEN 110
100 NEXT Z: Z=Z+1
110 IF Z>U; U=Z: IF U=V; PRINT «GAME OVER»;:END
120 $=A$(Z): A$(Z)= MID(1, X—1) +«V» + MID(X+1,
7—X)
130 CSR 8: PRINT CHR 96;: NEXT R: GOTO 30
160 IF CETC (A$(Z). Q) = «0»; X=Q
170 S= 7—X: RETURN
```

Попробуйте, возможно, вам удастся усложнить «Тетрис» Демидова, составив соответствующие программы.

Совсем на другой идее основан микрокалькуляторный вариант «Тетриса», реализованный И. Майковым. В его игре справа налево движутся не фигурки, а двузначные числа. Их можно «накладывать» одно на другое, при этом цифры, оказавшиеся в одном разряде, складываются. Вы проигрываете, если хотя бы в одном из разрядов получающегося числа сумма переваливает за 9. Если все цифры в этом числе больше 1, избыток «проваливается»: из каждого разряда вычитается минимальная из имеющихся цифр.

В одном из следующих номеров мы намерены опубликовать программу И. Майкова; а пока — идею вы получили, попробуйте составить подобную программу сами.

Материал подготовила
А. Котова

„Квант" для младших школьников

Конкурс «Математика 6—8»

Журнал «Квант» продолжает конкурс по решению математических задач для учащихся 6—8 классов. Конкурс состоит из 24 задач (по 3 в каждом номере) и заканчивается в апреле будущего года. Победители будут награждены премиями журнала «Квант» и Российского благотворительного фонда «Интеллект».

Решения задач из этого номера высылайте не позднее 1 марта 1993 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

10. Нетрудно проверить, что

$$2 \text{ делится на } 2^1,$$
$$3\cdot4 \text{ делится на } 2^2,$$
$$4\cdot5\cdot6 \text{ делится на } 2^3,$$
$$5\cdot6\cdot7\cdot8 \text{ делится на } 2^4.$$

Сформулируйте общее утверждение и докажите его.

А. Савин

11. Тетрадный лист имеет размеры 33×41 клеток. Можно ли в его клетки записать все числа от 1 до $33\cdot41=1353$ так, чтобы в каждом квадратике 2×2 сумма записанных в нем четырех чисел была одна и та же?

С. Токарев

12. Таксомоторный парк решил устроить ученикам подшефной школы экскурсию. Когда к дверям школы подъехала колонна микроавтобусов и «Волг», то ребята быстро расселись по 12 человек в каждом «Рафике» и по 7 человек в каждой «Волге». Когда подъехало еще три машины, то школьники пересели так, что в каждой «Волге» стало по 6 человек, а в каждом «Рафике» по 11. Можно ли заказать еще несколько машин так, чтобы в каждой «Волге» было по 5 школьников, а в каждом «Рафике» по 10?

И. Акулич

Олимпиады

XXIII Международная физическая олимпиада

А. ЗИЛЬБЕРМАН,
доктор физико-математических наук
С. КРОТОВ

В этом году олимпиада проходила с 5 по 12 июля в Финляндии, в маленьком городке Эспоо около Хельсинки. В ней приняли участие 177 школьников из 37 стран (команда могла включать 5 человек, но некоторые страны прислали неполные команды). Из бывшего СССР на олимпиаде были представлены команды России, Украины, Литвы и Эстонии. В принципе, могли принять участие и другие — но не случилось.

Цикл отбора команды на МФО начался еще тогда, когда предполагалось послать объединенную команду — из всех стран-участниц Межреспубликанской физической олимпиады имели формальное право выставить свои команды только Россия и Литва, однако Оргкомитет проявил готовность принять уже в этом году Украину и Эстонию в качестве полноправных участников. Для нас это означало, что вместо одной сильной команды — в нее попали бы ребята из России и Украины — получилось две, тоже довольно сильные.

Итак, после трехнедельных сборов в путь отправилась команда России, в которую вошли: москвичи *Андрей Фролов* — выпускник с. ш. 303 и *Федор Безруков* — выпускник с. ш. 1232, *Николай Гуляев* — выпускник с. ш. 82 г. Нижнего Новгорода, *Сергей Панков* — выпускник с. ш. 73 г. Тулы и *Дмитрий Арбатский* — выпускник школы 239 г. Санкт-Петербурга.

Торжественное открытие олимпиады состоялось 6 июля в Технологическом университете Хельсинки. Участников олимпиады приветствовали профессор Антти Сиивола — председатель Оргкомитета олимпиады и Риитта Уосукайнен — министр просвещения страны. После короткой официальной церемонии и концерта ребята отправились на экскурсию по городу, а руководители команд начали обсуждение задач теоретического тура. Задачи эти составляются заранее хозяевами олимпиады, окончательные же варианты условий получаются в результате долгого и серьезного обсуждения (после которого задачи часто изменяются, и порой довольно сильно). Как выглядит это обсуждение, читатели могут себе представить, если обладают хорошим воображением. Скажем только, что в беседе принимают участие представители трех десятков стран, каждый из которых лучше всех знает, что такое олимпиадные задачи по физике и как они должны быть сформулированы. Мнение автора задачи решающим не является, хотя и принимается во внимание, а длительность и результативность обсуждения во многом зависят от искусства председателя Оргкомитета, которого участники обсуждения внимательно выслушивают. В общем, это совершенно не похоже на заседания Верховного Совета, которые все мы неоднократно наблюдали по ТВ.

В результате обсуждения получились такие условия задач:

Задачи теоретического тура

Задача 1

Вокруг Земли по круговой орбите заданного радиуса R, лежащей в плоскости экватора, движется спутник, состоящий из нескольких тел (рис. 1). Тяжелое центральное тело P соединено легкими нерастяжимыми нитями с четырьмя симметрично расположенными телами B, масса каждого из которых m. Эта система все время находится в плоскости орбиты и вращается с заданной угловой скоростью ω (относительно неподвижных звезд) вокруг центра P. Для того чтобы взаимное расположение тел не менялось без необходимости, радиальные нити скреплены между собой дополнительными тонкими нитями так, чтобы углы между ними составляли 90 градусов, а вся система тел двигалась как одно твердое тело.

1) Определите величину силы, с которой прикрепленная к телу нить действует на это тело. Рассмотрите случаи, когда векторы $\vec{R}$ и $\vec{r}$ параллельны, антипараллельны, перпендикулярны (возможно, именно в этих положениях силы становятся максимальными или минимальными).

2) В каждом из тел B находится механизм, получающий энергию от солнечных батарей.

Этот механизм быстро втягивает нить внутрь в тот момент, когда сила натяжения максимальна, и выпускает в тот момент, когда сила минимальна, причем изменение длины нити составляет 1 % от ее длины — среднего расстояния между B и P. Все остальное время длина нити неизменна. Рассчитайте «чистую» среднюю мощность такого механизма за время одного оборота тел B относительно центра P (мощность определяется суммарной работой силы натяжения с учетом знаков, отнесенной ко времени одного оборота).

3) Опишите изменения в движении спутника, которые вызываются работой указанных механизмов. А именно — как меняются орбитальная скорость, радиус орбиты, угловая скорость и гравитационная потенциальная энергия спутника? Можно ли переместить спутник дальше заданной орбиты? на очень большое расстояние?

Указания: Рассмотрите оба возможных знака угловой скорости ω. Не принимайте во внимание притяжение Солнца и Луны — достаточно рассмотреть взаимодействие спутника и Земли. Не старайтесь получить совершенно точные решения — вполне достаточны приближения, которые обеспечат точность 5 %.

Задача 2

В этой задаче рассматривается осевое (продольное) движение атомов линейной молекулы вдоль ее оси, при котором все атомы в процессе движения остаются на одной прямой. Предполагается, что молекула состоит из N атомов массами m_1, m_2, m_3,..., m_N соответственно и каждый атом связан со своими ближайшими соседями химическими связями, которые моделируются невесомыми пружинами, подчиняющимися закону Гука, с коэффициентами упругости (упругими константами) k_1, k_2, k_3, ..., k_{N-1} (рис. 2). Известно, что свободное продольное колебательное движение линейной молекулы является суперпозицией отдельных колебательных движений атомов. Такие движения называют нормальными колебаниями, или нормальными модами, и представляют собой движение, при котором все атомы совершают гармонические колебания одной и той же частоты, проходя при этом одновременно через свои положения равновесия.

1) Пусть x_i — координата смещения i-го атома от его положения равновесия. Выразите силу F_i, действующую на этот атом, как функцию мгновенных смещений x_1, x_2, x_3,..., x_N и упругих констант k_1, k_2, k_3,..., k_{N-1}. Какое соотношение имеет место между силами F_1, F_2, F_3,..., F_N? Используя это соотношение, установите зависимость между смещениями x_1, x_2, x_3, ..., x_N и дайте ей физическую интепретацию.

2) Проанализируйте движение двухатомной молекулы AB (рис. 3). Получите выражения для сил, действующих на атомы A и B, через смещения x_A и x_B и константу k. Опишите возможные типы движения атомов в молекуле и определите соответствующие частоты колебаний. Объясните полученный результат и, в частности, тот факт, что атомы могут колебаться с одинаковой частотой, хотя их массы различны (что и представляет собой нормальную моду).

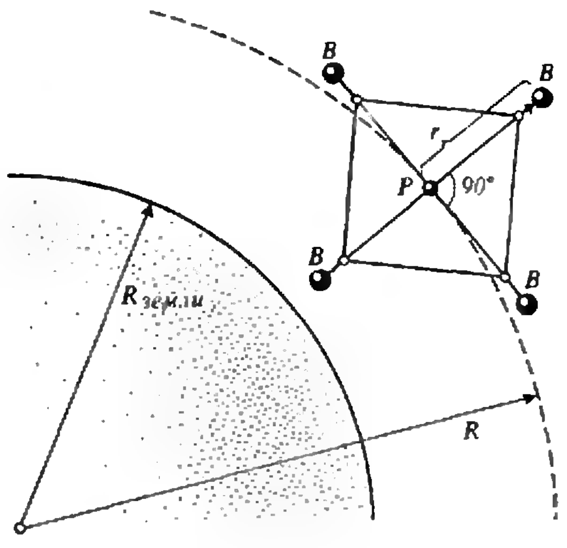


Рис. 1.

3) Проанализируйте возможные движения трехатомной молекулы ABA (рис. 4). Выразите силы, действующие на каждый атом молекулы, через смещения x_1, x_2, x_3. Определите нормальные моды данной молекулы и соответствующие значения частот.

4) Частоты двух продольных колебательных мод молекулы CO_2 равны $3{,}998 \cdot 10^{13}$ и $7{,}042 \cdot 10^{13}$ Гц. Вычислите упругую константу для связи С—О. Оцените, насколько хорошо использованное приближение (упругие силы) согласуется с приведенными численными данными. Масса атома углерода равна 12 а. е. м., атома кислорода — 16 а. е. м. (1 а. е. м. $= 1{,}660 \cdot 10^{-27}$ кг).

Задача 3

Спутник представляет собой равномерно нагретый шар радиусом $R = 1$ м. Вся поверхность спутника имеет одинаковое покрытие. Спутник находится недалеко от Земли, но не в ее тени. Температура поверхности Солнца, рассматриваемого как абсолютно черное тело, $T_0 = 6000$ К, его радиус $R_0 = 6{,}96 \cdot 10^8$ м. Расстояние между Солнцем и Землей $L = 1{,}5 \times 10^{11}$ м. Спутник нагревается солнечным из-

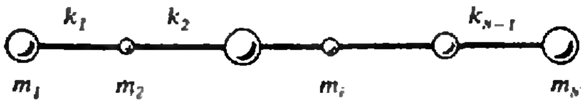


Рис. 2.

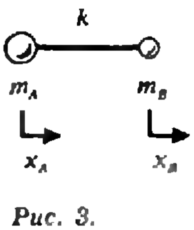


Рис. 3.

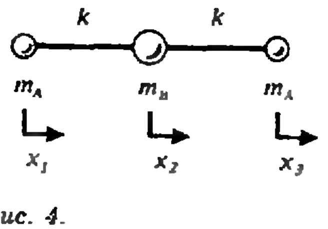


Рис. 4.

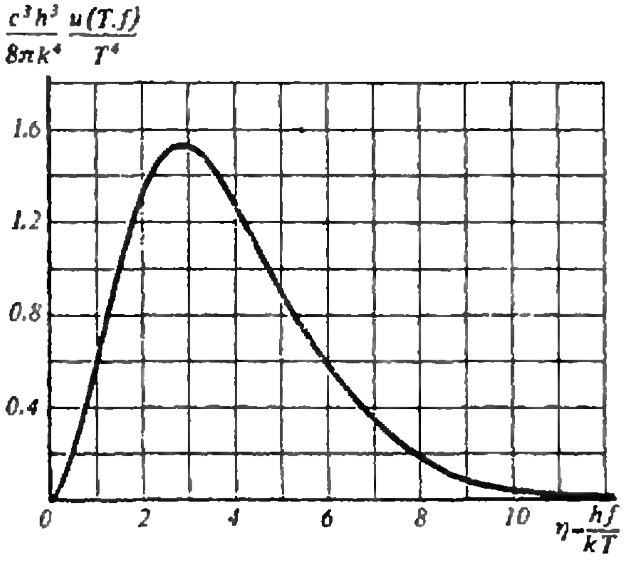


Рис. 5.

лучением до температуры, при которой мощность излучения спутника (его мы также рассматриваем как абсолютно черное тело) равна поглощаемой им мощности. Известно, что мощность, излучаемая с единицы поверхности абсолютно черного тела, подчиняется закону Стефана — Больцмана:

$$P=\sigma T^4, \text{ где } \sigma=5{,}67\cdot10^{-8}\ \text{Вт}\cdot\text{м}^{-2}\cdot\text{К}^{-4}.$$

В первом приближении можно считать, что Солнце и спутник поглощают всю падающую на них мощность излучения.

1) Найдите выражение для температуры T спутника и вычислите ее значение.

2) Спектр излучения абсолютно черного тела описывается так называемой спектральной функцией $u(T,f)$, заданной в виде

$$u(T,f)df=\frac{8\pi k^4T^4}{c^3h^3}\frac{\eta^3d\eta}{e^\eta-1},$$

где $u(T,f)df$ — плотность энергии электромагнитного излучения, частоты которого лежат в интервале $[f,f+df]$, $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $k=1{,}4\cdot10^{-23}$ Дж·К$^{-1}$ — постоянная Больцмана, $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света, $\eta=hf/(kT)$. Если проинтегрировать функцию $u(T,f)$ по всем частотам и всевозможным направлениям, то получится закон Стефана — Больцмана для мощности излучения с единицы поверхности. На рисунке 5 приведен так называемый нормированный спектр, описываемый функцией

$$\frac{c^3h^3}{8\pi k^4}\frac{u(T,f)}{T^4}.$$

На практике стремятся поддерживать спутник при возможно более низкой температуре. С этой целью применяют соответствующее покрытие, которое отражает излучение всех частот, превышающих некоторую граничную частоту, но пропускает без ослабления излучение на более низких частотах. Пусть предельная частота удовлетворяет соотношению $hf/k=1200$ К. Оцените, какую температуру будет иметь спутник в этом случае.

Внимание! Не старайтесь получить совершенно точный ответ, воспользуйтесь приближенной формулой, справедливой при малых x:

$$e^x=\exp(x)\approx1+x.$$

Величина интеграла

$$\int\limits_0^\infty\frac{\eta^3d\eta}{e^\eta-1}=\frac{\pi^4}{15},$$

максимум функции $\eta^3/(e^\eta-1)$ достигается при $\eta=2{,}82$.

3) В реальном спутнике обычно устанавливается электронная аппаратура, которая питается от солнечной батареи. Будем считать, что мощность 1 кВт, которую потребляет аппаратура, рассеивается внутри спутника в виде тепла. Какая температура установится в этом случае на поверхности спутника?

4) Некая фирма рекламирует специальную краску следующим образом: «Эта краска будет отражать более 90 % падающего излучения (как в видимой, так и в инфракрасной области), при этом она будет излучать на всех частотах (в видимой и инфракрасной области) как абсолютно черное тело, избавляя таким образом спутник от лишнего тепла. Итак, краска обеспечит охлаждение спутника до наиболее низких температур.» Может ли существовать в природе такая краска? Ответ обоснуйте.

5) Какими свойствами должно обладать покрытие для того, чтобы поднять температуру сферического тела, подобного рассматриваемому в задаче спутнику, выше величины, вычисленной в пункте 1?

Теоретический тур оказался не слишком простым. Наши ребята хуже всего справились с первой задачей, гораздо лучше — со второй и третьей. В общем, после этого тура впереди с большим отрывом оказались ребята из Китая, за ними — из Великобритании, сразу вслед за ними — из России, потом шли команды Украины, США и др.

После дня отдыха состоялся экспериментальный тур. Нет смысла приводить официальные условия задач — они рассчитаны на определенные приборы и устройства, которых у читателей нет. Поэтому мы расскажем о них лишь в общих чертах. Участникам были предложены две задачи, на выполнение каждой отводилось 2,5 часа — за это время нужно было не только провести измерения, но и полностью оформить работу.

В первой задаче необходимо было исследовать зависимость напряжения пробоя воздуха от расстояния между электродами. Необходимое для пробоя высокое напряжение получалось при ударе грузика о пьезоэлемент (на этом принципе основаны разного рода зажигалки) — грузик съезжал вдоль наклонной плоскости и перед ударом приобретал определенную скорость, которую можно было рассчитать (с учетом трения!). Известна была доля энергии деформации, переходящая в энергию электрического поля, и электрическая емкость образца — все это позволяло провести расчеты по результатам измерений. Дополнительная тонкость — нужно было учесть, что не вся кинетическая энергия груза переходит в энергию деформации, и воспользоваться законом сохранения импульса для вычисления скорости центра масс сразу после удара. Задача эта требовала проведения множества измерений и грамотной статистической обработки результатов.

Вторая задача относилась к физической оптике. Каждому участнику дали отражательную дифракционную решетку — устроители разрезали на небольшие кусочки несколько дисков для лазерных проигрывателей. У этих дисков расстояние между соседними дорожками составляет 1,5—2 микрона. Нужно было определить это расстояние, пользуясь миниатюрным фонариком, линейкой, транспортиром, миллиметровкой и карандашом (в условии задачи был задан диапазон длин волн видимого света — некоторая подсказка). Но это была только первая часть задачи. Участникам выдали также по семь слайдов — пять из них были цветными светофильтрами — и требовалось для каждого из них определить полосы частот (длин волн) пропускания и поглощения. Причем у двух светофильтров хитрые хозяева олимпиады сделали узкий диапазон поглощения внутри довольно широкого диапазона пропускания, и это нужно было заметить и измерить. Шестой слайд был невзрачным кусочком пленки серого цвета, и нужно было определить, что он собой представляет. В действительности это был поляризатор — доказать это можно было, используя тот факт, что при отражении света от проводящей поверхности в нем появляется поляризованная компонента. Впрочем, догадаться можно было и проще — с помощью часов или калькулятора с индикаторами на жидких кристаллах, но это не могло быть признано решением задачи, так как требовало использования «приборов», не включенных в список. И, наконец, седьмой слайд, тоже кусочек мутноватой серой пленки, был по условию «двумерной дифракционной решеткой», а на самом деле — просто фотографией «в клеточку», только эти клеточки были совсем маленькими — примерно 70 черточек на миллиметр. Требовалось определить именно эту величи-

ну — расстояние между соседними черточками. Сделать это можно было, наблюдая дифракцию от точечного источника на этой решетке — сделать маленькую дырку в листе бумаги, расположить за ним фонарик (получится точечный источник) и посмотреть на него через слайд, расположив рядом с ним миллиметровку. И все это — за 2,5 часа!

Наши ребята прекрасно справились с экспериментальным туром, обогнав всех, а Сергей Панков получил специальный приз за лучший результат в экспериментальном туре.

По результатам двух туров в неофициальном командном зачете команда России оказалась второй. Первой была команда Китая, которая блестяще выступает уже второй год,— опять все участники получили золотые медали, у них же первый и третий общие результаты. В нашей команде золотые медали получили Андрей Фролов — у него второй абсолютный результат, Николай Гуляев и Федор Безруков. Серебряную медаль получил Сергей Панков, бронзовую — Дмитрий Арбатский. Андрей Фролов получил также специальный приз Европейского физического общества — при присуждении этого приза баллы за теоретический и экспериментальный тур суммируются с «весом» в пользу эксперимента, поэтому его сумма и оказалась наибольшей. Команда Украины оказалась на третьем месте (одна золотая медаль, три серебряных и одна бронзовая), за ней — команды Великобритании (четыре серебряных и одна бронзовая медали) и США (две золотых и одна серебряная медали).

Хозяева олимпиады сделали все, чтобы олимпийцы остались довольны. Были организованы интересные экскурсии в крепость Свеаборг, на предприятие знаменитой фирмы Несте, в Центр науки «Эврика». Участники могли испробовать на себе воздействие знаменитой финской сауны, увидеть своими глазами охраняемую природу (в отличие от известной в нашей стране «окружающей среды»), побывать на приеме у городских властей Эспоо и, главное, пообщаться со сверстниками из других стран (мы искренне надеемся, что наши ребята подавали только положительные примеры). Специально для участников и гостей олимпиады издавалась газета с приятным названием «Спин», которая выходила каждый день (всего вышло семь выпусков) и содержала массу интересных и полезных сведений, относящихся к олимпиаде. В ней были напечатаны, кроме всего прочего, и адреса всех участников из всех стран с перечислением их увлечений — особенно интересно смотрелись увлечения конструированием космических кораблей (кажется, это не шутка), рыбной ловлей и чтением книг.

Следующую Международную физическую олимпиаду принимают Соединенные Штаты Америки. Надеемся, что политические и экономические временные трудности не помешают нашей стране принять участие в этой олимпиаде.

Мы поздравляем участников прошедшей олимпиады с достигнутыми успехами и желаем еще больших успехов участникам будущих олимпиад.

IV Международная олимпиада по информатике

Кандидат технических наук
В. КИРЮХИН

В этом году Международную олимпиаду по информатике (МОИ—92) принимала Германия. Олимпиада проходила с 12 по 21 июля в Бонне и собрала рекордное число участников. В общей сложности в ней приняли участие представители 50 стран со всех континентов. Непосредственно в соревнованиях участвовало 166 школьников из 45 стран мира, причем в состав каждой команды могло входить не более четырех человек.

Вовлечение в олимпиадную орбиту большого количества участников свидетельствует о дальнейшем росте популярности Международной олимпиады по информатике и о том внимании, которое оказывается во многих странах мира поиску и подготовке молодых талантов в области информатики и компьютерной технологии. Участие в МОИ—92 команд США, Южной Кореи, Австралии, Южной Африки значительно усилило состав участников и повысило и без того высокую конкуренцию за право быть победителями олимпиады.

На нынешней олимпиаде Россия, Украина, Беларусь и государства Прибалтики были представлены отдельными командами. В состав сборной России по результатам национальной олимпиады, олимпиады стран СНГ и Прибалтики, а также отборочных сборов вошли выпускник с. ш. 82 п. Черноголовка Московской области *Сергей Иоффе*, выпускники СУНЦ МГУ *Дмитрий Жуков* и *Евгений Кузне-*

цов, а также *Дмитрий Давыдок*, выпускник с. ш. 239 Санкт-Петербурга.

Национальный подготовительный комитет МОИ—92 во главе с профессором Ф. Крюкебергом и доктором П. Хейдерхоффом сделал все возможное для успешного проведения олимпиады. По случаю открытия МОИ—92 мэр Бонна устроил торжественный прием в городской ратуше. Само открытие олимпиады состоялось в резиденции совета директоров национального исследовательского центра по информатике и информационным технологиям (GMD). Много добрых слов и напутствий услышали ребята на церемонии открытия, однако все мысли у них были связаны с будущими соревнованиями. Каждый пытался ответить на вопрос — удастся ли ему стать победителем олимпиады или нет.

Традиционно МОИ—92 проходила в два тура. По сравнению с прошлыми международными олимпиадами длительность каждого тура на этой олимпиаде была увеличена до пяти часов. На обоих турах участникам олимпиады предлагалось по одной задаче, которые выбирались членами международного жюри непосредственно перед началом тура из пакета задач, подготовленного научным комитетом. В результате голосования были выбраны следующие задачи.

Задача I тура «Острова в море»

Расположение островов в море представлено с помощью сетки размером $N \times N$. Каждый остров обозначается символом «*» в узле этой сетки. Задача заключается в том, чтобы восстановить карту морских островов по закодированной информации о распределении островов по горизонталям и вертикалям. Для иллюстрации принципа кодирования рассмотрим следующую карту и соответствующие ей коды:

```
*   * *        1 2
  * * *   *    3 1
*   *   *      1 1 1
  * * * * *    5
* *   *   *    2 1 1
      *        1

1 1 4 2 2 1
1 2   3   2
1
```

Числа справа от карты на этом рисунке являются кодами и представляют порядок и размер групп островов в соответствующих горизонталях сетки. Например, цифры «1 2» в первой строке означают, что первая горизонталь содержит группу из одного острова, за которой следует группа из двух островов. Слева и справа от каждой группы островов расположено море произвольной протяженности. Аналогично, последовательность «1 1 1» в первом столбце под картой островов означает, что первая вертикаль содержит три группы островов, в каждой из которых один остров, и т. д.

Постановка задачи

Написать программу, которая выполняет следующие действия (шаги) до тех пор, пока данный входной файл, содержащий несколько независимых блоков информации, не будет прочитан полностью:

1. Считывает очередной блок информации из входного ASCII файла (структура этого файла приведена в примере 1) и отображает его на экране.

Пример 1

```
6
1 2 0    ← строка для первой горизонтали
3 1 0
1 1 1 0
5 0
2 1 1 0
1 0
1 1 1 0  ← строка для первого столбца
1 2 0
4 0
2 3 0
2 0
1 2 0
```

Пример 2

```
Блок входной       Решение:
информации
4                  Столбцы 1 2 3 4
0                  Строка 1
1 0                Строка 2     *
2 0                Строка 3   * *
0                  Строка 4
0
1 0
2 0
0
```

Пример 3

```
2
0
0
2 0
2 0
```

Для этих данных не существует карты.

Пример 4

```
2
1 0
1 0
1 0
1 0
```

Этим данным удовлетворяют две различные карты.

Каждый блок информации начинается с размеров квадратной сетки, за которыми следует кодовая информация о горизонтальном и вертикальном распределении островов. Код для каждой отдельной горизонтали и вертикали является отдельной строкой файла и представляет собой последовательность чисел, разделенных пробелами. Заканчивается каждая строка нулем. При этом сначала идет информация о всех горизонталях, а затем — о вертикалях.

2. Восстанавливает карту (или все карты в случае не единственного решения, как в примере 4) и отображает ее (их) на экране.

3. Добавляет карту (карты) в конец выходного ASCII файла. Каждое пустое место в сетке должно быть представлено двумя пробелами, а каждый остров — символом «* » (звездочка и пробел). В случае неоднозначного решения различные карты должны быть отделены друг от друга пустой строкой. Если карту восстановить невозможно, в соответствующей строке выходного файла написать «no map». Решения, относящиеся к различным блокам информации входного файла, должны быть отделены в выходном файле строкой с надписью «next problem».

Технические ограничения

1. *N* должно быть не меньше 1 и не больше 8.

2. Результирующая программа должна быть помещена в текстовый ASCII файл с именем «C:\IOI\DAY—1\413—PROG.xxx» Расширение .xxx для PASCAL—.PAS, для C—.C, для BASIC —.BAS, для LOGO —.LOG.

3. Имя входного ASCII файла должно быть «C:\IOI\DAY—1\413—SEAS.IN».

Задача II тура «Покорение вершины»

Клуб альпинистов состоит из P членов, с номерами от 1 до P. Каждый альпинист поднимается в гору с одной и той же скоростью, а скорость подъема не отличается от скорости спуска Альпинист с номером i расходует C(i) единиц ресурсов в день как при подъеме, так и при спуске, и может нести в каждый момент времени не больше S(i) таких единиц.

Предполагается, что альпинист может достичь вершины за N дней при полной обеспеченности ресурсами как для подъема, так и для спуска. Гора может быть так высока, что один альпинист не может изначально нести все необходимые для подъема и спуска ресурсы. Поэтому группа альпинистов стартует в одном и том же месте и в одно и то же время, чтобы обеспечить восхождение. Альпинист может начать спускаться, не достигнув вершины, отдав при этом все ненужные ему для спуска ресурсы другим альпинистам, которые должны быть в состоянии их взять. Альпинисты не отдыхают в течение экспедиции.

Задача состоит в составлении расписания восхождения для клуба альпинистов. По крайней мере один альпинист должен достичь вершины горы и все альпинисты, включенные в группу восхождения, должны возвратиться в начальную точку, израсходовав все ресурсы.

Постановка задачи

Написать программу, которая выполняет следующее:

1. Вводит с клавиатуры число дней N, требуемое для достижения вершины горы, число P членов клуба и числа S(i), C(i) для всех i от 1 до P.

Все входные данные целочисленные, вещественные данные вводиться не будут. Повторить запрос на ввод данных, не имеющих смысла.

2. Определяет расписание для восхождения, а также номера альпинистов a(1), a(2), ... a(k), образующих группу для восхождения, и числа M(j) (для всех j от 1 до k), которые обозначают количество единиц ресурсов, взятых каждым альпинистом на старте.

Сообщает, если нельзя составить такого расписания для заданных N, S(i) и C(i).

3. Выводит следующую информацию на экран:

а) число k альпинистов, участвующих в восхождении (размер группы восхождения);

б) необходимое для этого общее количество единиц ресурсов;

в) номера участвующих в восхождении альпинистов a(1), a(2), ..., a(k).

г) для каждого a(j) — какое количество единиц ресурсов он возьмет с собой со старта;

д) для каждого a(j) — количество дней, через которое он начнет спускаться.

4. Найденное расписание должно быть близким к оптимальному. Расписание является оптимальным, если:

а) число участвующих в восхождении альпинистов, необходимое для достижения вершины одним из них, минимально;

б) среди всех расписаний для групп, удовлетворяющих условию а), общее количество единиц ресурсов, взятых с собой со старта, минимальное.

Технические ограничения

1. Поместите вашу результирующую программу в текстовый ASCII файл с именем «C:\IOI\DAY—2\422—PROG.xxx». Расширение .xxx для PASCAL — .PAS, для C — .C, для BASIC — .BAS, для LOGO — .LOG.

2. Программа не должна воспринимать входные данные, если N<1 или N>100, а также P<1 или P>20.

Пример:

Возможен следующий диалог с вашей программой:

Число дней, необходимое для достижения вершины — 4
Число альпинистов в клубе — 6
Максимальный ресурс для альпиниста 1 — 7

```
Ежедневный расход ресурса для альпи-
ниста 1                               — 1
Максимальный ресурс для альпиниста 2 — 8
Ежедневный расход ресурсов для аль-
пиниста 2                             — 2
Максимальный ресурс для альпиниста 3 — 12
Ежедневный расход ресурса для альпи-
ниста 3                               — 2
Максимальный ресурс для альпиниста 4 — 15
Ежедневный расход ресурса для альпи-
ниста 4                               — 3
Максимальный ресурс для альпиниста 5 — 7
Ежедневный расход ресурса для альпи-
ниста 5                               — 1
2 альпиниста требуется для покорения
вершины.
10 единиц ресурса в целом для этого
необходимо.
Взбираться будут альпинисты 1, 5.
Альпинист 1 возьмет 7 единиц ресурса
и начнет спускаться через 4 дня.
Альпинист 5 возьмет 3 единицы ресурса
и начнет спускаться через 1 день.
Хотите спланировать восхождение для
другого альпинистского клуба? (Y/N)—Y.
Число дней, необходимое для достиже-
ния вершины                           — 2
Число альпинистов в клубе             — 1
Максимальный ресурс для альпиниста 1 — 3
Ежедневный расход ресурса для альпи-
ниста 1                               — 1
Восхождение невозможно.
Хотите спланировать восхождение для друго-
го альпинистского клуба (Y/N)          — N.
До свидания.
```

На время олимпиады за каждым участником был закреплен персональный компьютер IBM PC AT (286). Все компьютеры были объединены локальной сетью. Для решения предложенных задач допускалось использование только одной из установленных на компьютере систем программирования: Turbo Pascal v. 5.5 и v. 6.0, Borland C++ v. 2.0 и Microsoft C v. 5, Quick C, Quick Basic v. 4.5 и GWBasic, LCN Logo v. 2.

Большинство участников олимпиады из предложенных систем программирования выбрало Turbo Pascal, причем 69 использовали версию 6.0 и 42 — версию 5.5. В среде программирования C++ работало 14 человек. Одиннадцать олимпийцев использовали Quick Basic. На долю остальных систем пришлось небольшое количество участников.

На рассмотрение международного жюри и координационного комитета все программы представлялись участниками в исполняемом виде. Правильность их работы оценивалась по тестам с учетом спецификаций ввода—вывода, приведенных в условиях задач. Критерии оценки также содержались в условиях задач, и проверка осуществлялась в строгом соответствии с ними. В таблицах 1, 2 представлена разбалловка по каждой задаче.

Задачи обоих туров оказались для ребят примерно одинаковыми по сложности, хотя задача второго тура содержала несколько более сложных моментов. Об этом говорят и результаты олимпиады. Многие участники выполнили задания обоих туров полностью, набрав максимальное количество баллов.

В итоге двенадцать олимпийцев получили по 200 баллов. Международное жюри долго совещалось, как распределить призы между ними, так как главных призов, компьютеров различного типа (в том числе блокнотных), оказалось меньше этого числа. В результате было принято решение определить счастливых обладателей дорогих призов путем жребия. Кроме того, все они получили золотые медали. Среди них — трое школьников из Китая, по два школьника из США и Таиланда, и по одному из Венгрии, Вьетнама, Чехо-Словакии, Швеции и Южной Кореи. Участника из Швеции, набравшего 198 баллов, также было решено наградить золотой медалью.

Таблица 1

Оцениваемое решение	Баллы
1. Чтение блока информации из входного файла и отображение его на экране	5
2. Обработка всех информационных блоков один за другим, пока входной файл не будет считан полностью	10
3. Восстановление одной карты для каждого блока информации (если решение существует) и отображение его на экране)	35
4. Запись карты решения в выходной файл	5
5. Восстановление всех возможных карт (если существует несколько решений) и отображение их на экране	20
6. Запись корректно разделенных карт решений в выходной файл	10
7. Идентификация блоков информации, для которых решения не существует	5
8. Выполнение всех технических требований	10

Таблица 2

Оцениваемое решение	Баллы
1. Организация диалога с пользователем как указано в условии	10
2. Найдено решение для частного случая, когда все $C(i)=1$ и все $S(i)$ равны между собой	20
3. Найдено правильное решение для общего случая	20
4. Найдено наиболее близкое к оптимальному решение для общего случая	30
5. Определены ситуации, которые не имеют решения	10
6. Выполнены все технические ограничения	10

Серебряные медали получили все, кто набрал 175—195 баллов. В их числе оказались: *Дмитрий Жуков* (187 баллов) из команды России, *Алексей Скворцов* (185 баллов) с Украины, *Гиртс Карнитис* (185 баллов) из Латвии и *Владимир Белый* (185 баллов) из Беларуси.

Бронзовыми медалями были награждены школьники, получившие 123—172 балла. Наибольшее количество бронзовых медалей — по три — в копилке команд России, Германии, Украины и Литвы. Их получили *Сергей Иоффе* (170 баллов), *Евгений Кузнецов* (165 баллов) и *Дмитрий Давыдок* (131 балл) из команды России, *Павел Матлаш* (158 баллов), *Денис Филипенко* (155 баллов) и *Виталий Бондаренко* (124 балла) из команды Украины, *Гидриус Мейнориус* (170 баллов), *Валдас Амбразиунас* (160 баллов) и *Мариус Алабурда* (140 баллов) из команды Литвы. Из стран ближнего зарубежья бронзовыми медалями награждены также *Сергей Гафуров* (150 баллов) из Беларуси, *Андрис Галванс* (139 баллов) из Латвии и *Петер Лауд* (125 баллов) из Эстонии.

Наилучших результатов на этой олимпиаде, как и ожидалось, добились школьники из Китая. Они получили три золотые и одну серебряную медали, набрав в общей сложности 785 баллов. За ними идут команды Таиланда (743 балла), Швеции (731 балл) и Южной Кореи (728 баллов).

Увеличение числа участников существенно обострило борьбу за призовые места. Отрадным является тот факт, что несмотря на существующие трудности команда России подтвердила свой высокий авторитет. По числу завоеванных медалей наша команда заняла шестое место (652 балла), совсем немного проиграв хозяевам олимпиады, объединенной команде Германии (671 балл) и опередив очень сильные команды Чехо-Словакии, США, Болгарии, Аргентины, Польши, Румынии, Великобритании.

Нашим ребятам немного не хватило, чтобы получить золотые медали. Как и в прошлые годы, при высоком уровне теоретической подготовки сказалось отсутствие устойчивых навыков в технике программирования. Конечно, можно говорить об отсутствии опыта международных соревнований и излишнем волнении ребят. Однако допущенных небольших технических погрешностей могло бы и не быть, если бы наши участники имели большую практику программирования. К сожалению, кратковременных сборов здесь явно недостаточно. Да и невозможно в течение нескольких недель сделать требуемые навыки «автоматическими». Для этого необходимо длительное время и интенсивная работа за компьютером под руководством опытных наставников. Только постоянная работа с одаренными школьниками может принести более высокие результаты, и к этому нужно стремиться.

Интересно отметить также результаты соревнования команд из бывших советских республик: Беларуси, Латвии, Литвы, России, Украины и Эстонии. Первое место здесь заняла команда России. Сильная команда Украины уступила команде России 31 балл. Вслед за ними идут команды Литвы и Беларуси. Если бы названные государства, как прежде, выступали единой командой, то, набрав 742 балла, эта команда заняла бы третье место вслед за Китаем и Таиландом, и в ее копилке было бы четыре серебряные медали, как в прошлом году.

Быстро пролетели дни МОИ—92. Помимо соревнований участники имели возможность увидеть достопримечательности Германии, познакомиться с новейшими разработками в области информатики и компьютерной техники и встретиться с ведущими специалистами в этой области. В холле олимпийской гостиницы была представлена интересная экспозиция фирмы Сименс Никсдорф, являвшейся спонсором МОИ—92 и много сделавшей для успешного проведения этих соревнований. Запомнились встречи с представителями различных компьютерных фирм в издательстве «Шпрингер—Верлаг» в Гейдельберге и посещение телецентра в Кельне. Особый интерес вызвала лекция доктора Н. Тельманн, посвященная синтезу компьютерных фильмов на основе трехмерного представления актеров, по окончании которой был показан один из таких фильмов, а все участники получили в подарок аналогичного содержания книгу с автографами авторов.

Закрытие МОИ—92 состоялось также в резиденции фирмы GMD. Победители получили завоеванные ими в трудной борьбе призы и медали. Побежденным на память были вручены подарки. И несмотря на то, что большая часть участников осталась без медалей, тем не менее улыбка не сходила с лица как тех, так и других. Как правильно заметил в своем выступлении федеральный министр образования и науки Германии профессор Р. Ортлеб, «МОИ—92 — это всего лишь одно соревнование, хотя и трудное, а в жизни таких соревнований будет много, и победит в них тот, кто сумеет правильно распределить свои силы и научится преодолевать возникающие при этом трудности.»

Следующая международная олимпиада по информатике состоится в Аргентине в октябре 1993 года. Международный комитет в основном сохранил правила проведения соревнования в будущем году. Изменения коснулись лишь рабочих систем программирования, в качестве которых утверждены Turbo Pascal v. 6.0, Borland C++ v. 2.0, а также Quick Basic или GWBasic.

Как показал опыт МОИ—92, чтобы достичь успехов в таких соревнованиях, необходимо одинаково хорошо владеть техникой программирования и методами решения нестандартных задач, какими являются олимпиадные задачи. Хочется надеяться, что следующее поколение олимпийцев сумеет учесть опыт своих предшественников и будет достойно представлять нашу страну в Аргентине.

Информация

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся средних школ, расположенных на территории России, в 9, 10 и 11 классы на 1993/94 учебный год.

Цель школы — помочь учащимся, интересующимся физикой и математикой, углубить и систематизировать свои знания по этим предметам. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе *бесплатное.*

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки и факультативы, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе (лицее, гимназии) двумя преподавателями — физики и математики.

Руководители кружков или факультативов набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Группа принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества ее руководителей и поименный список учащихся (с указанием класса в 1993/94 учебном году и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все эти материалы и конверт для ответа о приеме в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей следует выслать до 25 мая 1993 года по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, с указанием «Кружок» или «Факультатив» (тетради с работами учащихся в ЗФТШ не высылаются). Работа руководителей заочных физико - технических кружков и факультативов может оплачиваться школой по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Учащиеся ЗФТШ, руководители физико-технических кружков и факультативов будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ (6—7 заданий по каждому предмету в течение учебного года), а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по соответствующей теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Задания ЗФТШ составляют преподаватели кафедр общей физики и высшей математики МФТИ. Эти задания рассчитаны на любознательных, желающих учиться школьников, которые хотят выработать навыки систематической, продуктивной, самостоятельной работы. Работы учащихся-заочников проверяют аспиранты и студенты МФТИ, СПбГУ и КрГУ (часто — выпускники ЗФТШ). Работы членов физико-технических кружков или факультативов оценивают их руководители.

С учащимися Москвы проводятся занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам собеседования по физике и математике. Справки по телефону: 408-51-45.

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу сделайте на русском языке и аккуратно перепишите в одну школьную тетрадь. Порядок задач сохраните тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно пришлите справку из школы, в которой учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. На лицевую сторону обложки наклейте лист бумаги, заполненный четко, желательно печатными буквами, по образцу:

1. Область (край или республика)	Оренбургская обл.
2. Фамилия, имя, отчество	Смирнов Сергей Николаевич
3. Класс, в котором Вы учитесь	девятый
4. Номер, адрес и телефон школы *(обычная, спецшкола, спецкласс, с каким уклоном)*	№ 17, ул. Пушкина, 50, *г. Новотроицк, тел.:* 2-30-16, обычная
5. Фамилия, имя, отчество Вашего преподавателя	
по физике	Макарова Ольга Васильевна
по математике	Ильина Галина Анатольевна
6. Место работы и должность родителей:	
отец	п/о «Стрела», электрик
мать	д/с «Ромашка», воспитатель
7. Подробный домашний адрес	462359, г. Новотроицк Оренбургской обл., ул. Комарова, д. 7, кв. 11, тел.: 4-52-64
8. Ваши любимые учебные предметы и увлечения	
9. Цель поступления в ЗФТШ при МФТИ	

Внизу под заполненной анкетой начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№ п/п									
Ф.									
М.									

Для получения ответа на вступительное задание обязательно вложите в тетрадь конверт с написанным на нем Вашим адресом.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1993 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1993 года.

Тетрадь с выполненным заданием (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской, Пермской, Тверской, Ярославской областей, Карелии, Удмуртии и Коми высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, СПбГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Кемеровской, Камчатской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской, Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятии, Тувы и Якутии высылают работы по адресу: 660062, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Для учащихся Украины работает Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Желающим поступить следует присылать работы по адресу: 252680, г. Киев, пр. Вернадского, д. 36, Институт металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ. Телефон: 444-95-24.

Ниже приводится вступительное задание по физике и математике. В задании по физике задачи 1—7 предназначены для учащихся восьмых классов, 4—10 — для девятых классов, 8—14 — для десятых классов. В задании по математике задачи 1—6 предназначены для учащихся восьмых классов, 4—9 — для девятых классов, 6—12 — для десятых классов. Номера классов указаны для текущего, т. е. 1992/93 учебного года.

Вступительное задание

Физика

1. Бегун, стартовавший на дистанцию длиной $L=5$ км, первый километр пробежал за время $t_0=200$ с, а каждый следующий километр он пробегал на t секунд дольше. Определите t, если известно, что средняя скорость бегуна оказалась такой, как если бы он каждый километр пробегал за $t_1=202$ с.

2. Машины едут на спуске колонной длиной L с одной и той же скоростью v. В начале подъема скорость каждой машины уменьшается на треть. Какова будет длина колонны, когда все машины окажутся на подъеме?

3. Деревянная доска плавает в воде таким образом, что под водой находится 3/4 ее объема. Какой минимальной величины груз нужно закрепить сверху на доске, чтобы она полностью погрузилась в воду?

4. В сообщающиеся сосуды, диаметры которых d_1 и d_2, налита жидкость плотностью ρ. В один сосуд опускают тело массой m, которое плавает в жидкости. Как и на сколько изменится уровень жидкости в сосудах?

5. В теплоизолированном сосуде находится $m_{\text{л}}=1$ кг льда при температуре $t_{\text{л}}=0$ °C. В сосуд вливают кипяток, имеющий температуру $t_{\text{к}}=100$ °C. Определите массу кипятка, если известно, что в сосуде установилась температура $t=20$ °C. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda=335$ кДж/кг.

6. В холодильную камеру поставили сосуд с водой объемом $V=1$ л при температуре $t_1=80$ °C. Через $\tau=2$ ч температура воды понизилась до $t_2=10$ °C. Через какое время это количество воды превратится в лед при температуре $t_3=-5$ °C? Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}}=4{,}2$ кДж/(кг·°C), льда $c_{\text{л}}=2{,}1$ кДж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda=335$ кДж/кг. Теплоемкостью сосуда можно пренебречь. Мощность холодильной установки считайте постоянной.

7 (экспериментальная). Определите (приблизительно) Ваш вес, не пользуясь медицинскими или иными весами. Опишите метод измерения, которым Вы пользовались, и полученные результаты.

8. При параллельном включении в сеть с напряжением U_1 двух нагревателей на них выделяются мощности P_1 и P_2. Какая мощность будет выделяться на каждом из нагревателей, если их включить последовательно в сеть с напряжением U_2? Считайте, что сопротивление нагревателей не зависит от температуры.

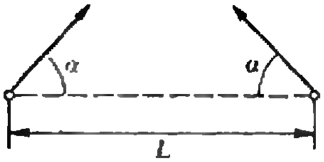
9. Два кубика, массы которых m_1 и m_2, покоятся на горизонтальной шероховатой поверхности. Коэффициенты трения скольжения кубиков о поверхность μ_1 и μ_2 соответственно. Кубикам сообщается одна и та же по величине горизонтальная скорость v_0 так, что они начинают двигаться навстречу друг другу. При каком минимальном значении v_0 кубики столкнутся? Начальное расстояние между кубиками L.

10. Покоящийся атом распадается на две части, отношение кинетических энергий которых равно β. Определите отношение масс этих частей.

11. В цилиндрическом сосуде, разделенном легкоподвижным поршнем на две части, объемы которых $V_1=100$ см^3 и $V_2=200$ см^4, находится газ при температуре $T=300$ К и давлении $p=1013$ гПа. Какое установится давление в сосуде, если газ в меньшем объеме охладить до $T_1=273$ К, а в большем нагреть до $T_2=373$ К?

12. Некоторое количество газа нагревается от температуры $T_1=300$ К до $T_2=400$ К. При этом объем газа изменяется пропорционально температуре. Начальный объем газа $V_1=3$ л. Давление, измеренное в конце процесса, оказалось равным $p_2=1$ атм. Какую работу совершил газ в этом процессе?

13. В цилиндре под невесомым поршнем находится $m_1=1$ кг воды при температуре $t_1=0$ °C. В воду помещают кусок железа массой $m_2=1$ кг, нагретый до температуры $t_2=1100$ °C. На какую высоту поднимется пор-



шень? Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, удельная теплоемкость железа $c_ж=500$ Дж/(кг·К), площадь сечения поршня $S=1000$ см^2. Теплоемкостью цилиндра и теплоотдачей можно пренебречь.

14. Векторы начальных скоростей двух электронов лежат в одной плоскости и образуют углы α с соединяющей их прямой (см. рисунок). На какое минимальное расстояние сблизятся электроны, если их начальные скорости по модулю одинаковы, и расстояние между ними равно L?

Математика

1. Верно ли неравенство

$$\sqrt{1991}+\sqrt{1993}\leqslant 2\sqrt{1992}?$$

Обоснуйте ваш ответ.

2. Дана трапеция $ABCD$. Точка M лежит на основании BC, а точка N — на боковой стороне CD. Отрезки AM и BN делятся точкой пересечения в отношении 3:1 и 2:1. Чему равно отношение $CN:CD$?

3. Учащийся получал стипендию в размере 200 рублей. После двух последовательных одинаковых процентных повышений она составила 233 рубля 28 копеек. Определите, на сколько процентов повышалась стипендия.

4. На координатной плоскости задан четырехугольник с вершинами в точках (0; 6), (8; 12), (11; 8) и (3; 2). Вычислите площади фигур, на которые его разбивает прямая $x+7y-67=0$.

5. Докажите, что число $n^3-6n^2+12n+117$ является составным.

6. Поезд был задержан в пути на 12 минут, а затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

7. Длины сторон треугольника равны 6 и 8, а две его медианы пересекаются под прямым углом. Найдите длину третьей стороны треугольника.

8. Четвертый член арифметической прогрессии равен 4. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений ее первых трех членов будет наименьшей?

9. Решите уравнение

$$x+\sqrt{x^2(1+x\sqrt{x^2-4x+4})}=x^2.$$

10. Найдите абсциссы точек графика функции

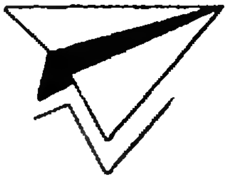
$$y=5(2\cos 6x+3\sin 4x)+6\cos 10x-56x,$$

в которых касательная к нему образует с положительным направлением оси угол, равный arctg 4.

11. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 8. Точка K является серединой ребра AA_1. Точка L лежит на ребре BB_1, а точка M — на ребре BC, причем $LB_1=7\ BL$ и $MC=3\ BM$. Найдите площадь сечения куба плоскостью KLM.

12. На координатной плоскости в момент времени $t=0$ начинают движение две точки, одна по оси Ox, вторая — по оси Oy. Первая точка движется по закону $x(t)=t-2$, вторая — $y(t)=\sqrt{2t^4-4t^3+t^2+4t}$. Найдите максимальное и минимальное расстояние между точками за время $t\in[0;\ 2]$.

Заочная аэрокосмическая школа



Заочная аэрокосмическая школа (ЗАКШ), организованная Всероссийским молодежным аэрокосмическим обществом (ВАКО) «Союз» и Московским физико-техническим институтом (МФТИ), проводит конкурсный набор учащихся в 10 и 11 классы на 1993/94 учебный год.

Пособия ЗАКШ подготовлены сотрудниками и аспирантами МФТИ и призваны помочь всем, кто собирается поступать в вузы, особенно аэрокосмического профиля. Программа школы охватывает следующие разделы науки и техники: движение космических аппаратов, ракетная техника, движение в атмосфере, исследования Земли из космоса, исследования космоса, перспективная космонавтика.

В течение года учащиеся ЗАКШ получают шесть заданий школы, включающих теоретический материал, список литературы для дальнейшего знакомства с направлениями аэрокосмической физики и задачи для самостоятельного решения, а также «Космическую хронику ЗАКШ», состоящую из дневника наиболее значительных событий в космонавтике текущего года и информационных материалов по истории и современному состоянию космических исследований.

Полный курс обучения в ЗАКШ — 2 года. Учащиеся, поступающие в 11 класс, имеют возможность окончить школу по ускоренной программе. В конце обучения выпускники получат варианты вступительных экзаменов в МФТИ и рекламный проспект с правилами приема в институт. Ученикам, успешно окончившим курс обучения, будет выдан диплом ЗАКШ.

Конкурсный набор в школу проводится с целью зачисления учащихся на бесплатную форму обучения. Не прошедшие по конкурсу могут быть зачислены на платную форму — все необходимые сведения по этому вопросу будут сообщены при условии получения приемной комиссией решения вступительного задания.

Вступительное задание для участия в конкурсе необходимо выполнить на русском языке и оформить в отдельной школьной тетради — по одной задаче на листе, с сохранением порядка задач в задании. На обложку тетради наклейте белый лист, оформленный следующим образом:

1. Фамилия, имя, отчество
2. Подробный домашний адрес (с индексом)
3. Номер школы и класс, в котором Вы учитесь
4. Любые дополнительные сведения о себе

Для получения решения приемной комиссии вложите в тетрадь конверт с вашим домашним адресом.

Тетрадь с выполненным заданием вышлите не позднее 25 марта 1993 года простой бандеролью по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, факультет аэрофизики и космических исследований, «Школа».

Вступительное задание обратно не высылается. Решение приемной комиссии будет сообщено в июне 1993 года.

Ниже приводятся условия задач вступительного задания в ЗАКШ. Задачи 1—6 предназначены поступающим в 10 класс, задачи 3—8 — в 11 класс. Для участия в конкурсе не обязательно решать все предлагаемые задачи.

Вступительное задание

1. Небольшой шарик из пенопласта погрузили в воду на глубину h и отпустили. На какую высоту над водой он подпрыгнет? Силы трения и поверхностного натяжения не учитывайте.

2. Два одинаковых шара массой m каждый покоятся, касаясь друг друга. Третий шар массой $M=2m$ двигается по прямой, проходящей через точку касания первых двух шаров перпендикулярно к линии, соединяющей их центры, и налетает на них со скоростью v_0. С какой скоростью будет двигаться налетавший шар после столкновения? Удар считайте упругим, радиусы всех шаров — одинаковыми.

3. Человек, стоящий на Земле, согнув колени опускает свой центр тяжести на $l=50$ см, а затем прыгает вертикально вверх, поднимая центр тяжести на $h=60$ см выше естественного уровня. На какую высоту можно подпрыгнуть таким образом на Луне? Радиус Луны $R_{Л}=0{,}27\ R_{З}$, а ее плотность $\varrho_{Л}=0{,}6\ \varrho_{З}$, где $R_{З}$ и $\varrho_{З}$ — радиус и плотность Земли.

4. На двух вращающихся навстречу друг другу цилиндрах горизонтально лежит однородная доска массой M. Коэффициент трения между цилиндрами и доской μ, расстояние между цилиндрами L. Найдите период колебаний доски в горизонтальной плоскости.

5. Однородная медная проволока длиной $l=1{,}4$ м имеет радиус $r=1$ мм. На какие два отрезка нужно разрезать эту проволоку, чтобы, соединив их параллельно, получить сопротивление $R=1/700$ Ом? Удельное сопротивление меди $\rho=1{,}8\cdot10^{-8}$ Ом·м.

6. На кусок льда массой $M=100$ г, находящийся в калориметре при температуре $t_0=-2$ °C, положили железный шарик массой $m=50$ г, разогретый до температуры $t_1=800$ °C. Найдите температуру, которая установится в калориметре. Удельная теплоемкость железа $c_{ж}=450$ Дж/(кг·°C), льда — $c_{л}=2100$ Дж/(кг·°C).

7. Определите плотность смеси, состоящей из водорода и кислорода, при температуре $t=7$ °C и давлении $p=9{,}3\cdot10^4$ Па. Масса водорода в смеси $m_{в}=0{,}5$ г, кислорода $m_{к}=32$ г.

8. Для исследования верхних слоев атмосферы Венеры в проекте «Вега» использовался аэростатный зонд. Определите объем зонда, если давление на исследуемых высотах $p\approx50000$ Па, а температура $t\approx10$ °C. Можно считать, что атмосфера целиком состоит из двуокиси углерода CO_2, а зонд заполнен гелием. Масса зонда $m=20$ кг.

Новый прием в СУНЦ МГУ и НГУ

Московский и Новосибирский государственные университеты объявляют набор учащихся в специализированные учебно-научные центры МГУ и НГУ, созданные на базе школ-интернатов при этих университетах. Первый тур вступительных экзаменов — заочный письменный вступительный экзамен по математике и физике для учащихся 9 и 10 классов 11-летней школы, интересующихся математикой и физикой. Успешно выдержавшие заочный экзамен по решению приемной комиссии будут в апреле — мае приглашены в областные центры Российской Федерации (РФ) на устные экзамены.

Работа должна быть выполнена в обычной ученической тетради. На первой странице укажите свои анкетные данные:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью)
2. Домашний адрес (подробный), индекс
3. Подробное название школы, класс.

Работы отправляйте простыми бандеролями (обязательно вложите в работу конверт с вашим домашним адресом). Если вы проживаете в Европейской части РФ или в Беларуси, высылайте вашу работу по адресу: *121357, Москва, Кременчугская ул., 11, СУНЦ МГУ, Приемная комиссия*. Внимание: с 1992 г. в учебный центр МГУ без предоставления общежития принимаются жители г. Москвы.

Если вы живете на Дальнем Востоке или в Средней Азии, пишите по адресу: *630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 6, учебно-научный центр НГУ, Олимпиадный комитет.*

Срок отправки работ — не позднее 14 февраля 1993 года (по почтовому штемпелю). Работы, высланные позже этого срока, рассматриваться не будут.

Если вы не сможете решить все задачи, не отчаивайтесь — комиссия рассмотрит работы с любым числом решенных задач. Желаем успеха!

Вступительное задание

9 класс

1. Найдите натуральные числа a, b, c, d такие, что $a+b+c+d=30$, $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d$, а произведение $abcd$ наибольшее из возможных.

2. Решите систему уравнений

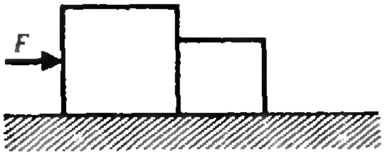
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2+3x+3y=0, \\ x^2y-xy^2+x^2-y^2=9. \end{cases}$$

3. В неравнобедренном треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Известно, что около четырехугольника A_1CB_1O можно описать окружность радиусом R. Найдите A_1B_1.

4. а) Докажите, что сумма квадратов никаких десяти последовательных натуральных чисел не является полным квадратом.

б) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — полный квадрат.

5. Два тела, массы которых $m_1=3$ кг и $m_2=2$ кг, движутся по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы $F=10$ Н, приложенной к первому телу (см. рисунок). Найдите сумму сил, действующих на второе тело.



6. Камень брошен с поверхности земли под углом $\alpha=\pi/6$ к горизонту. В наивысшей точке траектории кинетическая энергия камня равна $E_k=30$ Дж. Найдите значение потенциальной энергии в этой же точке.

7. По идеально гладкой горизонтальной плоскости движутся навстречу друг другу два шара с одинаковыми по величине скоростями v. В результате абсолютно упругого центрального удара один из шаров останавливается. Найдите скорость второго шара после соударения.

8. Когда в цилиндрический сосуд с водой опустили кусок пенопласта массой $m_1=1$ кг, уровень воды повысился на h. На какую величину возрастет уровень воды, если под действием груза массой $m_2=5$ кг пенопласт полностью погрузится в воду?

10 класс

1. Решите уравнение

$$(x^2-x-1)^3+(x^2-3x+2)^3=(2x^2-4x+1)^3.$$

2. Медианы BM и CN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что в четырехугольник $ANOM$ можно вписать окружность. Найдите AC, если $BC=a$, $BM=m$.

3. При каких значениях a наименьшее значение функции $y=x^2+ax-a=2$ на отрезке [1; 3] равно -4?

4. См. задачу 4 для 9 класса.

5. В сосуде объемом $V=100$ дм^3 при температуре $t=30$ °C находится воздух с относительной влажностью $\varphi=40$ %. В сосуд вводят

$m=10$ г воды. Какой станет теперь относительная влажность воздуха, если давление насыщенного пара при 30 °С равно $p_н=4{,}24$ кПа?

6. Поверхностная плотность зарядов параллельных плоскостей, расположенных на расстоянии d друг от друга, одинакова и равна σ. Найдите величину напряженности электрического поля снаружи и между пластинами.

7. К батарее с ЭДС $\mathscr{E}=5$ В и внутренним сопротивлением $r=1$ Ом подключают последовательно соединенные конденсаторы, емкости которых $C_1=0{,}1$ мкФ и $C_2=0{,}2$ мкФ. Какое количество теплоты выделится в батарее в процессе зарядки конденсаторов?

8. Квадратная рамка из однородного провода плотностью ρ и сечением S лежит на горизонтальной плоскости. Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ однородного магнитного поля параллелен двум сторонам рамки. Какой силы ток должен течь по рамке, чтобы она начала поворачиваться вокруг одной из своих сторон?

Внимание! Объявляется также набор на химическое и экономическое отделения учебно-научного центра Московского государственного университета учащихся 9 классов (в анкетных данных на 1 странице работы укажите профиль обучения: физико-математический, экономический, химический). Для поступающих на химическое отделение необходимо вместо задач по физике решить задачи по химии. Поступающие на экономическое отделение решают 2 дополнительные задачи по математике.

Кроме того, при учебно-научном центре МГУ открываются заочные подготовительные курсы по подготовке в МГУ и СУНЦ МГУ (обучение планируется платным). Все желающие могут направлять свои заявки в Приемную комиссию СУНЦ МГУ (обязательно вложите конверт, заполненный на свой домашний адрес).

Вступительное задание по химии

1. В городской водозабор стекают стоки из двух цехов химического предприятия. В первом цехе на 1 т производимой продукции образуется 8 $м^3$ водных стоков, содержащих 1,5 $г/м^3$ сульфата магния. Во втором цехе на 1 т продукции образуется 16 $м^3$ стоков с содержанием 3,56 $г/м^3$ гидрооксида бария. Определите оптимальное соотношение производительностей этих цехов (в тоннах продукции), при котором загрязнение воды было бы минимальным.

2. Имеется A граммов смеси бромидов стронция и бария. Предложите простейший химический способ определения содержания каждой из солей в смеси. Используйте минимальное количество реактивов. В ответе приведите уравнения реакций и схему расчета.

3. Масса колбы, заполненной смесью метана и кислорода, равна 57,5 г. Та же колба, заполненная метаном, имеет массу 57,0 г, а заполненная кислородом — 59,0 г (н. у.). Сгорит ли полностью метан при поджигании смеси электрической искрой? Ответ подтвердите расчетом и уравнениями реакций.

Дополнительные задачи по математике для поступающих на экономическое отделение

1. Используя геометрические соображения, найдите среди чисел x, y, удовлетворяющих линейным неравенствам

$$x+3y\leqslant 9, \tag{1}$$

$$4x+3y\leqslant 18, \tag{2}$$

$$y\leqslant 2{,}5, \tag{3}$$

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \tag{4}$$

такие v, w, что $5v+6w\geqslant 5x+6y$ для всех x, y, удовлетворяющих линейным неравенствам (1) — (4). Обоснуйте полученный ответ.

2. Используя геометрические соображения, найдите среди чисел x, y, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2-5=0$, такие числа v, w, чтобы неравенство $2v+w\leqslant 2x+y$ выполнялось для всех x, y, удовлетворяющих указанному выше уравнению. Обоснуйте полученный ответ.

Вниманию наших читателей!

Издательство «ОКО»
совместно с Киево-Печерской математической школой-лицеем «Лидер»
выпустило в свет книгу:
П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. «ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ»
(под редакцией Г. В. Дорофеева).

По вопросам приобретения этой книги обращайтесь по адресу:
252033, Киев-33, ул. Тарасовская, 12; тел./факс: (044) 224-25-98.

Киево-Печерская математическая школа-лицей «Лидер»
приглашает к сотрудничеству школы аналогичного профиля.
Наш адрес: *252015, Киев-15, ул. Лейпцигская, 11°; тел.: (044) 295-15-73*

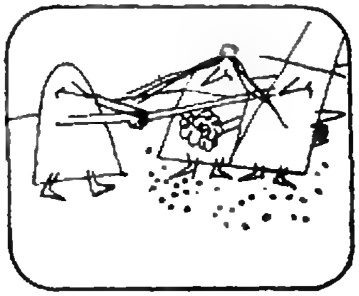
В 9 номере нашего журнала за прошлый год вы могли прочитать отрывок из книги Мартина Гарднера «Aha!» («Есть идея!», М.: Мир, 1982). Сегодня мы предлагаем вам еще одну небольшую главу из этой книги.

In vino veritas

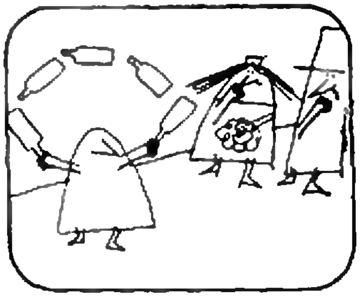
М. ГАРДНЕР

В последний день каникул Боб и Элен сообщили дядюшке Генри, что решили пожениться.

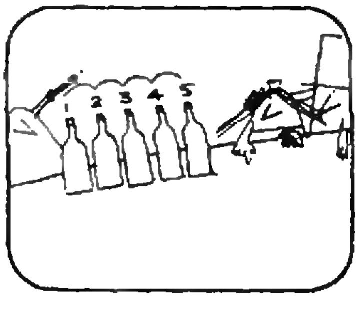
Дядюшка Генри. Рад за вас, мои милые. Нужно отметить этот знаменательный день!



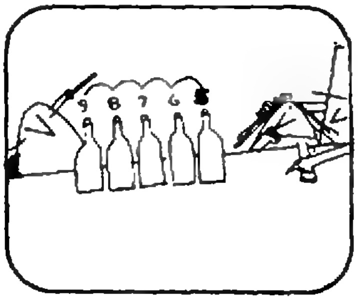
Дядюшка Генри достал из погреба 5 бутылок вина, припасенных для торжественного случая, но тут возникло непредвиденное затруднение: трое обитателей хижины никак не могли прийти к единому мнению относительно того, какую бутылку откупорить первой.



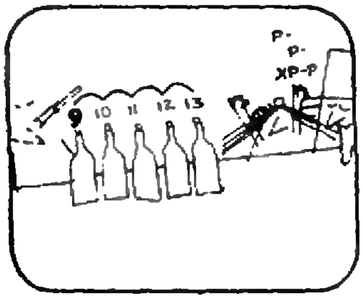
Дядюшка Генри. Постойте, я знаю, как решить спор! Выстроим все бутылки в ряд и пересчитаем их по разработанной мной системе. Вот как это делается: раз, два, три, четыре, пять...



Дядюшка Генри. ...шесть, семь, восемь, девять...



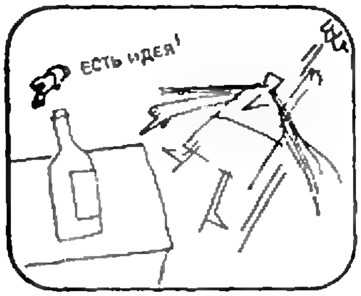
Дядюшка Генри. ...десять, одиннадцать, двенадцать, тринадцать... Понятно?



Боб. Понятно-то понятно, но сколько вы еще собираетесь считать?

Дядюшка Генри. Как вы помните, в 1976 году мы праздновали 200-летие независимости. Вот я и досчитаю до 1976.

Элен (со стоном). Милый дядюшка, на это у вас уйдет еще 200 лет. Впрочем, минутку... Есть идея! Считать по бутылкам совсем не обязательно! Я могу вам сразу сказать, на какой бутылке окончится счет.



Элен. Число 1976 придется на вторую бутылку.

Дядюшка Генри не поверил Элен и упрямо продолжал пересчитывать бутылки. Через 15 минут он досчитал до 1976 и убедился, что счет, как и предсказывала Элен, окончился на второй бутылке.

Дядюшка Генри. Как это тебе удалось, Элен? Не могли бы и вы предложить способ, позволяющий безошибочно определить, на какой бутылке закончится счет, независимо от того, до какого числа мы будем считать?

Элен догадалась, что утомительного счета на бутылках от 1 до 1976 можно избежать, если воспользоваться так называемой арифметикой вычетов, или теорией сравнений. Два числа a и b называются сравнимыми по модулю c, если при делении на c они дают одинаковые остатки. Число c называется модулем сравнения, а остаток от деления любого числа на c — вычетом этого числа по модулю c.

Обычные часы могут служить прекрасным примером конечной арифметики вычетов по модулю 12, содержащей 12 чисел. Действительно, вычет числа 12 по модулю 12 равен 0 (т. е. число 12 сравнимо с нулем по модулю 12). Предположим, что на ваших часах сейчас 12 часов. Сколько будет на ваших часах через 100 часов? Разделив 100 на 12, вы узнаете, что остаток от деления равен 4 (число 100 сравнимо с числом 4 по модулю 12). Значит, через 100 часов на ваших часах будет 4 часа.

Теперь вам ясно, что «метод дядюшки Генри» эквивалентен арифметике вычетов? Единственное отличие состоит в том, что каждая из 3 бутылок, стоящих в середине, соответствует двум числам, поскольку эти бутылки приходится считать и слева направо, и справа налево. Счет 8 приходится на вторую бутылку, после чего весь цикл повторяется. Следовательно, метод дядюшки Генри эквивалентен арифметике вычетов по модулю 8.

Элен оставалось лишь найти вычет числа 1976 по модулю 8, т. е. разделить 1976 на 8 и найти остаток. Проделав вычисления, Элен получила остаток 0. В арифметике вычетов по модулю 8 число 8 имеет нулевой вычет. Следовательно, счет до 1976 должен окончиться на второй бутылке.

Предположим, что вам захотелось узнать, на какой бутылке кончит считать дядюшка Генри, если вздумает дойти, например, до 12 345 678 987 654 321. Нужно ли для этого делить гигантское число на 8? Нет, если вы сообразите, как избежать утомительной процедуры. Так как число 1000 сравнимо с 0 по модулю 8, то необходимо делить на 8 только три последних знака — число 321. Проделав деление, вы узнаете, что интересующее вас семнадцатизначное число сравнимо с 1 по модулю 8. Следовательно, вздумай дядюшка Генри считать до этого числа, он бы закончил счет на первой бутылке.

Варьируя число бутылок, вы будете получать модели конечных арифметик вычетов по другим четным модулям. Если бутылки считать, как обычно, только слева направо, то вы получите модель конечной арифметики вычетов по любому модулю, как четному, так и нечетному.

Перевод с английского Ю. Данилова
Иллюстрации канадского графика Дж. Глена

(Начало см. на с. 47)

приходим к уравнению

$$x^2-\left(H+\frac{p_a}{\rho g}\right)x+\frac{p_0L}{\rho g}=0.$$

Отсюда

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(H+\frac{p_a}{\rho g}\right)\pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(H+\frac{p_a}{\rho g}\right)^2-\frac{p_0L}{\rho g}}.$$

Получается, что оба корня имеют смысл, если конечно, дискриминант не отрицательный (заметим, кстати, что не при любом H решение вообще есть). И все же один из двух корней — «плохой». Почему?

На рисунке 3 (см. с. 48) представлены графики двух функций:

$$px=\text{const} \text{ и } p=p_a+\rho g(H-x).$$

Точки пересечения этих графиков — точки *1* и *2* — соответствуют положениям равновесия. Но оказывается, что их двух этих положений лишь одно является устойчивым — а именно точка *1* (проверьте это сами).

Итак, остается единственный ответ:

$$x=\frac{1}{2}\left(H+\frac{p_a}{\rho g}\right)-$$
$$-\sqrt{\frac{1}{4}\left(H+\frac{p_a}{\rho g}\right)^2-\frac{p_0L}{\rho g}}.$$

Упражнения

1. На концах горизонтальной трубы длиной l закреплены положительные заряды q_1 и q_2. Найдите положение равновесия положительного заряда q, помещенного в трубу.

2. Пикирующий бомбардировщик сбрасывает бомбу с высоты H, находясь на расстоянии L от цели. Скорость бомбардировщика равна v. Под каким углом к горизонту он должен пикировать?

3. Пункт A находится от пункта B на расстоянии l. Из A в B выехал автомобиль, который двигался с постоянной скоростью v. Одновременно из B в A выехал второй автомобиль с начальной скоростью v_0 и ускорением a, направленным так же, как и скорость первого автомобиля. Известно, что в пути автомобили дважды обгоняли друг друга. В каких пределах лежит скорость v?

Все наверх!

Библиотечка
Фантастики
«Кванта»

Б. КРУНА

«Самое странное,— часто думал он потом,— что все казалось очень просто и естественно». Он ни чуточки не испугался, не поразился, хотя и несколько удивился, увидев того человека на опушке. Вообще-то первым обнаружил незнакомца Бустер, бульдог. Залаял, подбежал и начал обнюхивать. Человек улыбнулся собаке.

— Не бойтесь,— крикнул владелец бульдога.— Собака не укусит.

Теперь человек улыбнулся уже ему.

— ... не боюсь,— заверил он.

Дул холодный ветер, под лучами мартовского солнца растаяла лишь небольшая часть снежного одеяла на опушке. Тем не менее на человеке не было ничего, кроме голубых плавок. Он сидел, прислонившись к валуну, и, казалось, наслаждался солнцем, больше всего напоминая туриста, расположившегося на солнечном берегу.

— Вам не холодно? — не удержался от вопроса хозяин собаки.

Ему самому показалось, что это прозвучало глупо, и, чтобы скрыть неловкость, он продолжил:

— Вы живете здесь поблизости? У меня небольшой домик по ту сторону холма.

— Мне не холодно,— услышал он в ответ.— И я не живу здесь поблизости.

Собака спокойно улеглась у ног незнакомца. Тот наклонился и почесал ее за ухом, но продолжал смотреть на хозяина, как бы ожидая дальнейших вопросов.

— Вы понравились Бустеру. Обычно он с подозрением относится к незнакомым. По-моему, он вообще раньше никогда так себя не вел. Может, у вас тоже есть собака?

Человек по-прежнему улыбался. Это внушало какое-то необъяснимое к нему доверие.

— Нет, у меня нет собаки. У меня есть...

Незнакомец замолчал и развел руками. Может быть, иностранец? Во всяком случае он не мог подобрать слова для обозначения своего домашнего животного.

— Кошка?

— Нет, не кошка.

Даже голос внушал доверие. Только много недель спустя он понял причину. Голос незнакомца был просто-напросто точной копией его собственного.

— Мне следовало бы представиться. Инженер Лундберг. Мы с Бустером совершали воскресную прогулку и сейчас направляемся домой. Не хотите ли составить нам компанию и перекусить?

Слова вырвались у инженера прежде, чем он успел подумать. У Лундберга не было привычки приглашать домой незнакомых, а с полуголыми мужчинами, сидящими в сугробе, следовало бы быть особенно осторожным. Но парень небось замерз, хотя и отрицает это, а то, как воспринял незнакомца Бустер, явно говорило в его пользу, так же как его улыбка и голос.

Человек встал.

— Меня зовут Сири,— сказал он.— Я хочу составить вам компанию.

Сири?

Инженер ждал, что Сири достанет свою одежду, он ведь мог, скажем, быть «моржом», поэтому и сидел в сугробе, наслаждаясь солнцем. Но Сири —Сири? — тут же подошел к нему, и инженер, удержавшись от комментариев, направился к дому.

— Простите за навязчивость, вы швед или приехали из какой-нибудь другой страны?

Лундберг не заметил в речи незнакомца ни малейшего акцента, но то, как тот искал слова, посеяло в нем сомнения. Да еще краткие ответы Сири, за которыми ни разу не последовало ни одного вопроса.

— Я не швед. Я приехал из...

Опять жест руками, но на этот раз он устремил взгляд в небо.

— Сверху?

— Сверху.

Перепечатывается из сборника «Цвет надежд зеленый» (М.: Мир, 1982). Перевод со шведского А. Афиногеновой.

Абсолютно уверенно. Без тени сомнения или попытки объяснить.

Если когда Лундберг и должен был бы испугаться и попытаться улизнуть, чтобы предупредить полицию или вызвать «скорую», так именно сейчас. Но вместо этого он разразился хохотом.

— Понимаю,— фыркнул он.— Ты, конечно, прилетел на летающем блюдце. Но как же ты научился говорить по-шведски? Заочно? Или на Марсе все говорят по-шведски?

— Я не говорю по-шведски,— поправил инженера незнакомец.— Ты говоришь. Я понимаю.

Бустер заметил белку и залаял. В следующую секунду раздался еще один лай, на этот раз он исходил от Сири. Собака тут же кинулась к нему и приглушенно заворчала. Самое смешное, что в ворчании ее слышался явный вопрос. Незнакомец ответил новым ворчанием, и этот странный разговор продолжался еще с минуту. Бустера словно околдовали. Огромный бульдог прыгал и танцевал, не отрывая от Сири взгляда, полного восхищения. Короткий лай Сири, и бульдог остановился.

— Бустер говорит,— сказал Сири.— Я понимаю. Я говорю. Бустер понимает.

Инженер Лундберг взглянул на своего гостя.

— Да, но... это невозможно,— запротестовал он.— Ты хочешь сказать, что у Бустера есть свой язык, и ты выучил его, как только услышал?

Он замолчал и попытался припомнить, что говорилось до сих пор. Сири действительно не произнес ни одного слова, которого бы сначала не употребил он сам, отметил Лундберг. А словарный запас Сири за время разговора явно расширился.

Чтобы проверить свое предположение, инженер сказал:

— Если я правильно понял, ты прибыл на космическом корабле. Это заставляет сделать ряд допущений, одинаково невероятных. Либо ты прилетел с соседней планеты, несмотря на заверения астрономов в том, что они необитаемы, либо из другой солнечной системы. Но так как скорость света превысить нельзя... я читал, что нашим самым современным ракетам понадобились бы сотни лет...

Лундберг вдруг потерял нить разговора, поразившись парадоксальности ситуации: морозным мартовским воскресным днем он обсуждал космические путешествия с совершенно незнакомым человеком в плавках. Человек хоть, слава богу, на вид безобидный. Даже симпатичный.

Сири, внимательно его слушавший, семенил рядом по узкой лесной тропинке. Он возразил:

— Ты неправильно меня понял. Я прибыл, но не на космическом корабле. И скорость света можно превысить, если у тебя есть...

И вновь жест, означавший, что у него не хватает слов.

— Ладно, как хочешь. Поговорим об этом после обеда. Вот здесь я и живу. Входи и чувствуй себя как дома...

...Сири отказался от предложенного Лундбергом обеда — жареной картошки и вареной колбасы.

В конце концов Сири удалось объяснить, почему он не ест.

Он получает энергию непосредственно из солнечного света. Поскольку этот свет должен быть профильтрован через воздушный слой, а Земля оказалась как раз на его пути, он воспользовался случаем, чтобы здесь «перекусить». Космический корабль ему не нужен. Его народ уже многие тысячелетия путешествует в космосе с помощью телепортации. На более дальние расстояния телепортация осуществляется поэтапно, но все равно происходит практически мгновенно.

— Внизу, на поверхности планеты, конечно, другое дело,— уточнил он.— Там мы вынуждены использовать машины, если очень спешим.

— Автомобили?

В первый раз с момента их встречи Сири, казалось, не понял вопроса. Его хозяин достал газету и словарь и показал ему изображение автомобилей и двигателей внутреннего сгорания.

— Но это же неразумно,— прокомментировал Сири.— Подумать только, какими примитивными методами вы пользуетесь. Судя по всему остальному, что я у тебя видел, мне казалось, что вы достигли гораздо большего. Ты хочешь сказать, что вы используете нефть, чтобы привести в движение эти чудовища? Разве они не загрязняют воздух?

— Еще как,— мрачно кивнул инженер Лундберг.— Но что же нам делать, если нет другого выхода?

— Выход есть. Машина, которой пользуемся мы и которая есть почти на всех цивилизованных планетах, намного лучше. Хочешь узнать, как она работает?

— Ты и мысли читать умеешь?

Сири улыбнулся.

— Нет, не умею. Наша способность инстинктивно понимать чужие языки врожденная, как и наш способ перемещения на другие небесные тела. Но это во всяком случае не телепатия. Не знаю даже, можно ли этому научить. Если бы у меня было побольше времени...

Эта реплика Сири вызвала беспокойный вопрос со стороны Лундберга.

— Я надеюсь, ты не собираешься сейчас уходить? Мне нужно задать тебе миллион вопросов.

— Понимаю. Но не успею тебе больше ничего рассказать. Мне надо попасть на собрание, я и так задержался здесь слишком долго.

Подняв руку, Сири приостановил поток протестов.

— Знаешь что,— сказал он,— дай-ка мне бумагу и карандаш. Пожалуй, я успею сделать чертеж нашей машины. Если тебе этот чертеж покажется слишком сложным, у вас наверняка найдутся ученые, которые помогут тебе разобраться в конструкции.

Лундберг вытащил из ящика стола письменные принадлежности. Поискал в кармане сигареты, вспомнил, что оставил их на столе в кухне, и вышел.

Пока он чиркал спичкой о коробок, он услышал, как хлопнула входная дверь.

Гость ушел, но на столе остался лист бумаги. Лундберг, дрожа от нетерпения, склонился над ним.

На бумаге был тщательно нарисован велосипед.

Эх, не очень-то здорово получилось. Столько слов, а результат ничтожный. Меня начинает брать сомнение, правду ли говорил Сири. Я имею в виду велосипед. Неужели это и есть эпохальное изобретение? А что они делают там, на его родной планете, когда им нужно перевезти рояль? Или они играют только на контрабасе и флейте?

Тут и Лундберг начал приходить в себя. Он вспомнил целый ряд неприятных фактов — например, то, что хотя поблизости и нет сумасшедшего дома, зато есть приют для алкоголиков. А ведь хорошо известно, какими очаровательными людьми могут быть некоторые алкоголики, если постараются. Хотя Сири вообще-то даже от пива отказался, но он, наверное, надеялся, что ему предложат что-нибудь покрепче.

Нет, так закончить нельзя. Вся история повисла в воздухе. Давайте продолжим еще немного.

Второй раз за день инженер Лундберг разразился хохотом. Ну и основательно же его надули. Его, который всегда бывает так сдержан, даже подозрителен по отношению к незнакомым.

Внезапно он поддался какому-то импульсу и прошел в столярную мастерскую, где еще осенью поставил свой старый велик. Все еще улыбаясь, он перекинул ногу через раму, оперся рукой о стену и уселся на неудобное седло. Потом закрыл глаза, стараясь отвлечься от сугробов на маленьком дворике и инструментов на верстаке в полумраке мастерской.

Вот так все и началось, фантазировал он. Народ Сири сосредоточил свои способности на духовных упражнениях, а не на технических. Велосипед явился кульминацией их технического развития. Для того чтобы попасть на другую планету, они просто начинали думать о том месте, куда хотели переместиться.

Как оно может выглядеть, это место? Воздух там должен быть непременно, хорошо бы и тепло было — для разнообразия. Скажем, пустыня — и два солнца для верности. Если сосредоточиться как следует...

Падение на песок заставило его открыть глаза. В полном зимнем облачении он сидел на вершине холма и смотрел на простиравшуюся перед ним пустынную местность. Он заметил, что отбрасывает две тени.

По тропинке у подножия холма шел человек в набедренной повязке. Рядом с ним ковыляло шестиногое лохматое существо. Пораженный открывшимся перед ним видом на вершине холма, человек крикнул:

— Кууланг матьянгаба вева?

Значение слов было совершенно понятно инженеру Лундбергу.

— Матьянгаба вева,— заверил он дружелюбно.

Ответы, указания, решения

«Квант» для младших школьников

1. Сначала вспомним, что в любом вагоне поезда не более 100 мест, в плацкартном не более 60, а в купейном и мягком еще меньше. Поэтому количества пассажиров в вагонах № 7 и № 8 являются двузначными числами, отличающимися лишь порядком цифр, следовательно их сумма делится на 11, а поскольку эта сумма является еще и квадратом целого числа, то она равна 121. Но в этом случае одно из чисел не меньше 65, а другое не больше 56. Заметим также, что в вагоне № 9 находится 11 пассажиров. Вагон, в котором не меньше 65 пассажиров, может быть только общим, при условии, что все рассмотренные вагоны имеют свободные места, как и указано в задаче.

2. Искомые пары чисел: 0 и 1, а также 370 и 371.

3. $235193+235193=470386$.

4. Несколько нулей можно заменить, например, таким способом:

$$\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

5. См. рис. 1.

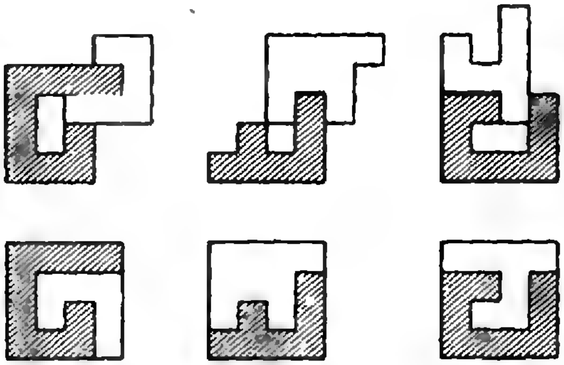


Рис. 1.

[illegible]йдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Напряжения, которые сами по себе недостаточны, чтобы нарушить целостность материала, могут, например, способствовать продвижению имеющейся в стекле трещины в глубь (или вдоль) поверхности материала. В результате в трещину могут проникнуть инородные молекулы, которые и нарушат связи между молекулами стекла.

2. Свинец мягче стали, поэтому поверхности двух его кусков легче сблизить до расстояния, на котором проявляются силы молекулярного сцепления.

3. Стержень выскочит, так как температурный коэффициент линейного расширения у железа меньше, чем у цинка.

4. Температурный коэффициент объемного расширения у керосина много больше, чем у стекла, однако в первый момент после опускания в горячую воду керосин еще не успевает прогреться.

5. При растяжении упругой резиновой пленки сила натяжения зависит от степени деформации пленки. Сила же поверхностного натяжения жидкости определяется только свойствами самой жидкости и не меняется с увеличением ее поверхности.

6. Молекулярные силы притяжения действительно тянут находящиеся на поверхности молекулы в глубь жидкости, но эти силы уравновешиваются силами отталкивания со стороны молекул, находящихся непосредственно под поверхностным слоем.

7. Чем меньше радиус шара, тем сильнее поверхностная пленка сжимает воздух внутри него.

8. Проволочки из разных металлов необходимо поочередно помещать в нужное место пламени и следить за появлением шарика на конце одной из них. Зная температуру плавления металла, из которого сделана проволочка, можно оценить температуру участка пламени.

9. Вода растечется по всей внутренней поверхности колбы, а в центре колбы образуется пузырек воздуха. Ртуть же образует в центре большую сферическую каплю.

10. Коэффициент поверхностного натяжения убывает при повышении температуры вещества. Поэтому масса капли, отрывающейся в жарко натопленной комнате, меньше, чем в прохладной; значит, нужно увеличить число капель.

11. Один конец проволоки нужно опустить во флакон, а другой конец приложить к краю стакана. Вода стечет по проволоке во флакон, так как ее «удержит» поверхностная пленка.

12. Вырезав из всех сортов бумаги узкие полоски, следует погрузить их концы в воду. В той полоске, где пóры меньше, вода поднимется на бóльшую высоту.

13. Часть полена в тени холоднее. Поэтому капиллярные силы перемещают воду в этом направлении.

14. По мере того как молекулы воды испаряются с поверхности листьев, на их место приходят другие молекулы. Так мощные межмолекулярные силы поднимают по тонким капиллярам сок по стволу от корней вверх.

Микроопыт

Раствор сахара в воде имеет больший коэффициент поверхностного натяжения, чем чистая вода. Поэтому поверхность, занимаемая раствором сахара, стремится сократиться, увлекая за собой спички по направлению к кусочку сахара. При растворении мыла натяжение воды уменьшается, поверхность, занятая мыльным раствором, увеличивается, и спички уходят вслед за границей с чистой водой к краям тарелки.

BeatriceGloria_personal library

три в корень! И в дискриминант...

1. Обозначим через x расстояние от заряда q до q_1. Тогда из закона Кулона получаем

$$\frac{q_1}{x^2}=\frac{q_2}{(l-x)^2},$$

или

$$x^2(q_1-q_2)-2lq_1x+q_1l^2=0,$$

откуда

$$x_{1,2}=l\,\frac{q_1\pm\sqrt{q_1q_2}}{q_1-q_2}.$$

Корень со знаком «+» не годится: $x>l$, поэтому

$$x=l\,\frac{q_1-\sqrt{q_1q_2}}{q_1-q_2}.$$

2. Из кинематики имеем

$$s=\sqrt{L^2-H^2}=v\cos\alpha\cdot t,$$
$$H=v\sin\alpha\cdot t+\frac{gt^2}{2}.$$

Исключая t, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{v^2}{gs}\pm\sqrt{\left(\frac{v^2}{gs}\right)^2+\frac{2Hv^2}{qs^2}-1}.$$

Имеет смысл ответ со знаком «+» — второй ответ соответствует «пикированию вверх».

3. Очевидно, что условие задачи выполняется, если обе встречи автомобилей происходят позже, чем через v_0/a. Это означает, что оба корня уравнения

$$vt=l-v_0t+\frac{at^2}{2}$$

должны быть больше v_0/a. Расчет дает

$$\sqrt{2al}-v_0<v<\frac{al}{v_0}-\frac{v_0}{2}.$$

нт» для младших школьников

(см. «Квант» № 11)

1. Пусть стакан чая стоил x рублей, а калач — y рублей, тогда из условий покупки Фомы получаем $4x+7y=17k$, где k — количество 17-рублевых купюр, уплаченных Фомой. Стоимость покупки Еремы равна $x+6y$. Если учетверить эту сумму и вычесть из нее сумму, уплаченную Фомой, то получим $17y-17k$ — число, делящееся на 17, значит, и сумма, уплаченная Фомой, делится на 17.

2. Если число КУ — простое, то получаем $83\cdot8\cdot3=1992$, если составное, то имеем $72\cdot7\cdot2=1008$.

3. Из условий задачи следует, что число дней в указанном году делится на 3. Следовательно, этот год високосный, и его номер делится на 4. В указанный промежуток времени было два таких года: 1900 и 1904, но 1900 год не был високосным в Париже (в России был). Итак, это был 1904 год.

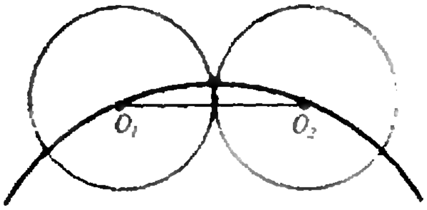


Рис. 2.

4. Соединим центры O_1 и O_2 двух соседних окружностей (рис. 2). Очевидно, что отрезок O_1O_2 короче дуги O_1O_2. Но этот отрезок равен диаметру каждой из касающихся окружностей, откуда следует, что сумма дуг между центрами окружностей — длина первоначальной окружности — больше суммы диаметров касающихся окружностей.

5. Приводим фрагмент русско-ам-ямского словаря, составленный по переводу стишка:

видит	—бу;
гулять	—му;
кошка	—ля;
мышка	—ту;
ночью	—ам;
поймать	—гу;
пошла	—ям.

ономерические задачи

(см. «Квант» № 11)

1. а) $\sin 5<\sin 6$; б) $\cos 7>0>\cos 8$; в) $\operatorname{tg}3<0<\operatorname{tg}3^\circ$; г) $\sin 3>\sin 3^\circ$. Указание. $\sin 3=\sin(\pi-3)$, $\sin 3^\circ=\sin(\pi/60)$, но $\pi/2>\pi-3>\pi/60$. д) первое число больше; е) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{5}$; ж), з) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}<\frac{\pi}{5}<\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Указание. Пусть $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, $\beta=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Тогда (проведите вычисление!) $\operatorname{tg}5\alpha<0$, $\operatorname{tg}5\beta>0$, откуда следует, что $5\beta>\pi>5\alpha$. Для вычисления $\operatorname{tg}5\alpha$ найдите сначала $\operatorname{tg}2\alpha$, затем $\operatorname{tg}4\alpha=\operatorname{tg}2(2\alpha)$ и, наконец, $\operatorname{tg}5\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+4\alpha)$.

2. а) $3\pi-10$; б) $4\pi-10$; в), г) $10-3\pi$; д) $4\sqrt{2}/9$; е) $\pi/9$; ж) $1/\sqrt{26}$; з) $\frac{8-6(a^2-1)^2}{(a^2-1)^3}$. Указание. Если $\sin x+\cos x=a$, то $\sin 2x=a^2-1$.

3. е) Указание. Пусть $\alpha=\arcsin x$, $\beta=\pi/2-\arccos x$. Тогда $\sin\alpha=\sin\beta=x$, причем $\alpha,\beta\in[-\pi/2;\pi/2]$. Поэтому $\alpha=\beta$.
ж) См. указание к п. е).

4.*) а) $k\pi$; $\pi(3k+1)/3$; б) $\pi(24k+1)/36$, $\pi(24k+5)/36$; в) $\pi(24k-7)/120$; г) $2k\pi$; д) $\pi(2k+1)/2$; е) $\varnothing$; ж) $\pi(2k+1)/18$, $k\neq 9l+4$; з) $(-1)^{k+1}\pi/6+k\pi$, $(-1)^k\arcsin\pi/12+k\pi$; и) $\pm\arccos\pi/4+(2k+1)\pi$, $\pm\arccos\pi/12+2k\pi$; к) $k\pi/2$; $\pi(6k\pm1)/9$; л) $\pi(2k+1)/8$, $\pi(2k+1)/4$, $\pi(2k+1)/2$; м) $\pi(2k+1)/10$, $\pi(2k+1)/4$, $\pi(2k+1)/2$; н) $\pi(4k+1)/4$, $-\operatorname{arctg}7+$

---

*) В пунктах 4 и 5 числа k, l, m, n — целые.

$+k\pi$; о) $\pi k/3$, п) $2\,\mathrm{arctg}\,1/3+2k\pi$; р) $\pi k/5$, $\pi k/7$; с) $(6k\pm1)\,\pi/6$; т) $(6k\pm1)\,\pi/6$; у) $(6k\pm\pm1)\,\pi/6$; ф) $\pi\,(4k+1)/4$; х) $2k\pi$, $\pi/2+2k\pi$. **Указание.** $\sin 2x=1-y^2$, где $y=\cos x-\sin x$. ц) $\pi(2k+1)/7$, $k\neq 7l+3$; ч) $k\pi$,

$$\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+2k\pi.$$

5. а) $\pm\pi/6+k\pi$; б) $\pi\,(6k\pm1)/3$; в) $\pi k/2$; г) $(-1)^k\,\pi/3+2k\pi$; д) $\pm2\pi/3+2k\pi$; е) $\pi/2+2k\pi$, $k\pi$, $2\pi\,(3k+1)/3$, $\pi\,(6k-1)/3$.

Указание. Уравнение равносильно такому:

$$\sin 2x(\sin x-1)=|\sin x|(1-\sin x),$$

откуда либо $\sin x=1$, либо $|\sin x|=-\sin 2x$.

ж) $-\pi/4+(-1)^{k+1}\arcsin 5/8+\pi k$. **Указание.** Замена $y=\sin x+\cos x$.

з) $x=-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{3}+\pi k$. **Указание.** Из корней уравнения $\cos 2x=-1/3$ следует выбрать те, при которых подкоренное выражение неотрицательно. Уравнение же

$$\sqrt{8-16t-10t^2}=-4t-1,$$

где $t=\sin x$, не имеет корней на промежутке $[-1;\ 1]$.

5. а) $(\sqrt{17}-3)/4$. **Указание.** $\cos(2\arcsin x)=1-2x^2$, $\cos\arccos 3x=3x$, так что следствием данного уравнения будет уравнение $1-2x^2=3x$. Один из его корней меньше -1, а второй удовлетворяет исходному уравнению.

б) -1. **Указание.** $\arcsin^2 x+\arccos^2 x\leqslant 5\pi/4$ при любом $-1\leqslant x\leqslant 1$. Равенство возможно лишь при $x=-1$.

в) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}+1}\right)$. **Указание.** Воспользуйтесь задачей 3.

ж), г) $-\sqrt{2}$. **Указание.** Приравнивая тангенсы левой и правой частей, получаем после упрощений уравнение относительно x и корнями $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$. Проверкой убеждаемся, что исходному уравнению удовлетворяет лишь $x=-\sqrt{2}$.

д) 0; е) 0, 1, -1; ж) $-\sqrt{2}/2\leqslant x\leqslant\sqrt{2}/2$. **Указание.** Поскольку $\sin(2\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2}$, синусы левой и правой частей равны. Уравнению удовлетворяют те x, для которых $2\arcsin x$ принадлежит области значений арксинуса, т. е. те x, для которых $-\pi/2\leqslant 2\arcsin x\leqslant\pi/2$.

з) $0\leqslant x\leqslant 1$. **Указание.** См. указание к предыдущей задаче.

и) 0, 1. **Указание.** Воспользуйтесь задачей 2, ж) и выполните замену $t=2/(\pi\arcsin x)$, в результате уравнение приведется к виду $\arccos(1-t)=\arcsin t$.

и самым коричневейшим- ерекоричневейшим был Эфиоп»

(см. «Квант» № 4)

Конечно, и в биологии законы физики те же, что и для неживой природы: черные тела хуже отражают солнечные лучи, чем белые. Но одновременно и лучше поглощают — в этом и кроется разгадка. Оказывается, для живого организма важно, чтобы пигментированный слой кожи, поглощая бóльшую часть солнечных лучей, предохранял внутренние, жизненно важные органы: мозг, сердце, красные кровяные шарики, печень. Так что черная кожа действительно защищает от жаркого африканского солнца. Но не с помощью отражения, как солнечный зонтик, а — поглощением. Безусловно, оптимальной в качестве защиты была бы кожа, поглощающая как черная и отражающая как белая, но «нет в мире совершенства» (Антуан де Сент-Экзюпери).

Напечатано в 1992 году

	№	с.
К нашим читателям	1	2

Статьи по математике

	№	с.
Виленкин Н. О кривизне	4	2
Гарднер М. Шифр Бэкона	8	20
Лобачевский Н. Геометрические исследования по теории параллельных линий	12	2
Пахомов В. Демократия с точки зрения математики	9	16
—◆—	10	2
Радемахер Г., Теплиц О. Об одном свойстве числа 30	3	6
Смилга В. Как начиналась геометрия	2	10
Соловьев Ю. Открытие Вселенной	5	2
Соловьев Ю. Творцы новой астрономии	7	2
—◆—	8	10
Соловьев Ю. Николай Иванович Лобачевский	11	2
Спрент П. Зачем нужна статистика?	10	20
Стюарт Я. Топология	7	14
Уфнаровский В. Прогулка до теоремы Чебышёва	6	8
Яглом И. Две игры со спичками	1	10
Яглом И. Что такое математика	9	2

Статьи по физике

	№	с.
Амстиславский Я. Закон Кирхгофа	6	14
Барабаш Т. Почему дрожит осиновый лист?	1	16

Бернштам В., Манзон И. Пинч-эффект	2	18
Блиох П. Космический мираж	12	14
Воробьев И. Океанская зыбь	9	9
Глэшоу Ш. Элементарные частицы	3	2
Каганов М. Апология физики	10	8
Кикоин А. Нейтрон и ядерная энергия	8	2
Коренблит И., Шендер Е. Беспорядок в магнитном мире	1	3
Литинский Г. Корабельные пушки и волны в упругих стержнях	7	21
Минеев А. О высоких деревьях	3	12
—•—	4	10
Митрофанов А. Грибы и рентгеновская астрономия	9	21
Носов Ю. Микроэлектроника обретает зрение	11	10
—•—	12	11
Олдридж Б. Натуральный логарифм	8	15
Орбиты, которые мы выбираем	4	16
—•—	5	17
Стасенко А. Самолет в озоне	5	10
—•—	6	2
Стасенко А. Сверхзадача космического полета	10	14
Сурдин В. Чернильное колечко и космическая физика	7	8
Эдельман В. Металлы	2	2

Новости науки

Чудеса миниатюризации	1	32
Живой компьютер?	2	66
Перетягивание каната	8	46

Задачник «Кванта»

Победители конкурса «Задачник «Кванта»	3	28
Задачи М1321—М1380, Ф1328—Ф1387	1—12	
Решения задач М1291—М1354, Ф1308—Ф1367	1—12	
Список читателей, приславших правильные решения	2, 4, 7, 11	

«Квант» для младших школьников

Задачи	1—12	
Победители конкурса «Математика 6—8»	10	42
Конкурс «Математика 6—8	1—4, 9—12	
Акулич И. Решение ребусов на чашечных весах	6	36
Генденштейн Л. Алиса и точка	7	42
Генденштейн Л. Алиса, кошка и задумчивый осел	12	37
Гетман В. Высоко ли погас болид?	4	35
Дворянинов С., Коржуев А. Вездесущий рычаг	3	30
Крыжановский Л. Игра нитей в опыте Рихмана	11	28
Савин А. Про умножение	2	32
Савин А., Семёнов Е. Сеанс парапсихологии	10	37
Сурдин В. Задачи старика Хоттабыча	8	43
Тихомирова С. «Если в поле далеко раздается голос...»	1	28
Том Тит. Простые затеи	5	34
Холидей Д. Ошеломляющее впечатление	9	42

Качественные задачи по физике

«...и самым коричневейшим-наипрекоричневейшим был Эфиоп»	4	38
—•—	12	76
Как дерево спасает от дождя?	4	38

Калейдоскоп «Кванта»

Синус и косинус	1	40
Магнетизм	2	•
Зеркальная симметрия	3	•
Астрономия	4	•
Тор	5	•
Давление	6	•
Ребусы, ребусы, ребусы...	7	•
Звук	8	•
Факториал	9	•
Емкость и индуктивность	10	•
Изогонально сопряженные точки	11	•
Взаимодействие молекул	12	•

Р — значит ракета

Заочная аэрокосмическая школа	12	64
Бурдаков В. Золотой дирижабль	1	46
Джоунс Д. Per funicula ad astra	9	65
Есть ли жизнь на Европе?	7	56
Коржуев А. Движения спутников и их возмущения	5	52
Туров В. По ступеням космических скоростей	4	56

Школа в «Кванте»

Физика 9—11:

Конус трения	1	33
Первый источник электрического тока	1	35
Дифракция волн	1	37
Закон сохранения импульса и маневры космического корабля	3	36
Откуда берется магнетизм?	3	37
Кое-что о силе тяги	5	42
Вариационные принципы	5	44
Когда вокруг всё вертится...	9	45
Почему висит кольцо	9	47
Кинематика, да и только	11	32
Ах, уж эта влажность	11	35
Избранные школьные задачи по физике	1, 3, 5, 9, 11	

Математика 9—11:

Вписанный четырехугольник	2	37
Неопределенные уравнения первой степени	4	42
Квадратное уравнение	6	44
Предел последовательности	10	43

Лаборатория «Кванта»

Бурдаки Н. Опыты с вращающейся жидкостью	2	42

Козловский В. Электрическое действие пламени 10 50
Михеев П. Физика и гитара 6 48
Насретдинов А. Опыты с пластинкой Френеля 4 47
Уокер Дж. «Тепловые фантазии и прочие удовольствия» 8 48

Математический кружок

Канель А., Ковальджи А. Треугольники и катастрофы 11 42
Куланин Е. Об одной трудной геометрической задаче 7 46
Кушнир И. О двух формулах Эйлера 12 43
Прасолов В. Точки Брокара 1 42
Протасов В. Вокруг теоремы Фейербаха 9 51
Смаллиан Р. Остров Ваал 3 44
—•— 5 48

Информатика

Дубровский В., Калинин А. Новости кубологии 11 52
Котова А. Машина Тьюринга 7 60
Столяров Л. Алгоритм 4 60
Тарасенко Б. Проблема Гольдбаха и программирование 6 50
Штернберг Л. Несколько тактов из жизни центрального процессора 5 38
Штернберг Л. ЭВМ перебирает варианты 8 62
Вокруг «Тетриса» 12 49

Практикум абитуриента

Афонин А., Капшай В., Капшай М., Шолох В. Что покажет динамометр? 2 47
Гельфгат И., Генденштейн Л. Вокруг колеса 4 50
Горнштейн П., Полонский В., Якир М. Геометрические решения экстремальных геометрических задач 9 59
Егоров А. О дискриминанте 6 59
Затакавай В. Решаем системы уравнений 3 48
Коржуев А. Избранные задачи по термодинамике 6 54
Коржуев А. Законы сохранения в релятивистской динамике 10 53
Корсунский Б. Внимание: ловушка! 7 51
Корсунский Б. Смотри в корень! И в дискриминант... 12 47
Можаев В. Постоянный электрический ток 8 51

Тематические подборки задач

Алгебраические уравнения и неравенства 9 64
Вычисления в тригонометрии 10 56
Тригонометрические задачи 11 51

Варианты вступительных экзаменов

Московский физико-технический институт 1 64
Московский институт электронного машиностроения 1 67
Московский педагогический государственный университет им. В. И. Ленина 1 68
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 2 58
Новосибирский государственный университет 3 59
Московский авиационный институт 3 61
Московский инженерно-физический институт 3 63
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики 3 65
Московский институт стали и сплавов 3 66
Санкт-Петербургский государственный университет 4 68
Санкт-Петербургский государственный технический университет 4 70
Санкт-Петербургский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина) 4 72
Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена 4 74
Государственная академия нефти и газа им. И. М. Губкина 5 65
Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского 5 68
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана 5 69
Московский институт электронной техники 5 71
Московский энергетический институт 5 73
Задачи вступительных экзаменов по математике в различные вузы 6 70

Олимпиады

Первая математическая олимпиада Мексики 1 49
Математическая олимпиада тихоокеанских стран 3 71
Канадские математические соревнования 5 60
—•— 6 67
—•— 7 63
Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон» 7 65
Болгарская олимпиада по математике 8 67
XV Московская экономико-математическая олимпиада 8 68
Задачи LV Московской математической олимпиады 9 69
Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике 9 70
Физико-математическая олимпиада МГТУ им. Н. Э. Баумана 9 73
XVIII Всероссийская олимпиада по математике и физике 10 60
XXXIII Международная математическая олимпиада 9 69

IV Всероссийская олимпиада по информатике 10 66
XXXII Всеукраинская математическая олимпиада 10 68
XXVI Межреспубликанская олимпиада по математике 11 58
XXVI Межреспубликанская олимпиада по физике 11 61
Межгосударственная олимпиада по информатике 11 67
XXIII Международная физическая олимпиада 12 52
IV Международная олимпиада по информатике 12 56

Информация

Всесоюзная заочная многопредметная школа 1 53
Малый мехмат 1 56
Конференция клуба «Глюон» 3 70
Заочная физическая школа при МГУ 4 39
Новый прием в ВЗМШ — на отделение «Физика» 5 56
ЗИФМШ объявляет прием 5 57
Заочная школа при НГУ 7 53
Заочная школа программистов 7 55
Пятая международная космическая 10 19
Новый прием в ВЗМШ на отделение «Биология» 11 57
Заочная физико-техническая школа при МФТИ 12 61
Новый прием в СУНЦ МГУ и НГУ 12 66

Из дальних странствий

Гуд бай, Америка?.. 1 50

Игры и головоломки

Пирамида 1 57
Ни Лойд, ни Дьюдени... 2 52
Из куба — тетраэдр 3 11
Кроссворд 3 58
—•— 11 69
Новая игра на клетчатой бумаге 4 63
Олимпийские интеллектуальные игры 1993 г. 6 58
Игра го 6 64
—•— 7 73
—•— 8 58
Крискросс, пра-кроссворд и другие 9 68
Аномальные флексагоны 10 57
In vino veritas 12 68

Фантастика

Дик Ф. О неутомимой лягушке 8 70
Килер Г. Доллар Джона Джойса 1 58
Круна Б. Все наверх! 12 70
Моррисон У. Мешок 2 67
—•— 3 54
—•— 4 64
Томас Т. Сломанная линейка 7 68

«Квант» улыбается

Предметы меблировки 1 71
Кроссворд «Квант» 2 57
Кроссворд 4 59
Мини-рассказы 5 55
Из «Каталога невозможных объектов» Карельмана 7 52
Груки 8 27
Кто вы: физик или математик? 10 70

Нам пишут

1, 3, 5, 7, 8, 11, 12

Реклама

1, 2, 4, 5, 8

Наша обложка

6, 7, 9

Шахматная страничка 3-я с. обл.

XI чемпионат мира 1 »
Партии чемпионов 2 »

АНКЕТА 12–92

Мы благодарим всех, кто прислал нам ответы на предыдущую анкету. Нам очень важно знать Ваше мнение о журнале. Чем больше ответов, тем легче нам ориентироваться в Ваших интересах.

А теперь, дорогой читатель, ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите: «Анкета 12—92».

Обзор Ваших ответов читайте в одном из ближайших номеров нового, 1993 года.

1. Класс, в котором Вы учитесь: ____________

Ваша профессия (если Вы работаете): ____________

круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

____

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ____________

____

Короткая жизнь рекордов 3 •
Слоны-хамелеоны 4 •
Всем рекордам рекорд! 5 •
Путешествие в прошлое 6 •
Заглядывая в прошлое 7 •
Алгоритм обратного мата 8 •
В обезьяньем питомнике 9 •
По проторенной дорожке 10 •
Филигранный анализ компьютера 11 •
«Мефисто» — международный мастер 12 •

Наша анкета 6, 12

Читатель↔журнал 6 79

3. Какие статьи (из любого раздела) и задачи из номеров 7—12 Вам понравились (не понравились)?

Вы использовали при подготовке к уроку?

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»?

5. Какая обложка из номеров 7—12 Вам понравилась (не понравилась)?

6. Если бы редактором «Кванта» были Вы...

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. Абрикосов, А. Боровой, Ю. Брук,
А. Виленкин, С. Воронин, Б. Гнеденко,
С. Гордюнин, Е. Городецкий, Н. Долбилин,
В. Дубровский, А. Егоров. А. Зильберман,
С. Иванов, С. Кротов, А. Леонович, Ю. Лысов,
Т. Петрова, А. Соснинский, А. Стасенко,
С. Табачников, В. Тихомирова, В. Уроев,
А. Черноуцан, А. Штейнберг

Редакционный совет:
А. Анджанс, В. Арнольд, М. Башмаков,
В. Берник, В. Болтянский, Н. Васильев,
Е. Велихов, И. Гинзбург, Г. Дорофеев,
М. Каганов, Н. Константинов, Г. Коткин,
Л. Кудрявцев, А. Логунов, В. Можаев,
И. Новиков, В. Разумовский, Н. Розов,
А. Савин, Р. Сагдеев, А. Серебров,
И. Сурдин, Е. Сурков,
Л. Фаддеев, В. Фирсов, Д. Фукс,
И. Шарыгин, Г. Яковлев

Номер подготовили:
Л. Винюкова, А. Егоров, А. Калинин,
Л. Кардасевич, С. Коновалов, А. Котова,
А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили
Г. Антонов, Н. Кузьмина, Т. Макарова, А. Малышев,
Э. Назаров, П. Перевезенцев, П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
П. Чернуский

Художественный редактор Е. Потапенкова

Зав редакцией С. Давыдова

Корректор В. Сорокина

103006, Москва, К-6, ул. 1 я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»,
тел. 250 33-54, факс 251-55 57

Сдано в набор 29.09.92. Подписано к печати 12.11.92.
Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1.
Гарнитура школьная. Печать офсетная
Усл. печ л. 6,45. Усл. кр. отт. 27,09 Уч.-изд л. 7,55.
Тираж 50641 экз. Заказ 1215. Цена 1 р. 10 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Министерства печати и информации
Российской Федерации
142300, г. Чехов Московской обл.

Шахматная страничка

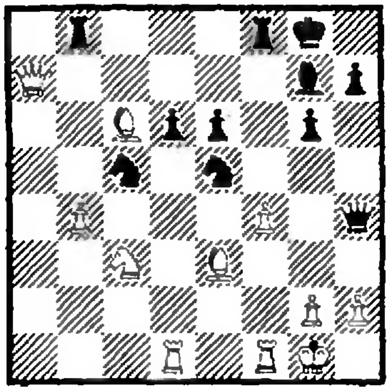
«МЕФИСТО» — МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАСТЕР

Ведущий рубрики побывал летом этого года в Германии, где участвовал в традиционном международном турнире «Берлинское лето». Турниры эти проводятся по швейцарской системе, и на них съезжаются мастера и гроссмейстеры со всего света, в последние годы около 500 человек. Состязания в Берлине проводятся уже десятый год подряд, и всегда в них играет чемпион мира среди микрокомпьютеров «Мефисто». На сей раз «Мефисто» превзошел самого себя. Набрав 6 очков в девяти партиях, машина попала в число 50 сильнейших игроков и выполнила норму международного мастера. Посмотрите несколько образцов игры электронного чемпиона.

«Мефисто» — Грузман
Дебют ферзевой пешки

1. d4 Kf6 2. c4 d6 3. Kc3 Cf5 4. f3 e5 5. e4 ed 6. Ф:d4 Kc6 7. Фd1 Ce6 8. Cd3 Ce7 9. Kge2 0—0 10. 0—0 Kd7 11. Ce3 Kde5 12. Kd5. Черные разыграли начало партии так, чтобы машина не могла воспользоваться своей дебютной библиотекой, но «Мефисто» не растерялся и захватил инициативу.

12... Лe8 13. Kef4 Cf8 14. Ce2 a5 15. Фh3 b6 16. Kc3 g6 17. Лad1 Cg7 18. K:e6 fe 19. f4 Kf7 20. e5 Лb8 21. Cf3 Kb4 22. a3 Ka6 23. Cc6 Лf8 24. Фb5 Kc5 25. b4 ab 26. ab Kb7 27. c5 Фh4 28. cd cd 29. Ф:b6 Kc5 30. Фa7 K:e5.



Забавная позиция. Оба коня черных под боем, но ни одного из них нельзя брать, на 31. bc следует 31...Kg4, а на 31. fe — 31...C:e5. Однако компьютер делает тихий ход, который сразу ставит все точки над i.

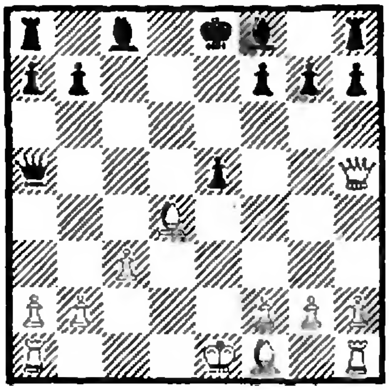
31. Cd4! Л:b4 31. C:e5 de 33. Ф:c5 Лb:f4 34. Лf3 Лc4 35. Фd6 Л:f3 36. C:f3 Л:c3 37. Ф:e6+ Kpf8 38. Cd5 Фf6 39. Лf1. Черные сдались.

Во время игры «Мефисто» немного гудит, как холодильник, к тому же вокруг него всегда много народа. Поэтому организаторы решили выделить машине специальное помещение. Человек сидит за обычной шахматной доской, а компьютер находится рядом, за соседним столом. Когда человек делает ход, ассистент переставляет фигуры на компьютерной доске. «Мефисто» отвечает (мигают лампочки на соответствующих полях), и ассистент передвигает фигуры сразу на двух досках, одновременно переключая часы. Так игра и идет... Вот еще два образца творчества «Мефисто» в «Берлинском лете».

«Мефисто» — Фритш
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. Kf3 Kf6 3. Kc3 Kc6 4. d4 d5 5. ed K:d5 6. K:d5 Ф:d5 7. Ce3 cd 8. K:d4 Фa5+ 9. c3. Дебютное сражение привело к упрощениям и примерному равенству. Однако черные решили проявить активность и тут же попались на тактический трюк.

9...K:d4 10. C:d4 e5? 11. Фh5!



Ферзь не только напал на пешку e5, но одновременно помешал ее соседке «f» прийти на помощь. В результате черные остаются без пешки (11...Cd6 12. f4).

11...Ce7 12. Ф:e5 Ф:e5+ 13. C:e5. Дальнейшее просто. Упорное сопротивление человека лишь оттягивает неизбежное. Техника реализации у машины достаточно высокая.

13...0—0 14. Cc4 Cd7 15. 0—0 Лac8 16. Cd5 Cc6 17. C:c6 Л:c6 18. Лfe1 f6 19. Cd4 Kpf7 20. Лe2 a6 21. Лae1 Cd6 22. g3 Лfc8 23. f4 b5 24. Kpg2 Cf8 25. Kpf3 Cd6 26. g4 g6 27. Лe6 Cc5 28. f5 Л:e6 29. Л:e6 C:d4 30. cd Лc2 31. Л:a6 Л:h2 32. Лa7+ Kpe8 33. Kpe4 Л:b2 34. Л:h7 Л:a2 35. fg b4 36. Лh8+. Черные сдались.

Увлекательно протекала следующая партия, в которой против машины играл международный мастер из Германии.

Тиннус — «Мефисто»
Каталонское начало

1. d4 Kf6 2. c4 e6 3. Kf3 d5 4. g3 Ce7 5. Cg2 0—0 6. Kc3 dc 7. Ke5 c5 8. dc C:c5 9. 0—0 Фc7. Белые не торопятся отыгрывать пешку, и черные косвенно защищают ее.

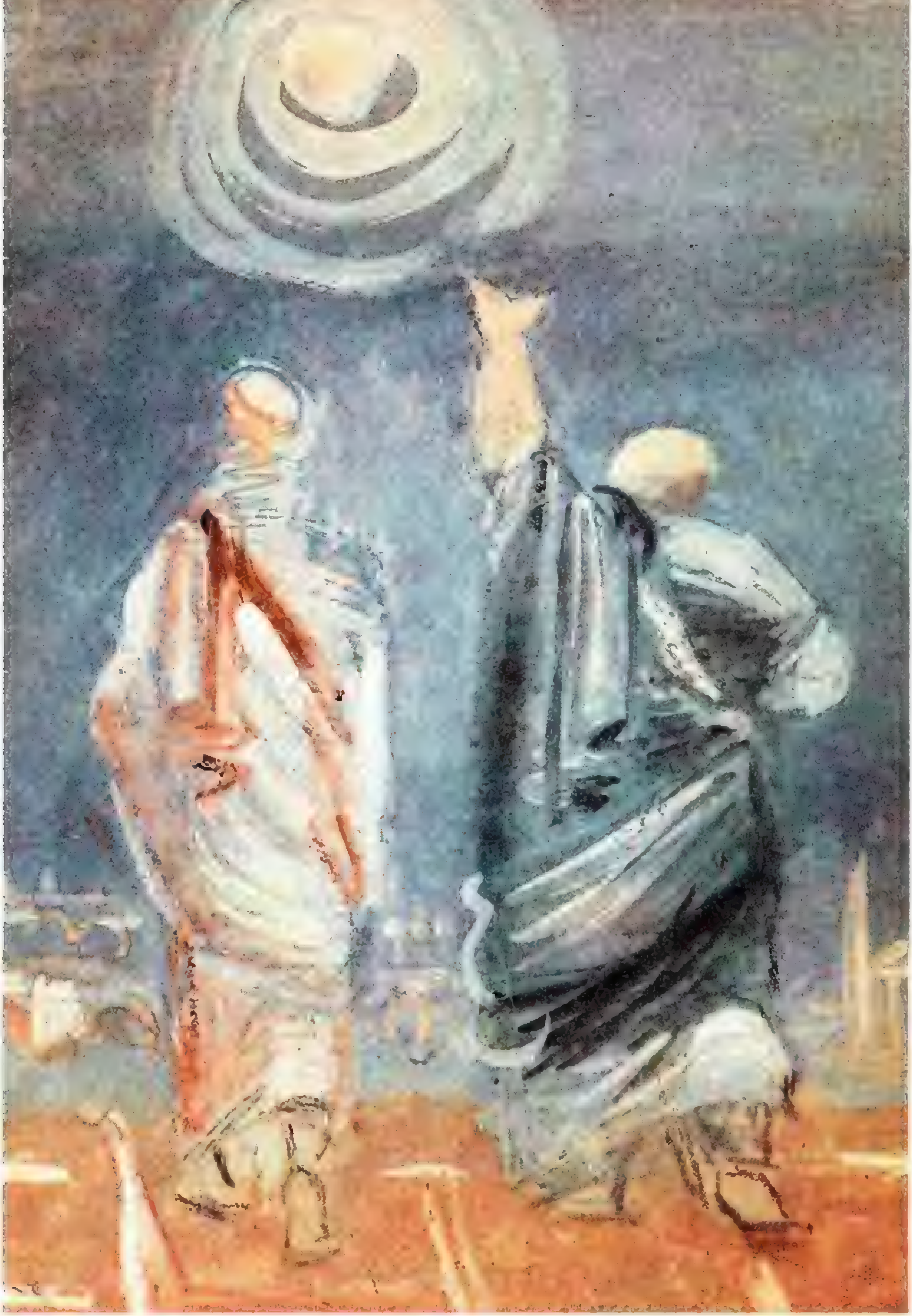
10. K:c4 C:f2+ 11. Л:f2 Ф:c4 12. Л:f6! Видимо, на этот удар и рассчитывали белые: вслед за пешкой они жертвуют и качество, но черный король теперь в опасности.

12...gf 13. Ch6 Kc6 14. e3 Лd8 15. Фh5 e5 16. Ke4 Фe6 17. Фh4 Kph8 18. K:f6 Ke7 19. Лf1. После 19. Cf8! машина попадала а безвыходное положение. Но белые делают напрашивающийся ход, и «Мефисто» отбивает атаку.

19...Kg6 20. Фh5 Лg8 21. Cg5. Кажется, что черным несдобровать, но «Мефисто» умело разбирается в тактических осложнениях и берет верх.

21...Лg7 22. Фh6 Kf8 23. Лd1 Фf5 24. Лd8 Фb1+ 25. Kpf2 Ф:b2+ 26. Kpg1 Фb1+ 27. Kpf2 Ф:a2+ 28. Kpg1 Фb1+ 29. Kpf2 Фc2+ 30. Kpg1 Ch3! 31. Л:f8+ Л:f8 32. C:h3 Лd8. Белые сдались.

Е. Гик



1 р. 10 к.

Индекс 70465

НОВОГОДНЕЕ ПОЗДРАВЛЕНИЕ

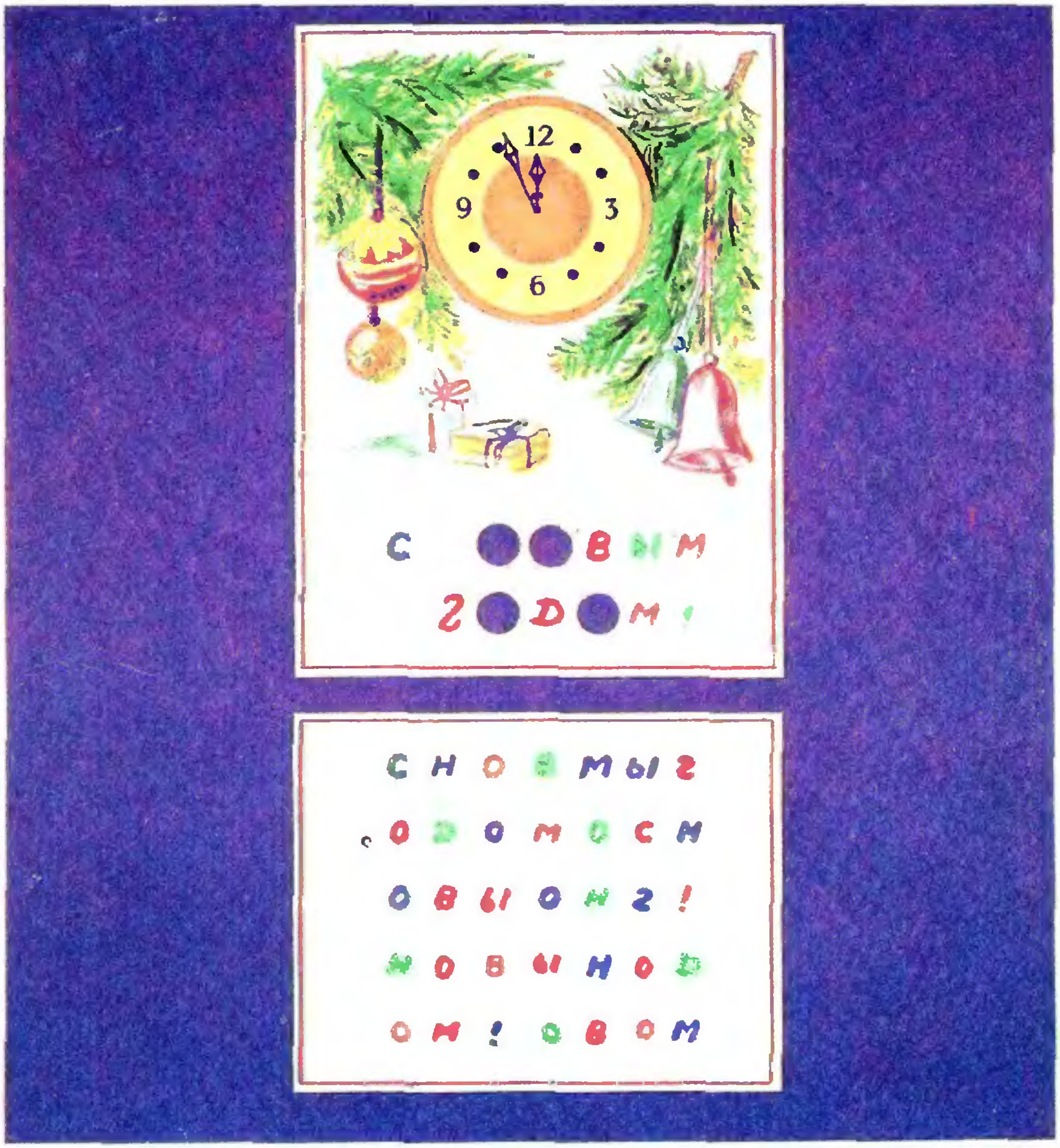
На открытке, которую вы видите на рисунке, не хватает четырех букв. Но зато на карточке, которая расположена внизу, этих букв более чем достаточно. Задача головоломки — совместить отверстия на открытке и карточку с буквами так, чтобы полностью прочитать новогоднее поздравление.

Прежде чем вырезать открытку, ответьте на вопрос: сколько существует вариантов взаимного расположения открытки и карточки, таких, чтобы во всех отверстиях были видны буквы, хотя бы и неправильные?

Не в наших правилах подсказывать, но ради праздника сделаем исключение. Если вы думаете, что таких вариантов 20, вам никогда не справиться с этой головоломкой.

Желаем удачи!

А. Калинин


12
3
6
9
С ВЫМ
Г Д М !
С Н О В М Ы Г
О Д О М О С Н
О В Ы О Н Г !
Н О В Ы Н О Д
О М ! О В О М